

IPhO 2017

Theorieaufgaben und Lösungen · Yogyakarta, Indonesien · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/2017/

Aufgabe 1: Dunkle Materie

Den ersten formalen Schluss auf die Existenz Dunkler Materie zog Fritz Zwicky auf Grundlage seiner Beobachtungen zur Dynamik des Coma-Galaxienhaufens, eines Haufens aus etwa tausend Galaxien. Zwicky verwendete den Virialsatz, um die Masse des Galaxienhaufens abzuschätzen. In einem einfachen System aus Sonne und Planet, in dem der Planet die Sonne auf einer Kreisbahn umkreist, stellt der Virialsatz einen exakten Zusammenhang zwischen der kinetischen Energie des Planeten und seiner gravitativen potenziellen Energie her. Im allgemeinen Fall eines Systems aus vielen Teilchen, die durch eine Wechselwirkung gebunden sind, verknüpft der Virialsatz den zeitlichen Mittelwert der gesamten kinetischen Energie mit dem zeitlichen Mittelwert der gesamten potenziellen Energie.

Auf Grundlage seiner Beobachtungen der Geschwindigkeiten der Galaxien nahe dem Rand des Coma-Galaxienhaufens schätzte Zwicky im Jahr 1933 ab, dass der Haufen mehr Masse besitzt, als durch die sichtbaren Objekte (d. h. die Galaxien) erfasst wurde. Die Gravitationsanziehung der beobachtbaren Materie (der Galaxien) war zu gering, um die Geschwindigkeiten der Galaxien zu erklären. Daher musste es verborgene Massen geben, die diese hohen Geschwindigkeiten erklären. Diese verborgene Masse ist die Masse der Dunklen Materie. Nehmen Sie im Folgenden an, dass die Masse jeder Galaxie die Summe aus ihrer sichtbaren Masse und der Masse der Dunklen Materie ist, die sich gemeinsam mit dieser Galaxie bewegt, und dass Dunkle Materie mit sichtbarer Materie ausschließlich gravitativ wechselwirkt.

A. Galaxienhaufen

Betrachten Sie einen Galaxienhaufen, der aus einer großen Anzahl N von Galaxien und Dunkler Materie besteht, die homogen in einer Kugel mit Radius R verteilt sind. Die Gesamtmasse des Haufens (Galaxien und Dunkle Materie) sei M . Nehmen Sie an, dass die mittlere Gesamtmasse (sichtbare und Dunkle Materie) einer Galaxie m beträgt.

A.1

Nehmen Sie eine kontinuierliche Materieverteilung im Haufen an und bestimmen Sie die gesamte gravitative potenzielle Energie des Haufens in Abhängigkeit von M und R .

1.0
Pkt.

Aufgrund der kosmologischen Expansion entfernt sich jedes weit entfernte Objekt von einem Beobachter auf der Erde mit einer Geschwindigkeit, die vom Abstand zwischen dem Beobachter und dem Objekt abhängt. Eine bestimmte Lyman-Frequenz (eine Emissionsspektrallinie des Wasserstoffs) einer Supernova vom Typ IA in der i -ten Galaxie des Galaxienhaufens wird als f_i beobachtet, mit $i = 1, \dots, N$, während die entsprechende Lyman-Frequenz auf der Erde f_0 beträgt.

A.2	Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit V_{cr} , mit der sich der gesamte Galaxienhaufen von der Erde entfernt, in Abhängigkeit von f_i (mit $i = 1, \dots, N$), f_0 und N . Beachten Sie, dass die Geschwindigkeit einer Galaxie im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit c sehr klein ist.	0.5 Pkt.
A.3	Nehmen Sie an, dass die Geschwindigkeiten der Galaxien relativ zum Zentrum des Haufens isotrop sind (in allen Richtungen gleich verteilt), und bestimmen Sie die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit v_{rms} der Galaxien relativ zum Zentrum des Haufens in Abhängigkeit von N , f_i (mit $i = 1, \dots, N$) und f_0 . Bestimmen Sie aus diesem Ergebnis die mittlere kinetische Energie einer Galaxie relativ zum Zentrum des Haufens in Abhängigkeit von v_{rms} und m .	1.5 Pkt.

Zur Bestimmung der Gesamtmasse des Haufens kann der Virialsatz verwendet werden. Er besagt, dass für ein System von Teilchen, die durch ihre konservative Kraft gebunden sind, gilt:

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

wobei $\langle K \rangle_t$ der zeitliche Mittelwert der gesamten kinetischen Energie, $\langle U \rangle_t$ der zeitliche Mittelwert der gesamten potenziellen Energie und γ eine Konstante ist. Dieser Satz lässt sich unter der Annahme herleiten, dass in einem durch seine eigene Wechselwirkung gebundenen Teilchensystem die Beträge des Ortsvektors und des Impulses jedes Teilchens endlich sind und somit auch die folgende Größe endlich ist:

$$\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

A.4	Nutzen Sie die Tatsache, dass der zeitliche Mittelwert von $d\Gamma/dt$ über einen langen Zeitraum verschwindet, $\langle d\Gamma/dt \rangle_t = 0$, und bestimmen Sie γ im obigen Virialsatz für den Fall der Gravitationswechselwirkung. (Hinweis: Versuchen Sie, die Aufgabe mit der Summe in Γ für eine kleine endliche Anzahl von Galaxien zu lösen.)	1.7 Pkt.
A.5	Bestimmen Sie aus den bisherigen Ergebnissen die gesamte Masse der Dunklen Materie im Haufen in Abhängigkeit von N , m_g , R und v_{rms} , wobei m_g die mittlere gesamte sichtbare Masse einer Galaxie ist. Beachten Sie, dass die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der Dunklen Materie mit derjenigen der Galaxien übereinstimmt.	0.5 Pkt.

B. Dunkle Materie in einer Galaxie

Dunkle Materie befindet sich auch innerhalb und in der Umgebung einer Galaxie. Betrachten Sie eine kugelförmige Galaxie mit dem Radius R_g ihres sichtbaren Randes (ungefähr der äußerste Abstand, in dem noch eine große Anzahl von Sternen sichtbar ist; beachten Sie jedoch, dass eine sehr kleine Anzahl von Sternen auch im Bereich jenseits von R_g verteilt sein kann). Nehmen Sie an, dass die Sterne in der Galaxie punktförmige Teilchen mit einer mittleren Masse m_s sind. Die Sterne in der Galaxie sind homogen mit einer Anzahldichte n verteilt und bewegen sich annahmegemäß auf Kreisbahnen.

B.1	Falls die Galaxie ausschließlich aus Sternen besteht, bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v(r)$ eines Sterns als Funktion seines Abstands vom Zentrum der Galaxie und skizzieren Sie $v(r)$ für $r < R_g$ und $r \geq R_g$.	0.8 Pkt.
-----	---	----------

Auf die Existenz Dunkler Materie lässt sich aus der Rotationskurve einer Galaxie schließen, also aus einer aus Beobachtungen gewonnenen Darstellung von $v(r)$. Die folgende Abbildung zeigt einen typischen Verlauf einer galaktischen Rotationskurve. Sie dürfen vereinfachend annehmen, dass $v(r)$ für $r \leq R_g$ eine lineare Funktion ist und für $r > R_g$ den konstanten Wert v_0 hat.

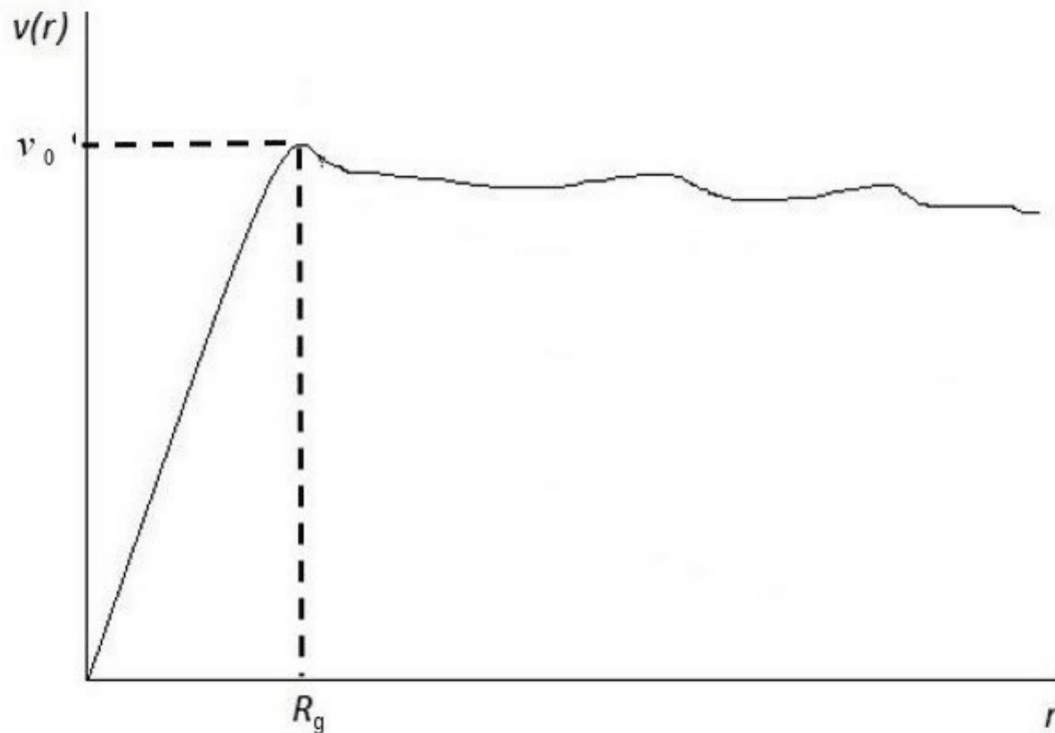


Abb. 1 Darstellung der Rotationskurve einer Galaxie.

B.2	Bestimmen Sie die Gesamtmasse m_R desjenigen Teils der Galaxie, der innerhalb der Kugel mit Radius R_g liegt, in Abhängigkeit von v_0 und R_g .	0.5 Pkt.
-----	---	-------------

Die Abweichung zwischen der Abbildung in B.2. und dem in B.1 erhaltenen Graphen weist auf die Existenz Dunkler Materie hin.

B.3	Bestimmen Sie die Massendichte der Dunklen Materie als Funktion von r , R_g , v_0 , n und m_s für $r < R_g$ und $r \geq R_g$.	1.5 Pkt.
-----	--	-------------

C. Interstellares Gas und Dunkle Materie

Betrachten Sie nun eine junge Galaxie, deren Masse überwiegend aus interstellarem Gas und Dunkler Materie besteht (vernachlässigen Sie die Masse der Sterne). Das interstellare Gas bestehe aus identischen Teilchen der Masse m_p . Die Anzahldichte $n(r)$ und die Temperatur $T(r)$ des Gases hängen vom Abstand r vom Zentrum der Galaxie ab. Obwohl im Gas viele physikalische Prozesse ablaufen, können wir annehmen, dass es sich aufgrund seines Drucks und der Gravitationsanziehung der Galaxie im hydrostatischen Gleichgewicht befindet.

C.1	Bestimmen Sie den Druckgradienten des Gases dP/dr in Abhängigkeit von $m'(r)$, r und $n(r)$. Dabei ist $m'(r)$ die Gesamtmasse aus Gas und Dunkler Materie innerhalb einer Kugel mit Radius r um das Zentrum der Galaxie.	0.5 Pkt.
C.2	Nehmen Sie an, dass das interstellare Gas ein ideales Gas ist, und bestimmen Sie $m'(r)$ in Abhängigkeit von $n(r)$, $T(r)$ und deren Ableitungen nach r .	0.5 Pkt.

Nehmen Sie im Folgenden der Einfachheit halber an, dass das Gas eine isotherme Verteilung mit der Temperatur T_0 aufweist und die Anzahldichte des interstellaren Gases gegeben ist durch

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2},$$

wobei α und β Konstanten sind.

C.3	Bestimmen Sie die Massendichte der Dunklen Materie als Funktion von r innerhalb der Galaxie.	1.0 Pkt.
-----	--	----------

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Es sei

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i.$$

Dabei ist G die Gravitationskonstante und k_B die Boltzmann-Konstante. Die Ergebnisse zum Dopplereffekt berücksichtigen Terme bis zur ersten Ordnung in der durch c geteilten Geschwindigkeit.

• A.1

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}.$$

• A.2

$$V_{cr} \simeq c \left(1 - \frac{\bar{f}}{f_0} \right).$$

• A.3

$$v_{rms} \simeq \frac{c}{f_0} \sqrt{\frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2}, \quad \langle K_{gal} \rangle = \frac{1}{2} m v_{rms}^2.$$

• A.4

$$\gamma = \frac{1}{2}.$$

• A.5

$$M_{DM} = \frac{5Rv_{rms}^2}{3G} - Nm_g.$$

• B.1

$$v(r) = \begin{cases} r \sqrt{\frac{4\pi G n m_s}{3}}, & 0 \leq r < R_g, \\ \sqrt{\frac{4\pi G n m_s R_g^3}{3r}}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Der Graph steigt vom Ursprung aus linear bis zu seinem Maximum bei R_g an, fällt anschließend wie $r^{-1/2}$ ab und nähert sich null.

• B.2

$$m_R = \frac{v_0^2 R_g}{G}.$$

• B.3

$$\rho_{\text{DM}}(r) = \begin{cases} \frac{3v_0^2}{4\pi G R_g^2} - n m_s, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2}{4\pi G r^2}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

• C.1

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G m'(r) m_p n(r)}{r^2}.$$

• C.2

$$m'(r) = - \frac{k_B r^2}{G m_p} \left[\frac{dT}{dr} + \frac{T(r)}{n(r)} \frac{dn}{dr} \right].$$

• C.3

$$\rho_{\text{DM}}(r) = \frac{k_B T_0 (\beta^2 + 6\beta r + 3r^2)}{4\pi G m_p r^2 (\beta + r)^2} - \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2} \quad (r > 0).$$

Lösung

A.1

Wählen wir die gravitative potenzielle Energie gleich null, wenn die gesamte Masse im Unendlichen verteilt ist. Die konstante Massendichte und die innerhalb des Radius r liegende Masse sind

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}, \quad M(r) = \frac{4\pi}{3} \rho r^3 = M \frac{r^3}{R^3}.$$

Wir bauen die Kugel auf, indem wir nacheinander dünne Schalen aus dem Unendlichen heranbringen. Eine Schale mit der Masse

$$dM = 4\pi r^2 \rho dr = \frac{3Mr^2}{R^3} dr$$

hat mit der bereits zusammengeführten inneren Masse die Wechselwirkungsenergie

$$dU = -\frac{GM(r)}{r} dM.$$

Bei diesem Aufbau wird jede Paarwechselwirkung genau einmal gezählt. Daher gilt

$$U = -\int_0^R \frac{G}{r} \left(\frac{Mr^3}{R^3} \right) \left(\frac{3Mr^2}{R^3} \right) dr = -\frac{3GM^2}{R^6} \frac{R^5}{5}.$$

Somit ist

$$\boxed{U = -\frac{3GM^2}{5R}}.$$

A.2

Sei u_i die Geschwindigkeitskomponente der Galaxie i relativ zur Erde entlang der Sichtlinie, mit positivem Vorzeichen bei einer Entfernung von der Erde. Für $u_i \ll c$ lautet die Dopplerbeziehung in erster Ordnung

$$f_i \simeq f_0 \left(1 - \frac{u_i}{c} \right),$$

also

$$u_i \simeq c \frac{f_0 - f_i}{f_0}.$$

Die internen Geschwindigkeiten mitteln sich im Ruhesystem des Haufens zu null. Daher ist die Geschwindigkeit, mit der sich der Haufen von der Erde entfernt, der Mittelwert dieser gemessenen Geschwindigkeitskomponenten entlang der Sichtlinie:

$$V_{cr} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \simeq \frac{c}{Nf_0} \sum_{i=1}^N (f_0 - f_i).$$

Folglich gilt

$$\boxed{V_{cr} \simeq c \left(1 - \frac{1}{Nf_0} \sum_{i=1}^N f_i \right) = c \left(1 - \frac{\bar{f}}{f_0} \right)}.$$

A.3

Die Komponente der Geschwindigkeit der Galaxie i relativ zum Zentrum des Haufens entlang der Sichtlinie ist

$$w_i = u_i - V_{cr} \simeq -\frac{c}{f_0} (f_i - \bar{f}).$$

Bei einer isotropen Geschwindigkeitsverteilung verteilt sich das mittlere Geschwindigkeitsquadrat gleichmäßig auf drei zueinander senkrechte Richtungen:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle.$$

Wählen wir die z -Richtung entlang der Sichtlinie, so folgt

$$v_{rms}^2 = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = 3\langle w^2 \rangle = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N w_i^2.$$

Somit gilt

$$v_{rms} \simeq \frac{c}{f_0} \sqrt{\frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2}.$$

Äquivalent dazu ist

$$v_{rms}^2 \simeq \frac{3c^2}{f_0^2} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i \right)^2 \right].$$

Mit der repräsentativen Gesamtmasse m einer Galaxie ist die mittlere kinetische Energie im Ruhesystem des Haufens

$$\langle K_{gal} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m v_{rms}^2.$$

A.4

Wir arbeiten im Schwerpunktsystem. Die Ableitung der gegebenen Größe ergibt

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i + \vec{p}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2K.$$

Sei $\vec{F}_{ij}$ die Kraft, die Teilchen j auf Teilchen i ausübt. Nach dem dritten Newtonschen Gesetz lässt sich der Kraftterm zu ungeordneten Paaren zusammenfassen:

$$\sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = \sum_{i < j} \left(\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \cdot \vec{F}_{ji} \right) = \sum_{i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{F}_{ij}.$$

Für die Newtonsche Gravitation gilt

$$\vec{F}_{ij} = -Gm_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}^3}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|.$$

Daher ist

$$\sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = - \sum_{i < j} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} = U,$$

wobei U die gesamte gravitative potenzielle Energie aller Paare ist. Daraus folgt

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 2K + U.$$

Da Γ beschränkt bleibt, gilt

$$\left\langle \frac{d\Gamma}{dt} \right\rangle_t = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(t + \tau) - \Gamma(t)}{\tau} = 0.$$

Die zeitliche Mittelung liefert folglich

$$2\langle K \rangle_t + \langle U \rangle_t = 0, \quad \langle K \rangle_t = -\frac{1}{2} \langle U \rangle_t.$$

Der Vergleich mit dem angegebenen Satz ergibt

$$\gamma = \frac{1}{2}.$$

A.5

Wir betrachten den Haufen als im stationären Virialgleichgewicht befindlich, sodass seine beobachteten makroskopischen Eigenschaften die zeitlichen Mittelwerte repräsentieren. Da die Dunkle Materie und die Galaxien dieselbe quadratisch gemittelte Geschwindigkeit haben, ist die gesamte kinetische Energie

$$K = \frac{1}{2} M v_{rms}^2.$$

Die Kombination des Virialsatzes mit A.1 ergibt

$$2K = -U \quad \Rightarrow \quad M v_{rms}^2 = \frac{3GM^2}{5R}.$$

Für $M > 0$ gilt

$$M = \frac{5R v_{rms}^2}{3G}.$$

Die gesamte sichtbare Masse beträgt Nm_g . Subtraktion von der Gesamtmasse liefert

$$M_{DM} = \frac{5R v_{rms}^2}{3G} - Nm_g.$$

B.1

Die Massendichte der Sterne ist

$$\rho_\star = nm_s.$$

Wir vernachlässigen die Gesamtmasse der wenigen Sterne jenseits von R_g , behalten sie jedoch als Testteilchen bei, deren Bahnen das äußere Gravitationsfeld abbilden können. Die eingeschlossene Sternmasse ist dann

$$M_\star(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} nm_s r^3, & r < R_g, \\ \frac{4\pi}{3} nm_s R_g^3, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Nach dem Schalentheorem trägt nur die eingeschlossene Masse zur Gravitationsbeschleunigung bei r bei. Setzen wir diese Beschleunigung gleich der Zentripetalbeschleunigung, so ergibt sich

$$\frac{v(r)^2}{r} = \frac{GM_\star(r)}{r^2}, \quad v(r)^2 = \frac{GM_\star(r)}{r}.$$

Somit gilt

$$v(r) = \begin{cases} r \sqrt{\frac{4\pi G n m_s}{3}}, & 0 \leq r < R_g, \\ \sqrt{\frac{4\pi G n m_s R_g^3}{3r}}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Für die Skizze definieren wir

$$v_g = R_g \sqrt{\frac{4\pi G n m_s}{3}}.$$

Die Kurve verläuft als Gerade von $(0, 0)$ bis (R_g, v_g) . Sie ist stetig und hat an diesem Punkt ihr Maximum. Jenseits von R_g folgt sie dem Verlauf

$$v(r) = v_g \sqrt{\frac{R_g}{r}},$$

und fällt gegen die horizontale Asymptote $v = 0$ ab.

B.2

Bei $r = R_g$ beträgt die beobachtete Kreisbahngeschwindigkeit v_0 . Die Bedingung für eine Kreisbahn ergibt

$$\frac{v_0^2}{R_g} = \frac{Gm_R}{R_g^2}.$$

Die gesamte eingeschlossene Masse einschließlich der Dunklen Materie ist daher

$$m_R = \frac{v_0^2 R_g}{G}.$$

B.3

Für jede kugelsymmetrische Massenverteilung, die durch Kreisbahnen erfasst wird, gilt

$$M_{\text{enc}}(r) = \frac{rv(r)^2}{G}.$$

Die angegebene Näherung für die beobachtete Rotationskurve lautet

$$v(r) = \begin{cases} v_0 r / R_g, & r < R_g, \\ v_0, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Daher gilt

$$M_{\text{enc}}(r) = \begin{cases} \frac{v_0^2 r^3}{GR_g^2}, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2 r}{G}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Eine Kugelschale hat die Masse $dM_{\text{enc}} = 4\pi r^2 \rho_{\text{tot}} dr$, also

$$\rho_{\text{tot}}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM_{\text{enc}}}{dr} = \begin{cases} \frac{3v_0^2}{4\pi GR_g^2}, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2}{4\pi Gr^2}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Subtrahieren wir die Massendichte der Sterne nm_s innerhalb des sichtbaren Randes und vernachlässigen wir die Massendichte der Sterne außerhalb davon, so erhalten wir

$$\rho_{\text{DM}}(r) = \begin{cases} \frac{3v_0^2}{4\pi GR_g^2} - nm_s, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2}{4\pi Gr^2}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Die eingeschlossene Masse ist bei R_g stetig, obwohl die Dichte dort in diesem idealisierten Modell einen Sprung aufweisen kann.

C.1

Hier bezeichnet $m'(r)$ die in der Aufgabenstellung angegebene eingeschlossene Masse; der Strich ist Teil ihrer Bezeichnung und kennzeichnet keine Ableitung.

Betrachten wir ein kleines Gaselement mit radialer Dicke dr und Querschnittsfläche dA . Seine Masse ist

$$dm = m_p n(r) dA dr.$$

Die resultierende, nach außen gerichtete Druckkraft ist

$$dF_P = -\frac{dP}{dr} dA dr.$$

Die nach innen gerichtete Gravitationskraft hat den Betrag

$$dF_G = \frac{Gm'(r)}{r^2} m_p n(r) dA dr.$$

Im hydrostatischen Gleichgewicht müssen sich diese Kräfte ausgleichen. Daher gilt

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm'(r)m_p n(r)}{r^2}}.$$

Das negative Vorzeichen beschreibt die nach außen gerichtete Druckabnahme, die erforderlich ist, um das Gas gegen die nach innen gerichtete Gravitation zu stützen.

C.2

Für ein ideales Gas gilt

$$P(r) = n(r)k_B T(r).$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$\frac{dP}{dr} = k_B \left[T(r) \frac{dn}{dr} + n(r) \frac{dT}{dr} \right].$$

Einsetzen in die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts und Auflösen nach der eingeschlossenen Masse ergibt

$$m'(r) = -\frac{k_B r^2}{Gm_p n(r)} \left[T(r) \frac{dn}{dr} + n(r) \frac{dT}{dr} \right].$$

Somit gilt

$$\boxed{m'(r) = -\frac{k_B r^2}{Gm_p} \left[\frac{dT}{dr} + \frac{T(r)}{n(r)} \frac{dn}{dr} \right]}.$$

Eine äquivalente Form ist

$$m'(r) = -\frac{k_B T(r) r}{Gm_p} \left[\frac{d \ln n}{d \ln r} + \frac{d \ln T}{d \ln r} \right].$$

C.3

Für das isotherme Gas gilt $T(r) = T_0$, sodass sich C.2 wie folgt vereinfacht:

$$m'(r) = -\frac{k_B T_0 r^2}{G m_p} \frac{d \ln n}{dr}.$$

Die vorgegebene Anzahlldichte erfüllt

$$\ln n = \ln \alpha - \ln r - 2 \ln(\beta + r),$$

und daher gilt

$$\frac{d \ln n}{dr} = -\frac{1}{r} - \frac{2}{\beta + r}.$$

Die gesamte eingeschlossene Masse ist folglich

$$m'(r) = \frac{k_B T_0}{G m_p} \left(r + \frac{2r^2}{\beta + r} \right) = \frac{k_B T_0}{G m_p} \frac{r(\beta + 3r)}{\beta + r}.$$

Wir leiten diese eingeschlossene Masse ab:

$$\frac{d m'(r)}{dr} = \frac{k_B T_0}{G m_p} \frac{\beta^2 + 6\beta r + 3r^2}{(\beta + r)^2}.$$

Damit ist die gesamte Massendichte

$$\rho_{\text{tot}}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d m'(r)}{dr} = \frac{k_B T_0 (\beta^2 + 6\beta r + 3r^2)}{4\pi G m_p r^2 (\beta + r)^2}.$$

Die Massendichte des Gases ist

$$\rho_{\text{gas}}(r) = m_p n(r) = \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2}.$$

Subtraktion von der Gesamtdichte liefert

$$\boxed{\rho_{\text{DM}}(r) = \frac{k_B T_0 (\beta^2 + 6\beta r + 3r^2)}{4\pi G m_p r^2 (\beta + r)^2} - \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2}} \quad (r > 0).$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Erdbeben, Vulkan und Tsunami

Indonesien ist der Supermarkt der Naturgefahren. Fast alle Arten von Naturereignissen mit Gefahrenpotenzial sind in Indonesien bereits aufgetreten, darunter Vulkanausbrüche, Erdbeben und Tsunamis.

A. Ausbruch des Vulkans Merapi

Der Vulkan Merapi in Yogyakarta ist einer der aktivsten Vulkane auf Java. Pyroklastische Ströme sind ein bekanntes Merkmal seiner Ausbrüche. Ein pyroklastischer Strom ist ein heißes Gemisch aus Gas und Gestein, das sich von einem Vulkan wegbewegt. Am 26. Oktober 2010 zeigte der Merapi seinen explosiven Charakter: Er erzeugte eine Aschewolke, die eine Höhe von 12 km erreichte (Abb. 1), sowie pyroklastische Ströme, die mehr als 20.000 Menschen in der Umgebung des Vulkans zur Flucht zwangen.



(Fig. 1: Pyroclastic cloud during Merapi eruption, Courtesy of Volcanological Office of Yogyakarta, BPPTKG)

(Abb. 1: Pyroklastische Wolke während des Merapi-Ausbruchs, mit freundlicher Genehmigung des Vulkanologischen Amtes von Yogyakarta, BPPTKG)

Betrachten wir die Ursachen des größten Ausbruchs des Merapi im Jahr 2010. Geophysikern ist bekannt, dass das Eindringen von Wasser von außen in das Magma eine wichtige Rolle für das explosive Verhalten von Vulkanausbrüchen spielt (hydromagmatische Eruptionen). Wir nehmen an, dass wir den Vulkan als ein System behandeln, das aus einem Gemisch aus Magmapartikeln und Wasser besteht. Die Strukturen der Vulkanschlote und die Atmosphäre bilden die Grenze des Systems. Der explosive Ausbruch wird als Vorgang in zwei Phasen betrachtet: (1) eine augenblickliche Wechselwirkung zwischen Magma und Wasser und (2) eine Expansion des Systems. In der ersten Phase vermischt sich eine Magmamasse (m_m) bei einer absoluten Temperatur (T_m) mit einer Masse von außen zugeführten Wassers (m_w) bei einer absoluten Temperatur (T_w). Das thermische Gleichgewicht wird nahezu augenblicklich erreicht. Diese Wechselwirkung kann als Prozess bei nahezu konstantem Volumen betrachtet werden. Die latente Verdampfungswärme des Wassers und die latente Schmelzwärme des Magmas können vernachlässigt werden.

A.1	Bestimmen Sie die Gleichgewichtstemperatur in der ersten Phase in Abhängigkeit von den Massen und den spezifischen Wärmekapazitäten des Wassers c_{Vw} und des Magmas c_{Vm} .	0.5 Pkt.
A.2	Bestimmen Sie den Gleichgewichtsdruck in der ersten Phase unter der Annahme, dass das Gemisch als ideales Gas modelliert werden kann. Nehmen Sie an, dass das molare Volumen des Gemischs v_e beträgt.	0.3 Pkt.

Die Expansion des Systems (die zweite Phase) kann auf verschiedene Arten erfolgen, darunter durch thermische Detonation. Obwohl ein solcher Prozess recht kompliziert ist, können wir die Relativgeschwindigkeit des ausgestoßenen Gemischs empirisch messen. Die Geschwindigkeit des

Gases während des Ausbruchs hängt vom Druck p , der Gesamtmasse m und dem Volumen V des Gemischs im Förderschlot eines Vulkans ab.

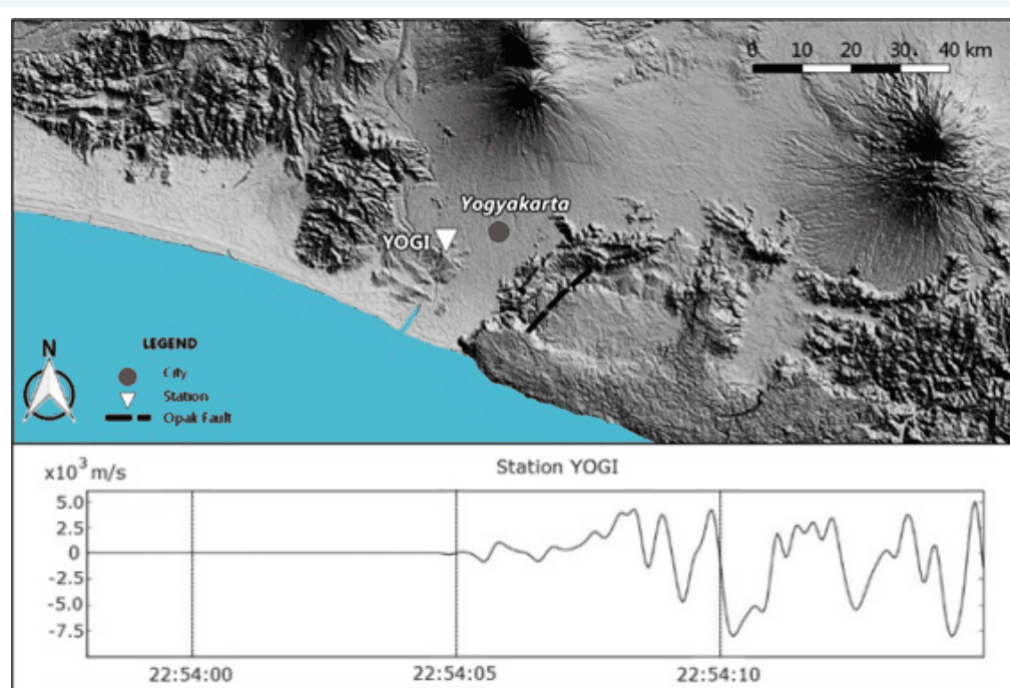
A.3	Drücken Sie die Geschwindigkeit des Gases während des Ausbruchs bis auf eine Proportionalitätskonstante κ durch p , m und V aus.	0.5 Pkt.
-----	---	----------

Der beobachtete Druck liegt in der Größenordnung von 100 MPa. Dadurch kann die (relative) Eruptionsgeschwindigkeit die Größenordnung ballistischer Geschwindigkeiten erreichen.

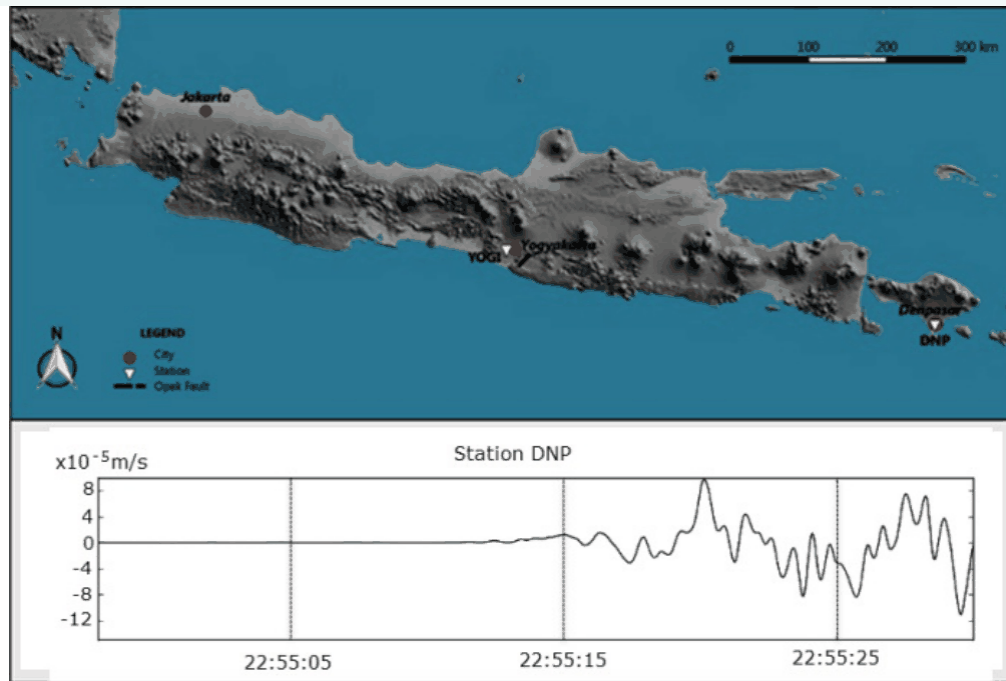
B. Das Erdbeben von Yogyakarta

Das Erdbeben von Yogyakarta im Jahr 2006 mit der Magnitude $M_w = 6.4$, das viele Gebäude in der Region Bantul und Yogyakarta zerstörte, ereignete sich um 05:54:00.00 Uhr Ortszeit bzw. um 22:54:00.00 Uhr UTC. Es wurde durch eine plötzliche Verschiebung des Opak-Verwerfungssegments verursacht (siehe Abb. 2). Das Hypozentrum lag 15 km unter der Oberfläche.

Die sich in der Erdkruste ausbreitenden seismischen Wellen können mit einem Seismometer aufgezeichnet werden. Die Aufzeichnung eines Seismometers wird als Seismogramm bezeichnet (Abb. 2 und 3, jeweils unteres Diagramm). Diese Seismogramme zeigen die vertikale Bodengeschwindigkeit als Funktion der Zeit, aufgezeichnet an der seismischen Station Gamping in Yogyakarta (YOGI) (Abb. 2) und in Denpasar auf Bali (DNP) (Abb. 3). Im Allgemeinen bestehen seismische Wellen aus drei Wellentypen: der Longitudinal- oder Primärwelle (P -Welle), der Transversal- oder Sekundärwelle (S -Welle) und der Oberflächenwelle. Die P -Welle und die S -Welle breiten sich im Untergrund aus, während sich die Oberflächenwelle entlang der Erdoberfläche ausbreitet. Seismische Wellen, die durch den Untergrund zu den Stationen gelangen, lassen sich in solche unterteilen, die sich geradlinig ausbreiten, solche, die an einer Schichtgrenze reflektiert werden, und solche, die in die nächste Schicht gebrochen werden. Die Longitudinal- oder Primärwelle besitzt die höchste Geschwindigkeit, während die Oberflächenwelle die niedrigste Geschwindigkeit besitzt, etwa 60% der Geschwindigkeit der P -Welle.



(Abb. 2: Karten mit der Lage von YOGI)



(Abb. 3: Karten mit der Lage von DNP (Denpasar))

Die Entfernungen zwischen dem Epizentrum (der Projektion des Hypozentrums auf die Erdoberfläche) und den Stationen YOGI bzw. DNP betragen 22.5 km bzw. 500 km. Die Mächtigkeit der Erdkruste auf Java in Indonesien beträgt 30 km. Unter der Erdkruste liegt der Erdmantel. Wie andere Wellenphänomene gehorchen auch seismische Wellen dem Snelliusschen Brechungsgesetz. Seismische Wellen können auch an der Mantelschicht reflektiert werden. In dieser Aufgabe wird die Erdkrümmung vernachlässigt.

B.1	Abb. 2 zeigt das Seismogramm an der Station YOGI. Bestimmen Sie mithilfe dieser Daten die Geschwindigkeit der P -Welle in der Erdkruste.	0.5 Pkt.
B.2	Bestimmen Sie die Laufzeit der direkten P -Welle und der reflektierten Welle des Erdbebens von Yogyakarta zur Station DNP in Denpasar.	0.6 Pkt.

Unter der Annahme, dass die Erde nur aus zwei Schichten besteht, der Kruste und dem Mantel, breitet sich die Primärwelle in der Kruste und im Mantel mit unterschiedlichen konstanten Geschwindigkeiten aus. Die Geschwindigkeit im Mantel ist größer als diejenige in der Kruste. Beachten Sie, dass eine unter einem rechten Winkel (90°) in den Mantel gebrochene P -Welle entlang ihres gesamten Ausbreitungsweges an der Kruste-Mantel-Grenze teilweise zurück in die Kruste gebrochen wird.

B.3	Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der P -Welle im Mantel.	1.2 Pkt.
-----	---	----------

Für einen realistischeren Aufbau der Erde kann die Kruste in eine Reihe dünner Schichten unterteilt werden, sodass die Geschwindigkeit der seismischen Welle gemäß $v(z) = v_0 + az$ von der Tiefe z abhängt, wobei a eine Konstante ist und das Hypozentrum näherungsweise an der Oberfläche liegt. In diesem Modell verläuft der Wellenstrahl gekrümmt.

B.4	Wir definieren den Strahlparameter $p = \sin \theta(z)/v(z)$, wobei $\theta(z)$ der Winkel zwischen dem Strahl und der Normalen ist. Eine seismische Welle erreiche die Station mit dem	1.4 Pkt.
-----	--	----------

	Strahlparameter p ; drücken Sie die Entfernung zum Hypozentrum durch p , v_0 und a aus. Nehmen Sie an, dass das Hypozentrum sehr nahe an der Erdoberfläche liegt.	
B.5	Bestimmen Sie die Laufzeit T vom Hypozentrum zu einer beliebigen Station in Form eines Integrals über z .	1.0 Pkt.

Die Erde besteht aus einem Stapel homogener Schichten, wobei jede Schicht die Geschwindigkeit v_i und die Dicke δz_i besitzt.

B.6	Nähern Sie mithilfe des Ergebnisses der vorherigen Teilaufgabe die Laufzeit (T) vom Hypozentrum zur Station DNP an. Nehmen Sie dazu an, dass die Kruste nur aus drei diskretisierten Schichten ($i = 1, 2, 3$) besteht, die durch $v_1 = 6.65$ km/sec, $v_2 = 6.97$ km/sec, $v_3 = 6.99$ km/sec, $p = 0.143$ sec/km, $\delta z_1 = 6.0$ km, $\delta z_2 = 9.0$ km, $\delta z_3 = 15$ km charakterisiert sind.	1.0 Pkt.
-----	---	----------

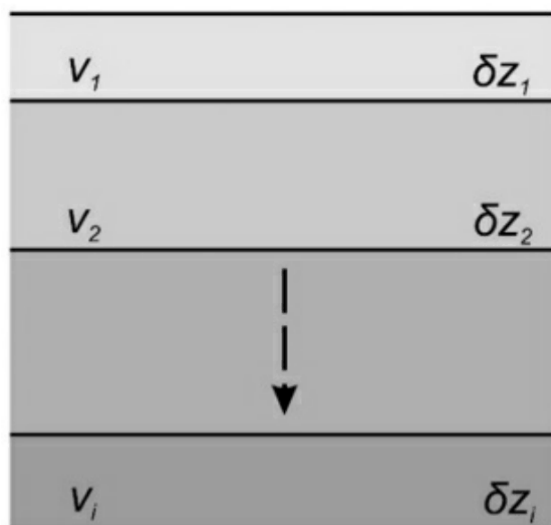


Fig. 4: A simplified model of earth's layers.

Abb. 4: Ein vereinfachtes Modell der Erdschichten.

C. Tsunami auf Java

Das Erdbeben und der Tsunami von Pangandaran im Jahr 2006 ereigneten sich am 17. Juli um 15:19:27 Uhr Ortszeit vor der Küste von West- und Zentraljava. Bei einem Erdbeben, dessen epizentrale Verwerfung am Meeresboden liegt, kann eine Verschiebung an der Verwerfung eine außergewöhnlich große Wasserwelle erzeugen, die als Tsunami bezeichnet wird. Mit anderen Worten: Ein Tsunami ist eine Flachwasserwelle, die mit einer winzigen Amplitude, aber einer extrem großen Wellenlänge beginnt. Betrachten Sie eine plötzliche Verwerfungsbewegung, durch die ein Teil des Meeresbodens angehoben wird, wie in Abb. 5 gezeigt. Nehmen Sie an, dass die Energie des Erdbebens in die potenzielle Energie dieses angehobenen Meerwassers umgewandelt wird. In einem einfachen Modell nähern wir das angehobene Wasser durch einen Quader mit der Grundfläche $\lambda L/2$ (wobei $L \gg \lambda$) und der Höhe h an.

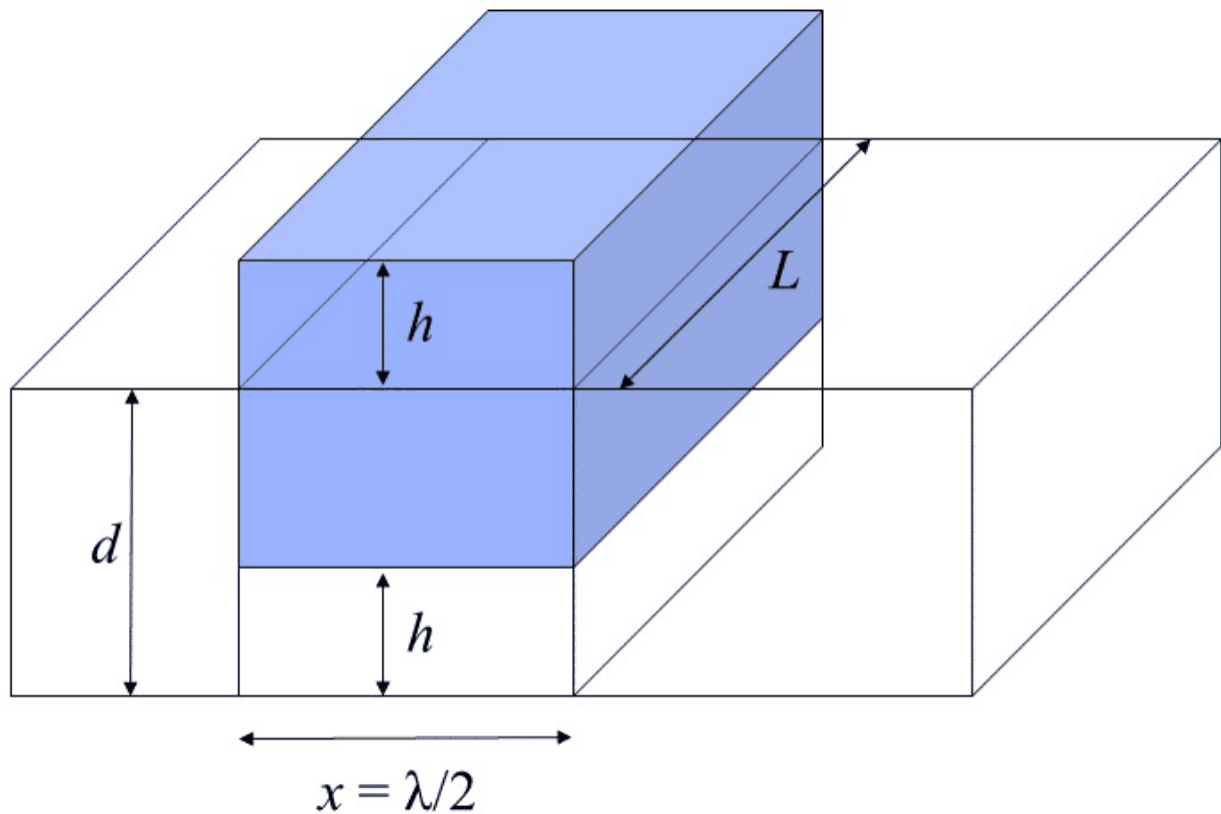


Abb. 5: Veranschaulichung der Tsunamiwelle; d ist die Meerestiefe.

C.1	Bestimmen Sie die potenzielle Energie, die im durch das Erdbeben angehobenen Meerwasser gespeichert ist, bezogen auf die Meeresoberfläche. Nehmen Sie an, dass die Dichte des Meerwassers ρ beträgt.	0.5 Pkt.
C.2	Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Tsunamiwelle bis auf einen dimensionslosen Faktor.	1.2 Pkt.
C.3	Bestimmen Sie mithilfe einer Energiebetrachtung die Amplitude der Tsunamiwelle als Funktion der Tiefe. Nehmen Sie an, dass sich die Tiefe langsam ändert und dass die Amplitude bei einer Tiefe von d_0 den Wert A_0 hat.	1.3 Pkt.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Die im Folgenden verwendeten Ablesewerte aus den Seismogrammen liegen etwa 5 s nach dem Erdbeben bei YOGI und 72 s bei DNP. Mit v_c und v_m werden die Geschwindigkeiten in Kruste und Mantel bezeichnet.

- **A.1:** $T_e = \frac{m_m c_{Vm} T_m + m_w c_{Vw} T_w}{m_m c_{Vm} + m_w c_{Vw}}.$
- **A.2:** $p_e = \frac{RT_e}{v_e}.$
- **A.3:** $u = \kappa \sqrt{\frac{pV}{m}}.$
- **B.1:** $v_c \simeq 5.4 \text{ km s}^{-1}.$

- **B.2:** $t_{\text{direct}} \simeq 92.5 \text{ s}$, $t_{\text{reflected}} \simeq 92.8 \text{ s}$, beide bei der Genauigkeit des Diagramms ungefähr 93 s.
- **B.3:** $v_m \simeq 7.6 \text{ km s}^{-1}$.
- **B.4:** $X = \frac{2}{ap} \sqrt{1 - p^2 v_0^2}$, unter den Annahmen $a > 0$ und $0 < p v_0 < 1$.
- **B.5:** $T = 2 \int_0^{z_t} \frac{dz}{v(z) \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}$, $z_t = \frac{p^{-1} - v_0}{a}$.
- **B.6:** Die direkte Diskretisierung ergibt $T \simeq 1.84 \times 10^2 \text{ s}$. Diese Schichtsumme weist eine geometrische Unvereinbarkeit mit der angegebenen horizontalen Entfernung von 500 km auf, die weiter unten erläutert wird.
- **C.1:** $U = \frac{1}{4} \rho g \lambda L h^2$.
- **C.2:** $c = C \sqrt{gd}$, wobei C dimensionslos ist; die lineare Flachwassertheorie ergibt $C = 1$.
- **C.3:** $A(d) = A_0 \left(\frac{d_0}{d} \right)^{1/4}$.

Lösung

A.1 — Gleichgewichtstemperatur

Während der schnellen Vermischung werden der Wärmeaustausch mit der Umgebung und die Volumenarbeit als vernachlässigbar angenommen. Wenn die angegebenen latenten Wärmen vernachlässigt und die Wärmekapazitäten als konstant behandelt werden, ergibt die Erhaltung der inneren Energie

$$m_m c_{Vm} (T_e - T_m) + m_w c_{Vw} (T_e - T_w) = 0.$$

Somit gilt

$$T_e = \frac{m_m c_{Vm} T_m + m_w c_{Vw} T_w}{m_m c_{Vm} + m_w c_{Vw}}.$$

Dies ist der mit den beiden Wärmekapazitäten gewichtete Mittelwert der Anfangstemperaturen.

A.2 — Gleichgewichtsdruck

Für n Mol des idealen Gasgemischs gilt

$$p_e V = n R T_e.$$

Da sein molares Volumen $v_e = V/n$ ist, gilt

$$p_e = \frac{R T_e}{v_e} = \frac{R}{v_e} \frac{m_m c_{Vm} T_m + m_w c_{Vw} T_w}{m_m c_{Vm} + m_w c_{Vw}}.$$

Hier ist R die universelle Gaskonstante.

A.3 — Eruptionsgeschwindigkeit

Wie vorgegeben nehmen wir an, dass die Geschwindigkeit nur von p , m , V abhängt. Wir setzen an:

$$u = \kappa p^\alpha m^\beta V^\gamma.$$

Mit

$$[p] = M L^{-1} T^{-2}, \quad [m] = M, \quad [V] = L^3,$$

verlangt die Dimensionskonsistenz

$$\alpha + \beta = 0, \quad -\alpha + 3\gamma = 1, \quad -2\alpha = -1.$$

Daraus folgt

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2},$$

und

$$u = \kappa \sqrt{\frac{pV}{m}}.$$

Gleichwertig ist $u = \kappa \sqrt{p/\rho_{\text{mix}}}$, wobei $\rho_{\text{mix}} = m/V$. Die Dimensionsanalyse bestimmt κ nicht.

B.1 — Geschwindigkeit der P -Welle in der Kruste

Die Herdtiefe sei $z_s = 15$ km. Die horizontale Entfernung zu YOGI beträgt 22.5 km, sodass für die direkte Entfernung vom Herd zur Station gilt:

$$s_Y = \sqrt{22.5^2 + 15^2} = 27.04 \text{ km}.$$

Die erste sichtbare Abweichung von der Grundlinie in Abb. 2 liegt ungefähr bei 22:54:05 Uhr UTC. Bezogen auf den Zeitpunkt des Erdbebens um 22:54:00 Uhr ergibt dies

$$t_Y \simeq 5 \text{ s}.$$

Damit folgt

$$v_c = \frac{s_Y}{t_Y} \simeq \frac{27.04}{5} \simeq 5.4 \text{ km s}^{-1}.$$

In den folgenden numerischen Berechnungen wird intern mit 5.4083 km s^{-1} weitergerechnet, obwohl das Diagramm nicht so viele signifikante Stellen rechtfertigt.

B.2 — Laufzeiten der direkten und der reflektierten Welle zu DNP

Wir bezeichnen die horizontale Entfernung vom Herd zu DNP mit $X = 500$ km und die Krustenmächtigkeit mit $H = 30$ km.

Für die direkte Welle gilt

$$s_{\text{direct}} = \sqrt{X^2 + z_s^2},$$

also

$$t_{\text{direct}} = \frac{\sqrt{500^2 + 15^2}}{v_c} \simeq 92.5 \text{ s}.$$

Für die Reflexion an der horizontalen Kruste-Mantel-Grenze spiegeln wir den Herd an der Ebene $z = H$. Sein Spiegelbild liegt in der Tiefe

$$z_{\text{image}} = 2H - z_s = 45 \text{ km}.$$

Durch Aufklappen des reflektierten Strahls entsteht eine gerade Linie von diesem Spiegelbild zu DNP. Folglich gilt

$$s_{\text{reflected}} = \sqrt{X^2 + (2H - z_s)^2},$$

und

$$t_{\text{reflected}} = \frac{\sqrt{500^2 + 45^2}}{v_c} \simeq 92.8 \text{ s}.$$

Beide Laufzeiten betragen etwa 93 s; ihre berechnete Differenz beträgt ungefähr 0.33 s.

B.3 — Geschwindigkeit der P -Welle im Mantel

Die erste Abweichung von der flachen Grundlinie in Abb. 3 liegt ungefähr bei 22:55:12 Uhr UTC. Daraus ergibt sich

$$t_D \simeq 72 \text{ s}.$$

Dieser Zeitpunkt liegt vor den oben berechneten Ankunftszeiten der direkten und der reflektierten Krustenwelle. Wir ordnen ihn der kritisch gebrochenen Welle zu, die sich entlang der Mantelgrenze ausbreitet und dabei zurück in die Kruste abstrahlt.

Es sei θ_c der von der Vertikalen aus gemessene Grenzwinkel. Das Snelliussche Brechungsgesetz ergibt

$$\frac{\sin \theta_c}{v_c} = \frac{1}{v_m}, \quad \sin \theta_c = \frac{v_c}{v_m}.$$

Der abwärts gerichtete Strahlabschnitt in der Kruste überbrückt den Tiefenunterschied $H - z_s$, der aufwärts gerichtete Abschnitt den Tiefenunterschied H . Die Summe der Beträge ihrer vertikalen Verschiebungen ist

$$K = (H - z_s) + H = 2H - z_s = 45 \text{ km}.$$

Ihre Gesamtlänge und ihre gesamte horizontale Projektion betragen daher

$$s_{\text{crust}} = \frac{K}{\cos \theta_c}, \quad X_{\text{crust}} = K \tan \theta_c.$$

Die entlang der Mantelgrenze zurückgelegte Strecke ist

$$X_{\text{mantle}} = X - K \tan \theta_c.$$

Somit gilt

$$t_D = \frac{K}{v_c \cos \theta_c} + \frac{X - K \tan \theta_c}{v_m}.$$

Mit $\sin \theta_c = v_c/v_m$ vereinfacht sich dies zu

$$t_D = \frac{X}{v_m} + \frac{K}{v_c} \sqrt{1 - \frac{v_c^2}{v_m^2}}.$$

Einsetzen des aus dem Diagramm abgelesenen Wertes ergibt

$$72 = \frac{500}{v_m} + \frac{45}{5.4083} \sqrt{1 - \left(\frac{5.4083}{v_m} \right)^2},$$

wobei Entfernungen in Kilometern und Geschwindigkeiten in Kilometern pro Sekunde angegeben werden. Die Lösung lautet

$$v_m \simeq 7.554 \text{ km s}^{-1},$$

oder mit angemessener Genauigkeit

$$v_m \simeq 7.6 \text{ km s}^{-1}.$$

Zur Kontrolle: $\theta_c \simeq 45.7^\circ$, und der Mantelabschnitt ist ungefähr 454 km lang. Die Krustenabschnitte benötigen etwa 11.9 s, der Mantelabschnitt etwa 60.1 s.

B.4 — Entfernung bei kontinuierlich veränderlicher Geschwindigkeit

Wir wählen z nach unten positiv und x horizontal. Aus dem Snelliusschen Brechungsgesetz an den dünnen horizontalen Schichten folgt, dass

$$p = \frac{\sin \theta(z)}{v(z)}$$

entlang eines Strahls konstant ist. Daher gilt

$$\sin \theta(z) = pv(z), \quad \cos \theta(z) = \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}.$$

Auf dem abwärts gerichteten Abschnitt gilt

$$\frac{dx}{dz} = \tan \theta(z) = \frac{pv(z)}{\sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}.$$

Für einen zur Oberfläche zurückkehrenden Strahl in einem Medium mit $a > 0$ liegt der tiefste Punkt dort, wo der Strahl horizontal verläuft:

$$pv(z_t) = 1.$$

Da $v(z) = v_0 + az$, folgt

$$z_t = \frac{p^{-1} - v_0}{a}.$$

Wenn sowohl Quelle als auch Empfänger näherungsweise an der Oberfläche liegen, sind die abwärts und aufwärts gerichteten Abschnitte symmetrisch. Die horizontale Entfernung ist

$$X = 2 \int_0^{z_t} \frac{p(v_0 + az)}{\sqrt{1 - p^2(v_0 + az)^2}} dz.$$

Wir setzen $u = p(v_0 + az)$, sodass $du = pa dz$. Dann gilt

$$X = \frac{2}{ap} \int_{pv_0}^1 \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} du.$$

Da die Stammfunktion $-\sqrt{1 - u^2}$ ist, folgt

$$X = \frac{2}{ap} \sqrt{1 - p^2 v_0^2} = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{1}{p^2} - v_0^2}.$$

Die Lösung für einen zurückkehrenden Strahl erfordert $0 < pv_0 < 1$.

B.5 — Laufzeitintegral

Für einen Strahlabschnitt der Länge ds gilt für die benötigte Zeit

$$dt = \frac{ds}{v(z)}.$$

Wegen $|dz| = ds \cos \theta(z)$ gilt

$$dt = \frac{|dz|}{v(z)\sqrt{1-p^2v(z)^2}}.$$

Unter Berücksichtigung sowohl des abwärts als auch des aufwärts gerichteten Abschnitts ergibt sich

$$T = 2 \int_0^{z_t} \frac{dz}{v(z)\sqrt{1-p^2v(z)^2}}.$$

Für das lineare Geschwindigkeitsprofil lautet dies

$$T = 2 \int_0^{(p^{-1}-v_0)/a} \frac{dz}{(v_0 + az)\sqrt{1-p^2(v_0 + az)^2}}.$$

Die Singularität am Umkehrpunkt ist integrierbar. Die Auswertung des Integrals ergibt außerdem

$$T = \frac{2}{a} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-p^2v_0^2}}{pv_0} \right).$$

Eine äquivalente Form, die zur Untersuchung der numerischen Näherung in B.6 nützlich ist, ergibt sich durch Subtraktion von pX :

$$\begin{aligned} T - pX &= 2 \int_0^{z_t} \left[\frac{1}{v\sqrt{1-p^2v^2}} - \frac{p^2v}{\sqrt{1-p^2v^2}} \right] dz \\ &= 2 \int_0^{z_t} \sqrt{\frac{1}{v(z)^2} - p^2} dz. \end{aligned}$$

Für einen geometrisch konsistenten Strahl gilt somit

$$T = pX + 2 \int_0^{z_t} \sqrt{\frac{1}{v(z)^2} - p^2} dz.$$

B.6 — Dreischichtnäherung

Wir behalten die Näherung einer Quelle an der Oberfläche aus B.4–B.5 bei und diskretisieren das erste Laufzeitintegral:

$$T \approx 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\delta z_i}{v_i \sqrt{1-p^2v_i^2}}.$$

Der Faktor zwei berücksichtigt, dass jede Schicht auf dem abwärts und dem aufwärts gerichteten Abschnitt durchlaufen wird.

Bei Verwendung der Zahlen genau wie angegeben ergibt sich:

Schicht i	pv_i	Beitrag beider Strahlabschnitte $\frac{2\delta z_i}{v_i \sqrt{1-p^2v_i^2}}$
1	0.95095	5.833 s
2	0.99671	31.863 s
3	0.99957	146.366 s

Die direkte schichtweise Quadratur ergibt somit

$$T \approx 184.06 \text{ s} \simeq 1.84 \times 10^2 \text{ s}.$$

Die Interpretation dieses Wertes als Laufzeit zu DNP ist durch ein Konsistenzproblem eingeschränkt. Die horizontale Entfernung desselben diskreten Strahls wäre

$$X_{\text{layers}} = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\delta z_i p v_i}{\sqrt{1 - p^2 v_i^2}} \simeq 1280.9 \text{ km},$$

was erheblich von 500 km abweicht.

Setzt man stattdessen die vorgegebene horizontale Entfernung von 500 km in die zweite Form aus B.5 ein und nähert deren Integral an, erhält man die formale Abschätzung

$$\begin{aligned} T &\approx p(500) + 2 \sum_{i=1}^3 \delta z_i \sqrt{\frac{1}{v_i^2} - p^2} \\ &= 71.5 + 0.8934 \\ &\approx 72.39 \text{ s}. \end{aligned}$$

Die beiden Formeln für das kontinuierliche Medium sind äquivalent, aber diese groben Näherungen bewahren die dafür erforderliche Beziehung zur Entfernung nicht. Somit ist 184 s die direkte Schichtsumme für die Laufzeit; 72.4 s ist eine Abschätzung bei fest vorgegebener horizontaler Entfernung. Beide können mit den angegebenen Parametern nicht denselben tatsächlich durch drei Schichten verlaufenden Strahl beschreiben.

C.1 — Potenzielle Energie des angehobenen Wassers

Die horizontale Grundfläche des angehobenen Quaders sei

$$S = \frac{\lambda L}{2}.$$

Wählt man die ungestörte Meeresoberfläche als Nullniveau des Gravitationspotenzials, so besitzt eine horizontale Schicht der Dicke dz in der Höhe z die Masse $\rho S dz$. Folglich gilt

$$U = \int_0^h \rho S g z dz = \frac{1}{2} \rho S g h^2.$$

Daraus folgt

$$U = \frac{1}{4} \rho g \lambda L h^2.$$

Gleichwertig lässt sich feststellen, dass das Wasser oberhalb der ursprünglichen Oberfläche die Masse $\rho S h$ besitzt und sein Schwerpunkt in der Höhe $h/2$ liegt.

C.2 — Tsunamigeschwindigkeit

Wir verwenden die Näherungen für flaches Wasser und kleine Amplituden

$$\lambda \gg d, \quad h \ll d.$$

Die horizontale Strömungsgeschwindigkeit ist dann über die gesamte Tiefe näherungsweise gleich, und die vertikale Druckverteilung ist näherungsweise hydrostatisch.

Es seien $\eta(x, t)$ die Auslenkung der Oberfläche und $u(x, t)$ die horizontale Strömungsgeschwindigkeit. Die Erhaltung des Wasservolumens ergibt nach Linearisierung um die Tiefe d

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + d \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Der horizontale Druckgradient beträgt $\rho g \partial \eta / \partial x$. Das zweite Newtonsche Gesetz ergibt daher

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Durch Ableiten der ersten Gleichung nach der Zeit und Einsetzen der zweiten erhält man

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g d \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Dies ist die Wellengleichung, also gilt

$$c = \sqrt{gd}.$$

In der in der Aufgabenstellung verlangten Form lautet das Ergebnis

$$c = C \sqrt{gd},$$

mit einem dimensionslosen Faktor C ; die angegebenen Annahmen der linearen Flachwassertheorie ergeben $C = 1$. Die Dichte kürzt sich heraus, weil sie sowohl in die Trägheit als auch in die gravitative Rückstellkraft als Faktor eingeht.

C.3 — Amplitude bei veränderlicher Tiefe

Wir nehmen eine langsame Änderung der Tiefe, vernachlässigbare Reflexion und Dissipation sowie eine konstante Breite der Wellenfront an. Da $L \gg \lambda$, kann die Welle lokal als ebene Welle behandelt werden.

Für eine sinusförmige Oberflächenauslenkung mit der Amplitude A gilt

$$\eta = A \cos(kx - \omega t), \quad \langle \eta^2 \rangle = \frac{A^2}{2}.$$

Die mittlere potenzielle Energie im Schwerfeld pro horizontaler Flächeneinheit ist

$$\bar{\mathcal{E}}_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \rho g \langle \eta^2 \rangle = \frac{1}{4} \rho g A^2.$$

Für eine fortschreitende Flachwasserwelle ergibt die Kontinuitätsgleichung

$$u = \frac{c}{d} \eta.$$

Ihre mittlere kinetische Energie pro horizontaler Flächeneinheit beträgt daher

$$\bar{\mathcal{E}}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \rho d \langle u^2 \rangle = \frac{\rho c^2 A^2}{4d} = \frac{1}{4} \rho g A^2.$$

Somit ist die gesamte mittlere Energiedichte

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \rho g A^2.$$

Flachwasserwellen sind dispersionsfrei, sodass ihre Gruppengeschwindigkeit gleich $c = \sqrt{gd}$ ist. Aus der Erhaltung des Energieflusses pro Breitereinheit der Wellenfront folgt

$$\bar{\mathcal{E}} c = \text{konstant},$$

oder

$$A^2 \sqrt{d} = \text{konstant.}$$

Mit der Referenzamplitude A_0 bei der Tiefe d_0 gilt

$$A^2 \sqrt{d} = A_0^2 \sqrt{d_0}.$$

Daher folgt

$$A(d) = A_0 \left(\frac{d_0}{d} \right)^{1/4}.$$

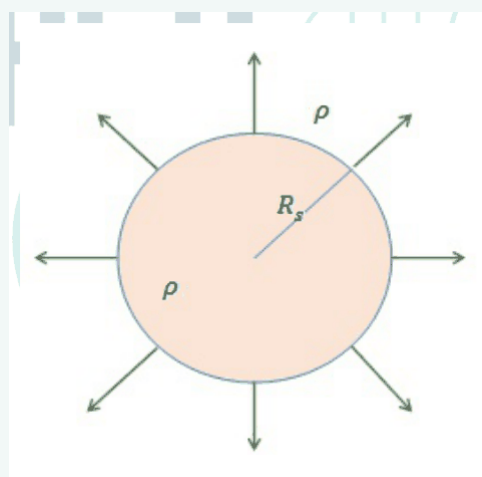
Dies ist das Greensche Gesetz. Seine Gültigkeit setzt eine im Vergleich zur Tiefe kleine Amplitude und eine hinreichend langsame Änderung der Tiefe voraus; es beschreibt nicht das spätere Brechen der Welle.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Kosmische Inflation

Aufgrund der von der Erde aus beobachteten Relativbewegung der Galaxien weichen die Wellenlängen im sichtbaren Spektrum einer bestimmten Galaxie von ihren ursprünglichen Wellenlängen ab; dies ist als elektromagnetischer Dopplereffekt bekannt. Für eine Ansammlung von Galaxien würde man eine zufällige Verteilung der Wellenlängenverschiebungen erwarten: einige positiv (Rotverschiebung) und einige negativ (Blauverschiebung). Beobachtungen zeigen jedoch, dass alle Galaxien mit Ausnahme einer nahe gelegenen Gruppe rotverschoben sind. Dies muss auch dann gelten, wenn die Beobachtung von einem anderen Punkt im Universum aus erfolgt. Daraus folgt, dass sich unser Universum ausdehnen muss. Andererseits können lokale Unregelmäßigkeiten des Universums auf Skalen von mehr als 100 Mpc vernachlässigt werden, wobei 1 pc = 3.26 Lichtjahre ist. Über große Skalen gemittelt wird die klumpige Verteilung der Galaxien zunehmend isotrop (richtungsunabhängig) und homogen (ortsunabhängig). Daher können wir das Universum als sich ausdehnende Materie mit einer einheitlichen Massendichte ρ auffassen.

A. Expansion des Universums



Als einfaches Modell unseres Universums betrachten wir eine expandierende Kugel mit homogener Dichte, die in das Medium einer viel größeren Kugel gleicher Dichte eingebettet ist. Zu einem bestimmten Zeitpunkt sei der Radius der kleineren Kugel R_s . Zur Beschreibung der Expansion der Kugel kann die Zeitabhängigkeit des Radius $R(t)$ durch den Skalenfaktor $a(t)$ ausgedrückt werden, also $R(t) = a(t)R_s$.

Wendet man das Newtonsche Gravitationsgesetz an, um gemäß unserem Modell des Universums die Geschwindigkeit eines Massenelements auf der Kugeloberfläche zu bestimmen, erhält man einen Satz von Friedmann-Gleichungen:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1 \rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)} \quad (1)$$

wobei k eine dimensionslose Konstante und c die Lichtgeschwindigkeit ist.

Teil	Frage	Punkte
A.1	Bestimmen Sie die Konstante A_1 in Gleichung (1).	1.3 Pkt.

Die bisherige Betrachtung ist nichtrelativistisch. Sie lässt sich jedoch auf ein relativistisches System erweitern, indem $\rho(t)c^2$ als gesamte Energiedichte (ohne die potenzielle Gravitationsenergie) interpretiert wird. In diesem relativistischen System ergibt sich die zweite Friedmann-Gleichung:

$$\dot{\rho} + A_2 \left(\rho + \left(\frac{p}{c^2} \right) \right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (2)$$

unter Verwendung des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik für ein adiabatisches System, wobei p den auf die Kugel wirkenden Druck bezeichnet.

Teil	Frage	Punkte
A.2	Bestimmen Sie die Konstante A_2 in Gleichung (2).	0.9 Pkt.

Um die Gleichungen (1) und (2) zu lösen, muss man eine Beziehung $p = p(\rho)$ annehmen, beispielsweise $p(t)/c^2 = w\rho(t)$, wobei w eine Konstante ist. Außerdem gibt es die Größe $H = \dot{a}/a$, die als Hubble-Parameter bezeichnet wird. Die heutigen Werte der Parameter werden üblicherweise mit dem Index 0 gekennzeichnet, etwa t_0 , ρ_0 , H_0 , a_0 und so weiter. Der Einfachheit halber setzen wir $a_0 = 1$.

Man geht davon aus, dass das Universum mit einer gewaltigen Explosion, dem Urknall, begann, bei der Strahlung aus relativistischen Teilchen entstand. Während seiner Expansion kühlt das Universum ab, und die darin enthaltenen Teilchen werden nichtrelativistisch. Neuere Beobachtungen zeigen jedoch, dass das heutige Universum von der Energiedichte der kosmologischen Konstante dominiert wird. Bei Photonen wächst die Wellenlänge während der Expansion des Universums proportional zum Skalenfaktor.

Teil	Frage	Punkte
A.3	Bestimmen Sie für jeden der folgenden drei Fälle den resultierenden Wert von w : (i) ein Universum, das ausschließlich mit Strahlung (d. h. Photonenenergie) gefüllt ist, (ii) ein Universum, das ausschließlich mit nichtrelativistischer Materie gefüllt ist, und (iii) ein Universum mit konstanter Energiedichte.	1.2 Pkt.

Teil	Frage	Punkte
A.4	Bestimmen Sie für $k = 0$ die Funktion $a(t)$ für jeden der in A.3 genannten Fälle (i) bis (iii). Verwenden Sie für die Fälle (i) und (ii) die Anfangsbedingung $a(t = 0) = 0$ und für Fall (iii) die Bedingung $a_0 = 1$.	1.2 Pkt.

Die Konstante k in Gl. (1) dient der Klassifizierung der räumlichen Geometrie des Universums. Ihr Wert kann $k = +1$ für ein Universum mit positiver Krümmung (geschlossen), $k = 0$ für ein flaches Universum (unendlich) und $k = -1$ für ein Universum mit negativer Krümmung (offen, unendlich) sein. Wir definieren das Dichteverhältnis $\Omega = \rho/\rho_c$, wobei $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ die kritische Energiedichte ist. Beachten Sie, dass A_1 aus Aufgabe A.1 bekannt ist.

Teil	Frage	Punkte
A.5	Drücken Sie k in Gl. (1) durch Ω , H , a und R_0 aus.	0.1 Pkt.
A.6	Bestimmen Sie jeweils den Wertebereich von Ω , der den Werten $k = +1$, $k = 0$ und $k = -1$ entspricht.	0.3 Pkt.

B. Motivation für die Einführung einer Inflationsphase und ihre allgemeinen Bedingungen

Die Beobachtung der kosmischen Mikrowellenhintergrundstrahlung (CMB) legt nahe, dass unser heutiges Universum annähernd flach ist. Das Problem besteht darin, dass in diesem Fall das heutige Universum aus einem exakt flachen frühen Universum hervorgegangen sein müsste; andernfalls würde jede Abweichung von der Flachheit im Laufe der Zeit anwachsen und die heutige Flachheit zunichtemachen.

Teil	Frage	Punkte
B.1	Bestimmen Sie $(\Omega(t) - 1)$ als Funktion der Zeit für ein Universum, das von Strahlung oder nichtrelativistischer Materie dominiert wird (siehe Aufgabe A.3).	0.5 Pkt.

Zur Lösung dieses Problems sollte das Universum zu einem frühen Zeitpunkt seiner Geschichte eine Phase durchlaufen haben, in der eine konstante Energiedichte dominiert. Diese führt zu einer exponentiellen Expansion, der sogenannten Inflationsphase.

Teil	Frage	Punkte
B.2	Bestimmen Sie für diese Phase, in der eine konstante Energiedichte dominiert, $(\Omega(t) - 1)$ als Funktion der Zeit. Nehmen Sie an, dass $(\Omega(t) - 1) \ll 1$.	0.3 Pkt.
B.3	Zeigen Sie, dass die Inflationsbedingung die folgenden Bedingungen nach sich zieht: negativer Druck, beschleunigte Expansion ($\ddot{a} > 0$) und abnehmender Hubble-Radius ($d(aH)^{-1}/dt < 0$).	0.9 Pkt.
B.4	Zeigen Sie, dass sich die Bedingung eines abnehmenden Hubble-Radius mithilfe des Parameters $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ als $\epsilon < 1$ ausdrücken lässt.	0.2 Pkt.

Inflation findet statt, solange $\epsilon < 1$, und endet, wenn $\epsilon = 1$. Wir können die Anzahl der e-Faltungen N definieren, sodass $dN = d \ln a = H dt$ gilt und $N = 0$ am Ende der Inflation ist.

C. Durch homogen verteilte Materie erzeugte Inflation

Ein Beispiel für ein einfaches physikalisches System, das eine Inflationsphase erzeugen kann, ist ein Universum, das von homogen verteilter Materie dominiert wird. Diese Art von Materie wird Inflaton genannt und lässt sich durch eine Funktion $\phi(t)$ charakterisieren.

Die Bewegungsgleichung der Materie lässt sich schreiben als

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \quad (3)$$

wobei $V = V(\phi)$ eine Potenzialfunktion und $V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$ ist. Der Hubble-Parameter erfüllt

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right]. \quad (4)$$

Dabei ist M_{pl} eine Konstante, die als reduzierte Planck-Masse bezeichnet wird. Die Inflationsphase tritt auf, wenn die potenzielle Energie V hinreichend lange gegenüber der kinetischen Energie $\dot{\phi}^2/2$ dominiert, sodass der Term $\ddot{\phi}$ in Gleichung (3) vernachlässigt werden kann. Diese Bedingung wird als Slow-Roll-Näherung bezeichnet.

Die Größen ϵ und $\eta_V = \delta + \epsilon$, wobei $\delta = -\ddot{\phi}/(H\dot{\phi})$, heißen „Slow-Roll-Parameter“.

Teil	Frage	Punkte
C.1	Schätzen Sie den Parameter ϵ , den Parameter η_V und $dN/d\phi$ in Abhängigkeit vom Potenzial $V(\phi)$ und dessen erster und zweiter Ableitung (V' und V'') ab.	1.7 Pkt.

D. Inflation mit einem einfachen Potenzial

Die Vorhersagen jedes Inflationsmodells sollten mit den folgenden, aus CMB-Beobachtungen abgeleiteten Einschränkungen verglichen werden: $n_s = 0.968 \pm 0.006$ und $r < 0.12$. Dabei werden $r = 16\epsilon$ und $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon$ für ein durch eine dominierende Materiekomponente erzeugtes Inflationsmodell bei $\phi = \phi_{start}$ ausgewertet. Nehmen Sie an, dass das Potenzial der Materie die einfache Form $V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n$ hat, wobei n eine beliebige ganze Zahl und Λ eine Konstante ist.

Teil	Frage	Punkte
D.1	Berechnen Sie ϕ_{end} am Ende der Inflation.	0.5 Pkt.
D.2	Drücken Sie r und n_s durch die Anzahl der e-Faltungen N und die ganze Zahl n aus. Schätzen Sie den Wert von n ab, der den beobachteten Werten von r und n_s am nächsten kommt. Verwenden Sie in Ihrer Rechnung $N = 60$.	0.9 Pkt.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Die folgenden Ergebnisse verwenden die dimensionskonsistente kritische Dichte $\rho_c = H^2/A_1$. Wir schreiben $\Delta = \Omega - 1$. Für D.2 sei $\mathcal{N} = \ln(a_{end}/a_{start}) = -N_{start} > 0$; die geforderten 60 e-Faltungen bedeuten $\mathcal{N} = 60$.

- A.1: $A_1 = \frac{8\pi G}{3}$.
- A.2: $A_2 = 3$.
- A.3: $w_{\text{radiation}} = \frac{1}{3}, \quad w_{\text{matter}} = 0, \quad w_{\text{constant density}} = -1$.

- **A.4:** Auf dem expandierenden Lösungszweig gilt

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & a(t) = (2H_0 t)^{1/2} = (t/t_0)^{1/2}, \\ \text{(ii)} \quad & a(t) = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3} = (t/t_0)^{2/3}, \\ \text{(iii)} \quad & a(t) = e^{H_0(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Hier ist $H_0^2 = 8\pi G\rho_0/3$, mit $H_0 t_0 = 1/2$ in (i) und $2/3$ in (ii).

- **A.5:** $k = (\Omega - 1) \left(\frac{aHR_0}{c} \right)^2.$

- **A.6:** $k = +1 : \Omega > 1; \quad k = 0 : \Omega = 1; \quad k = -1 : \Omega < 1$. Für nichtnegative Dichte lautet der letzte Wertebereich $0 \leq \Omega < 1$.

- **B.1:** In führender Ordnung nahe der Flachheit gilt, bezogen auf einen Referenzzeitpunkt t_* ,

$$\Delta(t) \simeq \begin{cases} \Delta_*(t/t_*), & \text{Strahlung,} \\ \Delta_*(t/t_*)^{2/3}, & \text{nichtrelativistische Materie.} \end{cases}$$

- **B.2:** Mit $H_\Lambda = \sqrt{8\pi G\rho_\Lambda/3}$ gilt

$$\Delta(t) \simeq \Delta_i e^{-2H_\Lambda(t-t_i)}.$$

- **B.3:** Konstante Dichte ergibt

$$p = -\rho c^2 < 0, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G\rho}{3} > 0, \quad \frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0.$$

Allgemeiner erfordert beschleunigte Expansion $p < -\rho c^2/3$.

- **B.4:**

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{\epsilon - 1}{a} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \epsilon < 1.$$

- **C.1:** In der Slow-Roll-Näherung gilt

$$\epsilon \simeq \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad \eta_V \simeq M_{pl}^2 \frac{V''}{V}, \quad \frac{dN}{d\phi} \simeq -\frac{V}{M_{pl}^2 V'}.$$

- **D.1:** Für $n > 0$ gilt auf dem Lösungszweig mit positivem Feld

$$\phi_{\text{end}} \simeq \frac{n}{\sqrt{2}} M_{pl}.$$

Der formale Schwellenwert ist $|\phi| \simeq |n|M_{pl}/\sqrt{2}$. Für nichtpositives n ergibt sich in diesem Modell nicht das angenommene Ende der Slow-Roll-Inflation.

• D.2:

$$r \simeq \frac{16n}{4\mathcal{N} + n}, \quad n_s \simeq 1 - \frac{2(n+2)}{4\mathcal{N} + n}.$$

In der vorzeichenbehafteten Konvention der Aufgabenstellung lauten die Nenner äquivalent $n - 4N_{\text{start}}$. Für $\mathcal{N} = 60$ gilt

n	r	n_s
1	0.0664	0.9751
2	0.1322	0.9669

Wenn $r < 0.12$ eingehalten werden muss, ist $n = 1$ die am nächsten liegende positive ganze Zahl. Keine positive ganze Zahl erfüllt beide angegebenen Beobachtungsgrenzen.

Lösung

A.1

Wir betrachten ein Massenelement auf der Oberfläche einer mitbewegten Kugel mit Radius $R = aR_s$. Nach dem Newtonschen Schalentheorem hängt seine Beschleunigung nur von der eingeschlossenen Masse ab,

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3.$$

Im nichtrelativistischen Modell ist diese eingeschlossene Masse konstant. Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}.$$

Multiplikation mit $\dot{R}$ und Integration liefern die erhaltene spezifische mechanische Energie

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{GM}{R} = \mathcal{E}.$$

Daher gilt

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{2GM}{R^3} + \frac{2\mathcal{E}}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{2\mathcal{E}}{a^2 R_s^2}.$$

Wegen $\dot{R}/R = \dot{a}/a$ ergibt der Vergleich mit (1) unter der Zuordnung $2\mathcal{E} = -kc^2$

$$A_1 = \frac{8\pi G}{3}.$$

A.2

Das physikalische Volumen der Kugel sei

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi}{3}(aR_s)^3.$$

Ihre gesamte innere Energie ist $U = \rho c^2 \mathcal{V}$. Der erste Hauptsatz für ein adiabatisches System liefert

$$dU = -p d\mathcal{V}.$$

Somit gilt

$$c^2 \mathcal{V} d\rho + (\rho c^2 + p) d\mathcal{V} = 0.$$

Mit $\dot{\mathcal{V}}/\mathcal{V} = 3\dot{a}/a$ folgt

$$\dot{\rho} + 3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \frac{\dot{a}}{a} = 0.$$

Also ist

$$\boxed{A_2 = 3}.$$

A.3

Für konstantes w wird die Kontinuitätsgleichung zu

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w) \frac{\dot{a}}{a},$$

sodass mit $a_0 = 1$ folgt:

$$\boxed{\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}}.$$

Bei Strahlung nimmt die Photonenzahldichte wie a^{-3} ab. Jedes Photon besitzt die Energie hc/λ , und aufgrund der gegebenen Skalierung der Wellenlänge $\lambda \propto a$ ist seine Energie proportional zu a^{-1} .

Daher gilt

$$\rho c^2 \propto a^{-4},$$

woraus folgt:

$$3(1+w) = 4, \quad \boxed{w = \frac{1}{3}}.$$

Bei nichtrelativistischer Materie wird die Energie von der annähernd konstanten Ruheenergie pro Teilchen dominiert. Die Teilchenzahldichte nimmt wie a^{-3} ab, sodass

$$\rho \propto a^{-3}, \quad \boxed{w = 0}.$$

Dies ist die Näherung druckloser Materie.

Für konstante Energiedichte gilt $\dot{\rho} = 0$. In einem expandierenden Universum erfordert die Kontinuitätsgleichung

$$\rho + \frac{p}{c^2} = 0,$$

und somit

$$\boxed{w = -1}.$$

A.4

Für $k = 0$ gilt

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho = H_0^2 a^{-3(1+w)}.$$

Wählen wir den expandierenden Lösungszweig, so ist

$$\dot{a} = H_0 a^{1-\frac{3}{2}(1+w)}.$$

Für $w \neq -1$ liefert die Integration mit $a(0) = 0$

$$a^{\frac{3}{2}(1+w)} = \frac{3}{2}(1+w)H_0 t.$$

Folglich gilt für Strahlung

$$a(t) = (2H_0 t)^{1/2}.$$

Die Normierung $a(t_0) = 1$ impliziert $2H_0 t_0 = 1$, also

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}.$$

Für nichtrelativistische Materie gilt

$$a(t) = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3}.$$

Hier ist $3H_0 t_0/2 = 1$, woraus folgt:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}.$$

Bei konstanter Energiedichte ist $H = H_0$ konstant. Integration von $\dot{a}/a = H_0$ unter der Bedingung $a(t_0) = 1$ ergibt

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)}.$$

A.5

Setzt man $k = 0$ in (1), erhält man die kritische **massenäquivalente Dichte**:

$$\rho_c = \frac{H^2}{A_1} = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

Die abgedruckte Definition $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ ist daher dimensionswidrig. Die entsprechende kritische Energiedichte ist

$$\rho_c c^2 = \frac{H^2 c^2}{A_1}.$$

Mit der konsistenten Definition gilt

$$\Omega = \frac{A_1 \rho}{H^2}.$$

Wir dividieren (1) durch H^2 :

$$1 = \Omega - \frac{kc^2}{a^2 R_s^2 H^2}.$$

Da $a_0 = 1$, ist der heutige Radius $R_0 = R_s$. Daher gilt

$$k = (\Omega - 1) \frac{a^2 H^2 R_0^2}{c^2}.$$

A.6

Der Faktor, mit dem $\Omega - 1$ in A.5 multipliziert wird, ist positiv. Daher haben k und $\Omega - 1$ dasselbe Vorzeichen:

Räumliche Krümmung	Dichteverhältnis
$k = +1$, geschlossen	$\Omega > 1$
$k = 0$, flach	$\Omega = 1$
$k = -1$, offen	$\Omega < 1$

Bei nichtnegativer Energiedichte lautet der Wertebereich für ein offenes Universum $0 \leq \Omega < 1$.

B.1

Aus A.5 folgt

$$\Delta(t) \equiv \Omega(t) - 1 = \frac{kc^2}{R_0^2 a^2 H^2} = \frac{kc^2}{R_0^2 \dot{a}^2}.$$

Diese Identität ist exakt.

Um eine kleine Abweichung von der Flachheit zu untersuchen, bestimmen wir $\dot{a}$ in führender Ordnung mithilfe der Lösungen für ein flaches Universum aus A.4. Wenn

$$a \propto t^\alpha,$$

dann gilt

$$\dot{a}^2 \propto t^{2\alpha-2}, \quad \Delta \propto t^{2-2\alpha}.$$

Während der Strahlungsdominanz ist $\alpha = 1/2$, also

$$\Delta(t) \simeq \Delta_* \frac{t}{t_*}.$$

Während der Materiedominanz ist $\alpha = 2/3$, also

$$\Delta(t) \simeq \Delta_* \left(\frac{t}{t_*} \right)^{2/3}.$$

Somit wächst der Betrag jeder kleinen, von null verschiedenen Abweichung von der Flachheit in beiden Epochen. Diese Potenzgesetze gelten, solange die Krümmung nur eine kleine Korrektur zur Expansion beiträgt.

B.2

Die konstante Dichte sei ρ_Λ , und wir definieren

$$H_\Lambda^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda.$$

Für $|\Omega - 1| \ll 1$ ist der Krümmungsbeitrag zu (1) klein, sodass

$$H \simeq H_\Lambda, \quad a(t) \simeq a_i e^{H_\Lambda(t-t_i)}.$$

Einsetzen in

$$\Delta = \frac{kc^2}{R_0^2 a^2 H^2}$$

ergibt

$$\Delta(t) \simeq \Delta_i e^{-2H_\Lambda(t-t_i)}.$$

Die Inflation unterdrückt Abweichungen von der Flachheit daher exponentiell.

B.3

Wir differenzieren (1) und verwenden die Kontinuitätsgleichung:

$$2H\dot{H} = A_1\dot{\rho} + \frac{2kc^2H}{R_0^2a^2},$$

also

$$\dot{H} = -\frac{3A_1}{2}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) + \frac{kc^2}{R_0^2a^2}.$$

Durch Addition von H^2 aus (1) wird der Krümmungsterm eliminiert:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\frac{A_1}{2}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right).$$

Mit A.1 folgt

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right).$$

Für positive Dichte erfordert beschleunigte Expansion

$$p < -\frac{1}{3}\rho c^2,$$

was insbesondere einen negativen Druck voraussetzt.

Für die hier betrachtete Phase konstanter Dichte ergibt A.3 $p = -\rho c^2$. Daher gilt

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3}\rho > 0.$$

Schließlich ist $aH = \dot{a}$, also

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{d}{dt}\frac{1}{\dot{a}} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} < 0.$$

Damit sind alle drei geforderten Eigenschaften bewiesen.

Der in dieser Bedingung auftretende Radius ist der **mitbewegte** Hubble-Radius $c/(aH)$; die Konstante c beeinflusst das Vorzeichen der Ableitung nicht.

B.4

Direktes Differenzieren ergibt

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{a^2H^2} = -\frac{1}{a}\left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right).$$

Wegen $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ gilt

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{\epsilon - 1}{a}.$$

Da $a > 0$, nimmt der Radius genau dann ab, wenn

$$\boxed{\epsilon < 1}.$$

Äquivalent dazu gilt

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \epsilon).$$

C.1

Zunächst differenzieren wir (4):

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{pl}^2}(\dot{\phi}\ddot{\phi} + V'\dot{\phi}).$$

Gleichung (3) liefert $\ddot{\phi} + V' = -3H\dot{\phi}$, also

$$2H\dot{H} = -\frac{H\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2}.$$

Somit gilt

$$\boxed{\dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2M_{pl}^2}}, \quad \epsilon = \frac{\dot{\phi}^2}{2M_{pl}^2 H^2}.$$

Die Slow-Roll-Annahmen liefern

$$H^2 \simeq \frac{V}{3M_{pl}^2}, \quad 3H\dot{\phi} \simeq -V'.$$

Setzt man dies in ϵ ein, erhält man

$$\epsilon \simeq \frac{V'^2}{18M_{pl}^2 H^4} = \boxed{\frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2}.$$

Um η_V zu erhalten, differenzieren wir die Slow-Roll-Feldgleichung:

$$3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} \simeq -V''\dot{\phi}.$$

Division durch $3H^2\dot{\phi}$ ergibt

$$\frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \simeq -\frac{V''}{3H^2}.$$

Die linke Seite ist $-\epsilon - \delta$. Daher gilt

$$\eta_V = \delta + \epsilon \simeq \frac{V''}{3H^2} = \boxed{M_{pl}^2 \frac{V''}{V}}.$$

Schließlich ergibt sich mit der Definition $dN = Hdt$ aus der Aufgabenstellung

$$\frac{dN}{d\phi} = \frac{H}{\dot{\phi}} \simeq -\frac{3H^2}{V'} = \boxed{-\frac{V}{M_{pl}^2 V'}}.$$

Dieser Ausdruck gilt entlang einer monotonen Feldtrajektorie, auf der das Feld das Potenzial hinabrollt.

D.1

Für

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n,$$

lauten die Ableitungsverhältnisse

$$\frac{V'}{V} = \frac{n}{\phi}, \quad \frac{V''}{V} = \frac{n(n-1)}{\phi^2}.$$

Folglich gilt

$$\epsilon \simeq \frac{n^2 M_{pl}^2}{2\phi^2}.$$

Extrapoliert man diesen Slow-Roll-Ausdruck bis zur Endbedingung $\epsilon = 1$, erhält man

$$|\phi_{\text{end}}| \simeq \frac{|n|}{\sqrt{2}} M_{pl}.$$

Für $n > 0$ wählen wir den Lösungszweig mit positivem Feld. Das Feld rollt zu kleineren ϕ , sodass ϵ zunimmt und den Wert eins erreicht bei

$$\phi_{\text{end}} \simeq \frac{n}{\sqrt{2}} M_{pl}.$$

Das Feld hat dieselben Einheiten wie M_{pl} .

Die Aufgabenstellung lässt jede ganze Zahl n zu, doch das angenommene Ende der Inflation schränkt die relevanten Fälle ein:

- Für $n = 0$ ist das Potenzial konstant und $\epsilon \simeq 0$; dieses Modell liefert kein Ende der Slow-Roll-Inflation.
- Für $n < 0$ und $\phi > 0$ ist $V' < 0$, also $\dot{\phi} \simeq -V'/(3H) > 0$. Somit nimmt $\epsilon \propto \phi^{-2}$ ab. Der formale Schwellenwert $\epsilon = 1$ kennzeichnet einen Eintritt in die Inflation.

Das Ergebnis für den Feldwert am Ende ist eine Abschätzung, da Slow Roll keine kontrollierte Näherung mehr ist, wenn sich ϵ dem Wert eins nähert.

D.2

Für das Monopotenzial ergibt C.1

$$\frac{dN}{d\phi} \simeq -\frac{\phi}{nM_{pl}^2}.$$

Integration vom Ende der Inflation aus, wo $N = 0$ gilt, liefert

$$N(\phi) \simeq -\frac{\phi^2 - \phi_{\text{end}}^2}{2nM_{pl}^2}.$$

Für $n > 0$ ist der anfängliche Feldwert größer als der abschließende, sodass N_{start} gemäß der Aufgabenstellung negativ ist. Wir definieren die positive Dauer

$$\mathcal{N} \equiv -N_{\text{start}} = \ln \frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{start}}}.$$

Dann gilt

$$\phi_{\text{start}}^2 \simeq \phi_{\text{end}}^2 + 2nM_{pl}^2\mathcal{N} = \frac{n}{2}(4\mathcal{N} + n)M_{pl}^2.$$

Die Slow-Roll-Parameter zu Beginn sind daher

$$\epsilon_{\text{start}} \simeq \frac{n}{4\mathcal{N} + n}, \quad \eta_{V,\text{start}} \simeq \frac{2(n-1)}{4\mathcal{N} + n}.$$

Somit gilt

$$r \simeq \frac{16n}{4\mathcal{N} + n}$$

und

$$n_s \simeq 1 + \frac{4(n-1) - 6n}{4\mathcal{N} + n} = 1 - \frac{2(n+2)}{4\mathcal{N} + n}.$$

In der vorzeichenbehafteten Konvention der Aufgabenstellung lauten diese Ausdrücke

$$r \simeq \frac{16n}{n - 4N_{\text{start}}}, \quad n_s \simeq 1 - \frac{2(n+2)}{n - 4N_{\text{start}}}.$$

Für $\mathcal{N} \gg n$ ergeben sich die bekannten Formen in führender Ordnung

$$r \simeq \frac{4n}{\mathcal{N}}, \quad n_s \simeq 1 - \frac{n+2}{2\mathcal{N}}.$$

Interpretiert man das geforderte $N = 60$ als positive Dauer $\mathcal{N} = 60$, liefert die Tensorgrenze

$$\frac{16n}{240 + n} < 0.12 \implies n < \frac{28.8}{15.88} \simeq 1.814.$$

Die einzige positive ganze Zahl, die diese Grenze einhält, ist daher $n = 1$.

Die numerischen Vorhersagen, die alle dimensionslos sind, lauten:

n	r	n_s	Vergleich mit den angegebenen Einschränkungen
1	0.0664	0.9751	Erfüllt $r < 0.12$; n_s liegt geringfügig über 0.974
2	0.1322	0.9669	Liegt im angegebenen n_s -Intervall; überschreitet die Grenze für r
3	0.1975	0.9588	Außerhalb beider angegebenen Grenzen

Somit gilt

$$n = 1 \quad \text{wenn die Tensorobergrenze eingehalten werden muss.}$$

Der vorhergesagte Spektralindex liegt etwa 0.0011 über dem oberen Rand des angegebenen Intervalls.

Die ganze Zahl $n = 2$ liegt näher am zentralen Wert des Spektralindex, verletzt jedoch die Tensorgrenze. **Keine positive ganze Zahl erfüllt beide angegebenen Grenzen gleichzeitig.**

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.