

IPhO 2017

Теоретические задачи и решения · Джокьякарта, Индонезия · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipro/2017/

Задача 1: Тёмная материя

Первое количественное обоснование существования тёмной материи было дано Фрицем Цвикки на основе его наблюдений за динамикой скопления галактик Волосы Вероники, состоящего примерно из тысячи галактик. Цвикки использовал теорему вириала для оценки массы скопления галактик. В простой системе «Солнце — планета», в которой планета обращается вокруг Солнца по круговой орбите, теорема вириала устанавливает точное соотношение между кинетической энергией планеты и её гравитационной потенциальной энергией. В общем случае системы многих частиц, связанных некоторым взаимодействием, теорема вириала связывает среднюю по времени полную кинетическую энергию со средней по времени полной потенциальной энергией.

В 1933 году, основываясь на наблюдениях скоростей галактик вблизи края скопления Волосы Вероники, Цвикки установил, что масса скопления превышает массу его видимого вещества (то есть галактик). Гравитационное притяжение наблюдаемого вещества (галактик) было слишком слабым, чтобы объяснить скорости галактик. Следовательно, должна существовать некоторая скрытая масса, объясняющая столь большие скорости. Эта скрытая масса и есть масса тёмной материи. Далее считайте, что масса каждой галактики равна сумме её видимой массы и массы тёмной материи, движущейся вместе с этой галактикой, а тёмная материя взаимодействует с видимым веществом только гравитационно.

А. Скопление галактик

Рассмотрим скопление, состоящее из большого числа N галактик и тёмной материи, равномерно распределённых в шаре радиуса R ; полная масса скопления (галактик и тёмной материи) равна M . Считайте, что средняя полная масса галактики (видимого вещества и тёмной материи) равна m .

A.1	Считая распределение вещества в скоплении непрерывным, найдите полную гравитационную потенциальную энергию скопления через M и R .	1.0 балла
-----	--	-----------

Вследствие космологического расширения любой удалённый объект удаляется от наблюдателя на Земле со скоростью, зависящей от расстояния между наблюдателем и объектом. Наблюдаемая частота некоторой линии серии Лаймана (спектральной линии излучения водорода) в спектре сверхновой типа Ia в i -й галактике скопления равна f_i , где $i = 1, \dots, N$, а частота той же линии серии Лаймана на Земле равна f_0 .

A.2	Определите среднюю скорость V_{cr} удаления всего скопления галактик от Земли через f_i (где $i = 1, \dots, N$), f_0 и N . Учтите, что скорость галактики очень мала по	0.5 балла
-----	--	-----------

	сравнению со скоростью света c .	
A.3	Считая распределение скоростей галактик относительно центра скопления изотропным (одинаковым во всех направлениях), определите среднеквадратичную скорость v_{rms} галактик относительно центра скопления через N , f_i (где $i = 1, \dots, N$) и f_0 . Используя этот результат, определите среднюю кинетическую энергию галактики относительно центра скопления через v_{rms} и m .	1.5 балла

Для нахождения полной массы скопления можно использовать теорему вириала. Эта теорема утверждает, что для системы частиц, связанных консервативными силами,

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

где $\langle K \rangle_t$ — средняя по времени полная кинетическая энергия, $\langle U \rangle_t$ — средняя по времени полная потенциальная энергия, а γ — постоянная. Эту теорему можно вывести, предполагая, что для системы частиц, связанных собственным взаимодействием, модули радиус-вектора и импульса каждой частицы ограничены, а следовательно, величина

$$\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

также ограничена.

A.4	Используя тот факт, что среднее по времени за длительный промежуток времени значение $d\Gamma/dt$ равно нулю, $\langle d\Gamma/dt \rangle_t = 0$, определите γ в приведённой выше теореме вириала для случая гравитационного взаимодействия. (Подсказка: попробуйте решить задачу, выполнив суммирование в Γ для небольшого конечного числа галактик.)	1.7 балла
A.5	Используя предыдущие результаты, определите полную массу тёмной материи в скоплении через N , m_g , R и v_{rms} , где m_g — средняя полная видимая масса галактики. Учтите, что среднеквадратичная скорость тёмной материи такая же, как у галактик.	0.5 балла

B. Тёмная материя в галактике

Тёмная материя также существует внутри галактики и вокруг неё. Рассмотрим сферическую галактику с радиусом видимой границы R_g (приблизительным максимальным расстоянием, на котором ещё видно большое число звёзд; однако учтите, что очень небольшое число звёзд может находиться и за пределами R_g). Считайте звёзды в галактике точечными частицами со средней массой m_s . Предполагается, что звёзды в галактике, равномерно распределённые с концентрацией n , движутся по круговым орбитам.

B.1	Если галактика состоит только из звёзд, найдите скорость $v(r)$ звезды как функцию её расстояния до центра галактики и схематически изобразите график $v(r)$ для $r < R_g$ и $r \geq R_g$.	0.8 балла
-----	---	--------------

О существовании тёмной материи можно судить по кривой вращения галактики — графику $v(r)$, полученному из наблюдений. На рисунке ниже показан типичный вид кривой вращения галактики. Для упрощения можно считать, что $v(r)$ — линейная функция при $r \leq R_g$ и постоянная величина v_0 при $r > R_g$.

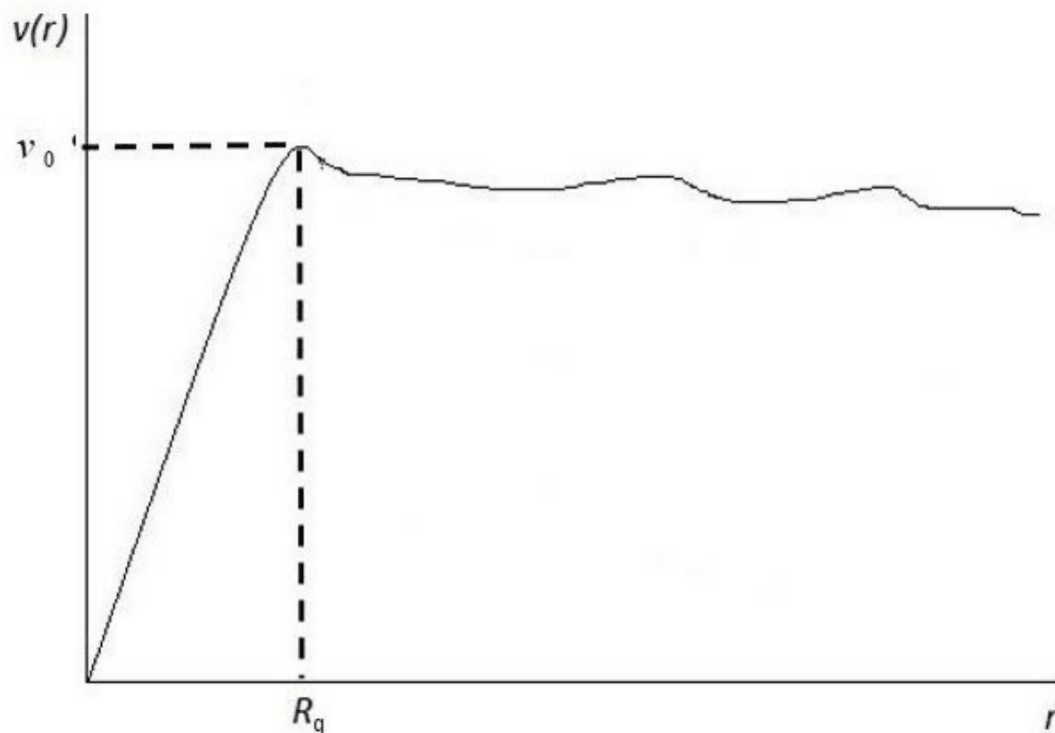


Рис. 1 График кривой вращения галактики.

В.2	Найдите полную массу m_R той части галактики, которая находится внутри сферы радиуса R_g , через v_0 и R_g .	0.5 балла
-----	--	--------------

Несоответствие между рисунком в В.2. и графиком, полученным в В.1, указывает на существование тёмной материи.

В.3	Определите плотность массы тёмной материи как функцию r , R_g , v_0 , n и m_s для $r < R_g$ и $r \geq R_g$.	1.5 балла
-----	--	--------------

С. Межзвёздный газ и тёмная материя

Теперь рассмотрим молодую галактику, основную часть массы которой составляют межзвёздный газ и тёмная материя (массой звёзд пренебрегите). Предполагается, что межзвёздный газ состоит из одинаковых частиц массы m_p . Концентрация $n(r)$ и температура $T(r)$ газа зависят от расстояния до центра галактики r . Хотя в газе протекает множество физических процессов, можно считать, что газ находится в гидростатическом равновесии под действием сил давления и гравитационного притяжения галактики.

С.1	Найдите градиент давления газа dP/dr через $m'(r)$, r и $n(r)$. Здесь $m'(r)$ — полная масса газа и тёмной материи внутри сферы радиуса r с центром в центре галактики.	0.5 балла
С.2	Считая межзвёздный газ идеальным, найдите $m'(r)$ через $n(r)$, $T(r)$ и их производные по r .	0.5 балла

Далее для простоты предположим, что распределение газа изотермическое с температурой T_0 , а концентрация межзвёздного газа задаётся выражением

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2},$$

где α и β — некоторые постоянные.

С.3 Найдите плотность массы тёмной материи как функцию r внутри галактики. 1.0 балла

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Пусть

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i.$$

Здесь G — гравитационная постоянная, а k_B — постоянная Больцмана. В результатах, полученных из эффекта Доплера, сохранены члены первого порядка по отношению скорости к c .

• A.1

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}.$$

• A.2

$$V_{cr} \simeq c \left(1 - \frac{\bar{f}}{f_0} \right).$$

• A.3

$$v_{rms} \simeq \frac{c}{f_0} \sqrt{\frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2}, \quad \langle K_{gal} \rangle = \frac{1}{2} m v_{rms}^2.$$

• A.4

$$\gamma = \frac{1}{2}.$$

• A.5

$$M_{DM} = \frac{5Rv_{rms}^2}{3G} - Nm_g.$$

• B.1

$$v(r) = \begin{cases} r \sqrt{\frac{4\pi G n m_s}{3}}, & 0 \leq r < R_g, \\ \sqrt{\frac{4\pi G n m_s R_g^3}{3r}}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

График линейно возрастает от начала координат до максимума при R_g , затем убывает как $r^{-1/2}$, стремясь к нулю.

• B.2

$$m_R = \frac{v_0^2 R_g}{G}.$$

• B.3

$$\rho_{DM}(r) = \begin{cases} \frac{3v_0^2}{4\pi G R_g^2} - n m_s, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2}{4\pi G r^2}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

• C.1

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G m'(r) m_p n(r)}{r^2}.$$

• C.2

$$m'(r) = - \frac{k_B r^2}{G m_p} \left[\frac{dT}{dr} + \frac{T(r)}{n(r)} \frac{dn}{dr} \right].$$

• C.3

$$\rho_{DM}(r) = \frac{k_B T_0 (\beta^2 + 6\beta r + 3r^2)}{4\pi G m_p r^2 (\beta + r)^2} - \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2} \quad (r > 0).$$

Решение

A.1

Выберем нуль гравитационной потенциальной энергии так, чтобы она была равна нулю, когда вся масса рассеяна на бесконечности. Постоянная плотность массы и масса внутри сферы радиуса r равны

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}, \quad M(r) = \frac{4\pi}{3} \rho r^3 = M \frac{r^3}{R^3}.$$

Соберём шар, последовательно принося из бесконечности тонкие сферические слои. Слой массы

$$dM = 4\pi r^2 \rho dr = \frac{3Mr^2}{R^3} dr$$

имеет энергию взаимодействия с уже собранной внутренней массой

$$dU = -\frac{GM(r)}{r} dM.$$

При таком построении каждое парное взаимодействие учитывается один раз. Поэтому

$$U = -\int_0^R \frac{G}{r} \left(\frac{Mr^3}{R^3} \right) \left(\frac{3Mr^2}{R^3} \right) dr = -\frac{3GM^2}{R^6} \frac{R^5}{5}.$$

Таким образом,

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}.$$

A.2

Пусть u_i — лучевая скорость галактики i относительно Земли, положительная при удалении. При $u_i \ll c$ формула Доплера в первом порядке имеет вид

$$f_i \simeq f_0 \left(1 - \frac{u_i}{c} \right),$$

откуда

$$u_i \simeq c \frac{f_0 - f_i}{f_0}.$$

В системе отсчёта покоя скопления среднее значение внутренних скоростей равно нулю.

Поэтому скорость удаления скопления равна среднему этих измеренных лучевых скоростей:

$$V_{cr} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \simeq \frac{c}{Nf_0} \sum_{i=1}^N (f_0 - f_i).$$

Следовательно,

$$V_{cr} \simeq c \left(1 - \frac{1}{Nf_0} \sum_{i=1}^N f_i \right) = c \left(1 - \frac{\bar{f}}{f_0} \right).$$

A.3

Проекция скорости галактики i относительно центра скопления на луч зрения равна

$$w_i = u_i - V_{cr} \simeq -\frac{c}{f_0} (f_i - \bar{f}).$$

При изотропном распределении скоростей средний квадрат скорости поровну распределён между тремя взаимно перпендикулярными направлениями:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle.$$

Направив ось z вдоль луча зрения, получаем

$$v_{rms}^2 = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = 3\langle w^2 \rangle = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N w_i^2.$$

Таким образом,

$$v_{rms} \simeq \frac{c}{f_0} \sqrt{\frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2}.$$

Эквивалентная запись:

$$v_{rms}^2 \simeq \frac{3c^2}{f_0^2} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i \right)^2 \right].$$

Используя среднюю полную массу галактики m , получаем среднюю кинетическую энергию в системе отсчёта покоя скопления:

$$\langle K_{gal} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m v_{rms}^2.$$

A.4

Будем работать в системе отсчёта центра масс. Дифференцируя заданную величину, получаем

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i + \vec{p}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2K.$$

Пусть $\vec{F}_{ij}$ — сила, действующая на частицу i со стороны частицы j . Третий закон Ньютона позволяет сгруппировать слагаемые с силами по неупорядоченным парам:

$$\sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = \sum_{i < j} (\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \cdot \vec{F}_{ji}) = \sum_{i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{F}_{ij}.$$

Для ньютоновского гравитационного взаимодействия

$$\vec{F}_{ij} = -Gm_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}^3}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|.$$

Поэтому

$$\sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = - \sum_{i < j} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} = U,$$

где U — полная потенциальная энергия попарных гравитационных взаимодействий. Отсюда следует, что

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 2K + U.$$

Поскольку Γ остаётся ограниченной,

$$\left\langle \frac{d\Gamma}{dt} \right\rangle_t = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(t + \tau) - \Gamma(t)}{\tau} = 0.$$

Следовательно, усреднение по времени даёт

$$2\langle K \rangle_t + \langle U \rangle_t = 0, \quad \langle K \rangle_t = -\frac{1}{2} \langle U \rangle_t.$$

Сравнивая с приведённой формулировкой теоремы, получаем

$$\gamma = \frac{1}{2}.$$

A.5

Будем считать, что скопление находится в стационарном вириальном равновесии, так что его наблюдаемые макроскопические характеристики соответствуют средним по времени значениям. Поскольку тёмная материя и галактики имеют одинаковую среднеквадратичную скорость, полная кинетическая энергия равна

$$K = \frac{1}{2} M v_{rms}^2.$$

Объединяя теорему вириала с результатом A.1, получаем

$$2K = -U \implies M v_{rms}^2 = \frac{3GM^2}{5R}.$$

При $M > 0$

$$M = \frac{5R v_{rms}^2}{3G}.$$

Полная видимая масса равна Nm_g . Вычитая её из полной массы, получаем

$$M_{DM} = \frac{5R v_{rms}^2}{3G} - Nm_g.$$

B.1

Плотность массы звёзд равна

$$\rho_\star = n m_s.$$

Пренебрежём суммарной массой редких звёзд за пределами R_g , сохранив их в качестве пробных частиц, по орбитам которых можно исследовать внешнее гравитационное поле. Тогда масса звёзд внутри сферы равна

$$M_\star(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} n m_s r^3, & r < R_g, \\ \frac{4\pi}{3} n m_s R_g^3, & r \geq R_g. \end{cases}$$

По теореме о сферическом слое вклад в гравитационное ускорение на расстоянии r даёт только масса внутри сферы этого радиуса. Приравнявая это ускорение центростремительному, получаем

$$\frac{v(r)^2}{r} = \frac{GM_\star(r)}{r^2}, \quad v(r)^2 = \frac{GM_\star(r)}{r}.$$

Таким образом,

$$v(r) = \begin{cases} r \sqrt{\frac{4\pi G n m_s}{3}}, & 0 \leq r < R_g, \\ \sqrt{\frac{4\pi G n m_s R_g^3}{3r}}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Для схематического построения графика введём

$$v_g = R_g \sqrt{\frac{4\pi G n m_s}{3}}.$$

Кривая представляет собой отрезок прямой от $(0, 0)$ до (R_g, v_g) . Она непрерывна и достигает максимума в этой точке. За пределами R_g она задаётся выражением

$$v(r) = v_g \sqrt{\frac{R_g}{r}},$$

убывая и приближаясь к горизонтальной асимптоте $v = 0$.

В.2

При $r = R_g$ наблюдаемая скорость движения по круговой орбите равна v_0 . Условие движения по круговой орбите даёт

$$\frac{v_0^2}{R_g} = \frac{G m_R}{R_g^2}.$$

Следовательно, полная масса внутри сферы, включая тёмную материю, равна

$$m_R = \frac{v_0^2 R_g}{G}.$$

В.3

Для любого сферически симметричного распределения массы, исследуемого по круговым орбитам,

$$M_{\text{enc}}(r) = \frac{r v(r)^2}{G}.$$

Заданное приближение наблюдаемой кривой вращения имеет вид

$$v(r) = \begin{cases} v_0 r / R_g, & r < R_g, \\ v_0, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Отсюда

$$M_{\text{enc}}(r) = \begin{cases} \frac{v_0^2 r^3}{G R_g^2}, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2 r}{G}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Масса сферического слоя равна $dM_{\text{enc}} = 4\pi r^2 \rho_{\text{tot}} dr$, поэтому

$$\rho_{\text{tot}}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM_{\text{enc}}}{dr} = \begin{cases} \frac{3v_0^2}{4\pi G R_g^2}, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2}{4\pi G r^2}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Вычитая плотность массы звёзд $n m_s$ внутри видимой границы и пренебрегая плотностью массы звёзд за её пределами, получаем

$$\rho_{\text{DM}}(r) = \begin{cases} \frac{3v_0^2}{4\pi G R_g^2} - nm_s, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2}{4\pi G r^2}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Масса внутри сферы непрерывна при R_g , хотя в этой идеализированной модели плотность в данной точке может изменяться скачком.

C.1

Здесь $m'(r)$ обозначает массу внутри сферы, указанную в условии; штрих является частью обозначения, а не знаком производной.

Рассмотрим малый элемент газа радиальной толщины dr с площадью поперечного сечения dA . Его масса равна

$$dm = m_p n(r) dA dr.$$

Результирующая сила давления, направленная наружу, равна

$$dF_P = -\frac{dP}{dr} dA dr.$$

Модуль направленной внутрь силы тяжести равен

$$dF_G = \frac{Gm'(r)}{r^2} m_p n(r) dA dr.$$

Для гидростатического равновесия необходимо, чтобы эти силы уравнивали друг друга. Поэтому

$$\left[\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm'(r)m_p n(r)}{r^2} \right].$$

Знак минус выражает уменьшение давления при удалении от центра, необходимое для противодействия направленной внутрь силе тяжести, действующей на газ.

C.2

Для идеального газа

$$P(r) = n(r)k_B T(r).$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{dP}{dr} = k_B \left[T(r) \frac{dn}{dr} + n(r) \frac{dT}{dr} \right].$$

Подставляя в уравнение гидростатического равновесия и выражая массу внутри сферы, получаем

$$m'(r) = -\frac{k_B r^2}{Gm_p n(r)} \left[T(r) \frac{dn}{dr} + n(r) \frac{dT}{dr} \right].$$

Таким образом,

$$\left[m'(r) = -\frac{k_B r^2}{Gm_p} \left[\frac{dT}{dr} + \frac{T(r)}{n(r)} \frac{dn}{dr} \right] \right].$$

Эквивалентная форма записи:

$$m'(r) = -\frac{k_B T(r)r}{Gm_p} \left[\frac{d \ln n}{d \ln r} + \frac{d \ln T}{d \ln r} \right].$$

С.3

Для изотермического газа $T(r) = T_0$, поэтому результат С.2 принимает вид

$$m'(r) = -\frac{k_B T_0 r^2}{Gm_p} \frac{d \ln n}{dr}.$$

Заданная концентрация удовлетворяет соотношению

$$\ln n = \ln \alpha - \ln r - 2 \ln(\beta + r),$$

и, следовательно,

$$\frac{d \ln n}{dr} = -\frac{1}{r} - \frac{2}{\beta + r}.$$

Таким образом, полная масса внутри сферы равна

$$m'(r) = \frac{k_B T_0}{Gm_p} \left(r + \frac{2r^2}{\beta + r} \right) = \frac{k_B T_0}{Gm_p} \frac{r(\beta + 3r)}{\beta + r}.$$

Продифференцируем эту массу внутри сферы:

$$\frac{d m'(r)}{dr} = \frac{k_B T_0}{Gm_p} \frac{\beta^2 + 6\beta r + 3r^2}{(\beta + r)^2}.$$

Тогда полная плотность массы равна

$$\rho_{\text{tot}}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d m'(r)}{dr} = \frac{k_B T_0 (\beta^2 + 6\beta r + 3r^2)}{4\pi Gm_p r^2 (\beta + r)^2}.$$

Плотность массы газа равна

$$\rho_{\text{gas}}(r) = m_p n(r) = \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2}.$$

Вычитая её из полной плотности, получаем

$$\boxed{\rho_{\text{DM}}(r) = \frac{k_B T_0 (\beta^2 + 6\beta r + 3r^2)}{4\pi Gm_p r^2 (\beta + r)^2} - \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2}} \quad (r > 0).$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Землетрясение, вулкан и цунами

Индонезия — настоящий супермаркет природных катастроф. В Индонезии происходили почти все виды природных катастроф, в том числе извержения вулканов, землетрясения и цунами.

А. Извержение вулкана Мерапи

Вулкан Мерапи в Джокьякарте — один из самых активных вулканов Явы. Характерной особенностью его извержений являются пирокластические потоки. Пирокластический поток представляет собой горячую смесь газа и обломков горных пород, движущуюся от вулкана. 26 октября 2010 года Мерапи проявил свой взрывной характер, выбросив столб пепла, достигший высоты 12 км (рис. 1), и породив пирокластические потоки, из-за которых более 20 000 жителей окрестностей вулкана были вынуждены покинуть свои дома.



(Fig. 1: Pyroclastic cloud during Merapi eruption, Courtesy of Volcanological Office of Yogyakarta, BPPTKG)

(Рис. 1: Пирокластическое облако во время извержения Мерапи. Предоставлено Вулканологической службой Джокьякарты, BPPTKG)

Рассмотрим причины крупнейшего извержения Мерапи в 2010 году. Геофизикам известно, что поступление внешней воды в магму играет важную роль во взрывном характере вулканических извержений (гидромагматических извержений). Будем рассматривать вулкан как систему, состоящую из смеси частиц магмы и воды. Стенки вулканических каналов и атмосфера образуют границу системы. Считается, что взрывное извержение происходит в две стадии: (1) мгновенное взаимодействие магмы и воды и (2) расширение системы. На первой стадии масса магмы (m_m) при абсолютной температуре (T_m) смешивается с массой внешней воды (m_w) при абсолютной температуре (T_w). Тепловое равновесие устанавливается практически мгновенно. Это взаимодействие можно рассматривать как процесс при почти постоянном объёме. Удельной теплотой испарения воды и удельной теплотой плавления магмы можно пренебречь.

A.1

Найдите равновесную температуру на первой стадии через массы и удельные теплоёмкости воды c_{Vw} и магмы c_{Vm} .

0.5
балла

А.2	Определите равновесное давление на первой стадии, предполагая, что смесь можно описать моделью идеального газа. Считайте, что молярный объём смеси равен v_e .	0.3 балла
-----	--	--------------

Расширение системы (вторая стадия) может происходить по нескольким сценариям, один из которых — тепловая детонация. Хотя этот процесс довольно сложен, относительную скорость извергаемой смеси можно измерить экспериментально. Скорость газа при извержении зависит от давления p , полной массы m и объёма V смеси в канале вулкана.

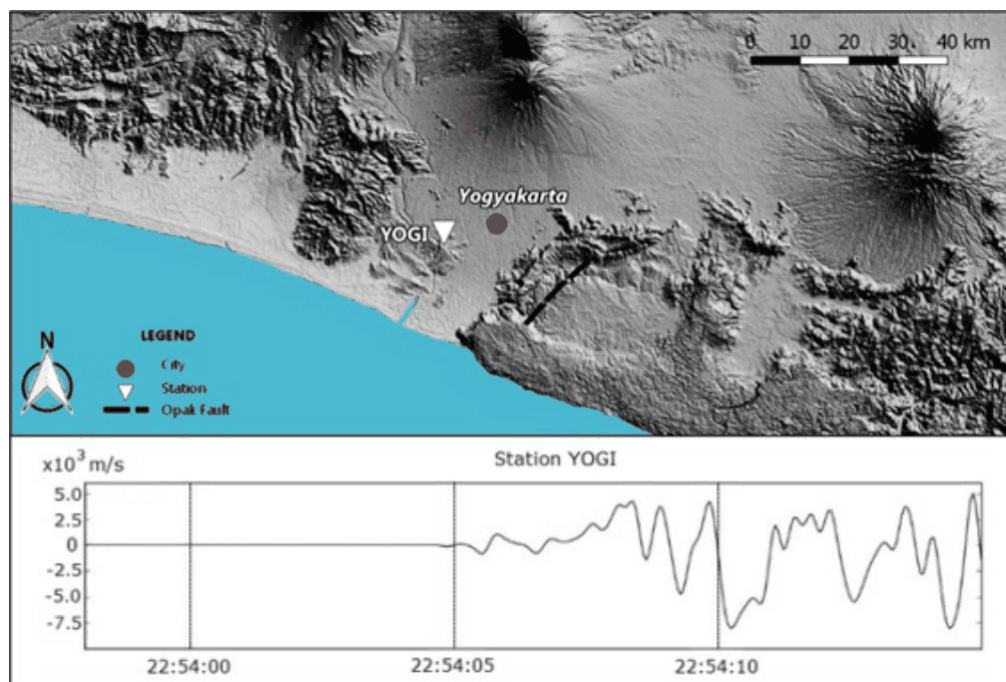
А.3	Выразите скорость газа при извержении через p , m и V с точностью до коэффициента пропорциональности κ .	0.5 балла
-----	---	--------------

Наблюдаемое давление составляет величину порядка 100 МПа. Поэтому (относительная) скорость извержения может достигать баллистической скорости.

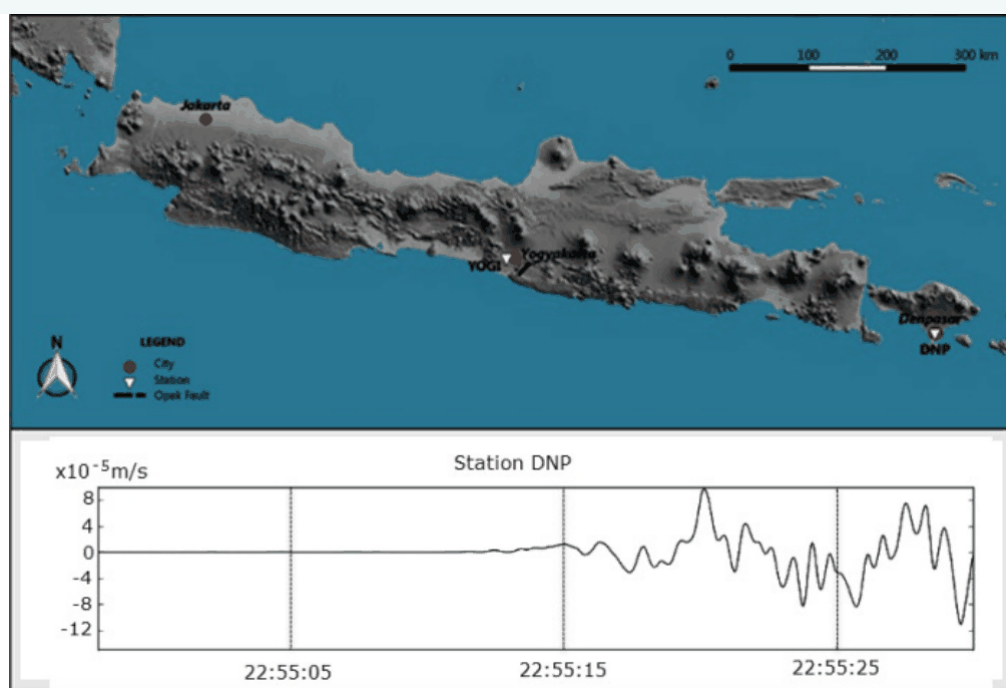
В. Землетрясение в Джокьякарте

Землетрясение 2006 года в Джокьякарте магнитудой $M_w = 6.4$, разрушившее множество зданий в районах Бантул и Джокьякарта, произошло в 05:54:00.00 по местному времени, или в 22:54:00.00 UTC. Землетрясение было вызвано внезапным смещением участка разлома Опак (см. рис. 2). Гипоцентр находился на глубине 15 км под поверхностью.

Сейсмическую волну, распространяющуюся в земной коре, можно зарегистрировать с помощью сейсмометра. Запись сейсмометра называется сейсмограммой (нижние графики на рис. 2 и 3). Эти сейсмограммы показывают зависимость вертикальной скорости грунта от времени, зарегистрированную сейсмическими станциями Гампинг в Джокьякарте (YOGI) (рис. 2) и Денпасар на Бали (DNP) (рис. 3). В общем случае различают три типа сейсмических волн: продольные, или первичные (P -волны), поперечные, или вторичные (S -волны), и поверхностные волны. P -волны и S -волны распространяются в недрах Земли, а поверхностные волны — вдоль её поверхности. Сейсмические волны, проходящие через недра к станциям, можно разделить на распространяющиеся по прямой, отражающиеся от границы слоя и преломляющиеся в следующий слой. Продольная, или первичная, волна имеет наибольшую скорость, а поверхностная — наименьшую, составляющую около 60% скорости P -волны.



(Рис. 2: Карта расположения YOGI)



(Рис. 3: Карта расположения DNP (Денпасар))

Расстояния от эпицентра (проекция гипоцентра на поверхность Земли) до станций YOGI и DNP равны соответственно 22.5 км и 500 км. Толщина земной коры на Яве, Индонезия, составляет 30 км. Под земной корой находится слой мантии Земли. Как и другие волны, сейсмические волны подчиняются закону Снеллиуса. Сейсмическая волна также может отражаться от слоя мантии. В этой задаче кривизной Земли пренебрегаем.

В.1	На рис. 2 приведена сейсмограмма станции YOGI. Используя эти данные, найдите скорость P -волны в земной коре.	0.5 балла
-----	---	-----------

B.2	Найдите время распространения прямой P -волны и отражённой волны, возникших при землетрясении в Джокьякарте и достигших станции DNP в Денпасаре.	0.6 балла
-----	--	-----------

Предположим, что Земля состоит только из двух слоёв: коры и мантии; первичная волна распространяется в коре и мантии с различными постоянными скоростями. Скорость в мантии больше скорости в коре. Обратите внимание, что P -волна, преломившаяся в мантию под прямым углом (90°), частично преломляется обратно в кору на всём пути своего распространения вдоль границы коры и мантии.

B.3	Найдите скорость P -волны в мантии.	1.2 балла
-----	---------------------------------------	-----------

Для более реалистичного описания строения Земли кору можно разделить на множество тонких слоёв так, чтобы скорость сейсмической волны зависела от глубины z по закону $v(z) = v_0 + az$, где a — постоянная, а гипоцентр приближённо считался расположенным на поверхности. В этой модели волновой луч искривляется.

B.4	Определим лучевой параметр $p = \sin \theta(z)/v(z)$, где $\theta(z)$ — угол между лучом и нормалью. Пусть на станцию приходит сейсмическая волна с лучевым параметром p ; выразите расстояние до гипоцентра через p , v_0 и a . Считайте, что гипоцентр расположен очень близко к поверхности Земли.	1.4 балла
B.5	Найдите время распространения T от гипоцентра до произвольной станции в виде интеграла по z .	1.0 балла

Земля состоит из последовательности однородных слоёв, скорость в каждом из которых равна v_i , а толщина — δz_i .

B.6	Используя результат предыдущего пункта, приближённо вычислите время распространения (T) от гипоцентра до станции DNP, считая, что кора состоит только из трёх дискретных слоёв, ($i = 1, 2, 3$), с параметрами $v_1 = 6.65$ км/с, $v_2 = 6.97$ км/с, $v_3 = 6.99$ км/с, $p = 0.143$ с/км, $\delta z_1 = 6.0$ км, $\delta z_2 = 9.0$ км, $\delta z_3 = 15$ км.	1.0 балла
-----	---	-----------

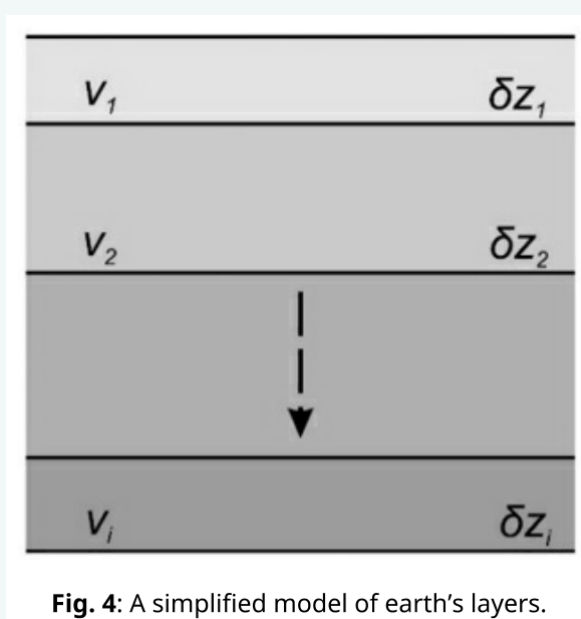


Fig. 4: A simplified model of earth's layers.

Рис. 4: Упрощённая модель слоёв Земли.

С. Цунами на Яве

Землетрясение и цунами 2006 года в Пангандаране произошли 17 июля в 15:19:27 по местному времени у побережья западной и центральной Явы. При землетрясении, у которого разлом в области эпицентра находится на океанском дне, смещение по разлому может породить чрезвычайно большую водяную волну, называемую цунами. Иными словами, цунами — это волна на мелкой воде, которая первоначально имеет малую амплитуду, но чрезвычайно большую длину волны. Рассмотрим внезапное смещение по разлому, вызывающее поднятие части океанского дна, как показано на рис. 5.

Предположим, что энергия землетрясения превращается в потенциальную энергию поднятой океанской воды. В простой модели приближённо считаем, что поднятая вода имеет форму прямоугольного параллелепипеда с площадью основания $\lambda L/2$ (где $L \gg \lambda$) и высотой h .

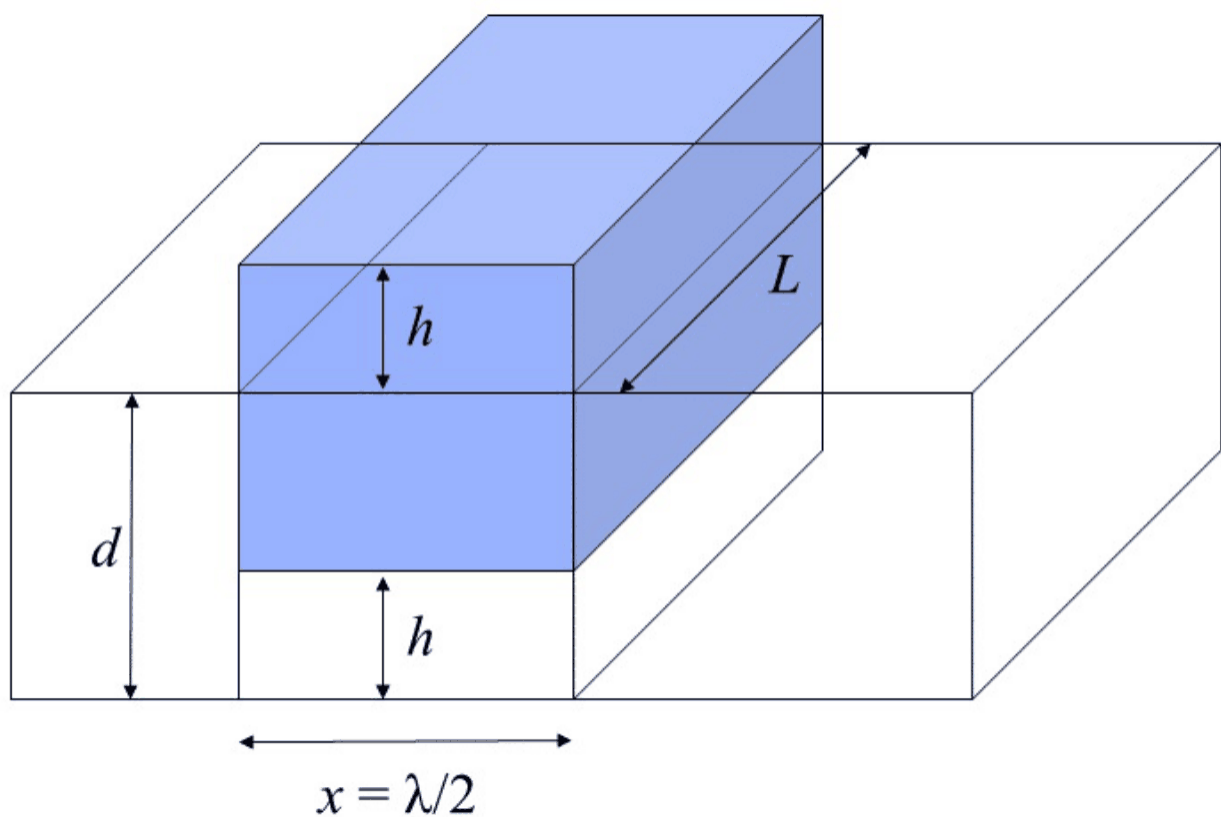


Рис. 5: Иллюстрация волны цунами; d — глубина океана.

C.1	Найдите потенциальную энергию океанской воды, поднятой в результате землетрясения, относительно поверхности океана. Считайте, что плотность морской воды равна ρ .	0.5 балла
C.2	Найдите скорость волны цунами с точностью до безразмерного множителя.	1.2 балла
C.3	Используя энергетические соображения, определите амплитуду волны цунами как функцию глубины, предполагая, что глубина изменяется медленно, и зная, что на глубине d_0 амплитуда равна A_0 .	1.3 балла

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Используемые ниже отсчёты по сейсмограммам составляют приблизительно 5 s после землетрясения на станции YOGI и 72 s на станции DNP. Обозначим скорости в коре и мантии через v_c и v_m .

- **A.1:** $T_e = \frac{m_m c_{Vm} T_m + m_w c_{Vw} T_w}{m_m c_{Vm} + m_w c_{Vw}}.$
- **A.2:** $p_e = \frac{RT_e}{v_e}.$
- **A.3:** $u = \kappa \sqrt{\frac{pV}{m}}.$
- **B.1:** $v_c \simeq 5.4 \text{ km s}^{-1}.$
- **B.2:** $t_{\text{direct}} \simeq 92.5 \text{ s}, \quad t_{\text{reflected}} \simeq 92.8 \text{ s},$ оба значения приблизительно равны 93 s в пределах точности графика.
- **B.3:** $v_m \simeq 7.6 \text{ km s}^{-1}.$
- **B.4:** $X = \frac{2}{ap} \sqrt{1 - p^2 v_0^2},$ при условии $a > 0$ и $0 < p v_0 < 1.$
- **B.5:** $T = 2 \int_0^{z_t} \frac{dz}{v(z) \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}, \quad z_t = \frac{p^{-1} - v_0}{a}.$
- **B.6:** Непосредственная дискретизация даёт $T \simeq 1.84 \times 10^2 \text{ s}.$ Эта сумма по слоям геометрически не согласуется с заданным горизонтальным расстоянием 500 km, как объясняется ниже.
- **C.1:** $U = \frac{1}{4} \rho g \lambda L h^2.$
- **C.2:** $c = C \sqrt{gd},$ где C — безразмерный множитель; линейная теория мелкой воды даёт $C = 1.$
- **C.3:** $A(d) = A_0 \left(\frac{d_0}{d} \right)^{1/4}.$

Решение

A.1 — Равновесная температура

При быстром смешивании будем пренебрегать теплообменом с окружающей средой и работой при перемещении границы системы. Пренебрегая указанными теплотами фазовых переходов и считая теплоёмкости постоянными, из закона сохранения внутренней энергии получаем

$$m_m c_{Vm} (T_e - T_m) + m_w c_{Vw} (T_e - T_w) = 0.$$

Следовательно,

$$T_e = \frac{m_m c_{Vm} T_m + m_w c_{Vw} T_w}{m_m c_{Vm} + m_w c_{Vw}}.$$

Это среднее начальных температур с весами, равными теплоёмкостям двух компонентов.

A.2 — Равновесное давление

Для n молей смеси идеальных газов

$$p_e V = n R T_e.$$

Поскольку её молярный объём равен $v_e = V/n$,

$$p_e = \frac{R T_e}{v_e} = \frac{R}{v_e} \frac{m_m c_{Vm} T_m + m_w c_{Vw} T_w}{m_m c_{Vm} + m_w c_{Vw}}.$$

Здесь R — универсальная газовая постоянная.

А.3 — Скорость извержения

Предположим, как указано в условии, что скорость зависит только от p, m, V . Запишем

$$u = \kappa p^\alpha m^\beta V^\gamma.$$

Используя

$$[p] = M L^{-1} T^{-2}, \quad [m] = M, \quad [V] = L^3,$$

из условия согласованности размерностей получаем

$$\alpha + \beta = 0, \quad -\alpha + 3\gamma = 1, \quad -2\alpha = -1.$$

Поэтому

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2},$$

и

$$u = \kappa \sqrt{\frac{pV}{m}}.$$

Эквивалентная запись: $u = \kappa \sqrt{p/\rho_{\text{mix}}}$, где $\rho_{\text{mix}} = m/V$. Анализ размерностей не определяет κ .

В.1 — Скорость P -волны в коре

Пусть глубина источника равна $z_s = 15 \text{ km}$. Горизонтальное расстояние до YOGI составляет 22.5 km , поэтому расстояние по прямой от источника до станции равно

$$s_Y = \sqrt{22.5^2 + 15^2} = 27.04 \text{ km}.$$

Первое видимое отклонение от базовой линии на рис. 2 наблюдается приблизительно в 22:54:05 UTC. Относительно момента землетрясения 22:54:00 это даёт

$$t_Y \simeq 5 \text{ s}.$$

Следовательно,

$$v_c = \frac{s_Y}{t_Y} \simeq \frac{27.04}{5} \simeq 5.4 \text{ km s}^{-1}.$$

В приведённых ниже численных расчётах для промежуточных вычислений сохраняется значение 5.4083 km s^{-1} , хотя график не позволяет обосновать такое количество значащих цифр.

В.2 — Время распространения прямой и отражённой волн до DNP

Обозначим горизонтальное расстояние от источника до DNP через $X = 500 \text{ km}$, а толщину коры — через $H = 30 \text{ km}$.

Для прямой волны

$$s_{\text{direct}} = \sqrt{X^2 + z_s^2},$$

поэтому

$$t_{\text{direct}} = \frac{\sqrt{500^2 + 15^2}}{v_c} \simeq 92.5 \text{ s}.$$

Для отражения от горизонтальной границы коры и мантии зеркально отразим источник относительно плоскости $z = H$. Его изображение находится на глубине

$$z_{\text{image}} = 2H - z_s = 45 \text{ km}.$$

При разворачивании отражённого луча получается прямая линия от этого изображения до DNP. Следовательно,

$$s_{\text{reflected}} = \sqrt{X^2 + (2H - z_s)^2},$$

и

$$t_{\text{reflected}} = \frac{\sqrt{500^2 + 45^2}}{v_c} \simeq 92.8 \text{ s}.$$

Оба времени распространения составляют около 93 s; их вычисленная разность приблизительно равна 0.33 s.

В.3 — Скорость P -волны в мантии

Первое отклонение от горизонтальной базовой линии на рис. 3 наблюдается приблизительно в 22:55:12 UTC, что даёт

$$t_D \simeq 72 \text{ s}.$$

Это раньше рассчитанных выше моментов прихода прямой и отражённой волн, распространяющихся в коре. отождествим этот сигнал с критически преломлённой волной, которая распространяется вдоль границы мантии и излучается обратно в кору.

Пусть θ_c — критический угол, отсчитываемый от вертикали. Закон Снеллиуса даёт

$$\frac{\sin \theta_c}{v_c} = \frac{1}{v_m}, \quad \sin \theta_c = \frac{v_c}{v_m}.$$

На нисходящем участке луча в коре изменение глубины равно $H - z_s$, а на восходящем — H . Сумма модулей вертикальных перемещений составляет

$$K = (H - z_s) + H = 2H - z_s = 45 \text{ km}.$$

Поэтому суммарная длина этих участков и их горизонтальная проекция равны

$$s_{\text{crust}} = \frac{K}{\cos \theta_c}, \quad X_{\text{crust}} = K \tan \theta_c.$$

Расстояние, пройденное вдоль границы мантии, равно

$$X_{\text{mantle}} = X - K \tan \theta_c.$$

Таким образом,

$$t_D = \frac{K}{v_c \cos \theta_c} + \frac{X - K \tan \theta_c}{v_m}.$$

С учётом $\sin \theta_c = v_c/v_m$ это выражение упрощается до

$$t_D = \frac{X}{v_m} + \frac{K}{v_c} \sqrt{1 - \frac{v_c^2}{v_m^2}}.$$

Подставляя значение, считанное с графика, получаем

$$72 = \frac{500}{v_m} + \frac{45}{5.4083} \sqrt{1 - \left(\frac{5.4083}{v_m} \right)^2},$$

где расстояния выражены в километрах, а скорости — в километрах в секунду. Решение даёт

$$v_m \simeq 7.554 \text{ km s}^{-1},$$

или, с надлежащей точностью,

$$v_m \simeq 7.6 \text{ km s}^{-1}.$$

Для проверки: $\theta_c \simeq 45.7^\circ$, а длина участка вдоль мантии составляет приблизительно 454 km. Прохождение участков в коре занимает около 11.9 s, а участка вдоль мантии — около 60.1 s.

В.4 — Расстояние при непрерывно изменяющейся скорости

Направим ось z вниз, а ось x — горизонтально. Из закона Снеллиуса для тонких горизонтальных слоёв следует, что величина

$$p = \frac{\sin \theta(z)}{v(z)}$$

постоянна вдоль луча. Поэтому

$$\sin \theta(z) = pv(z), \quad \cos \theta(z) = \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}.$$

На нисходящем участке

$$\frac{dx}{dz} = \tan \theta(z) = \frac{pv(z)}{\sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}.$$

Для возвращающегося к поверхности луча в среде с $a > 0$ наибольшая глубина достигается там, где луч становится горизонтальным:

$$pv(z_t) = 1.$$

Поскольку $v(z) = v_0 + az$,

$$z_t = \frac{p^{-1} - v_0}{a}.$$

Если и источник, и приёмник приближённо считать расположенными на поверхности, нисходящая и восходящая части луча симметричны. Горизонтальное расстояние равно

$$X = 2 \int_0^{z_t} \frac{p(v_0 + az)}{\sqrt{1 - p^2(v_0 + az)^2}} dz.$$

Положим $u = p(v_0 + az)$, тогда $du = pa dz$. Получаем

$$X = \frac{2}{ap} \int_{pv_0}^1 \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} du.$$

Поскольку первообразная равна $-\sqrt{1 - u^2}$,

$$X = \frac{2}{ap} \sqrt{1 - p^2 v_0^2} = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{1}{p^2} - v_0^2}.$$

Для существования решения с возвращающимся лучом необходимо $0 < pv_0 < 1$.

В.5 — Интеграл для времени распространения

Прохождение участка луча длиной ds занимает время

$$dt = \frac{ds}{v(z)}.$$

Поскольку $|dz| = ds \cos \theta(z)$,

$$dt = \frac{|dz|}{v(z) \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}.$$

Учитывая как нисходящий, так и восходящий участки, получаем

$$T = 2 \int_0^{z_t} \frac{dz}{v(z) \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}.$$

Для линейного профиля скорости это выражение принимает вид

$$T = 2 \int_0^{(p^{-1} - v_0)/a} \frac{dz}{(v_0 + az) \sqrt{1 - p^2 (v_0 + az)^2}}.$$

Особенность в точке поворота интегрируема. Вычисление интеграла также даёт

$$T = \frac{2}{a} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - p^2 v_0^2}}{pv_0} \right).$$

Эквивалентная форма, полезная для анализа численного приближения в В.6, получается вычитанием pX :

$$\begin{aligned} T - pX &= 2 \int_0^{z_t} \left[\frac{1}{v \sqrt{1 - p^2 v^2}} - \frac{p^2 v}{\sqrt{1 - p^2 v^2}} \right] dz \\ &= 2 \int_0^{z_t} \sqrt{\frac{1}{v(z)^2} - p^2} dz. \end{aligned}$$

Следовательно, для геометрически согласованного луча

$$T = pX + 2 \int_0^{z_t} \sqrt{\frac{1}{v(z)^2} - p^2} dz.$$

В.6 — Трёхслойное приближение

Сохраняя приближение расположенного на поверхности источника из В.4–В.5, дискретизируем первый интеграл для времени распространения:

$$T \approx 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\delta z_i}{v_i \sqrt{1 - p^2 v_i^2}}.$$

Множитель два учитывает прохождение каждого слоя на нисходящем и восходящем участках луча.

Используя числа в точности в том виде, в котором они приведены в условии, получаем:

Слой i	pv_i	Вклад двух участков $\frac{2\delta z_i}{v_i \sqrt{1 - p^2 v_i^2}}$
1	0.95095	5.833 s
2	0.99671	31.863 s
3	0.99957	146.366 s

Таким образом, непосредственное суммирование по слоям даёт

$$T \approx 184.06 \text{ s} \simeq 1.84 \times 10^2 \text{ s}.$$

Интерпретация этого числа как времени распространения до DNP ограничена несогласованностью геометрии. Горизонтальное расстояние для того же дискретного луча составило бы

$$X_{\text{layers}} = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\delta z_i pv_i}{\sqrt{1 - p^2 v_i^2}} \simeq 1280.9 \text{ km},$$

что существенно отличается от 500 km.

Если вместо этого подставить заданное горизонтальное расстояние 500 km во вторую форму выражения из В.5 и приближённо вычислить её интеграл, получится формальная оценка

$$\begin{aligned} T &\approx p(500) + 2 \sum_{i=1}^3 \delta z_i \sqrt{\frac{1}{v_i^2} - p^2} \\ &= 71.5 + 0.8934 \\ &\approx 72.39 \text{ s}. \end{aligned}$$

Две формулы для непрерывной среды эквивалентны, однако эти грубые приближения не сохраняют необходимое соотношение для расстояния. Таким образом, 184 s — результат непосредственного суммирования времени распространения по слоям, а 72.4 s — оценка при фиксированном горизонтальном расстоянии. Оба значения не могут описывать один и тот же луч в буквальной трёхслойной модели с заданными параметрами.

С.1 — Потенциальная энергия поднятой воды

Пусть горизонтальная площадь основания поднятого параллелепипеда равна

$$S = \frac{\lambda L}{2}.$$

Примем невозмущённую поверхность океана за нулевой уровень гравитационного потенциала. Тогда горизонтальный слой толщиной dz на высоте z имеет массу $\rho S dz$. Следовательно,

$$U = \int_0^h \rho S g z \, dz = \frac{1}{2} \rho S g h^2.$$

Поэтому

$$U = \frac{1}{4} \rho g \lambda L h^2.$$

Эквивалентное рассуждение: вода над исходной поверхностью имеет массу $\rho S h$, а её центр масс находится на высоте $h/2$.

С.2 — Скорость цунами

Используем приближения мелкой воды и малой амплитуды:

$$\lambda \gg d, \quad h \ll d.$$

Тогда горизонтальная скорость жидкости приблизительно одинакова по всей глубине, а вертикальное распределение давления приближённо является гидростатическим.

Пусть $\eta(x, t)$ — смещение поверхности, а $u(x, t)$ — горизонтальная скорость жидкости. Закон сохранения объёма воды, линеаризованный относительно глубины d , даёт

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + d \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Горизонтальный градиент давления равен $\rho g \, \partial \eta / \partial x$. Поэтому второй закон Ньютона даёт

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Дифференцируя первое уравнение по времени и подставляя второе, получаем

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g d \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Это волновое уравнение, поэтому

$$c = \sqrt{g d}.$$

С точностью, требуемой в условии,

$$c = C \sqrt{g d},$$

где C — безразмерный множитель; приведённые предположения линейной теории мелкой воды дают $C = 1$. Плотность сокращается, поскольку она входит множителем как в инерционный член, так и в возвращающую силу тяжести.

С.3 — Амплитуда при изменении глубины

Предположим, что глубина меняется медленно, отражением и диссипацией можно пренебречь, а ширина волнового фронта постоянна. Поскольку $L \gg \lambda$, волну можно локально считать плоской.

Для синусоидального смещения поверхности с амплитудой A

$$\eta = A \cos(kx - \omega t), \quad \langle \eta^2 \rangle = \frac{A^2}{2}.$$

Средняя гравитационная потенциальная энергия на единицу горизонтальной площади равна

$$\bar{\mathcal{E}}_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \rho g \langle \eta^2 \rangle = \frac{1}{4} \rho g A^2.$$

Для бегущей волны на мелкой воде уравнение непрерывности даёт

$$u = \frac{c}{d} \eta.$$

Поэтому её средняя кинетическая энергия на единицу горизонтальной площади равна

$$\bar{\mathcal{E}}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \rho d \langle u^2 \rangle = \frac{\rho c^2 A^2}{4d} = \frac{1}{4} \rho g A^2.$$

Таким образом, полная средняя плотность энергии равна

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \rho g A^2.$$

Волны на мелкой воде не обладают дисперсией, поэтому их групповая скорость равна $c = \sqrt{gd}$. Из сохранения потока энергии на единицу ширины волнового фронта следует

$$\bar{\mathcal{E}} c = \text{постоянная},$$

или

$$A^2 \sqrt{d} = \text{постоянная}.$$

Используя опорную амплитуду A_0 на глубине d_0 , получаем

$$A^2 \sqrt{d} = A_0^2 \sqrt{d_0}.$$

Следовательно,

$$\boxed{A(d) = A_0 \left(\frac{d_0}{d} \right)^{1/4}}.$$

Это закон Грина. Для его применимости необходимы малая по сравнению с глубиной амплитуда и достаточно медленное изменение глубины; он не описывает последующее обрушение волн.

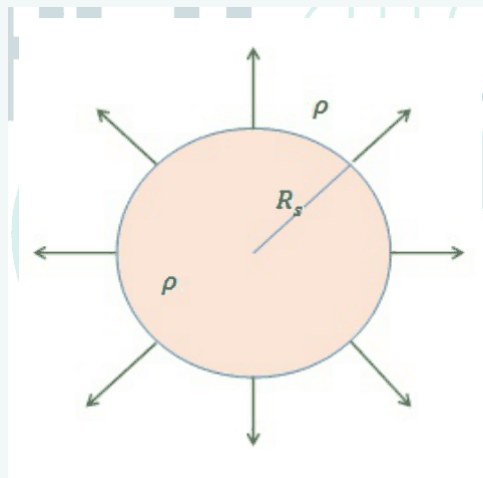
Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Космологическая инфляция

Из-за относительного движения галактик, наблюдаемого с Земли, длина волны видимого излучения отдельной галактики отличается от исходной длины волны; это явление известно как электромагнитный эффект Доплера. Для совокупности галактик можно было бы ожидать случайного распределения сдвигов длины волны: часть из них была бы положительной (красное смещение), а часть — отрицательной (синее смещение). Однако наблюдения показывают, что все галактики, за исключением одной близкой группы, имеют красное смещение. Это должно оставаться верным и при наблюдении из других точек Вселенной. Следовательно, наша Вселенная должна расширяться. С другой стороны, локальными неоднородностями Вселенной можно пренебречь на масштабах более 100 Мпк, где 1 пк = 3.26 светового года. При усреднении по большим масштабам неоднородное

распределение галактик становится всё более изотропным (не зависящим от направления) и однородным (не зависящим от положения). Поэтому можно считать, что Вселенная заполнена веществом с однородной плотностью массы ρ и расширяется.

А. Расширение Вселенной



В качестве простой модели нашей Вселенной рассмотрим расширяющийся шар однородной плотности, находящийся внутри гораздо большего шара с той же плотностью. Пусть в некоторый момент времени радиус меньшего шара равен R_s . Для описания расширения шара зависимость радиуса $R(t)$ от времени можно выразить через масштабный фактор $a(t)$, то есть $R(t) = a(t)R_s$.

Используя закон всемирного тяготения Ньютона для определения скорости элемента массы на границе шара в этой модели Вселенной, можно получить систему уравнений Фридмана:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1 \rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)} \quad (1)$$

где k — безразмерная постоянная, а c — скорость света.

Часть	Вопрос	Баллы
A.1	Определите постоянную A_1 в уравнении (1).	1.3 балла

До сих пор рассмотрение было нерелятивистским. Однако его можно распространить и на релятивистскую систему, понимая под $\rho(t)c^2$ полную плотность энергии (без учёта гравитационной потенциальной энергии). Для такой релятивистской системы второе уравнение Фридмана

$$\dot{\rho} + A_2 \left(\rho + \left(\frac{p}{c^2} \right) \right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (2)$$

выводится с помощью первого начала термодинамики для адиабатической системы, где p обозначает давление на шар.

Часть	Вопрос	Баллы
A.2	Определите постоянную A_2 в уравнении (2).	0.9 балла

Для решения уравнений (1) и (2) необходимо задать зависимость $p = p(\rho)$, например $p(t)/c^2 = w\rho(t)$, где w — постоянная. Вводится также величина $H = \dot{a}/a$, называемая параметром Хаббла. Современные значения параметров обычно обозначают нижним индексом 0, например t_0, ρ_0, H_0, a_0 и так далее. Для простоты примем $a_0 = 1$.

Считается, что Вселенная возникла в результате мощного взрыва, называемого Большим взрывом, породившего излучение релятивистских частиц. По мере расширения Вселенная охлаждается, и находящиеся в ней частицы становятся нерелятивистскими. Однако недавние наблюдения показывают, что в современной Вселенной преобладает плотность энергии, связанная с космологической постоянной. При расширении Вселенной длина волны фотона увеличивается пропорционально масштабному фактору.

Часть	Вопрос	Баллы
A.3	Для каждого из следующих трёх случаев определите значение w : (i) Вселенная, заполненная только излучением (то есть энергией фотонов), (ii) Вселенная, заполненная только нерелятивистским веществом, и (iii) Вселенная с постоянной плотностью энергии.	1.2 балла
A.4	При $k = 0$ найдите $a(t)$ для каждого из случаев (i)–(iii), указанных в A.3. Для случаев (i) и (ii) используйте начальное условие $a(t = 0) = 0$, а для случая (iii) — условие $a_0 = 1$.	1.2 балла

Постоянная k в уравнении (1) определяет тип пространственной геометрии Вселенной. Она может принимать значения $k = +1$ для Вселенной с положительной кривизной (замкнутой), $k = 0$ для плоской Вселенной (бесконечной) и $k = -1$ для Вселенной с отрицательной кривизной (открытой, бесконечной). Введём отношение плотностей $\Omega = \rho/\rho_c$, где $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ — критическая плотность энергии. Обратите внимание, что A_1 определяется в задании A.1.

Часть	Вопрос	Баллы
A.5	Выразите k в уравнении (1) через Ω, H, a и R_0 .	0.1 балла
A.6	Найдите диапазон значений Ω , соответствующий каждому из значений $k = +1, k = 0$ и $k = -1$.	0.3 балла

В. Причины введения стадии инфляции и её общие условия

Наблюдения космического микроволнового фонового излучения (СМВ) свидетельствуют о том, что современная Вселенная приблизительно плоская. Проблема состоит в том, что в таком случае ранняя Вселенная должна была быть в точности плоской: иначе любое отклонение от плоской геометрии со временем увеличивалось бы и нарушило бы наблюдаемую сегодня плоскостность.

Часть	Вопрос	Баллы
B.1	Найдите $(\Omega(t) - 1)$ как функцию времени для Вселенной, в которой преобладает излучение или нерелятивистское вещество (см. задание A.3).	0.5 балла

Для решения этой проблемы Вселенная на некотором раннем этапе своей истории должна была пройти период преобладания постоянной плотности энергии, приводящий к экспоненциальному расширению, — так называемый период инфляции.

Часть	Вопрос	Баллы
B.2	Для этого периода преобладания постоянной плотности энергии найдите $(\Omega(t) - 1)$ как функцию времени. Считайте, что $(\Omega(t) - 1) \ll 1$.	0.3 балла
B.3	Покажите, что условие инфляции влечёт следующие условия: отрицательное давление, ускоренное расширение ($\ddot{a} > 0$) и уменьшение радиуса Хаббла ($d(aH)^{-1}/dt < 0$).	0.9 балла
B.4	Покажите, что условие уменьшения радиуса Хаббла можно выразить через параметр $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ в виде $\epsilon < 1$.	0.2 балла

Инфляция продолжается, пока $\epsilon < 1$, и заканчивается при $\epsilon = 1$. Можно определить число e -кратных увеличений масштабного фактора N так, что $dN = d \ln a = H dt$, причём $N = 0$ в конце инфляции.

С. Инфляция, порождаемая однородно распределённым веществом

Примером простой физической системы, способной породить период инфляции, служит Вселенная, в которой преобладает однородно распределённое вещество. Такое вещество называют инфлатоном и описывают функцией $\phi(t)$.

Уравнение динамики этого вещества можно записать в виде

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \quad (3)$$

где $V = V(\phi)$ — потенциальная функция и $V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$. Параметр Хаббла удовлетворяет уравнению

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right]. \quad (4)$$

Здесь M_{pl} — постоянная, называемая приведённой планковской массой. Стадия инфляции возникает, когда потенциальная энергия V преобладает над кинетической энергией $\dot{\phi}^2/2$ достаточно долго, чтобы членом $\ddot{\phi}$ в уравнении (3) можно было пренебречь. Это условие называют приближением медленного скатывания.

Величины ϵ и $\eta_V = \delta + \epsilon$, где $\delta = -\ddot{\phi}/(H\dot{\phi})$, называются параметрами медленного скатывания.

Часть	Вопрос	Баллы
C.1	Оцените параметр ϵ , параметр η_V и $dN/d\phi$ через потенциал $V(\phi)$ и его первую и вторую производные (V' и V'').	1.7 балла

D. Инфляция с простым потенциалом

Предсказания любой инфляционной модели следует сравнивать со следующими наблюдательными ограничениями, полученными по СМВ: $n_s = 0.968 \pm 0.006$ и $r < 0.12$, где $r = 16\epsilon$ и $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon$ вычисляются при $\phi = \phi_{start}$ для инфляционной модели, порождаемой преобладающим веществом. Предположим, что потенциал вещества имеет простой вид $V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n$, где n — любое целое число, а Λ — постоянная.

Часть	Вопрос	Баллы
D.1	Вычислите ϕ_{end} в конце инфляции.	0.5 балла
D.2	Выразите r и n_s через число е-кратных увеличений N и целое число n . Оцените значение n , при котором значения r и n_s наиболее близки к наблюдаемым. В расчёте примите $N = 60$.	0.9 балла

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

В приведённых ниже результатах используется размерностно согласованная критическая плотность $\rho_c = H^2/A_1$. Обозначим $\Delta = \Omega - 1$. Для D.2 положим $\mathcal{N} = \ln(a_{end}/a_{start}) = -N_{start} > 0$; требуемые 60 е-кратных увеличений означают $\mathcal{N} = 60$.

- **A.1:** $A_1 = \frac{8\pi G}{3}$.
- **A.2:** $A_2 = 3$.
- **A.3:** $w_{\text{radiation}} = \frac{1}{3}, \quad w_{\text{matter}} = 0, \quad w_{\text{constant density}} = -1$.
- **A.4:** На расширяющейся ветви решения

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad a(t) &= (2H_0 t)^{1/2} = (t/t_0)^{1/2}, \\ \text{(ii)} \quad a(t) &= (\tfrac{3}{2}H_0 t)^{2/3} = (t/t_0)^{2/3}, \\ \text{(iii)} \quad a(t) &= e^{H_0(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Здесь $H_0^2 = 8\pi G\rho_0/3$, причём $H_0 t_0 = 1/2$ в случае (i) и $2/3$ в случае (ii).

- **A.5:** $k = (\Omega - 1) \left(\frac{a H R_0}{c} \right)^2$.
- **A.6:** $k = +1 : \Omega > 1; \quad k = 0 : \Omega = 1; \quad k = -1 : \Omega < 1$. Для неотрицательной плотности последний диапазон имеет вид $0 \leq \Omega < 1$.
- **B.1:** В ведущем порядке вблизи плоской геометрии, относительно опорного момента времени t_* ,

$$\Delta(t) \simeq \begin{cases} \Delta_*(t/t_*), & \text{излучение,} \\ \Delta_*(t/t_*)^{2/3}, & \text{нерелятивистское вещество.} \end{cases}$$

- **B.2:** При $H_\Lambda = \sqrt{8\pi G\rho_\Lambda/3}$

$$\Delta(t) \simeq \Delta_i e^{-2H_\Lambda(t-t_i)}.$$

- **B.3:** Постоянная плотность даёт

$$p = -\rho c^2 < 0, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G\rho}{3} > 0, \quad \frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0.$$

В более общем случае для ускоренного расширения необходимо $p < -\rho c^2/3$.

- **B.4:**

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{\epsilon - 1}{a} < 0 \iff \epsilon < 1.$$

- **C.1:** В приближении медленного скатывания

$$\epsilon \simeq \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad \eta_V \simeq M_{pl}^2 \frac{V''}{V}, \quad \frac{dN}{d\phi} \simeq -\frac{V}{M_{pl}^2 V'}.$$

- **D.1:** Для $n > 0$, на ветви с положительным полем,

$$\phi_{\text{end}} \simeq \frac{n}{\sqrt{2}} M_{pl}.$$

Формальное пороговое значение равно $|\phi| \simeq |n| M_{pl} / \sqrt{2}$. Неположительные n не приводят в этой модели к предполагаемому завершению инфляции в режиме медленного скатывания.

- **D.2:**

$$r \simeq \frac{16n}{4\mathcal{N} + n}, \quad n_s \simeq 1 - \frac{2(n+2)}{4\mathcal{N} + n}.$$

Эквивалентно, при принятом в условии соглашении о знаке знаменатели имеют вид $n - 4N_{\text{start}}$. При $\mathcal{N} = 60$

n	r	n_s
1	0.0664	0.9751
2	0.1322	0.9669

Если требуется выполнение $r < 0.12$, ближайшим положительным целым значением является $n = 1$. Ни одно положительное целое число не удовлетворяет обоим приведённым наблюдательным ограничениям.

Решение

A.1

Рассмотрим элемент массы на границе сопутствующего шара радиуса $R = aR_s$. По теореме Ньютона о сферическом слое его ускорение зависит только от массы, заключённой внутри шара,

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3.$$

В нерелятивистской модели эта масса постоянна. Уравнение Ньютона имеет вид

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}.$$

Умножая на $\dot{R}$ и интегрируя, получаем сохраняющуюся удельную механическую энергию

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{GM}{R} = \mathcal{E}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{2GM}{R^3} + \frac{2\mathcal{E}}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{2\mathcal{E}}{a^2 R_s^2}.$$

Поскольку $\dot{R}/R = \dot{a}/a$, сравнение с (1) при отождествлении $2\mathcal{E} = -kc^2$ даёт

$$\boxed{A_1 = \frac{8\pi G}{3}}.$$

A.2

Пусть физический объём шара равен

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi}{3}(aR_s)^3.$$

Его полная внутренняя энергия равна $U = \rho c^2 \mathcal{V}$. Первое начало термодинамики для адиабатической системы даёт

$$dU = -p d\mathcal{V}.$$

Таким образом,

$$c^2 \mathcal{V} d\rho + (\rho c^2 + p) d\mathcal{V} = 0.$$

Используя $\dot{\mathcal{V}}/\mathcal{V} = 3\dot{a}/a$, получаем

$$\dot{\rho} + 3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0.$$

Следовательно,

$$\boxed{A_2 = 3}.$$

A.3

При постоянном w уравнение непрерывности принимает вид

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a},$$

откуда с учётом $a_0 = 1$

$$\boxed{\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}}.$$

Для излучения концентрация фотонов уменьшается как a^{-3} . Каждый фотон обладает энергией hc/λ , а заданная зависимость длины волны $\lambda \propto a$ означает, что его энергия пропорциональна a^{-1} . Поэтому

$$\rho c^2 \propto a^{-4},$$

что даёт

$$3(1+w) = 4, \quad \boxed{w = \frac{1}{3}}.$$

Для нерелятивистского вещества основной вклад в энергию вносит приблизительно постоянная энергия покоя каждой частицы. Концентрация частиц уменьшается как a^{-3} , поэтому

$$\rho \propto a^{-3}, \quad \boxed{w = 0}.$$

Это приближение вещества с нулевым давлением.

При постоянной плотности энергии $\dot{\rho} = 0$. В расширяющейся Вселенной уравнение непрерывности требует

$$\rho + \frac{p}{c^2} = 0,$$

и, следовательно,

$$\boxed{w = -1}.$$

A.4

При $k = 0$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho = H_0^2 a^{-3(1+w)}.$$

Выбирая расширяющуюся ветвь решения, получаем

$$\dot{a} = H_0 a^{1-\frac{3}{2}(1+w)}.$$

Для $w \neq -1$ интегрирование с условием $a(0) = 0$ даёт

$$a^{\frac{3}{2}(1+w)} = \frac{3}{2}(1+w)H_0 t.$$

Следовательно, для излучения

$$\boxed{a(t) = (2H_0 t)^{1/2}}.$$

Нормировка $a(t_0) = 1$ означает $2H_0 t_0 = 1$, так что

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}.$$

Для нерелятивистского вещества

$$\boxed{a(t) = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3}}.$$

Здесь $3H_0 t_0/2 = 1$, откуда

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}.$$

При постоянной плотности энергии $H = H_0$ постоянно. Интегрируя $\dot{a}/a = H_0$ и накладывая условие $a(t_0) = 1$, получаем

$$\boxed{a(t) = e^{H_0(t-t_0)}}.$$

A.5

Подстановка $k = 0$ в (1) определяет критическую **плотность, выраженную в единицах массы**:

$$\rho_c = \frac{H^2}{A_1} = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

Таким образом, приведённое в условии определение $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ размерностно несогласованно. Соответствующая критическая плотность энергии равна

$$\rho_c c^2 = \frac{H^2 c^2}{A_1}.$$

Используя согласованное определение, получаем

$$\Omega = \frac{A_1 \rho}{H^2}.$$

Разделим (1) на H^2 :

$$1 = \Omega - \frac{kc^2}{a^2 R_s^2 H^2}.$$

Поскольку $a_0 = 1$, современный радиус равен $R_0 = R_s$. Поэтому

$$k = (\Omega - 1) \frac{a^2 H^2 R_0^2}{c^2}.$$

A.6

Множитель при $\Omega - 1$ в A.5 положителен. Следовательно, k и $\Omega - 1$ имеют одинаковый знак:

Пространственная кривизна	Отношение плотностей
$k = +1$, замкнутая Вселенная	$\Omega > 1$
$k = 0$, плоская Вселенная	$\Omega = 1$
$k = -1$, открытая Вселенная	$\Omega < 1$

При неотрицательной плотности энергии диапазон для открытой Вселенной имеет вид $0 \leq \Omega < 1$.

B.1

Из A.5

$$\Delta(t) \equiv \Omega(t) - 1 = \frac{kc^2}{R_0^2 a^2 H^2} = \frac{kc^2}{R_0^2 \dot{a}^2}.$$

Это точное тождество.

Чтобы исследовать малое отклонение от плоской геометрии, вычислим $\dot{a}$ в ведущем порядке, используя решения для плоской Вселенной из A.4. Если

$$a \propto t^\alpha,$$

то

$$\dot{a}^2 \propto t^{2\alpha-2}, \quad \Delta \propto t^{2-2\alpha}.$$

В эпоху преобладания излучения $\alpha = 1/2$, поэтому

$$\Delta(t) \simeq \Delta_* \frac{t}{t_*}.$$

В эпоху преобладания вещества $\alpha = 2/3$, поэтому

$$\Delta(t) \simeq \Delta_* \left(\frac{t}{t_*} \right)^{2/3}.$$

Таким образом, величина любого малого ненулевого отклонения от плоской геометрии растёт в обе эпохи. Эти степенные законы применимы, пока кривизна остаётся малой поправкой к расширению.

В.2

Обозначим постоянную плотность через ρ_Λ и определим

$$H_\Lambda^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda.$$

При $|\Omega - 1| \ll 1$ вклад кривизны в (1) мал, поэтому

$$H \simeq H_\Lambda, \quad a(t) \simeq a_i e^{H_\Lambda(t-t_i)}.$$

Подстановка в

$$\Delta = \frac{kc^2}{R_0^2 a^2 H^2}$$

даёт

$$\Delta(t) \simeq \Delta_i e^{-2H_\Lambda(t-t_i)}.$$

Следовательно, инфляция экспоненциально подавляет отклонения от плоской геометрии.

В.3

Продифференцируем (1) и воспользуемся уравнением непрерывности:

$$2H\dot{H} = A_1\dot{\rho} + \frac{2kc^2 H}{R_0^2 a^2},$$

откуда

$$\dot{H} = -\frac{3A_1}{2} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}.$$

Прибавляя H^2 из (1), исключаем член с кривизной:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\frac{A_1}{2} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right).$$

Используя А.1, получаем

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right).$$

При положительной плотности для ускоренного расширения необходимо

$$p < -\frac{1}{3} \rho c^2,$$

что, в частности, требует отрицательного давления.

Для рассматриваемого здесь периода постоянной плотности А.3 даёт $p = -\rho c^2$. Следовательно,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3}\rho > 0.$$

Наконец, $aH = \dot{a}$, поэтому

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\dot{a}} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} < 0.$$

Тем самым доказаны все три требуемых свойства.

Радиус, фигурирующий в этом условии, — это **сопутствующий** радиус Хаббла $c/(aH)$; постоянная c не влияет на знак производной.

В.4

Непосредственное дифференцирование даёт

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{a^2 H^2} = -\frac{1}{a} \left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right).$$

Поскольку $\epsilon = -\dot{H}/H^2$,

$$\boxed{\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{\epsilon - 1}{a}}.$$

Так как $a > 0$, радиус уменьшается тогда и только тогда, когда

$$\boxed{\epsilon < 1}.$$

Эквивалентно,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \epsilon).$$

С.1

Сначала продифференцируем (4):

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{pl}^2} (\dot{\phi}\ddot{\phi} + V'\dot{\phi}).$$

Уравнение (3) даёт $\ddot{\phi} + V' = -3H\dot{\phi}$, поэтому

$$2H\dot{H} = -\frac{H\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2}.$$

Таким образом,

$$\boxed{\dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2M_{pl}^2}}, \quad \epsilon = \frac{\dot{\phi}^2}{2M_{pl}^2 H^2}.$$

Предположения приближения медленного скатывания дают

$$H^2 \simeq \frac{V}{3M_{pl}^2}, \quad 3H\dot{\phi} \simeq -V'.$$

Подставляя эти выражения в ϵ , получаем

$$\epsilon \simeq \frac{V'^2}{18M_{pl}^2 H^4} = \boxed{\frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2}.$$

Чтобы получить η_V , продифференцируем уравнение поля в приближении медленного скатывания:

$$3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} \simeq -V''\dot{\phi}.$$

Деля на $3H^2\dot{\phi}$, получаем

$$\frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \simeq -\frac{V''}{3H^2}.$$

Левая часть равна $-\epsilon - \delta$. Поэтому

$$\eta_V = \delta + \epsilon \simeq \frac{V''}{3H^2} = \boxed{M_{pl}^2 \frac{V''}{V}}.$$

Наконец, используя данное в условии определение $dN = Hdt$, получаем

$$\frac{dN}{d\phi} = \frac{H}{\dot{\phi}} \simeq -\frac{3H^2}{V'} = \boxed{-\frac{V}{M_{pl}^2 V'}}.$$

Это выражение применимо вдоль траектории монотонно скатывающегося поля.

D.1

Для

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n,$$

отношения производных к потенциалу равны

$$\frac{V'}{V} = \frac{n}{\phi}, \quad \frac{V''}{V} = \frac{n(n-1)}{\phi^2}.$$

Следовательно,

$$\epsilon \simeq \frac{n^2 M_{pl}^2}{2\phi^2}.$$

Экстраполяция этого выражения, полученного в приближении медленного скатывания, до условия завершения $\epsilon = 1$ даёт

$$|\phi_{\text{end}}| \simeq \frac{|n|}{\sqrt{2}} M_{pl}.$$

При $n > 0$ выберем ветвь с положительным полем. Поле скатывается в сторону меньших ϕ , поэтому ϵ увеличивается и достигает единицы при

$$\boxed{\phi_{\text{end}} \simeq \frac{n}{\sqrt{2}} M_{pl}}.$$

Поле имеет те же единицы измерения, что и M_{pl} .

Условие допускает любое целое n , однако предполагаемый выход из инфляции ограничивает рассматриваемые случаи:

- При $n = 0$ потенциал постоянен и $\epsilon \simeq 0$; эта модель не обеспечивает выхода из режима медленного скатывания.
- При $n < 0$ и $\phi > 0$ имеем $V' < 0$, поэтому $\dot{\phi} \simeq -V'/(3H) > 0$. Следовательно, $\epsilon \propto \phi^{-2}$ уменьшается. Формальный порог $\epsilon = 1$ соответствует входу в инфляцию.

Полученное значение поля в конце инфляции является оценкой, поскольку при приближении ϵ к единице медленное скатывание перестаёт быть контролируемым приближением.

D.2

Для степенного потенциала C.1 даёт

$$\frac{dN}{d\phi} \simeq -\frac{\phi}{nM_{pl}^2}.$$

Интегрируя от конца инфляции, где $N = 0$, получаем

$$N(\phi) \simeq -\frac{\phi^2 - \phi_{\text{end}}^2}{2nM_{pl}^2}.$$

При $n > 0$ начальное значение поля больше конечного, поэтому введённое в условии N_{start} отрицательно. Определим положительную длительность

$$\mathcal{N} \equiv -N_{\text{start}} = \ln \frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{start}}}.$$

Тогда

$$\phi_{\text{start}}^2 \simeq \phi_{\text{end}}^2 + 2nM_{pl}^2\mathcal{N} = \frac{n}{2}(4\mathcal{N} + n)M_{pl}^2.$$

Таким образом, параметры медленного скатывания в начале равны

$$\epsilon_{\text{start}} \simeq \frac{n}{4\mathcal{N} + n}, \quad \eta_{V,\text{start}} \simeq \frac{2(n-1)}{4\mathcal{N} + n}.$$

Следовательно,

$$r \simeq \frac{16n}{4\mathcal{N} + n}$$

и

$$n_s \simeq 1 + \frac{4(n-1) - 6n}{4\mathcal{N} + n} = 1 - \frac{2(n+2)}{4\mathcal{N} + n}.$$

При принятом в условии соглашении о знаке эти выражения принимают вид

$$r \simeq \frac{16n}{n - 4N_{\text{start}}}, \quad n_s \simeq 1 - \frac{2(n+2)}{n - 4N_{\text{start}}}.$$

При $\mathcal{N} \gg n$ получаются известные выражения ведущего порядка:

$$r \simeq \frac{4n}{\mathcal{N}}, \quad n_s \simeq 1 - \frac{n+2}{2\mathcal{N}}.$$

Интерпретируя заданное $N = 60$ как положительную длительность $\mathcal{N} = 60$, из ограничения на тензорные возмущения получаем

$$\frac{16n}{240 + n} < 0.12 \implies n < \frac{28.8}{15.88} \simeq 1.814.$$

Следовательно, единственное положительное целое число, удовлетворяющее этому ограничению, — $n = 1$.

Численные предсказания, все безразмерные, таковы:

n	r	n_s	Сравнение с указанными ограничениями
1	0.0664	0.9751	Удовлетворяет $r < 0.12$; n_s немного выше 0.974
2	0.1322	0.9669	Удовлетворяет указанному интервалу n_s ; превышает ограничение на r
3	0.1975	0.9588	За пределами обоих указанных ограничений

Следовательно,

$$n = 1 \quad \text{если требуется соблюдение верхней границы для тензорных возмущений.}$$

Предсказываемый при этом спектральный индекс примерно на 0.0011 выше верхней границы указанного интервала. Целое число $n = 2$ даёт значение спектрального индекса, более близкое к центральному, но нарушает ограничение на тензорные возмущения. **Ни одно положительное целое число не удовлетворяет обоим указанным ограничениям одновременно.**

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.