

IPhO 2017

Problemas teóricos y soluciones · Yogyakarta, Indonesia · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipro/2017/

Problema 1: Materia oscura

Fritz Zwicky formuló la primera inferencia formal de la existencia de materia oscura a partir de sus observaciones de la dinámica del cúmulo de galaxias de Coma, un cúmulo formado por unas mil galaxias. Zwicky utilizó el teorema del virial para estimar la masa del cúmulo de galaxias. En un sistema sencillo formado por el Sol y un planeta, en el que el planeta gira alrededor del Sol en una órbita circular, el teorema del virial establece una relación exacta entre la energía cinética del planeta y su energía potencial gravitatoria. En el caso general de un sistema de muchas partículas ligadas por alguna interacción, el teorema del virial relaciona el promedio temporal de la energía cinética total con el promedio temporal de la energía potencial total.

En 1933, basándose en sus observaciones de la velocidad de las galaxias cercanas al borde del cúmulo de galaxias de Coma, Zwicky estimó que el cúmulo tenía más masa que la observada visualmente (es decir, las galaxias). La atracción gravitatoria de la materia observable (las galaxias) era demasiado pequeña para explicar las velocidades de las galaxias. Por tanto, debía haber alguna masa oculta que explicara velocidades tan elevadas. Esa masa oculta es la masa de materia oscura. En lo que sigue, suponga que la masa de cada galaxia es la suma de su masa visible y de la masa de la materia oscura que se mueve junto con ella, y que la materia oscura solo interactúa gravitatoriamente con la materia visible.

A. Cúmulo de galaxias

Considere un cúmulo de galaxias formado por un gran número N de galaxias y materia oscura distribuidas homogéneamente en una esfera de radio R , cuya masa total (galaxias y materia oscura) es M . Suponga que la masa total media (materia visible y oscura) de una galaxia es m .

A.1	Suponiendo una distribución continua de materia en el cúmulo, halle la energía potencial gravitatoria total del cúmulo en función de M y R .	1.0 pt.
-----	--	---------

Debido a la expansión cosmológica, cualquier objeto lejano se aleja de un observador en la Tierra con una rapidez que depende de la distancia entre el observador y el objeto. Se observa que cierta frecuencia de Lyman (una línea espectral de emisión del hidrógeno) procedente de una supernova de tipo IA en la i -ésima galaxia del cúmulo de galaxias es f_i , con $i = 1, \dots, N$, mientras que la frecuencia de Lyman correspondiente en la Tierra es f_0 .

A.2	Determine la rapidez media V_{cr} con la que el cúmulo de galaxias en su conjunto se aleja de la Tierra en función de f_i (con $i = 1, \dots, N$), f_0 y N . Tenga en cuenta que la rapidez de una galaxia es muy pequeña comparada con la velocidad de la luz c .	0.5 pt.
A.3	Suponiendo que las velocidades de las galaxias respecto al centro del cúmulo son isotrópicas (iguales en todas las direcciones), determine la rapidez cuadrática media v_{rms} de las	1.5 pt.

galaxias respecto al centro del cúmulo en función de N , f_i (con $i = 1, \dots, N$) y f_0 . A partir de este resultado, determine la energía cinética media de una galaxia respecto al centro del cúmulo en función de v_{rms} y m .	
--	--

Para hallar la masa total del cúmulo, se puede utilizar el teorema del virial. Este teorema establece que, para un sistema de partículas ligadas por fuerzas conservativas,

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

donde $\langle K \rangle_t$ es el promedio temporal de la energía cinética total, $\langle U \rangle_t$ es el promedio temporal de la energía potencial total y γ es una constante. Este teorema puede deducirse suponiendo que, para un sistema de partículas ligadas por su propia interacción, los módulos de la posición y del momento lineal de cada partícula son finitos y, por tanto, la siguiente magnitud

$$\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

es finita.

A.4	Utilizando el hecho de que el promedio temporal de $d\Gamma/dt$ durante un intervalo de tiempo largo se anula, $\langle d\Gamma/dt \rangle_t = 0$, determine γ en el teorema del virial anterior para el caso de la interacción gravitatoria. (Sugerencia: intente resolver el problema con la suma de Γ para un número finito pequeño de galaxias).	1.7 pt.
A.5	A partir de los resultados anteriores, determine la masa total de materia oscura del cúmulo en función de N , m_g , R y v_{rms} , donde m_g es la masa visible total media de una galaxia. Tenga en cuenta que la rapidez cuadrática media de la materia oscura es la misma que la de las galaxias.	0.5 pt.

B. Materia oscura en una galaxia

La materia oscura también existe en el interior y alrededor de una galaxia. Considere una galaxia esférica cuyo borde visible tiene un radio R_g (aproximadamente, la distancia más alejada a la que todavía es visible un gran número de estrellas, aunque un número muy pequeño de estrellas puede estar distribuido en la región más allá de R_g). Suponga que las estrellas de la galaxia son partículas puntuales con una masa media m_s . Se supone que las estrellas de la galaxia, distribuidas homogéneamente con una densidad numérica n , se mueven en órbitas circulares.

B.1	Si la galaxia está formada únicamente por estrellas, halle la rapidez $v(r)$ de una estrella en función de su distancia al centro de la galaxia y esboce $v(r)$ para $r < R_g$ y $r \geq R_g$.	0.8 pt.
-----	---	---------

La existencia de materia oscura puede inferirse a partir de la curva de rotación de la galaxia, que es una gráfica de $v(r)$ obtenida mediante observaciones. La figura siguiente muestra una forma habitual de la curva de rotación de una galaxia. Como simplificación, puede suponer que $v(r)$ es una función lineal para $r \leq R_g$ y una constante v_0 para $r > R_g$.

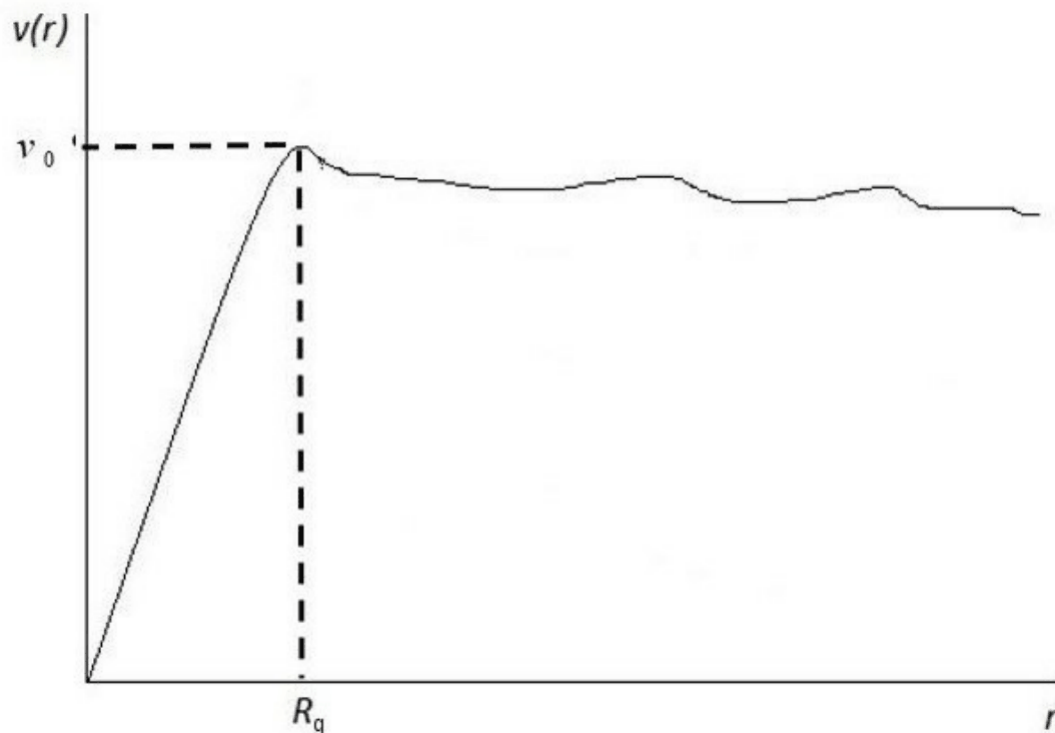


Fig. 1 Gráfica de la curva de rotación de una galaxia.

B.2	Halle la masa total m_R de la parte de la galaxia que se encuentra dentro de la esfera de radio R_g en función de v_0 y R_g .	0.5 pt.
-----	---	---------

La discrepancia entre la figura de B.2. y la gráfica obtenida en B.1 indica la existencia de materia oscura.

B.3	Determine la densidad de masa de materia oscura en función de r , R_g , v_0 , n y m_s para $r < R_g$ y $r \geq R_g$.	1.5 pt.
-----	---	---------

C. Gas interestelar y materia oscura

Considere ahora una galaxia joven cuya masa está dominada por el gas interestelar y la materia oscura (desprecie la masa de las estrellas). Se supone que el gas interestelar está formado por partículas idénticas de masa m_p . La densidad numérica $n(r)$ y la temperatura $T(r)$ del gas dependen de la distancia al centro de la galaxia r . Aunque en el gas tienen lugar muchos procesos físicos, podemos suponer que se encuentra en equilibrio hidrostático debido a su presión y a la atracción gravitatoria de la galaxia.

C.1	Halle el gradiente de presión del gas dP/dr en función de $m'(r)$, r y $n(r)$. Aquí, $m'(r)$ es la masa total de gas y materia oscura dentro de una esfera de radio r centrada en el centro de la galaxia.	0.5 pt.
C.2	Suponiendo que el gas interestelar es un gas ideal, halle $m'(r)$ en función de $n(r)$, $T(r)$ y sus derivadas respecto a r .	0.5 pt.

A continuación, para simplificar, suponga que el gas tiene una distribución isotérmica a temperatura T_0 y que la densidad numérica del gas interestelar viene dada por

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2},$$

donde α y β son ciertas constantes.

C.3	Halle la densidad de masa de materia oscura en función de r en el interior de la galaxia.	1.0 pt.
-----	---	---------

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Sea

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i.$$

Aquí, G es la constante de gravitación universal y k_B es la constante de Boltzmann. Los resultados del efecto Doppler conservan los términos de primer orden en la rapidez dividida por c .

• A.1

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}.$$

• A.2

$$V_{cr} \simeq c \left(1 - \frac{\bar{f}}{f_0} \right).$$

• A.3

$$v_{rms} \simeq \frac{c}{f_0} \sqrt{\frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2}, \quad \langle K_{gal} \rangle = \frac{1}{2} m v_{rms}^2.$$

• A.4

$$\gamma = \frac{1}{2}.$$

• A.5

$$M_{DM} = \frac{5Rv_{rms}^2}{3G} - Nm_g.$$

• B.1

$$v(r) = \begin{cases} r \sqrt{\frac{4\pi G n m_s}{3}}, & 0 \leq r < R_g, \\ \sqrt{\frac{4\pi G n m_s R_g^3}{3r}}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

La gráfica crece linealmente desde el origen hasta su máximo en R_g , y después decrece como $r^{-1/2}$, aproximándose a cero.

• B.2

$$m_R = \frac{v_0^2 R_g}{G}.$$

• B.3

$$\rho_{DM}(r) = \begin{cases} \frac{3v_0^2}{4\pi G R_g^2} - n m_s, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2}{4\pi G r^2}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

• C.1

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G m'(r) m_p n(r)}{r^2}.$$

• C.2

$$m'(r) = - \frac{k_B r^2}{G m_p} \left[\frac{dT}{dr} + \frac{T(r)}{n(r)} \frac{dn}{dr} \right].$$

• C.3

$$\rho_{DM}(r) = \frac{k_B T_0 (\beta^2 + 6\beta r + 3r^2)}{4\pi G m_p r^2 (\beta + r)^2} - \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2} \quad (r > 0).$$

Solución

A.1

Tomamos como cero de la energía potencial gravitatoria el estado en el que toda la masa está dispersa en el infinito. La densidad de masa uniforme y la masa contenida dentro del radio r son

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}, \quad M(r) = \frac{4\pi}{3} \rho r^3 = M \frac{r^3}{R^3}.$$

Construimos la esfera trayendo sucesivas capas esféricas delgadas desde el infinito. Una capa de masa

$$dM = 4\pi r^2 \rho dr = \frac{3Mr^2}{R^3} dr$$

tiene una energía de interacción con la masa interior previamente reunida

$$dU = -\frac{GM(r)}{r} dM.$$

Esta construcción cuenta una sola vez cada interacción entre pares. Por tanto,

$$U = -\int_0^R \frac{G}{r} \left(\frac{Mr^3}{R^3} \right) \left(\frac{3Mr^2}{R^3} \right) dr = -\frac{3GM^2}{R^6} \frac{R^5}{5}.$$

Así,

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}.$$

A.2

Sea u_i la componente de la velocidad de la galaxia i respecto a la Tierra a lo largo de la línea de visión, positiva cuando se aleja. Para $u_i \ll c$, la relación Doppler a primer orden es

$$f_i \simeq f_0 \left(1 - \frac{u_i}{c} \right),$$

de modo que

$$u_i \simeq c \frac{f_0 - f_i}{f_0}.$$

El promedio de las velocidades internas es cero en el sistema de referencia en reposo con el cúmulo. Por ello, la rapidez de alejamiento del cúmulo es la media de estas componentes medidas de la velocidad a lo largo de la línea de visión:

$$V_{cr} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \simeq \frac{c}{Nf_0} \sum_{i=1}^N (f_0 - f_i).$$

En consecuencia,

$$V_{cr} \simeq c \left(1 - \frac{1}{Nf_0} \sum_{i=1}^N f_i \right) = c \left(1 - \frac{\bar{f}}{f_0} \right).$$

A.3

La componente a lo largo de la línea de visión de la velocidad de la galaxia i respecto al centro del cúmulo es

$$w_i = u_i - V_{cr} \simeq -\frac{c}{f_0} (f_i - \bar{f}).$$

Para una distribución isotropa de velocidades, el promedio del cuadrado de la velocidad se reparte por igual entre tres direcciones mutuamente perpendiculares:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle.$$

Tomando la dirección z a lo largo de la línea de visión, se obtiene

$$v_{rms}^2 = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = 3\langle w^2 \rangle = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N w_i^2.$$

Así,

$$v_{rms} \simeq \frac{c}{f_0} \sqrt{\frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2}.$$

De forma equivalente,

$$v_{rms}^2 \simeq \frac{3c^2}{f_0^2} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i \right)^2 \right].$$

Utilizando la masa total representativa de una galaxia m , la energía cinética media en el sistema de referencia en reposo con el cúmulo es

$$\langle K_{gal} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m v_{rms}^2.$$

A.4

Trabajamos en el sistema de referencia del centro de masas. Al derivar la magnitud dada, se obtiene

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i + \vec{p}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2K.$$

Sea $\vec{F}_{ij}$ la fuerza que la partícula j ejerce sobre la partícula i . La tercera ley de Newton permite agrupar el término de las fuerzas en pares no ordenados:

$$\sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = \sum_{i < j} (\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \cdot \vec{F}_{ji}) = \sum_{i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{F}_{ij}.$$

Para la gravitación newtoniana,

$$\vec{F}_{ij} = -Gm_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}^3}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|.$$

Por tanto,

$$\sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = - \sum_{i < j} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} = U,$$

donde U es la energía potencial gravitatoria total de las interacciones entre pares. Se sigue que

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 2K + U.$$

Como Γ permanece acotada,

$$\left\langle \frac{d\Gamma}{dt} \right\rangle_t = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(t + \tau) - \Gamma(t)}{\tau} = 0.$$

Por consiguiente, al tomar el promedio temporal se obtiene

$$2\langle K \rangle_t + \langle U \rangle_t = 0, \quad \langle K \rangle_t = -\frac{1}{2} \langle U \rangle_t.$$

La comparación con el teorema enunciado da

$$\gamma = \frac{1}{2}.$$

A.5

Consideramos que el cúmulo se encuentra en equilibrio virial estacionario, de modo que sus propiedades globales observadas representan los promedios temporales. Como la materia oscura y las galaxias tienen la misma rapidez cuadrática media, la energía cinética total es

$$K = \frac{1}{2} M v_{rms}^2.$$

Combinando el teorema del virial con A.1,

$$2K = -U \quad \Rightarrow \quad M v_{rms}^2 = \frac{3GM^2}{5R}.$$

Para $M > 0$,

$$M = \frac{5R v_{rms}^2}{3G}.$$

La masa visible total es Nm_g . Al restarla de la masa total se obtiene

$$M_{DM} = \frac{5R v_{rms}^2}{3G} - Nm_g.$$

B.1

La densidad de masa estelar es

$$\rho_* = nm_s.$$

Despreciamos la masa total de las escasas estrellas situadas más allá de R_g , pero las conservamos como partículas de prueba cuyas órbitas permiten determinar el campo gravitatorio exterior. La masa estelar encerrada es entonces

$$M_*(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} nm_s r^3, & r < R_g, \\ \frac{4\pi}{3} nm_s R_g^3, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Según el teorema de las capas esféricas, solo la masa encerrada contribuye a la aceleración gravitatoria en r . Al igualar esta aceleración a la aceleración centrípeta se obtiene

$$\frac{v(r)^2}{r} = \frac{GM_*(r)}{r^2}, \quad v(r)^2 = \frac{GM_*(r)}{r}.$$

Así,

$$v(r) = \begin{cases} r \sqrt{\frac{4\pi G n m_s}{3}}, & 0 \leq r < R_g, \\ \sqrt{\frac{4\pi G n m_s R_g^3}{3r}}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Para el esbozo, definimos

$$v_g = R_g \sqrt{\frac{4\pi G n m_s}{3}}.$$

La curva es una línea recta desde $(0, 0)$ hasta (R_g, v_g) . Es continua y tiene su máximo en ese punto. Más allá de R_g , sigue la expresión

$$v(r) = v_g \sqrt{\frac{R_g}{r}},$$

y decrece hacia la asíntota horizontal $v = 0$.

B.2

En $r = R_g$, la rapidez circular observada es v_0 . La condición de órbita circular da

$$\frac{v_0^2}{R_g} = \frac{Gm_R}{R_g^2}.$$

Por tanto, la masa total encerrada, incluida la materia oscura, es

$$m_R = \frac{v_0^2 R_g}{G}.$$

B.3

Para cualquier distribución de masa con simetría esférica que se estudie mediante órbitas circulares,

$$M_{\text{enc}}(r) = \frac{rv(r)^2}{G}.$$

La aproximación indicada para la curva de rotación observada es

$$v(r) = \begin{cases} v_0 r / R_g, & r < R_g, \\ v_0, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Por ello,

$$M_{\text{enc}}(r) = \begin{cases} \frac{v_0^2 r^3}{GR_g^2}, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2 r}{G}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Una capa esférica tiene una masa $dM_{\text{enc}} = 4\pi r^2 \rho_{\text{tot}} dr$, de modo que

$$\rho_{\text{tot}}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM_{\text{enc}}}{dr} = \begin{cases} \frac{3v_0^2}{4\pi GR_g^2}, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2}{4\pi Gr^2}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Al restar la densidad estelar nm_s dentro del borde visible y despreciar la densidad estelar fuera de él, se obtiene

$$\rho_{\text{DM}}(r) = \begin{cases} \frac{3v_0^2}{4\pi GR_g^2} - nm_s, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2}{4\pi Gr^2}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

La masa encerrada es continua en R_g , aunque la densidad puede presentar allí un salto en este modelo idealizado.

C.1

Aquí, $m'(r)$ denota la masa encerrada especificada en el enunciado; la prima forma parte de su notación y no indica una derivada.

Consideramos un pequeño elemento de gas de espesor radial dr y área de sección transversal dA . Su masa es

$$dm = m_p n(r) dA dr.$$

La fuerza neta de presión hacia fuera es

$$dF_P = -\frac{dP}{dr} dA dr.$$

La fuerza gravitatoria hacia dentro tiene un módulo

$$dF_G = \frac{Gm'(r)}{r^2} m_p n(r) dA dr.$$

El equilibrio hidrostático exige que estas fuerzas se compensen. Por tanto,

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm'(r)m_p n(r)}{r^2}}.$$

El signo negativo expresa la disminución de la presión hacia fuera necesaria para sostener el gas frente a la gravedad dirigida hacia dentro.

C.2

Para un gas ideal,

$$P(r) = n(r)k_B T(r).$$

Al derivar,

$$\frac{dP}{dr} = k_B \left[T(r) \frac{dn}{dr} + n(r) \frac{dT}{dr} \right].$$

Al sustituir en la ecuación de equilibrio hidrostático y despejar la masa encerrada se obtiene

$$m'(r) = -\frac{k_B r^2}{Gm_p n(r)} \left[T(r) \frac{dn}{dr} + n(r) \frac{dT}{dr} \right].$$

Así,

$$\boxed{m'(r) = -\frac{k_B r^2}{Gm_p} \left[\frac{dT}{dr} + \frac{T(r)}{n(r)} \frac{dn}{dr} \right]}.$$

Una forma equivalente es

$$m'(r) = -\frac{k_B T(r) r}{Gm_p} \left[\frac{d \ln n}{d \ln r} + \frac{d \ln T}{d \ln r} \right].$$

C.3

Para el gas isotérmico, $T(r) = T_0$, de modo que C.2 se convierte en

$$m'(r) = -\frac{k_B T_0 r^2}{G m_p} \frac{d \ln n}{dr}.$$

La densidad numérica dada satisface

$$\ln n = \ln \alpha - \ln r - 2 \ln(\beta + r),$$

y, por tanto,

$$\frac{d \ln n}{dr} = -\frac{1}{r} - \frac{2}{\beta + r}.$$

En consecuencia, la masa total encerrada es

$$m'(r) = \frac{k_B T_0}{G m_p} \left(r + \frac{2r^2}{\beta + r} \right) = \frac{k_B T_0}{G m_p} \frac{r(\beta + 3r)}{\beta + r}.$$

Derivamos esta masa encerrada:

$$\frac{d m'(r)}{dr} = \frac{k_B T_0}{G m_p} \frac{\beta^2 + 6\beta r + 3r^2}{(\beta + r)^2}.$$

Así, la densidad de masa total es

$$\rho_{\text{tot}}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d m'(r)}{dr} = \frac{k_B T_0 (\beta^2 + 6\beta r + 3r^2)}{4\pi G m_p r^2 (\beta + r)^2}.$$

La densidad de masa del gas es

$$\rho_{\text{gas}}(r) = m_p n(r) = \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2}.$$

Al restarla de la densidad total se obtiene

$$\rho_{\text{DM}}(r) = \frac{k_B T_0 (\beta^2 + 6\beta r + 3r^2)}{4\pi G m_p r^2 (\beta + r)^2} - \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2} \quad (r > 0).$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Terremoto, volcán y tsunami

Indonesia es el supermercado de los peligros naturales. En Indonesia se han producido casi todos los tipos de peligros naturales, como erupciones volcánicas, terremotos y tsunamis.

A. Erupción del volcán Merapi

El volcán Merapi, en Yogyakarta, es uno de los volcanes más activos de Java. Los flujos piroclásticos son una característica bien conocida de sus erupciones. Un flujo piroclástico es una mezcla caliente de gas y roca que se desplaza alejándose de un volcán. El 26 de octubre de 2010, el Merapi mostró su carácter explosivo al producir una columna de ceniza que alcanzó los 12 km de altitud (Fig. 1) y corrientes piroclásticas que obligaron a desplazarse a más de 20,000 personas de los alrededores del volcán.



(Fig. 1: Pyroclastic cloud during Merapi eruption, Courtesy of Volcanological Office of Yogyakarta, BPPTKG)

(Fig. 1: Nube piroclástica durante la erupción del Merapi, cortesía de la Oficina Vulcanológica de Yogyakarta, BPPTKG)

Examinemos las causas de la mayor erupción del Merapi en 2010. Los geofísicos saben que la entrada de agua externa en el magma desempeña un papel importante en el comportamiento explosivo de las erupciones volcánicas (erupciones hidromagmáticas). Supongamos que tratamos el volcán como un sistema que consiste en una mezcla de partículas magmáticas y agua. Las estructuras de los conductos volcánicos y la atmósfera constituyen los límites del sistema. Se considera que la erupción explosiva ocurre en dos etapas: (1) una interacción instantánea entre magma y agua, y (2) una expansión del sistema. En la primera etapa, una masa de magma (m_m) a una temperatura absoluta (T_m) se mezcla con una masa de agua externa (m_w) a una temperatura absoluta (T_w). El equilibrio térmico se alcanza casi instantáneamente. Esta interacción puede considerarse un proceso a volumen casi constante. Pueden despreciarse el calor latente de vaporización del agua y el calor latente de fusión del magma.

A.1	Halle la temperatura de equilibrio en la primera etapa en función de las masas y de las capacidades caloríficas por unidad de masa del agua c_{Vw} y del magma c_{Vm} .	0.5 pt.
A.2	Determine la presión de equilibrio en la primera etapa suponiendo que la mezcla puede modelarse como un gas ideal. Suponga que el volumen por mol de la mezcla es v_e .	0.3 pt.

La expansión del sistema (la segunda etapa) puede producirse mediante varios mecanismos, uno de los cuales es la detonación térmica. Aunque este proceso es bastante complicado, podemos medir empíricamente la velocidad relativa de la mezcla expulsada. La velocidad del gas durante la erupción depende de la presión p , la masa total m y el volumen V de la mezcla en el conducto de un volcán.

A.3

Expresé la velocidad del gas durante la erupción en función de p , m y V , salvo una constante de proporcionalidad κ .

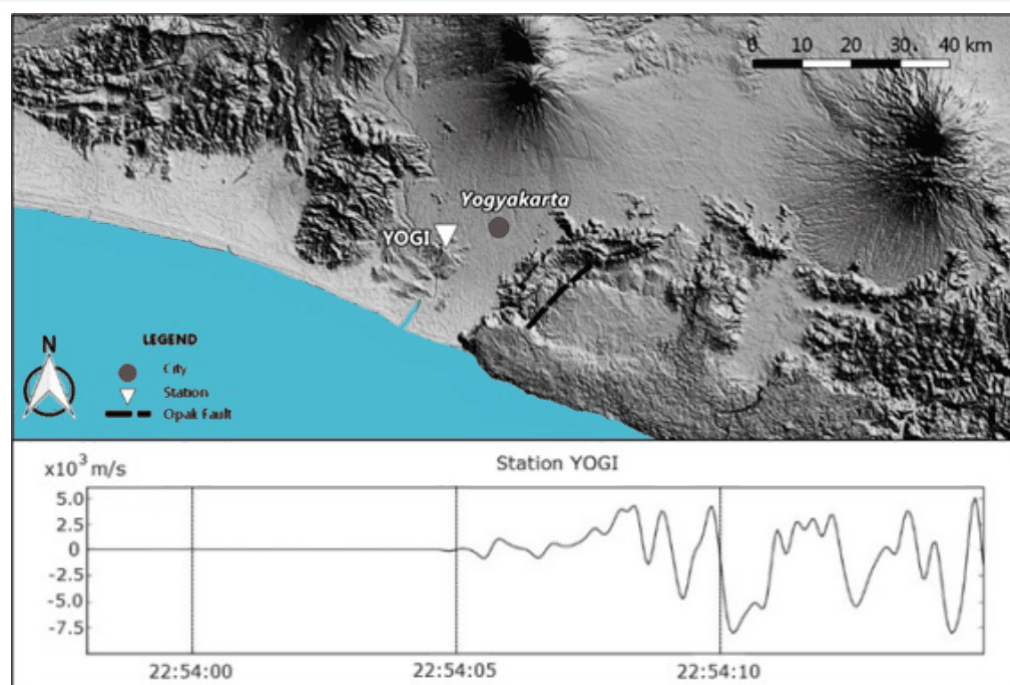
0.5 pt.

La presión observada es del orden de 100 MPa. Esto permite que la velocidad (relativa) de la erupción llegue a ser tan grande como una velocidad balística.

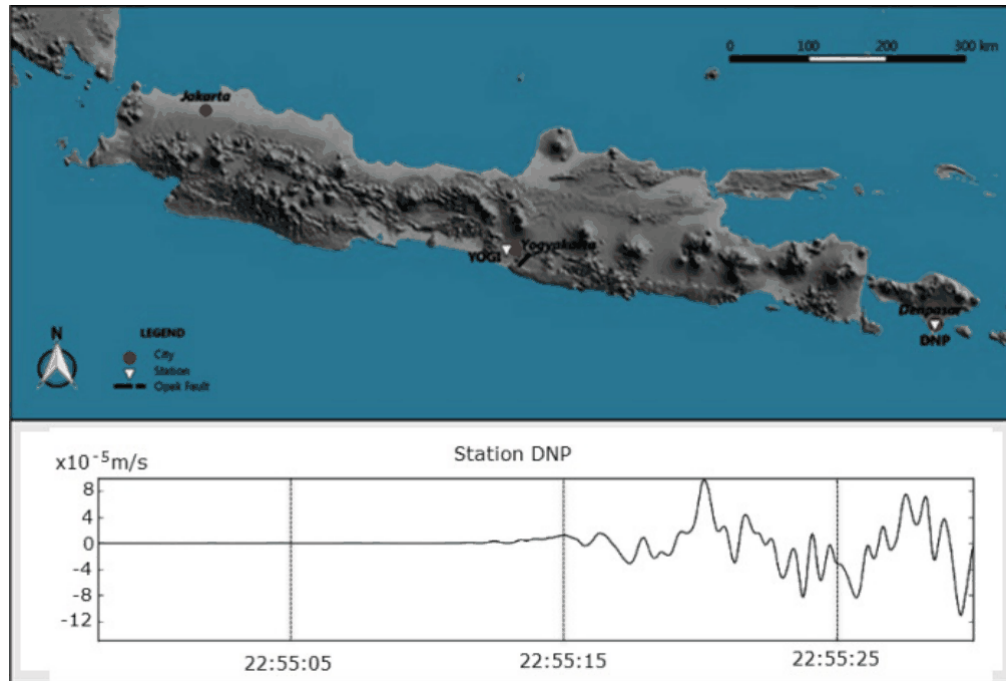
B. El terremoto de Yogyakarta

El terremoto de Yogyakarta de 2006, de magnitud $M_w = 6.4$, que destruyó numerosos edificios en las zonas de Bantul y Yogyakarta, ocurrió a las 05:54:00.00 hora local, o 22:54:00.00 UTC. El terremoto fue causado por un desplazamiento repentino del segmento de la falla de Opak (véase la Fig. 2). El hipocentro se encontraba a 15 km bajo la superficie.

La onda sísmica que se propaga por la corteza terrestre puede registrarse mediante un sismómetro. El diagrama obtenido con un sismómetro se denomina sismograma (Fig. 2 y 3, gráfico inferior). Estos sismogramas representan la velocidad vertical del suelo en función del tiempo, registrada por las estaciones sísmicas de Gamping, Yogyakarta (YOGI) (Fig. 2), y de Denpasar, Bali (DNP) (Fig. 3). En general, las ondas sísmicas comprenden tres tipos: las longitudinales o primarias (ondas P), las transversales o secundarias (ondas S) y las superficiales. Las ondas P y S se propagan por el subsuelo, mientras que las ondas superficiales se propagan a lo largo de la superficie terrestre. Las ondas sísmicas que viajan por el subsuelo hasta las estaciones pueden dividirse en las que se propagan en línea recta, las que se reflejan en el límite de una capa y las que se refractan hacia la capa siguiente. La onda longitudinal o primaria tiene la mayor velocidad, mientras que la onda superficial tiene la menor, alrededor del 60% de la de la onda P .



(Fig. 2: Mapas de ubicación de YOGI)



(Fig. 3: Mapas de ubicación de DNP (Denpasar))

Las distancias entre el epicentro (la proyección del hipocentro sobre la superficie terrestre) y las estaciones YOGI y DNP son, respectivamente, 22.5 km y 500 km. El espesor de la corteza terrestre en Java, Indonesia, es de 30 km. Debajo de la corteza terrestre se encuentra el manto terrestre. Al igual que otros fenómenos ondulatorios, las ondas sísmicas también satisfacen la ley de Snell. Las ondas sísmicas también pueden reflejarse en la capa del manto. En este problema se desprecia la curvatura terrestre.

B.1	La Fig. 2 muestra el sismograma de la estación YOGI. Utilice los datos para hallar la velocidad de la onda P en la corteza terrestre.	0.5 pt.
B.2	Halle los tiempos de recorrido de la onda P directa y de la onda reflejada debidas al terremoto de Yogyakarta que llegaron a la estación DNP en Denpasar.	0.6 pt.

Suponiendo que la Tierra está compuesta únicamente por dos capas, la corteza y el manto, la onda primaria se propaga en ellas con velocidades constantes diferentes. La velocidad en el manto es mayor que en la corteza. Observe que la onda P que se refracta hacia el manto formando un ángulo recto (90°) se refracta parcialmente de nuevo hacia la corteza a lo largo de toda su trayectoria de propagación por el límite entre la corteza y el manto.

B.3	Halle la velocidad de la onda P en el manto.	1.2 pt.
-----	--	---------

Para representar una estructura terrestre más realista, la corteza puede dividirse en varias capas delgadas, de modo que la velocidad de la onda sísmica sea una función de la profundidad z , según $v(z) = v_0 + az$, donde a es una constante, y se aproxima la posición del hipocentro situándolo en la superficie. En este modelo, el rayo de la onda se curva.

B.4	Definamos el parámetro del rayo $p = \sin \theta(z)/v(z)$, donde $\theta(z)$ es el ángulo entre el rayo y la normal. Suponga que una onda sísmica llega a la estación con un parámetro del rayo p ; exprese la distancia al hipocentro en función de p , v_0 y a . Suponga que el hipocentro se encuentra muy cerca de la superficie del suelo.	1.4 pt.
-----	--	---------

B.5	Halle el tiempo de recorrido T desde el hipocentro hasta cualquier estación, en forma de una integral respecto de z .	1.0 pt.
-----	---	---------

La Tierra consiste en un conjunto de capas homogéneas superpuestas, cada una con una velocidad v_i y un espesor δz_i .

B.6	A partir del resultado del apartado anterior, aproxime el tiempo de recorrido (T) desde el hipocentro hasta la estación DNP suponiendo que la corteza consta de solo tres capas discretas, ($i = 1, 2, 3$), caracterizadas por $v_1 = 6.65$ km/sec, $v_2 = 6.97$ km/sec, $v_3 = 6.99$ km/sec, $p = 0.143$ sec/km, $\delta z_1 = 6.0$ km, $\delta z_2 = 9.0$ km, $\delta z_3 = 15$ km.	1.0 pt.
-----	---	---------

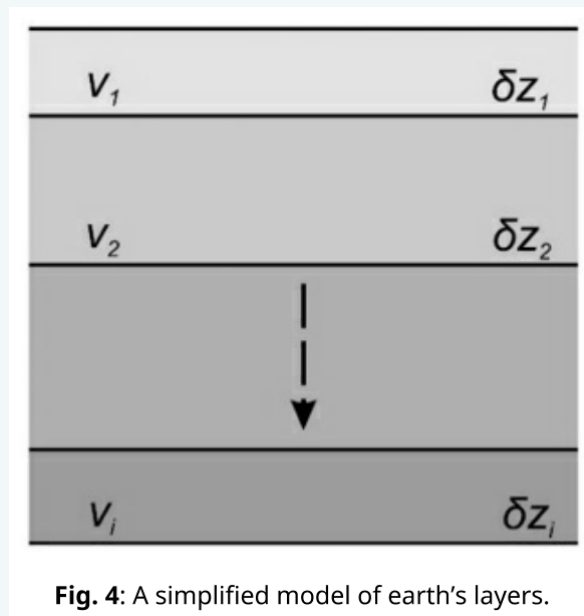


Fig. 4: Modelo simplificado de las capas de la Tierra.

C. Tsunami de Java

El terremoto y tsunami de Pangandaran de 2006 ocurrieron el 17 de julio a las 15:19:27 hora local, frente a las costas occidental y central de Java. Durante un terremoto cuya falla epicentral se encuentra en el fondo oceánico, la falla puede desplazarse y producir una ola extraordinariamente grande llamada tsunami. En otras palabras, un tsunami es una onda de aguas someras que se inicia con una amplitud diminuta, pero con una longitud de onda extremadamente grande.

Considere un movimiento repentino de una falla que provoca la elevación de una parte del fondo oceánico, como se muestra en la Fig. 5. Suponga que la energía del terremoto se transforma en la energía potencial de esta agua oceánica elevada. Para un modelo sencillo, aproximamos el agua elevada mediante un bloque rectangular cuya área es $\lambda L/2$ (donde $L \gg \lambda$) y cuya altura es h .

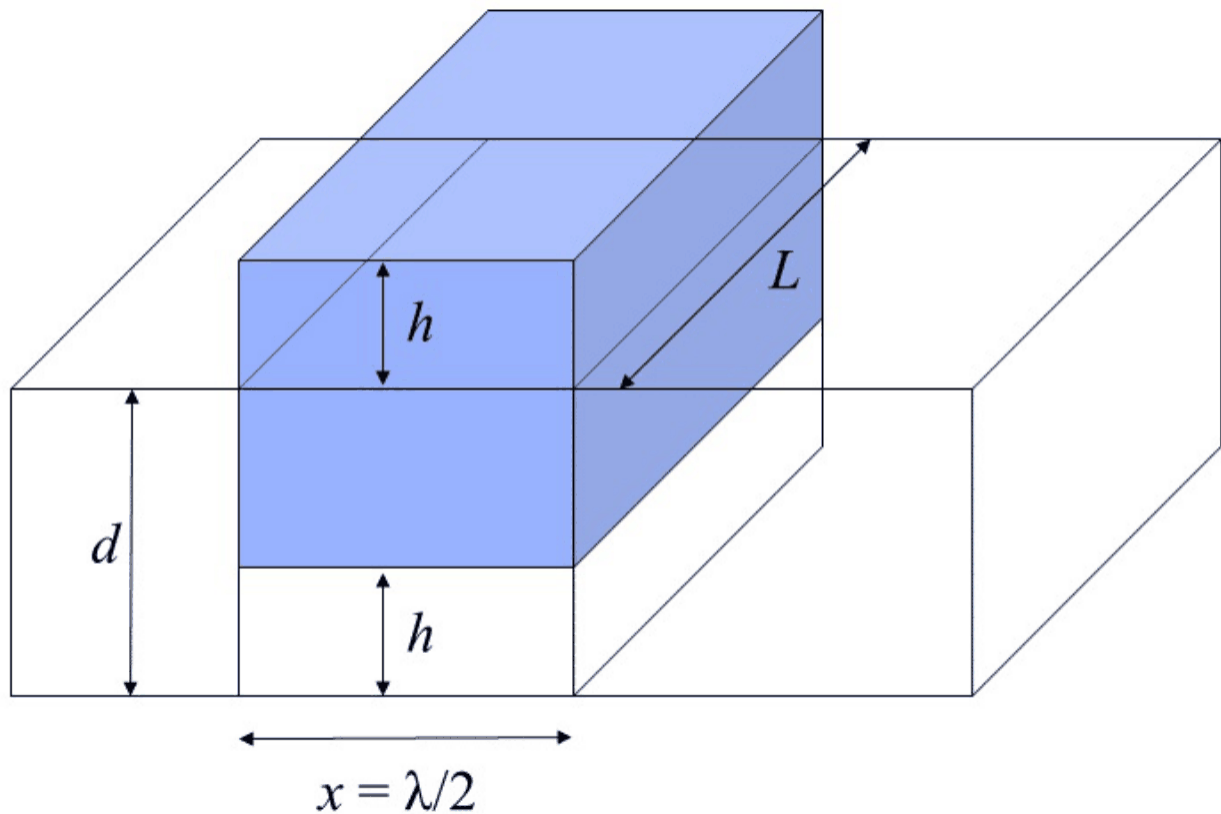


Fig. 5: Ilustración de la onda del tsunami; d es la profundidad del océano.

C.1	Halle la energía potencial almacenada en el agua oceánica elevada debido al terremoto, con respecto a la superficie del océano. Suponga que la densidad del agua de mar es ρ .	0.5 pt.
C.2	Halle la velocidad de la onda del tsunami salvo un factor adimensional.	1.2 pt.
C.3	Mediante un argumento energético, determine la amplitud de la onda del tsunami en función de la profundidad, suponiendo que esta varía lentamente y sabiendo que, a una profundidad d_0 , la amplitud es A_0 .	1.3 pt.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Las lecturas de los sismogramas utilizadas a continuación corresponden aproximadamente a 5 s después del terremoto en YOGI y a 72 s en DNP. Sean v_c y v_m las velocidades en la corteza y en el manto.

- **A.1:** $T_e = \frac{m_m c_{Vm} T_m + m_w c_{Vw} T_w}{m_m c_{Vm} + m_w c_{Vw}}.$
- **A.2:** $p_e = \frac{RT_e}{v_e}.$
- **A.3:** $u = \kappa \sqrt{\frac{pV}{m}}.$
- **B.1:** $v_c \simeq 5.4 \text{ km s}^{-1}.$

- **B.2:** $t_{\text{direct}} \simeq 92.5 \text{ s}$, $t_{\text{reflected}} \simeq 92.8 \text{ s}$, ambos aproximadamente 93 s con la precisión del gráfico.
- **B.3:** $v_m \simeq 7.6 \text{ km s}^{-1}$.
- **B.4:** $X = \frac{2}{ap} \sqrt{1 - p^2 v_0^2}$, suponiendo $a > 0$ y $0 < p v_0 < 1$.
- **B.5:** $T = 2 \int_0^{z_t} \frac{dz}{v(z) \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}$, $z_t = \frac{p^{-1} - v_0}{a}$.
- **B.6:** La discretización directa da $T \simeq 1.84 \times 10^2 \text{ s}$. Esta suma por capas presenta una inconsistencia geométrica con la distancia horizontal indicada de 500 km, que se explica más adelante.
- **C.1:** $U = \frac{1}{4} \rho g \lambda L h^2$.
- **C.2:** $c = C \sqrt{gd}$, donde C es adimensional; la teoría lineal de aguas someras da $C = 1$.
- **C.3:** $A(d) = A_0 \left(\frac{d_0}{d} \right)^{1/4}$.

Solución

A.1 — Temperatura de equilibrio

Durante la mezcla rápida, considere despreciables el intercambio de calor con el entorno y el trabajo realizado en la frontera del sistema. Despreciando los calores latentes indicados y tratando las capacidades caloríficas como constantes, la conservación de la energía interna da

$$m_m c_{Vm} (T_e - T_m) + m_w c_{Vw} (T_e - T_w) = 0.$$

Por tanto,

$$T_e = \frac{m_m c_{Vm} T_m + m_w c_{Vw} T_w}{m_m c_{Vm} + m_w c_{Vw}}.$$

Esta es la media de las temperaturas iniciales ponderada por las dos capacidades caloríficas.

A.2 — Presión de equilibrio

Para n moles de la mezcla de gases ideales,

$$p_e V = n R T_e.$$

Como su volumen molar es $v_e = V/n$,

$$p_e = \frac{R T_e}{v_e} = \frac{R}{v_e} \frac{m_m c_{Vm} T_m + m_w c_{Vw} T_w}{m_m c_{Vm} + m_w c_{Vw}}.$$

Aquí R es la constante universal de los gases.

A.3 — Velocidad de erupción

Suponga, como se indica, que la velocidad depende únicamente de p , m , V . Escribimos

$$u = \kappa p^\alpha m^\beta V^\gamma.$$

Utilizando

$$[p] = M L^{-1} T^{-2}, \quad [m] = M, \quad [V] = L^3,$$

la coherencia dimensional exige

$$\alpha + \beta = 0, \quad -\alpha + 3\gamma = 1, \quad -2\alpha = -1.$$

Por tanto,

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2},$$

y

$$u = \kappa \sqrt{\frac{pV}{m}}.$$

Equivalentemente, $u = \kappa \sqrt{p/\rho_{\text{mix}}}$, donde $\rho_{\text{mix}} = m/V$. El análisis dimensional no determina κ .

B.1 — Velocidad de la onda P en la corteza

Sea $z_s = 15$ km la profundidad de la fuente. La distancia horizontal a YOGI es 22.5 km, por lo que la distancia directa entre la fuente y la estación es

$$s_Y = \sqrt{22.5^2 + 15^2} = 27.04 \text{ km}.$$

La primera desviación visible respecto de la línea de base en la Fig. 2 se produce aproximadamente a las 22:54:05 UTC. Con respecto a la hora del terremoto, 22:54:00, esto da

$$t_Y \simeq 5 \text{ s}.$$

Por consiguiente,

$$v_c = \frac{s_Y}{t_Y} \simeq \frac{27.04}{5} \simeq 5.4 \text{ km s}^{-1}.$$

Los cálculos numéricos siguientes conservan internamente 5.4083 km s^{-1} , aunque el gráfico no justifica tantas cifras significativas.

B.2 — Tiempos de recorrido directo y reflejado hasta DNP

Denotemos la distancia horizontal entre la fuente y DNP por $X = 500$ km, y el espesor de la corteza por $H = 30$ km.

Para la onda directa,

$$s_{\text{direct}} = \sqrt{X^2 + z_s^2},$$

de modo que

$$t_{\text{direct}} = \frac{\sqrt{500^2 + 15^2}}{v_c} \simeq 92.5 \text{ s}.$$

Para la reflexión en el límite horizontal entre corteza y manto, reflejamos la fuente respecto del plano $z = H$. Su imagen se encuentra a una profundidad

$$z_{\text{image}} = 2H - z_s = 45 \text{ km}.$$

Al desplegar el rayo reflejado se obtiene una línea recta desde esta imagen hasta DNP. En consecuencia,

$$s_{\text{reflected}} = \sqrt{X^2 + (2H - z_s)^2},$$

y

$$t_{\text{reflected}} = \frac{\sqrt{500^2 + 45^2}}{v_c} \simeq 92.8 \text{ s}.$$

Ambos tiempos de recorrido son de unos 93 s; su diferencia calculada es aproximadamente 0.33 s.

B.3 — Velocidad de la onda P en el manto

La primera desviación respecto de la línea de base plana en la Fig. 3 se produce aproximadamente a las 22:55:12 UTC, lo que da

$$t_D \simeq 72 \text{ s}.$$

Esta llegada precede a las llegadas directa y reflejada por la corteza calculadas anteriormente. La identificamos con la onda refractada críticamente que viaja a lo largo del límite del manto e irradia de nuevo hacia la corteza.

Sea θ_c el ángulo crítico medido desde la vertical. La ley de Snell da

$$\frac{\sin \theta_c}{v_c} = \frac{1}{v_m}, \quad \sin \theta_c = \frac{v_c}{v_m}.$$

El tramo descendente en la corteza abarca una profundidad $H - z_s$, y el tramo ascendente abarca una profundidad H . La suma de las magnitudes de sus desplazamientos verticales es

$$K = (H - z_s) + H = 2H - z_s = 45 \text{ km}.$$

Por tanto, su longitud total y su proyección horizontal total son

$$s_{\text{crust}} = \frac{K}{\cos \theta_c}, \quad X_{\text{crust}} = K \tan \theta_c.$$

La distancia recorrida a lo largo del límite del manto es

$$X_{\text{mantle}} = X - K \tan \theta_c.$$

Así,

$$t_D = \frac{K}{v_c \cos \theta_c} + \frac{X - K \tan \theta_c}{v_m}.$$

Utilizando $\sin \theta_c = v_c/v_m$, esto se simplifica a

$$t_D = \frac{X}{v_m} + \frac{K}{v_c} \sqrt{1 - \frac{v_c^2}{v_m^2}}.$$

Sustituyendo la lectura del gráfico,

$$72 = \frac{500}{v_m} + \frac{45}{5.4083} \sqrt{1 - \left(\frac{5.4083}{v_m} \right)^2},$$

con las distancias en kilómetros y las velocidades en kilómetros por segundo. Al resolver se obtiene

$$v_m \simeq 7.554 \text{ km s}^{-1},$$

o, con la precisión adecuada,

$$v_m \simeq 7.6 \text{ km s}^{-1}.$$

Como comprobación, $\theta_c \simeq 45.7^\circ$, y el tramo en el manto tiene aproximadamente 454 km de longitud. Los tramos en la corteza requieren unos 11.9 s, y el tramo en el manto unos 60.1 s.

B.4 — Distancia para una velocidad que varía continuamente

Tomemos z positiva hacia abajo y x horizontal. La ley de Snell aplicada entre las capas horizontales delgadas implica que

$$p = \frac{\sin \theta(z)}{v(z)}$$

es constante a lo largo de un rayo. Por tanto,

$$\sin \theta(z) = pv(z), \quad \cos \theta(z) = \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}.$$

En el tramo descendente,

$$\frac{dx}{dz} = \tan \theta(z) = \frac{pv(z)}{\sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}.$$

Para un rayo que regresa a la superficie en un medio con $a > 0$, el punto más profundo se alcanza donde el rayo se vuelve horizontal:

$$pv(z_t) = 1.$$

Como $v(z) = v_0 + az$,

$$z_t = \frac{p^{-1} - v_0}{a}.$$

Aproximando tanto la fuente como el receptor por puntos situados en la superficie, los tramos descendente y ascendente son simétricos. La distancia horizontal es

$$X = 2 \int_0^{z_t} \frac{p(v_0 + az)}{\sqrt{1 - p^2(v_0 + az)^2}} dz.$$

Hagamos $u = p(v_0 + az)$, de modo que $du = pa \, dz$. Entonces

$$X = \frac{2}{ap} \int_{pv_0}^1 \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} du.$$

Como una primitiva es $-\sqrt{1 - u^2}$,

$$X = \frac{2}{ap} \sqrt{1 - p^2 v_0^2} = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{1}{p^2} - v_0^2}.$$

La solución para un rayo que regresa a la superficie requiere $0 < pv_0 < 1$.

B.5 — Integral del tiempo de recorrido

Un segmento de rayo de longitud ds requiere un tiempo

$$dt = \frac{ds}{v(z)}.$$

Como $|dz| = ds \cos \theta(z)$,

$$dt = \frac{|dz|}{v(z)\sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}.$$

Incluyendo tanto el tramo descendente como el ascendente se obtiene

$$T = 2 \int_0^{z_t} \frac{dz}{v(z)\sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}.$$

Para el perfil lineal de velocidad, esto es

$$T = 2 \int_0^{(p^{-1}-v_0)/a} \frac{dz}{(v_0 + az)\sqrt{1 - p^2(v_0 + az)^2}}.$$

La singularidad en el punto de retorno es integrable. Al evaluar la integral también se obtiene

$$T = \frac{2}{a} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - p^2 v_0^2}}{p v_0} \right).$$

Una forma equivalente, útil para examinar la aproximación numérica de B.6, se obtiene restando pX :

$$\begin{aligned} T - pX &= 2 \int_0^{z_t} \left[\frac{1}{v\sqrt{1 - p^2 v^2}} - \frac{p^2 v}{\sqrt{1 - p^2 v^2}} \right] dz \\ &= 2 \int_0^{z_t} \sqrt{\frac{1}{v(z)^2} - p^2} dz. \end{aligned}$$

Por consiguiente, para un rayo geoméricamente consistente,

$$T = pX + 2 \int_0^{z_t} \sqrt{\frac{1}{v(z)^2} - p^2} dz.$$

B.6 — Aproximación de tres capas

Manteniendo la aproximación de una fuente en la superficie de B.4–B.5, discretizamos la primera integral del tiempo de recorrido:

$$T \approx 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\delta z_i}{v_i \sqrt{1 - p^2 v_i^2}}.$$

El factor dos tiene en cuenta el paso por cada capa en los tramos descendente y ascendente.

Utilizando los números exactamente como aparecen en el enunciado se obtiene:

Capa i	$p v_i$	Contribución de ambos tramos $\frac{2\delta z_i}{v_i \sqrt{1 - p^2 v_i^2}}$
1	0.95095	5.833 s
2	0.99671	31.863 s
3	0.99957	146.366 s

Así, la cuadratura directa por capas da

$$T \approx 184.06 \text{ s} \simeq 1.84 \times 10^2 \text{ s}.$$

Existe una limitación de consistencia al interpretar este número como el tiempo de recorrido hasta DNP. La distancia horizontal del mismo rayo discreto sería

$$X_{\text{layers}} = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\delta z_i p v_i}{\sqrt{1 - p^2 v_i^2}} \simeq 1280.9 \text{ km},$$

lo que difiere considerablemente de 500 km.

Si, en cambio, se introduce la distancia horizontal prescrita de 500 km en la segunda forma de B.5 y se aproxima su integral, se obtiene la estimación formal

$$\begin{aligned} T &\approx p(500) + 2 \sum_{i=1}^3 \delta z_i \sqrt{\frac{1}{v_i^2} - p^2} \\ &= 71.5 + 0.8934 \\ &\approx 72.39 \text{ s}. \end{aligned}$$

Las dos fórmulas del modelo continuo son equivalentes, pero estas aproximaciones poco refinadas no conservan la relación de distancia que requieren. Por tanto, 184 s es la suma directa por capas del tiempo de recorrido; 72.4 s es una estimación con distancia horizontal fija. Ambas no pueden describir el mismo rayo en un modelo literal de tres capas con los parámetros proporcionados.

C.1 — Energía potencial del agua elevada

Sea el área horizontal del bloque elevado

$$S = \frac{\lambda L}{2}.$$

Tomando la superficie no perturbada del océano como nivel de potencial gravitatorio nulo, una lámina horizontal de espesor dz a una altura z tiene una masa $\rho S dz$. En consecuencia,

$$U = \int_0^h \rho S g z dz = \frac{1}{2} \rho S g h^2.$$

Por tanto,

$$U = \frac{1}{4} \rho g \lambda L h^2.$$

Equivalentemente, el agua por encima de la superficie original tiene una masa $\rho S h$, con su centro de masas a una altura $h/2$.

C.2 — Velocidad del tsunami

Utilizamos las aproximaciones de aguas someras y amplitud pequeña

$$\lambda \gg d, \quad h \ll d.$$

La velocidad horizontal del fluido es entonces aproximadamente uniforme en toda la profundidad, y la distribución vertical de presión es aproximadamente hidrostática.

Sean $\eta(x, t)$ el desplazamiento de la superficie y $u(x, t)$ la velocidad horizontal del fluido. La conservación del volumen de agua, linealizada alrededor de la profundidad d , da

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + d \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

El gradiente horizontal de presión es $\rho g \partial \eta / \partial x$. Por tanto, la segunda ley de Newton da

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Derivando la primera ecuación respecto del tiempo y sustituyendo la segunda,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g d \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Esta es la ecuación de ondas, de modo que

$$c = \sqrt{gd}.$$

Con el nivel de detalle solicitado en la pregunta,

$$c = C \sqrt{gd},$$

con un factor adimensional C ; las hipótesis lineales de aguas someras indicadas dan $C = 1$. La densidad se cancela porque multiplica tanto a la inercia como a la fuerza restauradora gravitatoria.

C.3 — Amplitud al variar la profundidad

Suponga una variación lenta de la profundidad, reflexión y disipación despreciables, y una anchura constante del frente de onda. Como $L \gg \lambda$, la onda puede tratarse localmente como una onda plana.

Para un desplazamiento sinusoidal de la superficie de amplitud A ,

$$\eta = A \cos(kx - \omega t), \quad \langle \eta^2 \rangle = \frac{A^2}{2}.$$

La energía potencial gravitatoria media por unidad de área horizontal es

$$\bar{\mathcal{E}}_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \rho g \langle \eta^2 \rangle = \frac{1}{4} \rho g A^2.$$

Para una onda progresiva en aguas someras, la continuidad da

$$u = \frac{c}{d} \eta.$$

Por tanto, su energía cinética media por unidad de área horizontal es

$$\bar{\mathcal{E}}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \rho d \langle u^2 \rangle = \frac{\rho c^2 A^2}{4d} = \frac{1}{4} \rho g A^2.$$

Así, la densidad media de energía total es

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \rho g A^2.$$

Las ondas de aguas someras no son dispersivas, por lo que su velocidad de grupo es igual a $c = \sqrt{gd}$.

La conservación del flujo de energía por unidad de anchura del frente de onda da

$$\bar{\mathcal{E}} c = \text{constante},$$

o

$$A^2 \sqrt{d} = \text{constante}.$$

Utilizando la amplitud de referencia A_0 a la profundidad d_0 ,

$$A^2 \sqrt{d} = A_0^2 \sqrt{d_0}.$$

Por tanto,

$$A(d) = A_0 \left(\frac{d_0}{d} \right)^{1/4}.$$

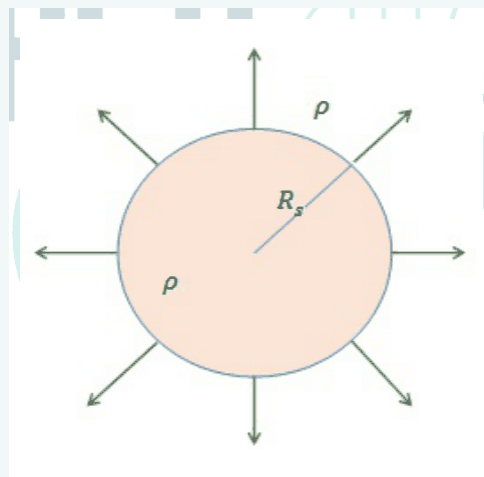
Esta es la ley de Green. Su validez requiere una amplitud pequeña con respecto a la profundidad y una variación suficientemente lenta de esta; no describe la rotura final de la ola.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Inflación cósmica

Debido al movimiento relativo de las galaxias observado desde la Tierra, la longitud de onda del espectro visible de una galaxia determinada difiere de su longitud de onda original, fenómeno conocido como efecto Doppler electromagnético. Para un conjunto de galaxias, cabría esperar una distribución aleatoria de los desplazamientos de longitud de onda: algunos positivos (corrimiento al rojo) y otros negativos (corrimiento al azul). Sin embargo, las observaciones muestran que todas, salvo un grupo de galaxias cercanas, presentan corrimiento al rojo. Esto debe cumplirse incluso si la observación se realiza desde un punto distinto del universo. Se concluye, por tanto, que nuestro universo debe estar expandiéndose. Por otra parte, las irregularidades locales del universo pueden despreciarse a escalas superiores a 100 Mpc, donde $1 \text{ pc} = 3.26 \text{ años luz}$. Al promediar sobre grandes escalas, la distribución de galaxias en agrupaciones se vuelve cada vez más isótropa (independiente de la dirección) y homogénea (independiente de la posición). Por tanto, podemos considerar el universo como materia con una densidad de masa uniforme ρ que se está expandiendo.

A. Expansión del universo



Como modelo sencillo de nuestro universo, consideremos una esfera en expansión de densidad uniforme, inmersa en el medio de una esfera mucho mayor con la misma densidad. Supongamos que, en cierto instante, el radio de la esfera menor es R_s . Para describir la expansión de la esfera, la dependencia temporal del radio $R(t)$ puede expresarse mediante el factor de escala $a(t)$, es decir, $R(t) = a(t)R_s$.

Utilizando la ley de gravitación de Newton para calcular la velocidad de un elemento de masa situado en la superficie de la esfera según este modelo de nuestro universo, se puede obtener un conjunto de ecuaciones de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1 \rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)} \quad (1)$$

donde k es una constante adimensional y c es la velocidad de la luz.

Parte	Pregunta	Puntos
A.1	Determine la constante A_1 en la ecuación (1)	1.3 pt.

Hasta aquí, el tratamiento es no relativista. Sin embargo, puede extenderse a un sistema relativista reinterpretando $\rho(t)c^2$ como la densidad total de energía (excluida la energía potencial gravitatoria). En este sistema relativista se obtiene la segunda ecuación de Friedmann:

$$\dot{\rho} + A_2 \left(\rho + \left(\frac{p}{c^2} \right) \right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (2)$$

utilizando el primer principio de la termodinámica para un sistema adiabático, donde p representa la presión sobre la esfera.

Parte	Pregunta	Puntos
A.2	Determine la constante A_2 en la ecuación (2)	0.9 pt.

Para resolver las ecs. (1) y (2), debe suponerse una relación $p = p(\rho)$, como $p(t)/c^2 = w\rho(t)$, donde w es una constante. También se define el factor $H = \dot{a}/a$, denominado parámetro de Hubble. Los valores actuales de los parámetros suelen indicarse mediante el subíndice 0, como t_0, ρ_0, H_0, a_0 , etc. Por simplicidad, tomamos $a_0 = 1$.

Se cree que el universo comenzó con una gran explosión, denominada Big Bang, que produjo radiación de partículas relativistas. Durante su expansión, el universo se enfría y las partículas que contiene se vuelven no relativistas. Sin embargo, las observaciones recientes ponen de manifiesto que el universo actual está dominado por la densidad de energía de la constante cosmológica. En el caso de los fotones, a medida que el universo se expande, su longitud de onda aumenta proporcionalmente al factor de escala.

Parte	Pregunta	Puntos
A.3	Para cada uno de los tres casos siguientes, determine el valor resultante de w : (i) un universo que contiene únicamente radiación (es decir, energía de fotones), (ii) un universo que contiene únicamente materia no relativista y (iii) un universo con densidad de energía constante.	1.2 pt.
A.4	En el caso de $k = 0$, halle $a(t)$ para cada uno de los casos (i) a (iii) mencionados en A.3. Utilice la condición inicial $a(t = 0) = 0$ para los casos (i) y (ii), y la condición $a_0 = 1$ para el caso (iii).	1.2 pt.

La constante k de la ec. (1) corresponde a la clasificación de la geometría espacial del universo. Su valor puede ser $k = +1$ para un universo de curvatura positiva (cerrado), $k = 0$ para un universo plano (infinito) y $k = -1$ para un universo de curvatura negativa (abierto, infinito). Definamos el cociente de densidades $\Omega = \rho/\rho_c$, donde $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ es la densidad crítica de energía. Obsérvese que A_1 se obtiene en el apartado A.1.

Parte	Pregunta	Puntos
A.5	Expresa k en la ec. (1) en función de Ω , H , a y R_0 .	0.1 pt.
A.6	Halle el intervalo de Ω que corresponde a cada valor de $k = +1$, $k = 0$ y $k = -1$.	0.3 pt.

B. Motivación para introducir una fase de inflación y sus condiciones generales

La observación de la radiación cósmica de fondo de microondas (CMB) sugiere que nuestro universo actual es aproximadamente plano. El problema es que, si esto es cierto, el universo actual debería haber partido de un universo temprano exactamente plano; de lo contrario, cualquier desviación de la planitud acabaría creciendo con el tiempo y destruiría la planitud actual.

Parte	Pregunta	Puntos
B.1	Halle $(\Omega(t) - 1)$ en función del tiempo para un universo dominado por radiación o por materia no relativista (véase el apartado A.3).	0.5 pt.

Para resolver este problema, en algún momento temprano de su historia el universo debería atravesar un período dominado por una densidad de energía constante, que da lugar a una expansión exponencial denominada período de inflación.

Parte	Pregunta	Puntos
B.2	Para este período dominado por una densidad de energía constante, halle $(\Omega(t) - 1)$ en función del tiempo. Suponga que $(\Omega(t) - 1) \ll 1$.	0.3 pt.
B.3	Demuestre que la condición de inflación implica las siguientes condiciones: presión negativa, expansión acelerada ($\ddot{a} > 0$) y disminución del radio de Hubble ($d(aH)^{-1}/dt < 0$).	0.9 pt.
B.4	Demuestre que la condición de disminución del radio de Hubble puede expresarse en función del parámetro $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ como $\epsilon < 1$.	0.2 pt.

La inflación tiene lugar mientras $\epsilon < 1$ y termina cuando $\epsilon = 1$. Podemos definir el número de e-folds N , de modo que $dN = d \ln a = H dt$ y $N = 0$ al final de la inflación.

C. Inflación generada por materia distribuida homogéneamente

Un ejemplo de sistema físico sencillo capaz de generar un período de inflación es un universo dominado por materia distribuida homogéneamente. Este tipo de materia se denomina inflatón y puede caracterizarse mediante una función $\phi(t)$.

La ecuación dinámica de esta materia puede expresarse como

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \quad (3)$$

donde $V = V(\phi)$ es una función potencial y $V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$. El parámetro de Hubble satisface

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right]. \quad (4)$$

donde M_{pl} es una constante denominada masa de Planck reducida. La fase de inflación tiene lugar cuando la energía potencial V domina sobre la energía cinética $\dot{\phi}^2/2$ durante un tiempo suficiente para que el término $\ddot{\phi}$ de la ecuación (3) pueda despreciarse. Esta condición se denomina aproximación de rodadura lenta.

Las magnitudes ϵ y $\eta_V = \delta + \epsilon$, donde $\delta = -\ddot{\phi}/(H\dot{\phi})$, se denominan parámetros de «rodadura lenta».

Parte	Pregunta	Puntos
C.1	Estime el parámetro ϵ , el parámetro η_V y $dN/d\phi$ en función del potencial $V(\phi)$ y de sus derivadas primera y segunda (V' y V'').	1.7 pt.

D. Inflación con un potencial sencillo

Las predicciones de cualquier modelo de inflación deben compararse con las siguientes restricciones observacionales del CMB: $n_s = 0.968 \pm 0.006$ y $r < 0.12$, donde $r = 16\epsilon$ y $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon$ se evalúan en $\phi = \phi_{start}$ para un modelo de inflación generado por una materia dominante. Suponga que el potencial de la materia tiene la forma sencilla

$V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n$, donde n es un entero cualquiera y Λ es una constante.

Parte	Pregunta	Puntos
D.1	Calcule ϕ_{end} al final de la inflación.	0.5 pt.
D.2	Expresa r y n_s en función del número de e-folds N y del entero n . Estime el valor de n que más se aproxima a los valores observacionales de r y n_s . Tome $N = 60$ en sus cálculos.	0.9 pt.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Los resultados siguientes utilizan la densidad crítica dimensionalmente coherente $\rho_c = H^2/A_1$. Escribamos $\Delta = \Omega - 1$. Para D.2, sea $\mathcal{N} = \ln(a_{end}/a_{start}) = -N_{start} > 0$; los 60 e-folds solicitados significan $\mathcal{N} = 60$.

- **A.1:** $A_1 = \frac{8\pi G}{3}$.
- **A.2:** $A_2 = 3$.
- **A.3:** $w_{\text{radiation}} = \frac{1}{3}$, $w_{\text{matter}} = 0$, $w_{\text{constant density}} = -1$.
- **A.4:** En la rama de expansión,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad a(t) &= (2H_0 t)^{1/2} = (t/t_0)^{1/2}, \\ \text{(ii)} \quad a(t) &= \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3} = (t/t_0)^{2/3}, \\ \text{(iii)} \quad a(t) &= e^{H_0(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Aquí $H_0^2 = 8\pi G\rho_0/3$, con $H_0 t_0 = 1/2$ en (i) y $2/3$ en (ii).

- **A.5:** $k = (\Omega - 1) \left(\frac{aHR_0}{c} \right)^2$.
- **A.6:** $k = +1 : \Omega > 1$; $k = 0 : \Omega = 1$; $k = -1 : \Omega < 1$. Para una densidad no negativa, el último intervalo es $0 \leq \Omega < 1$.

- **B.1:** A orden dominante cerca de la planitud, respecto a un instante de referencia t_* ,

$$\Delta(t) \simeq \begin{cases} \Delta_*(t/t_*), & \text{radiación,} \\ \Delta_*(t/t_*)^{2/3}, & \text{materia no relativista.} \end{cases}$$

- **B.2:** Con $H_\Lambda = \sqrt{8\pi G\rho_\Lambda/3}$,

$$\Delta(t) \simeq \Delta_i e^{-2H_\Lambda(t-t_i)}.$$

- **B.3:** La densidad constante da

$$p = -\rho c^2 < 0, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G\rho}{3} > 0, \quad \frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0.$$

En general, la expansión acelerada requiere $p < -\rho c^2/3$.

- **B.4:**

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{\epsilon - 1}{a} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \epsilon < 1.$$

- **C.1:** En la aproximación de rodadura lenta,

$$\epsilon \simeq \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad \eta_V \simeq M_{pl}^2 \frac{V''}{V}, \quad \frac{dN}{d\phi} \simeq -\frac{V}{M_{pl}^2 V'}.$$

- **D.1:** Para $n > 0$, en la rama de campo positivo,

$$\phi_{\text{end}} \simeq \frac{n}{\sqrt{2}} M_{pl}.$$

El umbral formal es $|\phi| \simeq |n| M_{pl} / \sqrt{2}$. Los valores no positivos de n no dan lugar al final supuesto de la inflación de rodadura lenta en este modelo.

- **D.2:**

$$r \simeq \frac{16n}{4\mathcal{N} + n}, \quad n_s \simeq 1 - \frac{2(n+2)}{4\mathcal{N} + n}.$$

De forma equivalente, los denominadores son $n - 4N_{\text{start}}$ en la convención con signo del enunciado. Para $\mathcal{N} = 60$,

n	r	n_s
1	0.0664	0.9751
2	0.1322	0.9669

Si se exige $r < 0.12$, $n = 1$ es la opción entera positiva más cercana. Ningún entero positivo satisface ambas restricciones observacionales citadas.

Solución

A.1

Consideremos un elemento de masa en la superficie de una esfera comóvil de radio $R = aR_s$. Según el teorema de las capas esféricas de Newton, su aceleración depende únicamente de la masa encerrada,

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3.$$

En el modelo no relativista, esta masa encerrada es constante. La ecuación de Newton es

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}.$$

Multiplicando por $\dot{R}$ e integrando se obtiene la energía mecánica específica conservada

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{GM}{R} = \mathcal{E}.$$

Por tanto,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{2GM}{R^3} + \frac{2\mathcal{E}}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{2\mathcal{E}}{a^2 R_s^2}.$$

Puesto que $\dot{R}/R = \dot{a}/a$, la comparación con (1), identificando $2\mathcal{E} = -kc^2$, da

$$\boxed{A_1 = \frac{8\pi G}{3}}.$$

A.2

Sea el volumen físico de la esfera

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi}{3}(aR_s)^3.$$

Su energía interna total es $U = \rho c^2 \mathcal{V}$. El primer principio para un sistema adiabático da

$$dU = -p d\mathcal{V}.$$

Así,

$$c^2 \mathcal{V} d\rho + (\rho c^2 + p) d\mathcal{V} = 0.$$

Utilizando $\dot{\mathcal{V}}/\mathcal{V} = 3\dot{a}/a$,

$$\dot{\rho} + 3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0.$$

Por consiguiente,

$$\boxed{A_2 = 3}.$$

A.3

Para w constante, la ecuación de continuidad se convierte en

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a},$$

por lo que, utilizando $a_0 = 1$,

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}.$$

Para la radiación, la densidad numérica de fotones disminuye como a^{-3} . Cada fotón tiene una energía hc/λ , y la dependencia dada de la longitud de onda, $\lambda \propto a$, hace que su energía sea proporcional a a^{-1} . Por tanto,

$$\rho c^2 \propto a^{-4},$$

lo que da

$$3(1+w) = 4, \quad w = \frac{1}{3}.$$

Para la materia no relativista, la energía está dominada por la energía en reposo por partícula, aproximadamente constante. La densidad numérica disminuye como a^{-3} , lo que da

$$\rho \propto a^{-3}, \quad w = 0.$$

Esta es la aproximación de materia sin presión.

Para una densidad de energía constante, $\dot{\rho} = 0$. En un universo en expansión, la ecuación de continuidad exige

$$\rho + \frac{p}{c^2} = 0,$$

y, por consiguiente,

$$w = -1.$$

A.4

Para $k = 0$,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho = H_0^2 a^{-3(1+w)}.$$

Eligiendo la rama de expansión,

$$\dot{a} = H_0 a^{1-\frac{3}{2}(1+w)}.$$

Para $w \neq -1$, la integración con $a(0) = 0$ da

$$a^{\frac{3}{2}(1+w)} = \frac{3}{2}(1+w)H_0 t.$$

En consecuencia, para la radiación,

$$a(t) = (2H_0 t)^{1/2}.$$

La normalización $a(t_0) = 1$ implica $2H_0 t_0 = 1$, de modo que

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}.$$

Para la materia no relativista,

$$a(t) = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3}.$$

Aquí $3H_0 t_0/2 = 1$, lo que da

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}.$$

Para una densidad de energía constante, $H = H_0$ es constante. Integrando $\dot{a}/a = H_0$ e imponiendo $a(t_0) = 1$,

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)}.$$

A.5

Al hacer $k = 0$ en (1), se determina la **densidad equivalente de masa** crítica:

$$\rho_c = \frac{H^2}{A_1} = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

Por tanto, la definición impresa $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ es dimensionalmente incoherente. La densidad crítica de energía correspondiente es

$$\rho_c c^2 = \frac{H^2 c^2}{A_1}.$$

Utilizando la definición coherente,

$$\Omega = \frac{A_1 \rho}{H^2}.$$

Dividimos (1) por H^2 :

$$1 = \Omega - \frac{kc^2}{a^2 R_s^2 H^2}.$$

Puesto que $a_0 = 1$, el radio actual es $R_0 = R_s$. Por tanto,

$$k = (\Omega - 1) \frac{a^2 H^2 R_0^2}{c^2}.$$

A.6

El factor que multiplica a $\Omega - 1$ en A.5 es positivo. Por consiguiente, k y $\Omega - 1$ tienen el mismo signo:

Curvatura espacial	Cociente de densidades
$k = +1$, cerrado	$\Omega > 1$
$k = 0$, plano	$\Omega = 1$
$k = -1$, abierto	$\Omega < 1$

Con una densidad de energía no negativa, el intervalo correspondiente a un universo abierto es $0 \leq \Omega < 1$.

B.1

A partir de A.5,

$$\Delta(t) \equiv \Omega(t) - 1 = \frac{kc^2}{R_0^2 a^2 H^2} = \frac{kc^2}{R_0^2 \dot{a}^2}.$$

Esta identidad es exacta.

Para estudiar una pequeña desviación de la planitud, evaluamos $\dot{a}$ utilizando las soluciones de universo plano de A.4 a orden dominante. Si

$$a \propto t^\alpha,$$

entonces

$$\dot{a}^2 \propto t^{2\alpha-2}, \quad \Delta \propto t^{2-2\alpha}.$$

Durante la era dominada por la radiación, $\alpha = 1/2$, por lo que

$$\Delta(t) \simeq \Delta_* \frac{t}{t_*}.$$

Durante la era dominada por la materia, $\alpha = 2/3$, por lo que

$$\Delta(t) \simeq \Delta_* \left(\frac{t}{t_*} \right)^{2/3}.$$

Así, la magnitud de cualquier desviación pequeña y no nula de la planitud crece durante cualquiera de las dos eras. Estas leyes de potencias son válidas mientras la curvatura siga siendo una pequeña corrección a la expansión.

B.2

Sea ρ_Λ la densidad constante, y definamos

$$H_\Lambda^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda.$$

Para $|\Omega - 1| \ll 1$, la contribución de la curvatura a (1) es pequeña, de modo que

$$H \simeq H_\Lambda, \quad a(t) \simeq a_i e^{H_\Lambda(t-t_i)}.$$

Al sustituir en

$$\Delta = \frac{kc^2}{R_0^2 a^2 H^2}$$

se obtiene

$$\Delta(t) \simeq \Delta_i e^{-2H_\Lambda(t-t_i)}.$$

Por tanto, la inflación suprime exponencialmente las desviaciones de la planitud.

B.3

Derivamos (1) y utilizamos la ecuación de continuidad:

$$2H\dot{H} = A_1\dot{\rho} + \frac{2kc^2 H}{R_0^2 a^2},$$

de modo que

$$\dot{H} = -\frac{3A_1}{2} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}.$$

Al sumar H^2 de (1), se elimina el término de curvatura:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\frac{A_1}{2} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right).$$

Utilizando A.1,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right).$$

Para una densidad positiva, la expansión acelerada requiere

$$p < -\frac{1}{3}\rho c^2,$$

lo que, en particular, exige una presión negativa.

Para el período de densidad constante considerado aquí, A.3 da $p = -\rho c^2$. Por consiguiente,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3}\rho > 0.$$

Por último, $aH = \dot{a}$, de modo que

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\dot{a}} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} < 0.$$

Esto demuestra las tres propiedades solicitadas.

El radio que aparece en esta condición es el radio de Hubble **comóvil**, $c/(aH)$; la constante c no afecta al signo de la derivada.

B.4

La derivación directa da

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{a^2 H^2} = -\frac{1}{a} \left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right).$$

Puesto que $\epsilon = -\dot{H}/H^2$,

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{\epsilon - 1}{a}.$$

Como $a > 0$, el radio disminuye exactamente cuando

$$\epsilon < 1.$$

De forma equivalente,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \epsilon).$$

C.1

Primero derivamos (4):

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{pl}^2} (\dot{\phi}\ddot{\phi} + V'\dot{\phi}).$$

La ecuación (3) da $\ddot{\phi} + V' = -3H\dot{\phi}$, de modo que

$$2H\dot{H} = -\frac{H\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2}.$$

Así,

$$\boxed{\dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2M_{pl}^2}}, \quad \epsilon = \frac{\dot{\phi}^2}{2M_{pl}^2 H^2}.$$

Las hipótesis de rodadura lenta dan

$$H^2 \simeq \frac{V}{3M_{pl}^2}, \quad 3H\dot{\phi} \simeq -V'.$$

Sustituyendo estas expresiones en ϵ ,

$$\epsilon \simeq \frac{V'^2}{18M_{pl}^2 H^4} = \boxed{\frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2}.$$

Para obtener η_V , derivamos la ecuación del campo en la aproximación de rodadura lenta:

$$3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} \simeq -V''\dot{\phi}.$$

Dividiendo por $3H^2\dot{\phi}$,

$$\frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \simeq -\frac{V''}{3H^2}.$$

El miembro izquierdo es $-\epsilon - \delta$. Por tanto,

$$\eta_V = \delta + \epsilon \simeq \frac{V''}{3H^2} = \boxed{M_{pl}^2 \frac{V''}{V}}.$$

Por último, utilizando la definición del enunciado $dN = Hdt$,

$$\frac{dN}{d\phi} = \frac{H}{\dot{\phi}} \simeq -\frac{3H^2}{V'} = \boxed{-\frac{V}{M_{pl}^2 V'}}.$$

Esta expresión es válida a lo largo de una trayectoria de evolución monótona del campo.

D.1

Para

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n,$$

los cocientes de las derivadas son

$$\frac{V'}{V} = \frac{n}{\phi}, \quad \frac{V''}{V} = \frac{n(n-1)}{\phi^2}.$$

En consecuencia,

$$\epsilon \simeq \frac{n^2 M_{pl}^2}{2\phi^2}.$$

Extrapolando esta expresión de rodadura lenta hasta la condición final $\epsilon = 1$, se obtiene

$$|\phi_{\text{end}}| \simeq \frac{|n|}{\sqrt{2}} M_{pl}.$$

Para $n > 0$, tomamos la rama de campo positivo. El campo evoluciona hacia valores menores de ϕ , por lo que ϵ aumenta y alcanza la unidad en

$$\phi_{\text{end}} \simeq \frac{n}{\sqrt{2}} M_{pl}.$$

El campo tiene las mismas unidades que M_{pl} .

El enunciado permite cualquier entero n , pero la salida supuesta restringe los casos pertinentes:

- Para $n = 0$, el potencial es constante y $\epsilon \simeq 0$; este modelo no proporciona una salida de la inflación de rodadura lenta.
- Para $n < 0$ y $\phi > 0$, $V' < 0$, por lo que $\dot{\phi} \simeq -V'/(3H) > 0$. Así, $\epsilon \propto \phi^{-2}$ disminuye. El umbral formal $\epsilon = 1$ corresponde a una entrada en la inflación.

El resultado para el campo al final de la inflación es una estimación, porque la rodadura lenta deja de ser una aproximación controlada cuando ϵ se acerca a la unidad.

D.2

Para el potencial monomial, C.1 da

$$\frac{dN}{d\phi} \simeq -\frac{\phi}{nM_{pl}^2}.$$

Integrando desde el final de la inflación, donde $N = 0$,

$$N(\phi) \simeq -\frac{\phi^2 - \phi_{\text{end}}^2}{2nM_{pl}^2}.$$

Para $n > 0$, el campo inicial es mayor que el campo final, de modo que el N_{start} del enunciado es negativo. Definimos la duración positiva

$$\mathcal{N} \equiv -N_{\text{start}} = \ln \frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{start}}}.$$

Entonces

$$\phi_{\text{start}}^2 \simeq \phi_{\text{end}}^2 + 2nM_{pl}^2\mathcal{N} = \frac{n}{2}(4\mathcal{N} + n)M_{pl}^2.$$

Los parámetros de rodadura lenta al inicio son, por tanto,

$$\epsilon_{\text{start}} \simeq \frac{n}{4\mathcal{N} + n}, \quad \eta_{V,\text{start}} \simeq \frac{2(n-1)}{4\mathcal{N} + n}.$$

Así,

$$r \simeq \frac{16n}{4\mathcal{N} + n}$$

y

$$n_s \simeq 1 + \frac{4(n-1) - 6n}{4\mathcal{N} + n} = 1 - \frac{2(n+2)}{4\mathcal{N} + n}.$$

En la convención con signo del enunciado, estas expresiones se convierten en

$$r \simeq \frac{16n}{n - 4N_{\text{start}}}, \quad n_s \simeq 1 - \frac{2(n+2)}{n - 4N_{\text{start}}}.$$

Para $\mathcal{N} \gg n$, las formas habituales a orden dominante son

$$r \simeq \frac{4n}{\mathcal{N}}, \quad n_s \simeq 1 - \frac{n+2}{2\mathcal{N}}.$$

Interpretando el $N = 60$ solicitado como una duración positiva $\mathcal{N} = 60$, la cota tensorial da

$$\frac{16n}{240+n} < 0.12 \implies n < \frac{28.8}{15.88} \simeq 1.814.$$

Por tanto, el único entero positivo que satisface esta cota es $n = 1$.

Las predicciones numéricas, todas adimensionales, son:

n	r	n_s	Comparación con las restricciones indicadas
1	0.0664	0.9751	Satisface $r < 0.12$; n_s está ligeramente por encima de 0.974
2	0.1322	0.9669	Satisface el intervalo citado de n_s ; supera la cota de r
3	0.1975	0.9588	Fuera de ambas restricciones citadas

Por consiguiente,

$$n = 1 \quad \text{si se exige la cota superior tensorial.}$$

El índice espectral predicho está aproximadamente 0.0011 por encima del extremo superior del intervalo citado. El entero $n = 2$ se aproxima más al valor central del índice espectral, pero viola la cota tensorial. **Ningún entero positivo satisface simultáneamente ambas restricciones citadas.**

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.