

المسألة 1: المادة المظلمة

قدّم فريتز زويكي أول استدلال منهجي على وجود المادة المظلمة، استناداً إلى رصده لديناميكا عنقود مجرات الهلبة، وهو عنقود يضم نحو ألف مجرة. استخدم زويكي مبرهنة الفيريال لتقدير كتلة العنقود المجري. في نظام بسيط يتألف من شمس وكوكب، حيث يدور الكوكب حول الشمس في مدار دائري، تنص مبرهنة الفيريال على وجود علاقة دقيقة بين الطاقة الحركية للكوكب وطاقة وضعه الثقالية. أما في الحالة العامة لنظام من جسيمات عديدة مترابطة بفعل تآثر ما، فترتبط مبرهنة الفيريال المتوسط الزمني للطاقة الحركية الكلية بالمتوسط الزمني لطاقة الوضع الكلية.

في عام 1933، قدّر زويكي، استناداً إلى رصده لسرعات المجرات القريبة من حافة عنقود مجرات الهلبة، أن كتلة العنقود أكبر مما رُصد بصرياً (أي المجرات). فقد كان التجاذب الثقالي الناتج عن المادة القابلة للرصد (المجرات) أضعف من أن يفسّر سرعات المجرات. ولذلك لا بد من وجود كتل خفية تفسّر هذه السرعات الكبيرة. وهذه الكتلة الخفية هي كتلة المادة المظلمة. فيما يلي، افترض أن كتلة كل مجرة هي مجموع كتلتها المرئية وكتلة المادة المظلمة التي تتحرك معها، وأن المادة المظلمة لا تتأثر مع المادة المرئية إلا ثقالياً.

A. عنقود المجرات

اعتبر عنقوداً مجرياً يتألف من عدد كبير N من المجرات ومن مادة مظلمة موزعة بانتظام داخل كرة نصف قطرها R ، وتبلغ الكتلة الكلية للعنقود (المجرات والمادة المظلمة) M . افترض أن متوسط الكتلة الكلية للمجرة (المادة المرئية والمادة المظلمة) هو m .

A.1 بافتراض أن توزيع المادة في العنقود متصل، أوجد طاقة الوضع الثقالية الكلية للعنقود بدلالة M و R . 1.0 نقطة.

بسبب التمدد الكوني، يبتعد أي جرم بعيد عن راصد على الأرض بسرعة تعتمد على المسافة بين الراصد والجرم. يُرصد تردد معين من سلسلة ليمان (خط طيفي لانبعث الهيدروجين)، صادر عن مستعر أعظم من النوع Ia في المجرة ذات الترتيب i ضمن العنقود المجري، وتكون قيمته f_i ، حيث $i = 1, \dots, N$ ، بينما يكون تردد ليمان المناظر نفسه على الأرض هو f_0 .

A.2	حدّد متوسط سرعة ابتعاد العنقود المجري بأكمله عن الأرض V_{cr} بدلالة f_i (حيث $i = 1, \dots, N$) و f_0 و N . لاحظ أن سرعة المجرة صغيرة جداً مقارنة بسرعة الضوء c .	0.5 نقطة.
A.3	بافتراض أن سرعات المجرات بالنسبة إلى مركز العنقود متساوية الخواص (متماثلة في جميع الاتجاهات)، حدّد الجذر التربيعي لمتوسط مربعات سرعات المجرات v_{rms} بالنسبة إلى مركز العنقود بدلالة f_i (حيث $i = 1, \dots, N$) و f_0 . انطلاقاً من هذه النتيجة، حدّد متوسط الطاقة الحركية لمجرة بالنسبة إلى مركز العنقود بدلالة m و v_{rms} .	1.5 نقطة.

لإيجاد الكتلة الكلية للعنقود، يمكن استخدام مبرهنة الفيريال. تنص هذه المبرهنة على أنه، لنظام من الجسيمات المترابطة بفعل قواها المحافظة،

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

حيث $\langle K \rangle_t$ هو المتوسط الزمني للطاقة الحركية الكلية، و $\langle U \rangle_t$ هو المتوسط الزمني لطاقة الوضع الكلية، و γ ثابت. يمكن اشتقاق هذه المبرهنة بافتراض أنه، في نظام من الجسيمات المترابطة بفعل تآثراتها الذاتية، تكون مقادير متجهات موضع كل جسيم وكمية حركته محدودة، ومن ثم تكون الكمية التالية

$$\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

محدودة.

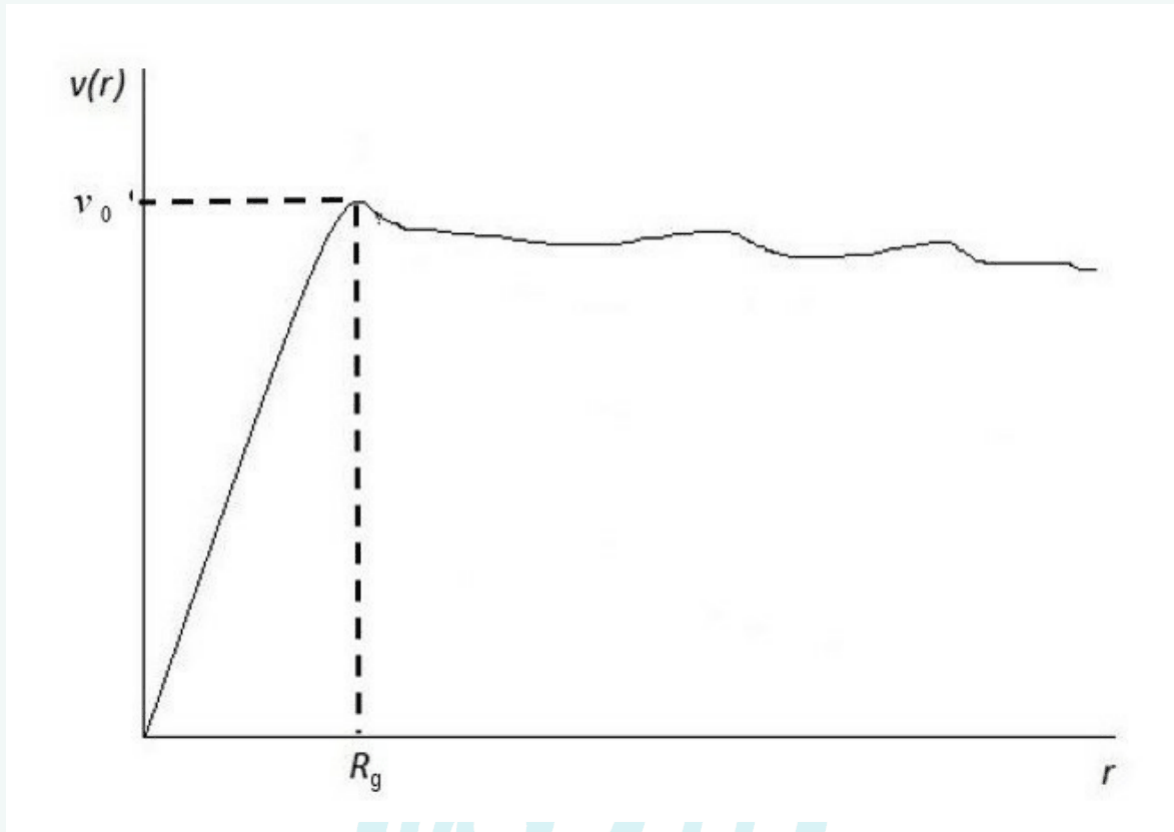
1.7 نقطة.	باستخدام حقيقة أن المتوسط الزمني لـ $d\Gamma/dt$ على فترة زمنية طويلة يساوي صفراً، $\langle d\Gamma/dt \rangle_t = 0$ ، حدّد γ في مبرهنة الفيريال أعلاه في حالة التأثير الثقالي. (تلميح: حاول حل المسألة بإجراء الجمع في Γ لعدد صغير ومنتج من المجرات).	A.4
0.5 نقطة.	انطلاقاً من النتائج السابقة، حدّد الكتلة الكلية للمادة المظلمة في العنقود بدلالة N و m_g و R_g و v_{rms} ، حيث m_g هو متوسط الكتلة المرئية الكلية للمجرة. لاحظ أن الجذر التربيعي لمتوسط مربع سرعة المادة المظلمة يساوي نظيره للمجرات.	A.5

B. المادة المظلمة في مجرة

توجد المادة المظلمة أيضاً داخل المجرة وحولها. اعتبر مجرة كروية نصف قطر حافتها المرئية R_g (وهو تقريب لأبعد مسافة يظل عندها عدد كبير من النجوم مرئياً، لكن لاحظ أن عدداً قليلاً جداً من النجوم قد يظل موزعاً في المنطقة الواقعة وراء R_g). افترض أن النجوم في المجرة جسيمات نقطية متوسطة كتلتها m_s . وافترض أن نجوم المجرة، الموزعة بانتظام بكثافة عددية n ، تتحرك في مدارات دائرية.

0.8 نقطة.	إذا كانت المجرة تتألف من النجوم فقط، فأوجد سرعة نجم $v(r)$ بدلالة بُعده عن مركز المجرة، وارسم رسماً تخطيطياً لـ $v(r)$ عند $r < R_g$ وعند $r \geq R_g$.	B.1
-----------	--	-----

يمكن الاستدلال على وجود المادة المظلمة من منحنى دوران المجرة، وهو تمثيل بياني لـ $v(r)$ مستمد من الأرصاد. يبيّن الشكل أدناه نمطاً شائعاً لمنحنى دوران المجرات. يمكنك، للتبسيط، افتراض أن $v(r)$ دالة خطية عند $r \leq R_g$ ، وأنها ثابتة وتساوي v_0 عند $r > R_g$.



الشكل 1 تمثيل بياني لمنحنى الدوران في مجرة.

0.5 نقطة.	أوجد الكتلة الكلية m_R للجزء من المجرة الواقع داخل الكرة ذات نصف القطر R_g ، بدلالة v_0 و R_g .	B.2
1.5 نقطة.	حدّد الكثافة الكتلية للمادة المظلمة بدلالة R_g و v_0 و n و m_s ، عند $r < R_g$ وعند $r \geq R_g$.	B.3

يشير الاختلاف بين الشكل في B.2 والرسم البياني الذي حصلت عليه في B.1 إلى وجود المادة المظلمة.

C. الغاز بين النجمي والمادة المظلمة

اعتبر الآن مجرة فنية يشكّل الغاز بين النجمي والمادة المظلمة معظم كتلتها (أهمل كتلة النجوم). يُفترض أن الغاز بين النجمي يتألف من جسيمات متماثلة كتلة كل منها m_p . وتعتمد الكثافة العددية للغاز $n(r)$ ودرجة حرارته $T(r)$ على البُعد عن مركز المجرة r . وعلى الرغم من حدوث عمليات فيزيائية عديدة في الغاز، يمكننا افتراض أنه في حالة اتزان هيدروستاتيكي بفعل ضغطه والتجاذب الثقالي للمجرة.

C.1	أوجد تدرج ضغط الغاز dP/dr بدلالة $m'(r)$ و $n(r)$. هنا، $m'(r)$ هي الكتلة الكلية للغاز والمادة المظلمة داخل كرة نصف قطرها r ومركزها مركز المجرة.	0.5 نقطة.
C.2	بافتراض أن الغاز بين النجمي غاز مثالي، أوجد $m'(r)$ بدلالة $n(r)$ و $T(r)$ ومشتقاتهما بالنسبة إلى r .	0.5 نقطة.

بعد ذلك، وللتبسيط، افترض أن الغاز موزع توزيعاً متساوي الحرارة عند درجة الحرارة T_0 ، وأن الكثافة العددية للغاز بين النجمي تُعطى بالعلاقة

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2},$$

حيث α و β ثابتان.

C.3	أوجد الكثافة الكتلية للمادة المظلمة بدلالة r داخل المجرة.	1.0 نقطة.
-----	---	-----------

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

لتكن

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i.$$

هنا G هو ثابت الجذب العام، و k_B هو ثابت بولتزمان. تقتصر نتائج دوبلر على الرتبة الأولى في نسبة السرعة إلى c .

A.1 •

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}.$$

A.2 •

$$V_{cr} \simeq c \left(1 - \frac{\bar{f}}{f_0} \right).$$

A.3 •

$$v_{rms} \simeq \frac{c}{f_0} \sqrt{\frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2}, \quad \langle K_{gal} \rangle = \frac{1}{2} m v_{rms}^2.$$

A.4 •

$$\gamma = \frac{1}{2}.$$

A.5 •

$$M_{\text{DM}} = \frac{5Rv_{rms}^2}{3G} - Nm_g.$$

B.1 •

$$v(r) = \begin{cases} r\sqrt{\frac{4\pi Gnm_s}{3}}, & 0 \leq r < R_g, \\ \sqrt{\frac{4\pi Gnm_s R_g^3}{3r}}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

يرتفع المنحنى خطياً من نقطة الأصل إلى قيمته العظمى عند R_g ، ثم يتناقص وفق $r^{-1/2}$ ، مقترباً من الصفر.

B.2 •

$$m_R = \frac{v_0^2 R_g}{G}.$$

B.3 •

$$\rho_{\text{DM}}(r) = \begin{cases} \frac{3v_0^2}{4\pi G R_g^2} - nm_s, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2}{4\pi G r^2}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

C.1 •

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm'(r)m_p n(r)}{r^2}.$$

C.2 •

$$m'(r) = -\frac{k_B r^2}{Gm_p} \left[\frac{dT}{dr} + \frac{T(r)}{n(r)} \frac{dn}{dr} \right].$$

C.3 •

$$\rho_{\text{DM}}(r) = \frac{k_B T_0 (\beta^2 + 6\beta r + 3r^2)}{4\pi G m_p r^2 (\beta + r)^2} - \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2} \quad (r > 0).$$

الحل

A.1

نختار أن تكون طاقة الوضع الثقالية صفراً عندما تكون الكتلة كلها مشتتة عند اللانهاية. الكثافة الكتلية المنتظمة والكتلة الواقعة داخل نصف القطر r هما

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}, \quad M(r) = \frac{4\pi}{3} \rho r^3 = M \frac{r^3}{R^3}.$$

نكون الكرة بجلب قشور رقيقة متتالية من اللانهاية. قشرة كتلتها

$$dM = 4\pi r^2 \rho dr = \frac{3Mr^2}{R^3} dr$$

تكون طاقة تأثرها مع الكتلة الداخلية التي جُمعت سابقاً

$$dU = -\frac{GM(r)}{r} dM.$$

تحسب طريقة البناء هذه كل تأثر بين زوج من عناصر الكتلة مرة واحدة. ولذلك،

$$U = -\int_0^R \frac{G}{r} \left(\frac{Mr^3}{R^3} \right) \left(\frac{3Mr^2}{R^3} \right) dr = -\frac{3GM^2}{R^6} \frac{R^5}{5}.$$

إن،

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}.$$

A.2

لتكن u_i مركبة سرعة المجرة i على خط النظر بالنسبة إلى الأرض، ونُعدّ موجبة عند الابتعاد. عند $u_i \ll c$ ، تكون علاقة دوبلر إلى الرتبة الأولى

$$f_i \simeq f_0 \left(1 - \frac{u_i}{c} \right),$$

ومن ثم

$$u_i \simeq c \frac{f_0 - f_i}{f_0}.$$

متوسط السرعات الداخلية يساوي صفرًا في إطار سكون العنقود. ولذلك فإن سرعة ابتعاد العنقود هي متوسط مركبات السرعة المقيسة هذه على خط النظر:

$$V_{cr} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \simeq \frac{c}{Nf_0} \sum_{i=1}^N (f_0 - f_i).$$

وبالتالي،

$$V_{cr} \simeq c \left(1 - \frac{1}{Nf_0} \sum_{i=1}^N f_i \right) = c \left(1 - \frac{\bar{f}}{f_0} \right).$$

A.3

مركبة سرعة المجرة i على خط النظر بالنسبة إلى مركز العنقود هي

$$w_i = u_i - V_{cr} \simeq -\frac{c}{f_0} (f_i - \bar{f}).$$

عندما يكون توزيع السرعات متساوي الخواص، يتوزع متوسط مربع السرعة بالتساوي بين ثلاثة اتجاهات متعامدة فيما بينها:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle.$$

وباختيار الاتجاه z على امتداد خط النظر، نحصل على

$$v_{rms}^2 = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = 3\langle w^2 \rangle = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N w_i^2.$$

إن،

$$v_{rms} \simeq \frac{c}{f_0} \sqrt{\frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2}.$$

وبصورة مكافئة،

$$v_{rms}^2 \simeq \frac{3c^2}{f_0^2} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i \right)^2 \right].$$

باستخدام الكتلة الكلية الممثلة للمجرة m ، يكون متوسط الطاقة الحركية في إطار سكون العنقود

$$\langle K_{gal} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m v_{rms}^2.$$

A.4

نعمل في إطار مركز الكتلة. باشتقاق الكمية المعطاة، نحصل على

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i + \vec{p}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2K.$$

لتكن القوة المؤثرة في الجسيم i بفعل الجسيم j . يتيح قانون نيوتن الثالث تجميع حد القوى في أزواج غير مرتبة:

$$\sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = \sum_{i < j} \left(\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \cdot \vec{F}_{ji} \right) = \sum_{i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{F}_{ij}.$$

في حالة الجاذبية النيوتنية،

$$\vec{F}_{ij} = -Gm_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}^3}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|.$$

ولذلك،

$$\sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = - \sum_{i < j} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} = U,$$

حيث U هي طاقة الوضع الثقالية الكلية الناتجة عن التآثرات بين أزواج الجسيمات. ويترتب على ذلك أن

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 2K + U.$$

بما أن Γ تظل محدودة،

$$\left\langle \frac{d\Gamma}{dt} \right\rangle_t = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(t + \tau) - \Gamma(t)}{\tau} = 0.$$

وعليه، فإن أخذ المتوسط الزمني يعطي

$$2\langle K \rangle_t + \langle U \rangle_t = 0, \quad \langle K \rangle_t = -\frac{1}{2} \langle U \rangle_t.$$

بالمقارنة مع المبرهنة المذكورة، نحصل على

$$\gamma = \frac{1}{2}.$$

A.5

نعتبر العنقود في حالة اتزان فيريالي مستقر، بحيث تمثل خواصه الإجمالية المرصودة المتوسطات الزمنية. وبما أن الجذر التربيعي لمتوسط مربع السرعة متساوٍ للمادة المظلمة والمجرات، فإن الطاقة الحركية الكلية هي

$$K = \frac{1}{2} M v_{rms}^2.$$

بدمج مبرهنة الفيريال مع A.1،

$$2K = -U \implies M v_{rms}^2 = \frac{3GM^2}{5R}.$$

عند $M > 0$ ،

$$M = \frac{5Rv_{rms}^2}{3G}.$$

الكتلة المرئية الكلية هي Nm_g . وبطرحها من الكتلة الكلية، نحصل على

$$M_{DM} = \frac{5Rv_{rms}^2}{3G} - Nm_g.$$

B.1

الكثافة الكتلية النجمية هي

$$\rho_* = nm_s.$$

نهمل الكتلة الكلية للنجوم القليلة الواقعة وراء R_g ، مع الإبقاء عليها بوصفها جسيمات اختبار يمكن لمداراتها أن تكشف المجال الثقالي الخارجي. وتكون الكتلة النجمية المحصورة عندئذٍ

$$M_*(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}nm_sr^3, & r < R_g, \\ \frac{4\pi}{3}nm_sR_g^3, & r \geq R_g. \end{cases}$$

وفقاً لمبرهنة القشرة الكروية، لا تسهم في التسارع الثقالي عند r إلا الكتلة المحصورة داخله. وبمساواة هذا التسارع بالتسارع المركزي، نحصل على

$$\frac{v(r)^2}{r} = \frac{GM_*(r)}{r^2}, \quad v(r)^2 = \frac{GM_*(r)}{r}.$$

إذن،

$$v(r) = \begin{cases} r\sqrt{\frac{4\pi Gnm_s}{3}}, & 0 \leq r < R_g, \\ \sqrt{\frac{4\pi Gnm_sR_g^3}{3r}}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

لرسم المنحنى تخطيطياً، نعرّف

$$v_g = R_g\sqrt{\frac{4\pi Gnm_s}{3}}.$$

المنحنى خط مستقيم من $(0, 0)$ إلى (R_g, v_g) . وهو متصل ويبلغ قيمته العظمى عند تلك النقطة. وبعد R_g ، يتبع العلاقة

$$v(r) = v_g\sqrt{\frac{R_g}{r}},$$

متناقصاً نحو خط التقارب الأفقي $v = 0$.

B.2

عند $r = R_g$ ، تكون السرعة المدارية الدائرية المرصودة v_0 . ويعطي شرط المدار الدائري

$$\frac{v_0^2}{R_g} = \frac{Gm_R}{R_g^2}.$$

ولذلك فإن الكتلة الكلية المحصورة، بما فيها المادة المظلمة، هي

$$m_R = \frac{v_0^2 R_g}{G}.$$

B.3

لأي توزيع كتلي ذي تناظر كروي تكشف عنه المدارات الدائرية،

$$M_{\text{enc}}(r) = \frac{rv(r)^2}{G}.$$

التقريب المذكور لمنحنى الدوران المرصود هو

$$v(r) = \begin{cases} v_0 r / R_g, & r < R_g, \\ v_0, & r \geq R_g. \end{cases}$$

ومن ثم،

$$M_{\text{enc}}(r) = \begin{cases} \frac{v_0^2 r^3}{GR_g^2}, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2 r}{G}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

كتلة القشرة الكروية هي $dM_{\text{enc}} = 4\pi r^2 \rho_{\text{tot}} dr$ ، ولذلك

$$\rho_{\text{tot}}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM_{\text{enc}}}{dr} = \begin{cases} \frac{3v_0^2}{4\pi GR_g^2}, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2}{4\pi Gr^2}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

بطرح الكثافة النجمية nm_s داخل الحافة المرئية، وإهمال الكثافة النجمية خارجها، نحصل على

$$\rho_{\text{DM}}(r) = \begin{cases} \frac{3v_0^2}{4\pi GR_g^2} - nm_s, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2}{4\pi Gr^2}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

الكتلة المحصورة متصلة عند R_g ، وإن كانت الكثافة قد تتغير قفزيًا عنده في هذا النموذج المثالي.

C.1

هنا يرمز $m'(r)$ إلى الكتلة المحصورة المحددة في المسألة؛ فالشرطة جزء من الرمز وليست علامة اشتقاق.

نعتبر عنصرًا صغيرًا من الغاز سُمكه الشعاعي dr ومساحة مقطعه dA . كتلته هي

$$dm = m_p n(r) dA dr.$$

محصلة قوة الضغط المتجهة إلى الخارج هي

$$dF_P = -\frac{dP}{dr} dA dr.$$

ومقدار قوة الجاذبية المتجهة إلى الداخل هو

$$dF_G = \frac{Gm'(r)}{r^2} m_p n(r) dA dr.$$

يتطلب الاتزان الهيدروستاتيكي توازن هاتين القوتين. ولذلك،

$$\left[\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm'(r)m_p n(r)}{r^2} \right].$$

تعبّر الإشارة السالبة عن تناقص الضغط نحو الخارج لإسناد الغاز في مواجهة الجاذبية المتجهة إلى الداخل.

C.2

للغاز المثالي،

$$P(r) = n(r)k_B T(r).$$

بالاشتقاق،

$$\frac{dP}{dr} = k_B \left[T(r) \frac{dn}{dr} + n(r) \frac{dT}{dr} \right].$$

بالتعويض في معادلة الاتزان الهيدروستاتيكي وحلها لإيجاد الكتلة المحصورة، نحصل على

$$m'(r) = -\frac{k_B r^2}{G m_p n(r)} \left[T(r) \frac{dn}{dr} + n(r) \frac{dT}{dr} \right].$$

إذن،

$$\boxed{m'(r) = -\frac{k_B r^2}{G m_p} \left[\frac{dT}{dr} + \frac{T(r)}{n(r)} \frac{dn}{dr} \right]}.$$

وصيغة مكافئة لذلك هي

$$m'(r) = -\frac{k_B T(r) r}{G m_p} \left[\frac{d \ln n}{d \ln r} + \frac{d \ln T}{d \ln r} \right].$$

C.3

للغاز المتساوي الحرارة، $T(r) = T_0$ ، ومن ثم تصبح C.2

$$m'(r) = -\frac{k_B T_0 r^2}{G m_p} \frac{d \ln n}{dr}.$$

تحقق الكثافة العددية المعطاة العلاقة

$$\ln n = \ln \alpha - \ln r - 2 \ln(\beta + r),$$

ولذلك

$$\frac{d \ln n}{dr} = -\frac{1}{r} - \frac{2}{\beta + r}.$$

وعليه، فإن الكتلة الكلية المحصورة هي

$$m'(r) = \frac{k_B T_0}{G m_p} \left(r + \frac{2r^2}{\beta + r} \right) = \frac{k_B T_0}{G m_p} \frac{r(\beta + 3r)}{\beta + r}.$$

نشتق هذه الكتلة المحصورة:

$$\frac{d m'(r)}{dr} = \frac{k_B T_0}{G m_p} \frac{\beta^2 + 6\beta r + 3r^2}{(\beta + r)^2}.$$

إذن، الكثافة الكتلية الكلية هي

$$\rho_{\text{tot}}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d m'(r)}{dr} = \frac{k_B T_0 (\beta^2 + 6\beta r + 3r^2)}{4\pi G m_p r^2 (\beta + r)^2}.$$

الكثافة الكتلية للغاز هي

$$\rho_{\text{gas}}(r) = m_p n(r) = \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2}.$$

ب طرحها من الكثافة الكلية، نحصل على

$$\rho_{DM}(r) = \frac{k_B T_0 (\beta^2 + 6\beta r + 3r^2)}{4\pi G m_p r^2 (\beta + r)^2} - \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2} \quad (r > 0).$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: الزلزال والبركان والتسونامي

إندونيسيا سوق شاملة للأخطار الطبيعية. فقد شهدت تقريباً جميع أنواع الأخطار الطبيعية، مثل الثورات البركانية والزلازل والتسونامي.

A. ثوران بركان ميرابي

يُعد بركان ميرابي في يوغياكارتا أحد أكثر البراكين نشاطاً في جاوة. وتُعد تدفقات الفتات البركاني من السمات المعروفة لثورانه. وتدفق الفتات البركاني هو مزيج ساخن من الغاز والصخور يتحرك مبتعداً عن البركان. في 26 أكتوبر 2010، أظهر ميرابي طابعه الانفجاري بإنتاج عمود من الرماد بلغ ارتفاعه 12 km (الشكل 1)، وتيارات من الفتات البركاني أدت إلى نزوح أكثر من 20,000 شخص من محيط البركان.



(Fig. 1: Pyroclastic cloud during Merapi eruption, Courtesy of Volcanological Office of Yogyakarta, BPPTKG)

(الشكل 1: سحابة من الفتات البركاني أثناء ثوران ميرابي، بإذن من مكتب علم البراكين في يوغياكارتا، BPPTKG)

لننظر في أسباب أكبر ثوران لميرابي في عام 2010. يعرف علماء الجيوفيزياء أن تأثير دخول المياه الخارجية إلى الصهارة يؤدي دوراً مهماً في السلوك الانفجاري للثورانات البركانية (الثورات المائية الصهارية). لنفترض أننا نتعامل مع بركان بوصفه نظاماً يتكون من مزيج من جسيمات الصهارة والماء. وتشكل بُنى فوهات البركان والغلاف الجوي حدود النظام. نعتبر أن الثوران الانفجاري يحدث على مرحلتين: (1) تفاعل لحظي بين الصهارة والماء، و(2) تمدد النظام. في المرحلة الأولى، تمتزج كتلة من الصهارة (m_m) عند درجة حرارة مطلقة (T_m) بكتلة من المياه الخارجية (m_w) عند درجة حرارة مطلقة (T_w). ويبلغ الاتزان الحراري بصورة شبه لحظية. ويمكن اعتبار هذا التفاعل عملية تجري عند حجم شبه ثابت. ويمكن إهمال الحرارة الكامنة لتبخّر الماء والحرارة الكامنة لانصهار الصهارة.

0.5 نقطة	A.1	أوجد درجة حرارة الاتزان في المرحلة الأولى بدلالة الكتل والسعة الحرارية لكل وحدة كتلة للماء c_{Vw} وللصهارة c_{Vm} .
0.3 نقطة	A.2	حدد ضغط الاتزان في المرحلة الأولى بافتراض إمكان نمذجة المزيج بوصفه غازاً مثاليًا. افترض أن الحجم لكل مول من المزيج هو v_e .

يمكن أن يحدث تمدد النظام (المرحلة الثانية) بطرائق عدة، إحداها التفجير الحراري. وعلى الرغم من أن هذه العملية معقدة إلى حد كبير، فإننا نستطيع قياس السرعة النسبية للمزيج المقذوف تجريبيًا. تعتمد سرعة الغاز أثناء الثوران على الضغط p ، والكتلة الكلية m ، والحجم V للمزيج في قناة البركان.

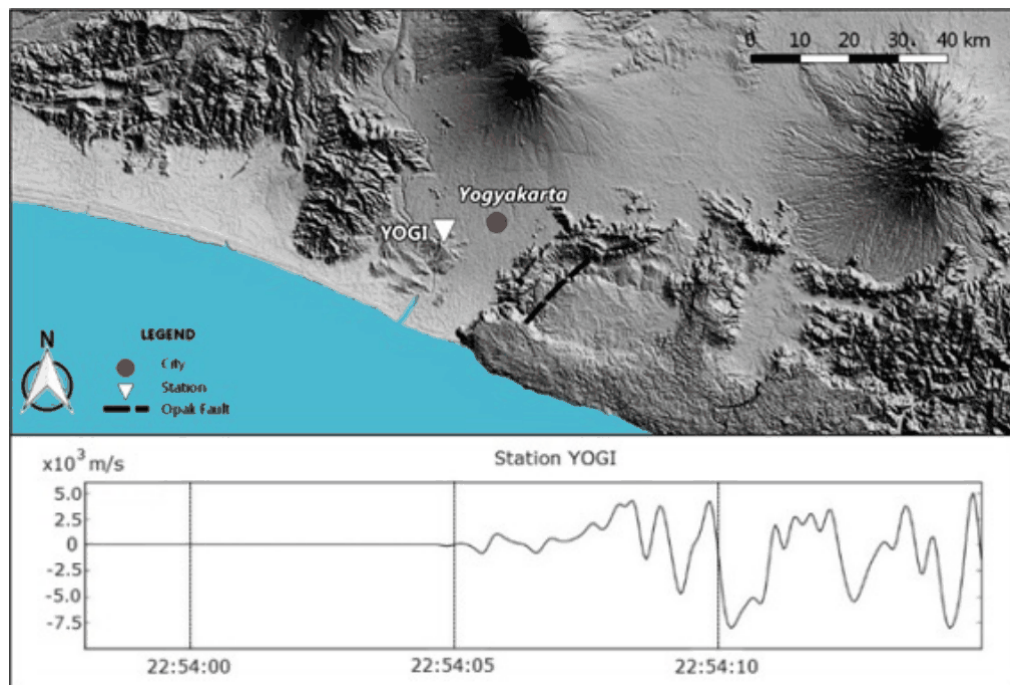
A.3	عبر عن سرعة الغاز أثناء الثوران بدلالة p ، m ، و V ، إلى حد ثابت تناسب κ . 0.5 نقطة
-----	--

الضغط المرصود من رتبة 100 MPa تقريبًا. وهذا يتيح لسرعة الثوران (النسبية) أن تبلغ مقدار السرعة الباليستية.

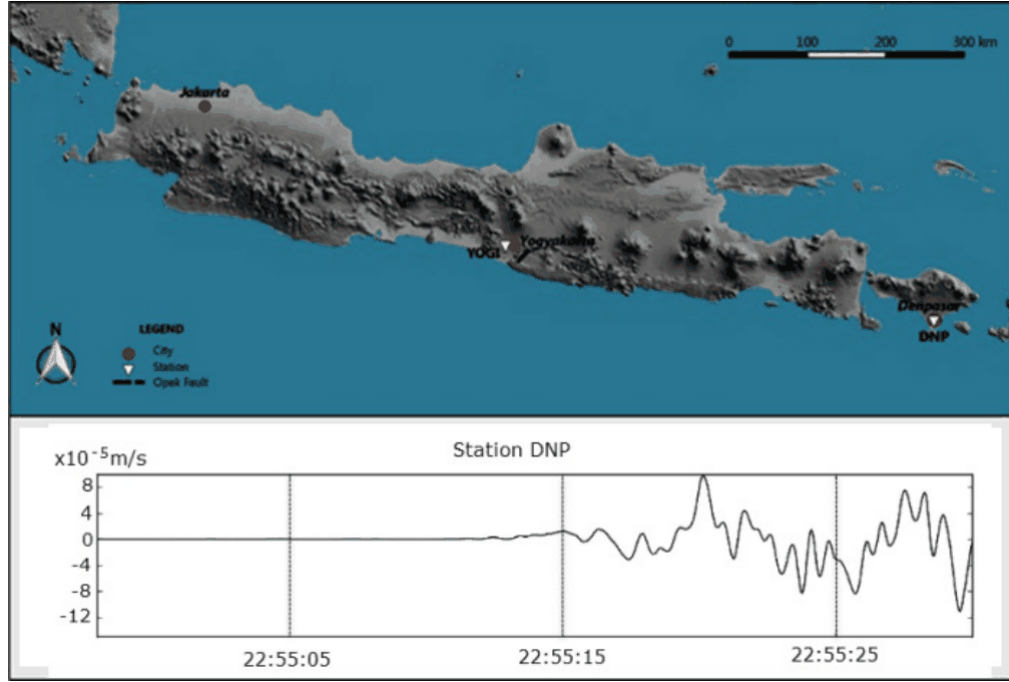
B. زلزال يوغياكارتا

وقع زلزال يوغياكارتا عام 2006، الذي بلغت قوته $M_w = 6.4$ ودمر مباني كثيرة في منطقتي بانتول ويوغياكارتا، عند الساعة 05:54:00.00 بالتوقيت المحلي، أو 22:54:00.00 بالتوقيت العالمي المنسق UTC. ونجم الزلزال عن إزاحة مفاجئة لقطاع من صدع أوباك (انظر الشكل 2). وكانت بؤرة الزلزال على عمق 15 km تحت السطح.

يمكن تسجيل الموجة الزلزالية التي تنتشر في القشرة الأرضية باستخدام مقياس الزلازل. ويُسمى المخطط الناتج عن مقياس الزلازل سجلًا زلزاليًا (الشكلان 2 و3، الرسم السفلي). تمثل هذه السجلات الزلزالية السرعة الرأسية للأرض بدلالة الزمن، كما سجلتها محطة الرصد الزلزالي في غامبينغ، يوغياكارتا (YOGI) (الشكل 2)، ومحطة دينباسار، بالي (DNP) (الشكل 3). وبوجه عام، تتكون الموجات الزلزالية من ثلاثة أنواع: الموجة الطولية أو الأولية (موجة P)، والموجة المستعرضة أو الثانوية (موجة S)، والموجة السطحية. تنتقل موجتا P و S تحت السطح، بينما تنتقل الموجة السطحية على امتداد سطح الأرض. ويمكن تقسيم الموجات الزلزالية التي تنتقل تحت السطح إلى المحطات إلى موجات تنتشر في خط مستقيم، وموجات تنعكس عند الحد الفاصل لطبقة، وموجات تنكسر إلى الطبقة التالية. وللموجة الطولية أو الأولية أعلى سرعة، بينما للموجة السطحية أدنى سرعة، وتبلغ نحو 60% من سرعة موجة P .



(الشكل 2: خرائط موقع YOGI)



(الشكل 3: خرائط موقع DNP (دينباسار))

المسافتان بين المركز السطحي للزلزال (إسقاط البؤرة على سطح الأرض) ومحطتي YOGI و DNP هما، على الترتيب، 22.5 km و 500 km. ويبلغ عمق طبقة القشرة الأرضية في جاوة، إندونيسيا، 30 km. وتقع طبقة الوشاح الأرضي تحت القشرة الأرضية. وكغيرها من الظواهر الموجية، تخضع الموجة الزلزالية أيضاً لقانون سنيل. ويمكن كذلك أن تنعكس الموجة الزلزالية عن طبقة الوشاح. في هذه المسألة نفترض إهمال انحناء الأرض.

0.5 نقطة	يبيّن الشكل 2 السجل الزلزالي في محطة YOGI. استخدم البيانات لإيجاد سرعة موجة P في القشرة الأرضية.	B.1
0.6 نقطة	أوجد زمن انتقال موجة P المباشرة والموجة المنعكسة الناجمتين عن زلزال يوغياكارتا والواصلتين إلى محطة DNP في دينباسار.	B.2

بافتراض أن الأرض تتكون من طبقتين فقط، هما القشرة والوشاح، تنتشر الموجة الأولية في القشرة وفي الوشاح بسرعتين ثابتتين مختلفتين. وتكون السرعة في الوشاح أكبر منها في القشرة. لاحظ أن موجة P التي تنعكس إلى الوشاح بزاوية قائمة (90°) ينكسر جزء منها عائداً إلى القشرة على امتداد مسار انتشارها كله على الحد الفاصل بين القشرة والوشاح.

B.3	أوجد سرعة موجة P في الوشاح.	1.2 نقطة
-----	-------------------------------	----------

لتمثيل بنية الأرض بصورة أكثر واقعية، يمكن تقسيم القشرة إلى عدد من الطبقات الرقيقة، بحيث تكون سرعة الموجة الزلزالية دالة في العمق z وفق العلاقة $v(z) = v_0 + az$ ، حيث a ثابت، ونقرب موضع بؤرة الزلزال باعتباره على السطح. في هذا النموذج يكون الشعاع الموجي منحنياً.

1.4 نقطة	لنعرف معامل الشعاع $p = \sin \theta(z)/v(z)$ ، حيث $\theta(z)$ هي الزاوية بين الشعاع والعمود على السطح. افترض أن موجة زلزالية تصل إلى المحطة بمعامل شعاع p ؛ عبّر عن المسافة إلى بؤرة الزلزال بدلالة p ، و v_0 ، و a . افترض أن البؤرة قريبة جداً من سطح الأرض.	B.4
1.0 نقطة	أوجد زمن الانتقال T من بؤرة الزلزال إلى أي محطة، على صورة تكامل بالنسبة إلى z .	B.5

تتكون الأرض من طبقات متجانسة متراكبة، سرعة الموجة في كل منها هي v_i ، وسماكتها δz_i .

1.0 نقطة	انطلاقاً من نتيجة المسألة السابقة، قرّب زمن الانتقال (T) من بؤرة الزلزال إلى محطة DNP بافتراض أن القشرة تتكون من ثلاث طبقات متقطعة فقط، ($i = 1, 2, 3$)، تتصف بالقيم $v_1 = 6.65$ km/sec، و $v_2 = 6.97$ km/sec، و $v_3 = 6.99$ km/sec، و $p = 0.143$ sec/km، و $\delta z_1 = 6.0$ km، و $\delta z_2 = 9.0$ km، و $\delta z_3 = 15$ km.	B.6
-------------	---	-----

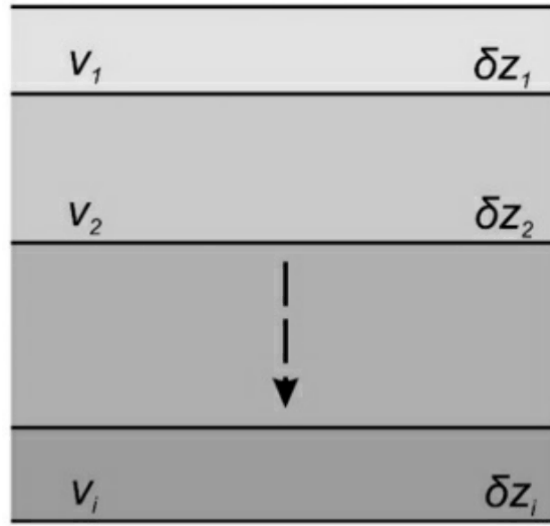
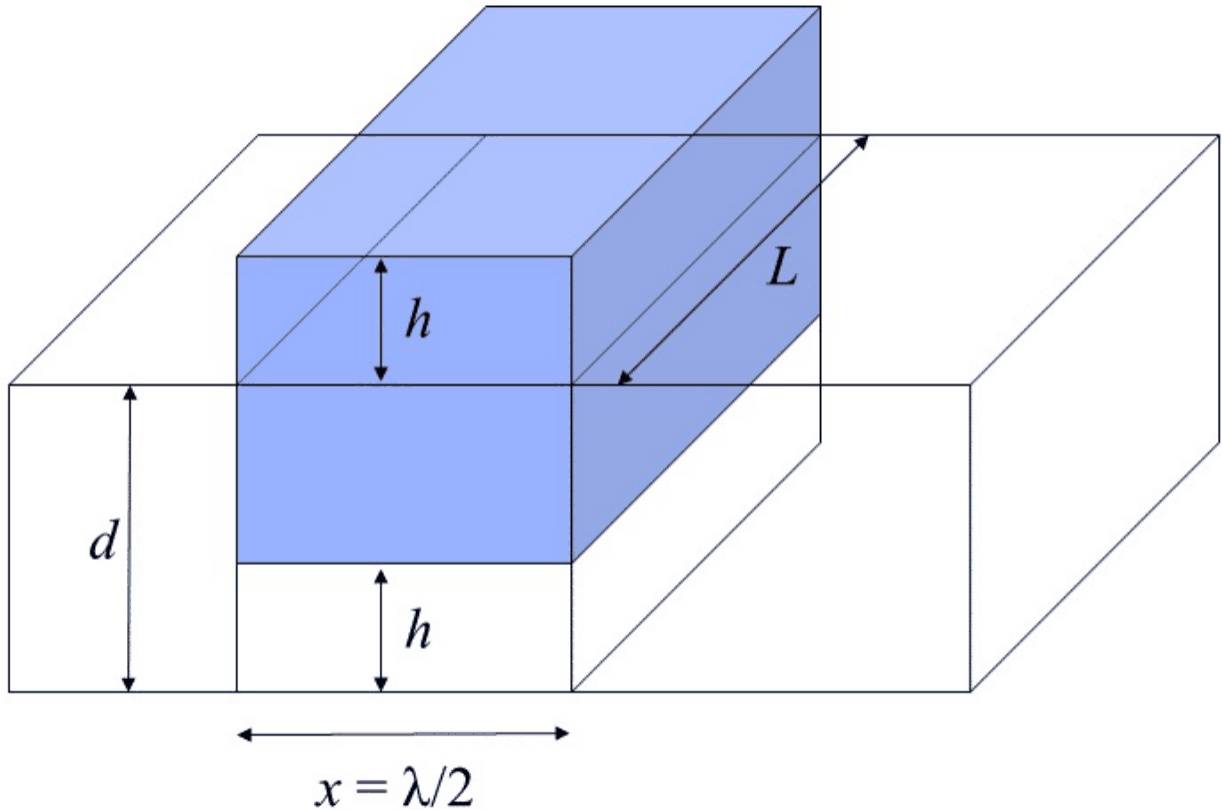


Fig. 4: A simplified model of earth's layers.

الشكل 4: نموذج مبسط لطبقات الأرض.

C. تسونامي جاوة

وقع زلزال بانغانداران والتسونامي المصاحب له عام 2006 في 17 يوليو عند الساعة 15:19:27 بالتوقيت المحلي، قبالة ساحل غرب جاوة ووسطها. أثناء الزلزال الذي يقع فيه الصدع عند المركز السطحي على قاع المحيط، قد تحدث إزاحة على الصدع فتننتج موجة مائية ضخمة جداً تسمى تسونامي. وبعبارة أخرى، فإن التسونامي موجة مياه ضحلة تبدأ بسعة ضئيلة، ولكن بطول موجي هائل. تأمل حركة مفاجئة لصدع تسبب ارتفاع جزء من قاع المحيط كما في الشكل 5. افترض أن طاقة الزلزال تتحول إلى طاقة وضع مياه المحيط المرتفعة هذه. وفي نموذج مبسط، نقرب شكل المياه المرتفعة بمتوازي مستطيلات مساحة قاعدته $\lambda L/2$ (حيث $L \gg \lambda$) وارتفاعه h .



الشكل 5: رسم توضيحي لموجة التسونامي؛ d هو عمق المحيط.

0.5 نقطة	C.1	أوجد طاقة الوضع المختزنة في مياه المحيط التي ارتفعت بفعل الزلزال، بالنسبة إلى سطح المحيط. افترض أن كثافة مياه البحر هي ρ .
1.2 نقطة	C.2	أوجد سرعة موجة التسونامي إلى حد عامل عديم الأبعاد.
1.3 نقطة	C.3	باستخدام حجة قائمة على الطاقة، حدد سعة موجة التسونامي بدلالة العمق، بافتراض أن العمق يتغير ببطء، ومع العلم بأن السعة عند العمق d_0 هي A_0 .

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

قراءات السجل الزلزالي المستخدمة أدناه هي نحو 5 s بعد الزلزال في YOGI و 72 s في DNP. ليرمز v_c و v_m إلى سرعتي الموجة في القشرة والوشاح.

$$\bullet \text{ A.1: } T_e = \frac{m_m c_{Vm} T_m + m_w c_{Vw} T_w}{m_m c_{Vm} + m_w c_{Vw}}$$

$$\bullet \text{ A.2: } p_e = \frac{RT_e}{v_e}$$

$$\bullet \text{ A.3: } u = \kappa \sqrt{\frac{pV}{m}}$$

$$\bullet \text{ B.1: } v_c \simeq 5.4 \text{ km s}^{-1}$$

$$\bullet \text{ B.2: } t_{\text{reflected}} \simeq 92.8 \text{ s}, \quad t_{\text{direct}} \simeq 92.5 \text{ s}, \quad \text{وكلاهما يساوي تقريباً } 93 \text{ s} \text{ ضمن دقة الرسم البياني.}$$

$$\bullet \text{ B.3: } v_m \simeq 7.6 \text{ km s}^{-1}$$

$$\bullet \text{ B.4: } X = \frac{2}{ap} \sqrt{1 - p^2 v_0^2}, \quad \text{بافتراض } a > 0 \text{ و } 0 < p v_0 < 1$$

$$\bullet \text{ B.5: } T = 2 \int_0^{z_t} \frac{dz}{v(z) \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}, \quad z_t = \frac{p^{-1} - v_0}{a}$$

$$\bullet \text{ B.6: } \text{يعطي التقريب المتقطع المباشر } T \simeq 1.84 \times 10^2 \text{ s. لا يتسق هذا المجموع على الطبقات هندسياً مع المسافة الأفقية المعطاة البالغة } 500 \text{ km, كما هو موضح أدناه.}$$

$$\bullet \text{ C.1: } U = \frac{1}{4} \rho g \lambda L h^2$$

$$\bullet \text{ C.2: } c = C \sqrt{gd}, \quad \text{حيث } C \text{ عديم الأبعاد؛ وتعطي النظرية الخطية لموجات المياه الضحلة } C = 1.$$

$$\bullet \text{ C.3: } A(d) = A_0 \left(\frac{d_0}{d} \right)^{1/4}$$

الحل

A.1 — درجة حرارة الاتزان

أثناء المزج السريع، نعتبر تبادل الحرارة مع الوسط المحيط والشغل المبذول عند الحدود مهملين. وبإهمال الحرارة الكامنة المذكورة واعتبار الساعات الحرارية ثابتة، يعطي انحفاظ الطاقة الداخلية

$$m_m c_{Vm} (T_e - T_m) + m_w c_{Vw} (T_e - T_w) = 0.$$

ومن ثم

$$T_e = \frac{m_m c_{Vm} T_m + m_w c_{Vw} T_w}{m_m c_{Vm} + m_w c_{Vw}}.$$

هذا هو متوسط درجتي الحرارة الابتدائيتين المرجح بالسعتين الحراريتين.

A.2 — ضغط الاتزان

لعدد n من مولات مزيج الغاز المثالي،

$$p_e V = nRT_e.$$

وبما أن حجمه المولي هو $v_e = V/n$ ،

$$p_e = \frac{RT_e}{v_e} = \frac{R}{v_e} \frac{m_m c_{Vm} T_m + m_w c_{Vw} T_w}{m_m c_{Vm} + m_w c_{Vw}}.$$

هنا R هو ثابت الغازات العام.

A.3 — سرعة الثوران

نفترض، وفق المعطيات، أن السرعة تعتمد فقط على p, m, V . نكتب

$$u = \kappa p^\alpha m^\beta V^\gamma.$$

باستخدام

$$[p] = ML^{-1}T^{-2}, \quad [m] = M, \quad [V] = L^3,$$

يقتضي التجانس البُعدي

$$\alpha + \beta = 0, \quad -\alpha + 3\gamma = 1, \quad -2\alpha = -1.$$

وعليه

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2},$$

و

$$u = \kappa \sqrt{\frac{pV}{m}}.$$

وبصورة مكافئة، $u = \kappa \sqrt{p/\rho_{\text{mix}}}$ ، حيث $\rho_{\text{mix}} = m/V$ لا يحدد التحليل البُعدي قيمة κ .

B.1 — سرعة موجة P في القشرة

ليكن عمق المصدر $z_s = 15 \text{ km}$. المسافة الأفقية إلى YOGI هي 22.5 km ، ولذلك فإن المسافة المباشرة من المصدر إلى المحطة هي

$$s_Y = \sqrt{22.5^2 + 15^2} = 27.04 \text{ km}.$$

يظهر أول انحراف مرئي عن خط الأساس في الشكل 2 عند نحو الساعة UTC 22:54:05. وبالنسبة إلى وقت الزلزال 22:54:00، يعطي ذلك

$$t_Y \simeq 5 \text{ s}.$$

ومن ثم

$$v_c = \frac{s_Y}{t_Y} \simeq \frac{27.04}{5} \simeq 5.4 \text{ km s}^{-1}.$$

تحتفظ الحسابات العددية أدناه داخلياً بالقيمة 5.4083 km s^{-1} ، مع أن الرسم البياني لا يبرر هذا العدد من الأرقام المعنوية.

B.2 — زمن الانتقال المباشر والمنعكس إلى DNP

نكتب المسافة الأفقية من المصدر إلى DNP على الصورة $X = 500 \text{ km}$ ، وسماكة القشرة على الصورة $H = 30 \text{ km}$.

للموجة المباشرة،

$$s_{\text{direct}} = \sqrt{X^2 + z_s^2},$$

إذن

$$t_{\text{direct}} = \frac{\sqrt{500^2 + 15^2}}{v_c} \simeq 92.5 \text{ s}.$$

بالنسبة إلى الانعكاس عند الحد الأفقي الفاصل بين القشرة والوشاح، نعكس المصدر حول المستوى $H = z$. وتقع صورته على عمق

$$z_{\text{image}} = 2H - z_s = 45 \text{ km}.$$

بفرد مسار الشعاع المنعكس نحصل على خط مستقيم من هذه الصورة إلى DNP. وبناءً على ذلك،

$$s_{\text{reflected}} = \sqrt{X^2 + (2H - z_s)^2},$$

و

$$t_{\text{reflected}} = \frac{\sqrt{500^2 + 45^2}}{v_c} \simeq 92.8 \text{ s}.$$

كلا زمني الانتقال يساوي نحو 93 s؛ والفرق المحسوب بينهما يساوي تقريباً 0.33 s.

B.3 — سرعة موجة P في الوشاح

يقع أول انحراف عن خط الأساس المستوي في الشكل 3 عند نحو الساعة 22:55:12 UTC، مما يعطي

$$t_D \simeq 72 \text{ s}.$$

يسبق هذا وصول الموجتين القشريتين المباشرة والمنعكسة المحسوب أعلاه. وننسبه إلى الموجة المنكسرة انكساراً حرجاً، التي تنتقل على امتداد حد الوشاح وتشع عائدة إلى القشرة.

لتكن θ_c الزاوية الحرجة المقيسة من الاتجاه الرأسى. يعطي قانون سنيل

$$\frac{\sin \theta_c}{v_c} = \frac{1}{v_m}, \quad \sin \theta_c = \frac{v_c}{v_m}.$$

يمتد الجزء الهابط في القشرة عبر عمق $H - z_s$ ، ويمتد الجزء الصاعد عبر عمق H . ومجموع مقداري إزاحتهما الرأسيتين هو

$$K = (H - z_s) + H = 2H - z_s = 45 \text{ km}.$$

ولذلك فإن مجموع طوليها ومجموع إسقاطيهما الأفقيين هما

$$s_{\text{crust}} = \frac{K}{\cos \theta_c}, \quad X_{\text{crust}} = K \tan \theta_c.$$

المسافة المقطوعة على امتداد حد الوشاح هي

$$X_{\text{mantle}} = X - K \tan \theta_c.$$

إذن

$$t_D = \frac{K}{v_c \cos \theta_c} + \frac{X - K \tan \theta_c}{v_m}.$$

وباستخدام $\sin \theta_c = v_c/v_m$ ، تُبسّط هذه العلاقة إلى

$$t_D = \frac{X}{v_m} + \frac{K}{v_c} \sqrt{1 - \frac{v_c^2}{v_m^2}}.$$

بالتعويض بقراءة الرسم البياني،

$$72 = \frac{500}{v_m} + \frac{45}{5.4083} \sqrt{1 - \left(\frac{5.4083}{v_m} \right)^2},$$

حيث المسافات بالكيلومترات والسرعات بالكيلومترات في الثانية. وبالحل نحصل على

$$v_m \simeq 7.554 \text{ km s}^{-1},$$

أو، بالدقة المناسبة،

$$\boxed{v_m \simeq 7.6 \text{ km s}^{-1}}.$$

للتحقق، نجد أن $\theta_c \simeq 45.7^\circ$ ، وأن طول الجزء الواقع على حد الوشاح يساوي تقريباً 454 km. ويستغرق الجزآن القشريان نحو 11.9 s، والجزء الواقع على حد الوشاح نحو 60.1 s.

B.4 — المسافة في حالة السرعة المتغيرة باستمرار

نأخذ z موجباً نحو الأسفل و x أفقياً. يقتضي قانون سنيل عبر الطبقات الأفقية الرقيقة أن يكون

$$p = \frac{\sin \theta(z)}{v(z)}$$

ثابتاً على امتداد الشعاع. ومن ثم

$$\sin \theta(z) = pv(z), \quad \cos \theta(z) = \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}.$$

على الجزء الهابط،

$$\frac{dx}{dz} = \tan \theta(z) = \frac{pv(z)}{\sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}.$$

بالنسبة إلى شعاع عائد في وسط فيه $a > 0$ ، تقع أعمق نقطة حيث يصبح الشعاع أفقياً:

$$pv(z_t) = 1.$$

وبما أن $v(z) = v_0 + az$

$$\boxed{z_t = \frac{p^{-1} - v_0}{a}}.$$

عند تقريب موضعي المصدر والمستقبل باعتبارهما على السطح، يكون الجزآن الهابط والصاعد متناظرين. والمسافة الأفقية هي

$$X = 2 \int_0^{z_t} \frac{p(v_0 + az)}{\sqrt{1 - p^2(v_0 + az)^2}} dz.$$

نضع $u = p(v_0 + az)$ ، فيكون $du = pa dz$. وعندئذ

$$X = \frac{2}{ap} \int_{pv_0}^1 \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} du.$$

وبما أن الدالة الأصلية هي $-\sqrt{1 - u^2}$ ،

$$\boxed{X = \frac{2}{ap} \sqrt{1 - p^2 v_0^2} = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{1}{p^2} - v_0^2}}.$$

يتطلب حل الشعاع العائد تحقق $0 < pv_0 < 1$.

B.5 — تكامل زمن الانتقال

يستغرق قطع جزء من الشعاع طوله ds زمناً

$$dt = \frac{ds}{v(z)}.$$

وبما أن $|dz| = ds \cos \theta(z)$ ،

$$dt = \frac{|dz|}{v(z) \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}.$$

بإدراج الجزأين الهابط والصاعد نحصل على

$$T = 2 \int_0^{z_t} \frac{dz}{v(z) \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}.$$

في حالة التوزيع الخطي للسرعة، تصبح العلاقة

$$T = 2 \int_0^{(p^{-1}-v_0)/a} \frac{dz}{(v_0 + az) \sqrt{1 - p^2 (v_0 + az)^2}}.$$

التفرد عند نقطة التحول قابل للتكامل. ويعطي حساب التكامل أيضًا

$$T = \frac{2}{a} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - p^2 v_0^2}}{p v_0} \right).$$

نحصل، بطرح pX ، على صيغة مكافئة مفيدة لفحص التقريب العددي في B.6:

$$\begin{aligned} T - pX &= 2 \int_0^{z_t} \left[\frac{1}{v \sqrt{1 - p^2 v^2}} - \frac{p^2 v}{\sqrt{1 - p^2 v^2}} \right] dz \\ &= 2 \int_0^{z_t} \sqrt{\frac{1}{v(z)^2} - p^2} dz. \end{aligned}$$

وعليه، لشعاع متسق هندسيًا،

$$T = pX + 2 \int_0^{z_t} \sqrt{\frac{1}{v(z)^2} - p^2} dz.$$

B.6 — تقريب الطبقات الثلاث

مع الإبقاء على تقريب المصدر السطحي من B.4–B.5، نحول تكامل زمن الانتقال الأول إلى مجموع متقطع:

$$T \approx 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\delta z_i}{v_i \sqrt{1 - p^2 v_i^2}}.$$

يمثل العامل اثنان المرور عبر كل طبقة في الجزأين الهابط والصاعد.

باستخدام الأعداد كما وردت تمامًا نحصل على:

الطبقة i	$p v_i$	مساهمة الجزأين $\frac{2\delta z_i}{v_i \sqrt{1 - p^2 v_i^2}}$
1	0.95095	5.833 s
2	0.99671	31.863 s
3	0.99957	146.366 s

إذن يعطي التكامل العددي المباشر على الطبقات

$$T \approx 184.06 \text{ s} \simeq 1.84 \times 10^2 \text{ s}.$$

ثمة قيد يتعلق بالاتساق عند تفسير هذا العدد بوصفه زمن الانتقال إلى DNP. فالمسافة الأفقية للشعاع المتقطع نفسه ستكون

$$X_{\text{layers}} = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\delta z_i p v_i}{\sqrt{1 - p^2 v_i^2}} \simeq 1280.9 \text{ km},$$

وهي تختلف اختلافاً كبيراً عن 500 km.

أما إذا عوضنا بدلاً من ذلك بالمسافة الأفقية المعطاة 500 km في الصيغة الثانية من B.5 وقربنا تكاملها، فنحصل على التقدير الشكلي

$$\begin{aligned} T &\approx p(500) + 2 \sum_{i=1}^3 \delta z_i \sqrt{\frac{1}{v_i^2} - p^2} \\ &= 71.5 + 0.8934 \\ &\approx 72.39 \text{ s}. \end{aligned}$$

الصيغتان في النموذج المتصل متكافئتان، لكن هذين التقريبين الخشنيين لا يحافظان على علاقة المسافة التي يتطلبها هذا التكافؤ. ومن ثم فإن 184 s هو المجموع المباشر لزمن الانتقال عبر الطبقات؛ أما 72.4 s فهو تقدير عند مسافة أفقية ثابتة. ولا يمكن لكليهما وصف الشعاع نفسه في نموذج الطبقات الثلاث بحرفيته وبالمعاملات المعطاة.

C.1 — طاقة وضع المياه المرتفعة

لتكن المساحة الأفقية لمتوازي المستطيلات المرتفع

$$S = \frac{\lambda L}{2}.$$

باتخاذ سطح المحيط غير المضطرب مرجعاً صفرياً لجهد الجاذبية، تكون كتلة شريحة أفقية سماكتها dz عند الارتفاع z هي $\rho S dz$. وبناءً على ذلك،

$$U = \int_0^h \rho S g z dz = \frac{1}{2} \rho S g h^2.$$

وعليه

$$U = \frac{1}{4} \rho g \lambda L h^2.$$

وبصورة مكافئة، كتلة الماء فوق السطح الأصلي هي $\rho S h$ ، ويقع مركز كتلته عند الارتفاع $h/2$.

C.2 — سرعة التسونامي

نستخدم تقريبي المياه الضحلة والسعة الصغيرة

$$\lambda \gg d, \quad h \ll d.$$

عندئذ تكون سرعة المائع الأفقية منتظمة تقريباً عبر العمق، ويكون توزيع الضغط الرأسى هيدروستاتيكياً تقريباً.

لتكن $\eta(x, t)$ إزاحة السطح و $u(x, t)$ سرعة المائع الأفقية. يعطي انحفاظ حجم الماء، بعد خطيته حول العمق d ،

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + d \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

تدرج الضغط الأفقي هو $\rho g \partial \eta / \partial x$. ولذلك يعطي قانون نيوتن الثاني

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

باشتقاق المعادلة الأولى بالنسبة إلى الزمن والتعويض بالثانية،

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gd \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

هذه هي معادلة الموجة، ولذلك

$$c = \sqrt{gd}.$$

وعند مستوى التفصيل المطلوب في السؤال،

$$c = C\sqrt{gd},$$

حيث C عامل عديم الأبعاد؛ وتعطي الافتراضات الخطية المذكورة للمياه الضحلة $C = 1$. تُختزل الكثافة لأنها تضرب كلاً من القصور الذاتي وقوة الإرجاع الثقالية.

C.3 — السعة مع تغير العمق

نفترض تغيراً بطيئاً في العمق، وانعكاساً وتبديلاً مهملين، وعرضاً ثابتاً لجبهة الموجة. وبما أن $L \gg \lambda$ ، يمكن التعامل مع الموجة محلياً بوصفها موجة مستوية.

لإزاحة سطح جيبية سعتها A ،

$$\eta = A \cos(kx - \omega t), \quad \langle \eta^2 \rangle = \frac{A^2}{2}.$$

متوسط طاقة الوضع الثقالية لكل وحدة مساحة أفقية هو

$$\bar{\mathcal{E}}_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \rho g \langle \eta^2 \rangle = \frac{1}{4} \rho g A^2.$$

لموجة مياه ضحلة تقدمية، تعطي معادلة الاستمرارية

$$u = \frac{c}{d} \eta.$$

ولذلك فإن متوسط طاقتها الحركية لكل وحدة مساحة أفقية هو

$$\bar{\mathcal{E}}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \rho d \langle u^2 \rangle = \frac{\rho c^2 A^2}{4d} = \frac{1}{4} \rho g A^2.$$

إذن يكون متوسط كثافة الطاقة الكلية

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \rho g A^2.$$

موجات المياه الضحلة غير تشتتية، ولذلك تساوي سرعة مجموعتها $c = \sqrt{gd}$. يعطي انحفاظ فيض الطاقة لكل وحدة عرض من جبهة الموجة

$$\bar{\mathcal{E}} c = \text{ثابت},$$

أو

$$A^2 \sqrt{d} = \text{ثابت}.$$

باستخدام السعة المرجعية A_0 عند العمق d_0 ،

$$A^2 \sqrt{d} = A_0^2 \sqrt{d_0}.$$

وعليه

$$A(d) = A_0 \left(\frac{d_0}{d} \right)^{1/4}.$$

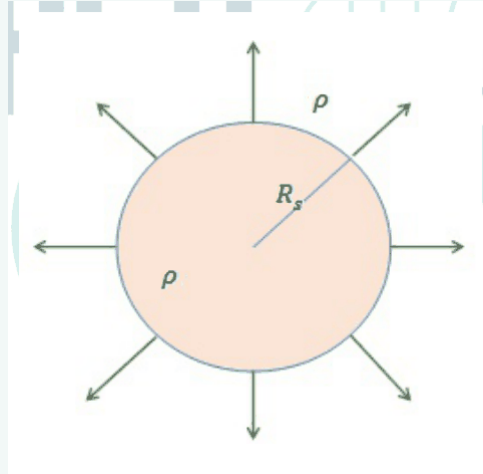
هذا هو قانون غرين. وتتطلب صحته أن تكون السعة صغيرة مقارنة بالعمق، وأن يكون تغير العمق بطيئاً بما يكفي؛ وهو لا يصف تكسر الموجة في نهاية المطاف.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: التضخم الكوني

بسبب الحركة النسبية للمجرات التي تُرصد من الأرض، يختلف الطول الموجي للطيف المرئي لمجرة معينة عن طوله الموجي الأصلي، وهو ما يُعرف بتأثير دوبلر الكهرومغناطيسي. ومن المتوقع، بالنسبة إلى مجموعة من المجرات، أن تتوزع إزاحات الأطوال الموجية عشوائياً: بعضها موجب (انزياح نحو الأحمر) وبعضها سالب (انزياح نحو الأزرق). غير أن الأرصاد تُظهر أن جميع المجرات، باستثناء مجموعة قريبة منها، منزاحة نحو الأحمر. ولا بد أن يكون هذا صحيحاً حتى لو أُجريت الأرصاد من نقطة أخرى في الكون. ونستنتج من ذلك أن كوننا لا بد أن يكون ممتدداً. ومن ناحية أخرى، يمكن إهمال عدم انتظام الكون محلياً على مقاييس تتجاوز 100 Mpc، حيث $pc = 3.26 \times 10^6$ سنة ضوئية. وعند أخذ المتوسط على مقاييس كبيرة، يصبح التوزيع المتكامل للمجرات أكثر فأكثر تماثلاً في جميع الاتجاهات (مستقلاً عن الاتجاه) وتجانساً (مستقلاً عن الموضع). ولذلك يمكننا افتراض أن الكون مادة ذات كثافة كتلية منتظمة ρ وأنه يتمدد.

A. تمدد الكون



لبناء نموذج بسيط لكوننا، لننظر في كرة ممتدة ذات كثافة منتظمة، تقع داخل وسط تشكله كرة أكبر منها بكثير ولها الكثافة نفسها. لنفترض أن نصف قطر الكرة الأصغر عند لحظة ما هو R_s . وللتعبير عن تمدد الكرة، يمكن التعبير عن اعتماد نصف القطر $R(t)$ على الزمن بواسطة عامل المقياس $a(t)$ ، أي إن $R(t) = a(t)R_s$.

باستخدام قانون نيوتن للجاذبية لحساب سرعة عنصر كتلي على سطح الكرة وفقاً لنموذج كوننا، يمكن الحصول على مجموعة من معادلات فريدمان:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1 \rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)} \quad (1)$$

حيث k ثابت عديم الأبعاد، و c سرعة الضوء.

الجزء	السؤال	الدرجات
A.1	أوجد الثابت A_1 في المعادلة (1)	1.3 درجة

المناقشة حتى الآن غير نسبية. لكنها في الواقع قابلة للتعميم إلى نظام نسبي بإعادة تفسير $\rho(t)c^2$ على أنها كثافة الطاقة الكلية (باستثناء طاقة الوضع الثقالية). وفي هذا النظام النسبي تُشتق معادلة فريدمان الثانية:

$$\dot{\rho} + A_2 \left(\rho + \left(\frac{p}{c^2} \right) \right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (2)$$

باستخدام القانون الأول للديناميكا الحرارية لنظام كظومي، حيث يرمز p إلى الضغط على الكرة.

الجزء	السؤال	الدرجات
A.2	أوجد الثابت A_2 في المعادلة (2)	0.9 درجة

لحل المعادلتين (1) و(2)، ينبغي افتراض علاقة $p = p(\rho)$ ، مثل $p(t)/c^2 = w\rho(t)$ ، حيث w ثابت. ويوجد أيضًا عامل $H = \dot{a}/a$ يُسمى معامل هابل. ويُرمز عادةً إلى القيم الحالية للمعاملات بدليل سفلي 0، مثل t_0, ρ_0, H_0, a_0 وهكذا. وللتبسيط، نأخذ $a_0 = 1$.

يُعتقد أن الكون بدأ بانفجار عظيم يُسمى الانفجار العظيم، نتج عنه إشعاع من جسيمات نسبية. وفي أثناء تمدده، يبرد الكون وتصبح الجسيمات فيه غير نسبية. غير أن الأرصاد الحديثة توضح أن كثافة طاقة الثابت الكوني تهيمن على الكون الحالي. وفي حالة الفوتون، يتمدد طوله الموجي تناسبًا مع عامل المقياس مع تمدد الكون.

الجزء	السؤال	الدرجات
A.3	أوجد قيمة w الناتجة في كل من الحالات الثلاث الآتية: (i) كون لا يحتوي إلا على الإشعاع (أي طاقة الفوتونات)، و(ii) كون لا يحتوي إلا على مادة غير نسبية، و(iii) كون ذو كثافة طاقة ثابتة.	1.2 درجة
A.4	في حالة $k = 0$ ، أوجد $a(t)$ لكل حالة من الحالات (i) إلى (iii) المذكورة في A.3. استخدم الشرط الابتدائي $a(t=0) = 0$ و(ii)، واستخدم الشرط $a_0 = 1$ للحالة (iii).	1.2 درجة

يشير الثابت k في المعادلة (1) إلى تصنيف الهندسة المكانية للكون. ويمكن أن تكون قيمته $k = +1$ لكون ذي انحناء موجب (مغلق)، أو $k = 0$ لكون مسطح (لانهائي)، أو $k = -1$ لكون ذي انحناء سالب (مفتوح، لانهائي). لنعرّف نسبة الكثافة $\Omega = \rho/\rho_c$ ، حيث $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ هي كثافة الطاقة الحرجة. لاحظ أن A_1 يُستخرج من المسألة A.1.

الجزء	السؤال	الدرجات
A.5	عبّر عن k في المعادلة (1) بدلالة Ω و H و a و R_0 .	0.1 درجة
A.6	أوجد مجال Ω الموافق لكل قيمة من القيم $k = +1$ و $k = 0$ و $k = -1$.	0.3 درجة

B. الدافع إلى إدخال مرحلة التضخم وشروطها العامة

تشير أرصاد إشعاع الخلفية الكونية الميكروي (CMB) إلى أن كوننا الحالي مسطح تقريبًا. وتكمن المشكلة في أنه، إذا صح ذلك، فلا بد أن يكون الكون الحالي قد بدأ من كون مبكر مسطح تمامًا، وإلا فإن أي انحراف عن التسطّيح سينمو في نهاية المطاف بمرور الزمن ويُفسد التسطّيح الحالي.

الجزء	السؤال	الدرجات
B.1	أوجد $(\Omega(t) - 1)$ بدلالة الزمن حين يهيمن عليه الإشعاع أو المادة غير النسبية (انظر المسألة A.3).	0.5 درجة

لحل المشكلة، ينبغي أن يمر الكون، في وقت مبكر من تاريخه، بفترة تهيمن فيها كثافة طاقة ثابتة، مما يؤدي إلى تمدد أُسي يُسمى فترة التضخم.

الجزء	السؤال	الدرجات
B.2	لهذه الفترة التي تهيمن فيها كثافة طاقة ثابتة، أوجد $(\Omega(t) - 1)$ بدلالة الزمن. افترض أن $(\Omega(t) - 1) \ll 1$.	0.3 درجة
B.3	بيّن أن شرط التضخم يستلزم الشروط الآتية: ضغطًا سالبًا، وتمددًا متسارعًا ($\ddot{a} > 0$)، وتناقص نصف قطر هابل ($d(aH)^{-1}/dt < 0$).	0.9 درجة
B.4	بيّن أن شرط تناقص نصف قطر هابل يمكن التعبير عنه بدلالة المعامل $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ على الصورة $\epsilon < 1$.	0.2 درجة

يحدث التضخم ما دام $\epsilon < 1$ ، ثم ينتهي عندما $\epsilon = 1$. ويمكننا تعريف عدد الطيات الأسيّة N ، بحيث $dN = d \ln a = H dt$ ، عند نهاية التضخم. $N = 0$

C. التضخم الناشئ عن مادة موزعة توزيعاً متجانساً

من أمثلة الأنظمة الفيزيائية البسيطة القادرة على توليد فترة تضخم كونٌ تهيمن عليه مادة موزعة توزيعاً متجانساً. ويُسمى هذا النوع من المادة الإنفلاتون، ويمكن وصفه بدالة $\phi(t)$.

يمكن التعبير عن المعادلة الديناميكية للمادة على الصورة

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \quad (3)$$

حيث $V = V(\phi)$ دالة طاقة وضع، و $V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$. ويحقق معامل هابل

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right]. \quad (4)$$

حيث M_{pl} ثابت يُسمى كتلة بلانك المختزلة. تحدث مرحلة التضخم عندما تهيمن طاقة الوضع V على الطاقة الحركية $\dot{\phi}^2/2$ مدة كافية بحيث يمكن إهمال الحد $\ddot{\phi}$ في المعادلة (3). ويُسمى هذا الشرط تقريب التدرج البطيء.

تُسمى الكميتان ϵ و $\eta_V = \delta + \epsilon$ ، حيث $\delta = -\ddot{\phi}/(H\dot{\phi})$ ، معاملي «التدرج البطيء».

الجزء	السؤال	الدرجات
C.1	قدّر المعامل ϵ ، والمعامل η_V ، ودلالة طاقة الوضع $V(\phi)$ ومشتقاتها الأولى والثانية (V' و V''). 1.7 درجة	

D. التضخم مع طاقة وضع بسيطة

ينبغي مقارنة تنبؤات أي نموذج للتضخم بالقيود الرصدية المستمدة من CMB، وهي $n_s = 0.968 \pm 0.006$ و $r < 0.12$ ، حيث تُحسب $r = 16\epsilon$ و $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon$ عند $\phi = \phi_{start}$ لنموذج تضخم تولّده مادة مهيمنة. افترض أن طاقة وضع المادة تتخذ الصورة البسيطة $V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n$ ، حيث n عدد صحيح كافي و Λ ثابت.

الجزء	السؤال	الدرجات
D.1	احسب ϕ_{end} عند نهاية التضخم.	0.5 درجة
D.2	عبّر عن r و n_s بدلالة عدد الطيات الأسية N والعدد الصحيح n . قدّر قيمة n التي تعطي أقرب توافق مع القيم الرصدية لـ n_s و r . خذ $N = 60$ في حسابك.	0.9 درجة

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

تستخدم النتائج أدناه الكثافة الحرجة المتسقة بُعدياً $\rho_c = H^2/A_1$. لنكتب $\Delta = \Omega - 1$. وفي D.2، لتكن $\mathcal{N} = \ln(a_{end}/a_{start}) = -N_{start} > 0$ ؛ إذ تعني الطيات الأسية الستون المطلوبة $\mathcal{N} = 60$.

$$\bullet \text{ A.1 : } A_1 = \frac{8\pi G}{3}.$$

$$\bullet \text{ A.2 : } A_2 = 3.$$

$$\bullet \text{ A.3 : } w_{\text{radiation}} = \frac{1}{3}, \quad w_{\text{matter}} = 0, \quad w_{\text{constant density}} = -1.$$

• **A.4:** على فرع التمدد،

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & a(t) = (2H_0 t)^{1/2} = (t/t_0)^{1/2}, \\ \text{(ii)} \quad & a(t) = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3} = (t/t_0)^{2/3}, \\ \text{(iii)} \quad & a(t) = e^{H_0(t-t_0)}. \end{aligned}$$

هنا $H_0^2 = 8\pi G\rho_0/3$ ، مع $H_0 t_0 = 1/2$ في (i) و $2/3$ في (ii).

$$\text{• A.5:} \quad k = (\Omega - 1) \left(\frac{aHR_0}{c} \right)^2$$

• **A.6:** $k = +1 : \Omega > 1$; $k = 0 : \Omega = 1$; $k = -1 : \Omega < 1$. وللكثافة غير السالبة، يكون المجال الأخير $0 \leq \Omega < 1$.

• **B.1:** إلى الرتبة الرائدة بالقرب من التسطیح، وبالنسبة إلى زمن مرجعي t_* ،

$$\Delta(t) \simeq \begin{cases} \Delta_*(t/t_*), & \text{الإشعاع,} \\ \Delta_*(t/t_*)^{2/3}, & \text{المادة غير النسبية.} \end{cases}$$

• **B.2:** مع $H_\Lambda = \sqrt{8\pi G\rho_\Lambda/3}$

$$\Delta(t) \simeq \Delta_i e^{-2H_\Lambda(t-t_i)}.$$

• **B.3:** تعطي الكثافة الثابتة

$$p = -\rho c^2 < 0, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G\rho}{3} > 0, \quad \frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0.$$

وبصورة أعم، يتطلب التمدد المتسارع $p < -\rho c^2/3$.

• **B.4:**

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{\epsilon - 1}{a} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \epsilon < 1.$$

• **C.1:** في تقريب التدرج البطيء،

$$\epsilon \simeq \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad \eta_V \simeq M_{pl}^2 \frac{V''}{V}, \quad \frac{dN}{d\phi} \simeq -\frac{V}{M_{pl}^2 V'}.$$

• **D.1:** عندما $n > 0$ ، وعلى فرع الحقل الموجب،

$$\phi_{\text{end}} \simeq \frac{n}{\sqrt{2}} M_{pl}.$$

العتبة الشكلية هي $|\phi| \simeq |n| M_{pl} / \sqrt{2}$. ولا تعطي قيم n غير الموجبة النهاية المفترضة لتضخم التدرج البطيء في هذا النموذج.

$$\boxed{r \simeq \frac{16n}{4\mathcal{N} + n}, \quad n_s \simeq 1 - \frac{2(n+2)}{4\mathcal{N} + n}.}$$

وبصورة مكافئة، تكون المقامات $n - 4N_{\text{start}}$ وفق اصطلاح الإشارة في نص المسألة. وعند $\mathcal{N} = 60$,

n	r	n_s
1	0.0664	0.9751
2	0.1322	0.9669

إذا فُرض القيد $r < 0.12$ ، فإن $n = 1$ هو أقرب اختيار من الأعداد الصحيحة الموجبة. ولا يوجد عدد صحيح موجب يحقق كلا القيدتين الرصديين المذكورين.

الحل

A.1

لننظر في عنصر كتلي على سطح كرة مسايرة للتمدد نصف قطرها $R = aR_s$. وفقًا لمبرهنة القشرة لنيوتن، يعتمد تسارعه على الكتلة المحصورة داخلها فقط،

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3.$$

في النموذج غير النسبي، تكون هذه الكتلة المحصورة ثابتة. ومعادلة نيوتن هي

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}.$$

بالضرب في $\dot{R}$ والتكامل، نحصل على الطاقة الميكانيكية النوعية المحفوظة

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{GM}{R} = \mathcal{E}.$$

ومن ثم

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{2GM}{R^3} + \frac{2\mathcal{E}}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{2\mathcal{E}}{a^2 R_s^2}.$$

بما أن $\dot{R}/R = \dot{a}/a$ ، فإن المقارنة مع (1)، مع وضع $2\mathcal{E} = -kc^2$ ، تعطي

$$\boxed{A_1 = \frac{8\pi G}{3}}.$$

A.2

ليكن الحجم الفيزيائي للكرة

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi}{3}(aR_s)^3.$$

طاقتها الداخلية الكلية هي $U = \rho c^2 \mathcal{V}$. ويعطي القانون الأول لنظام كظومي

$$dU = -p d\mathcal{V}.$$

إذن

$$c^2 \mathcal{V} d\rho + (\rho c^2 + p) d\mathcal{V} = 0.$$

وباستخدام $\dot{\mathcal{V}}/\mathcal{V} = 3\dot{a}/a$

$$\dot{\rho} + 3 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \frac{\dot{a}}{a} = 0.$$

ومن ثم

$$\boxed{A_2 = 3}.$$

A.3

عندما يكون w ثابتاً، تصبح معادلة الاستمرارية

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w) \frac{\dot{a}}{a},$$

ولذلك، باستخدام $a_0 = 1$

$$\boxed{\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}}.$$

بالنسبة إلى الإشعاع، تتناقص الكثافة العددية للفوتونات وفق a^{-3} . ولكل فوتون طاقة hc/λ ، وتجعل علاقة تناسب الطول الموجي المعطاة $\lambda \propto a$ طاقته متناسبة مع a^{-1} . ومن ثم

$$\rho c^2 \propto a^{-4},$$

وهو ما يعطي

$$3(1+w) = 4, \quad \boxed{w = \frac{1}{3}}.$$

بالنسبة إلى المادة غير النسبية، تهيم على الطاقة طاقة السكون لكل جسيم، وهي ثابتة تقريباً. وتتناقص الكثافة العددية وفق a^{-3} ، مما يعطي

$$\rho \propto a^{-3}, \quad \boxed{w = 0}.$$

هذا هو تقريب المادة عديمة الضغط.

بالنسبة إلى كثافة الطاقة الثابتة، $\dot{\rho} = 0$. وفي كون متمدّد، تتطلب معادلة الاستمرارية

$$\rho + \frac{p}{c^2} = 0,$$

ومن ثم

$$\boxed{w = -1}.$$

A.4

عندما $k = 0$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho = H_0^2 a^{-3(1+w)}.$$

وباختيار فرع التمدد،

$$\dot{a} = H_0 a^{1-\frac{3}{2}(1+w)}.$$

عندما $w \neq -1$ ، يعطي التكامل مع $a(0) = 0$

$$a^{\frac{3}{2}(1+w)} = \frac{3}{2}(1+w)H_0 t.$$

وعليه، بالنسبة إلى الإشعاع،

$$\boxed{a(t) = (2H_0 t)^{1/2}}.$$

يستلزم التطبيق $a(t_0) = 1$ أن $2H_0 t_0 = 1$ ، ولذلك

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2}.$$

بالنسبة إلى المادة غير النسبية،

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3}.$$

هنا $3H_0 t_0/2 = 1$ مما يعطي

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}.$$

بالنسبة إلى كثافة الطاقة الثابتة، يكون $H = H_0$ ثابتاً. وبالتكامل لـ $\dot{a}/a = H_0$ وفرض $a(t_0) = 1$ ،

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)}.$$

A.5

بوضع $k = 0$ في (1)، تتحدد الكثافة الكتلية المكافئة الحرجة:

$$\rho_c = \frac{H^2}{A_1} = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

لذلك فإن التعريف المطبوع $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ غير متسق بُعدياً. وكثافة الطاقة الحرجة المقابلة هي

$$\rho_c c^2 = \frac{H^2 c^2}{A_1}.$$

وباستخدام التعريف المتسق،

$$\Omega = \frac{A_1 \rho}{H^2}.$$

نقسم (1) على H^2 :

$$1 = \Omega - \frac{kc^2}{a^2 R_s^2 H^2}.$$

بما أن $a_0 = 1$ ، فإن نصف القطر الحالي هو $R_0 = R_s$. ومن ثم

$$k = (\Omega - 1) \frac{a^2 H^2 R_0^2}{c^2}.$$

A.6

العامل المضروب في $1 - \Omega$ في A.5 موجب. ولذلك فإن k و $1 - \Omega$ لهما الإشارة نفسها:

الانحناء المكاني	نسبة الكثافة
$k = +1$ ، مغلق	$\Omega > 1$
$k = 0$ ، مسطح	$\Omega = 1$
$k = -1$ ، مفتوح	$\Omega < 1$

عندما تكون كثافة الطاقة غير سالبة، يكون مجال الكون المفتوح $0 \leq \Omega < 1$.

B.1

من A.5،

$$\Delta(t) \equiv \Omega(t) - 1 = \frac{kc^2}{R_0^2 a^2 H^2} = \frac{kc^2}{R_0^2 \dot{a}^2}.$$

هذه المتطابقة دقيقة.

لدراسة انحراف صغير عن التسطيح، نحسب $\dot{a}$ باستخدام حلول الكون المسطح في A.4 إلى الرتبة الرائدة. إذا كان

$$a \propto t^\alpha,$$

فإن

$$\dot{a}^2 \propto t^{2\alpha-2}, \quad \Delta \propto t^{2-2\alpha}.$$

في أثناء هيمنة الإشعاع، $\alpha = 1/2$ ، ولذلك

$$\Delta(t) \simeq \Delta_* \frac{t}{t_*}.$$

في أثناء هيمنة المادة، $\alpha = 2/3$ ، ولذلك

$$\Delta(t) \simeq \Delta_* \left(\frac{t}{t_*} \right)^{2/3}.$$

وهكذا ينمو مقدار أي انحراف صغير غير صفري عن التسطيح في كلتا الحقتين. وتنطبق قوانين القوى هذه ما دام الانحناء لا يمثل إلا تصحيحًا صغيرًا للتمدد.

B.2

لتكن الكثافة الثابتة ρ_Λ ، ولنعرّف

$$H_\Lambda^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda.$$

عندما $1 \ll |\Omega - 1|$ ، تكون مساهمة الانحناء في (1) صغيرة، ولذلك

$$H \simeq H_\Lambda, \quad a(t) \simeq a_i e^{H_\Lambda(t-t_i)}.$$

وبالتعويض في

$$\Delta = \frac{kc^2}{R_0^2 a^2 H^2}$$

نحصل على

$$\Delta(t) \simeq \Delta_i e^{-2H_\Lambda(t-t_i)}.$$

إذن يخمد التضخم الانحرافات عن التسطيح أُسِّيًّا.

B.3

نشتق (1)، ونستخدم معادلة الاستمرارية:

$$2H\dot{H} = A_1\dot{\rho} + \frac{2kc^2H}{R_0^2 a^2},$$

ومن ثم

$$\dot{H} = -\frac{3A_1}{2} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}.$$

بإضافة H^2 من (1)، يُحذف حد الانحناء:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\frac{A_1}{2} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right).$$

وباستخدام A.1،

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right).$$

للكثافة الموجبة، يتطلب التمدد المتسارع

$$p < -\frac{1}{3}\rho c^2,$$

وهو ما يتطلب، على وجه الخصوص، ضغطاً سالباً.

لفترة الكثافة الثابتة المدروسة هنا، تعطي A.3 أن $p = -\rho c^2$ ومن ثم

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3}\rho > 0.$$

وأخيراً، $aH = \dot{a}$ ، ولذلك

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\dot{a}} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} < 0.$$

وهذا يثبت الخصائص الثلاث المطلوبة جميعها.

نصف القطر الوارد في هذا الشرط هو نصف قطر هابل **المساير للتمدد**، $c/(aH)$ ؛ ولا يؤثر الثابت c في إشارة المشتقة.

B.4

يعطي الاشتقاق المباشر

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{a^2H^2} = -\frac{1}{a} \left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right).$$

بما أن $\epsilon = -\dot{H}/H^2$

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{\epsilon - 1}{a}.$$

ولأن $a > 0$ ، يتناقص نصف القطر إذا وفقط إذا

$$\epsilon < 1.$$

وبصورة مكافئة،

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \epsilon).$$

C.1

نشتق أولاً (4):

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{pl}^2} (\dot{\phi}\ddot{\phi} + V'\dot{\phi}).$$

تعطي المعادلة (3) أن $\ddot{\phi} + V' = -3H\dot{\phi}$ ، ولذلك

$$2H\dot{H} = -\frac{H\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2}.$$

إذن

$$\boxed{\dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2M_{pl}^2}}, \quad \epsilon = \frac{\dot{\phi}^2}{2M_{pl}^2 H^2}.$$

تعطي افتراضات التدرج البطيء

$$H^2 \simeq \frac{V}{3M_{pl}^2}, \quad 3H\dot{\phi} \simeq -V'.$$

وبالتعويض بهاتين العلاقتين في ϵ ,

$$\epsilon \simeq \frac{V'^2}{18M_{pl}^2 H^4} = \boxed{\frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2}.$$

للحصول على η_V ، نشق معادلة الحقل في تقريب التدرج البطيء:

$$3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} \simeq -V''\dot{\phi}.$$

وبالقسمة على $3H^2\dot{\phi}$

$$\frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \simeq -\frac{V''}{3H^2}.$$

الطرف الأيسر هو $\delta - \epsilon$. ومن ثم

$$\eta_V = \delta + \epsilon \simeq \frac{V''}{3H^2} = \boxed{M_{pl}^2 \frac{V''}{V}}.$$

وأخيراً، باستخدام التعريف الوارد في نص المسألة $dN = Hdt$

$$\frac{dN}{d\phi} = \frac{H}{\dot{\phi}} \simeq -\frac{3H^2}{V'} = \boxed{-\frac{V}{M_{pl}^2 V'}}.$$

تنطبق هذه العبارة على طول مسار حقل متدرج يتغير تغيراً رتيباً.

D.1

من أجل

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n,$$

تكون نسب المشتقات

$$\frac{V'}{V} = \frac{n}{\phi}, \quad \frac{V''}{V} = \frac{n(n-1)}{\phi^2}.$$

وعليه،

$$\epsilon \simeq \frac{n^2 M_{pl}^2}{2\phi^2}.$$

باستقراء عبارة التدرج البطيء هذه حتى شرط النهاية $\epsilon = 1$ ، نحصل على

$$|\phi_{\text{end}}| \simeq \frac{|n|}{\sqrt{2}} M_{pl}.$$

عندما $n > 0$ ، نأخذ فرع الحقل الموجب. يتدرج الحقل نحو قيم أصغر لـ ϕ ، ولذلك تزداد ϵ وتبلغ الواحد عند

$$\boxed{\phi_{\text{end}} \simeq \frac{n}{\sqrt{2}} M_{pl}}.$$

للحلل الوحدات نفسها التي لـ M_{pl} .

يسمح نص المسألة بأي عدد صحيح n ، لكن الخروج المفترض من التضخم يقيد الحالات ذات الصلة:

- عندما $n = 0$ ، تكون طاقة الوضع ثابتة و $\epsilon \simeq 0$ ؛ ولا يوفر هذا النموذج خروجاً من تضخم التدرج البطيء.
- عندما $n < 0$ و $\phi > 0$ ، تكون $V' < 0$ ، ولذلك $\dot{\phi} \simeq -V'/(3H) > 0$ ، ومن ثم تتناقص $\epsilon \propto \phi^{-2}$. وتمثل العتبة الشكلية $\epsilon = 1$ دخولاً في التضخم.

نتيجة قيمة الحقل عند النهاية تقديرية، لأن التدرج البطيء لا يعود تقريباً مضبوطاً حين تقترب ϵ من الواحد.

D.2

طاقة الوضع الأحادية الحد، تعطي C.1

$$\frac{dN}{d\phi} \simeq -\frac{\phi}{nM_{pl}^2}.$$

وبالتكامل انطلاقاً من نهاية التضخم، حيث $N = 0$ ،

$$N(\phi) \simeq -\frac{\phi^2 - \phi_{\text{end}}^2}{2nM_{pl}^2}.$$

عندما $n > 0$ ، تكون قيمة الحقل الابتدائية أكبر من قيمته النهائية، ولذلك تكون N_{start} في نص المسألة سالبة. نعرّف المدة الموجبة

$$\mathcal{N} \equiv -N_{\text{start}} = \ln \frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{start}}}.$$

عندئذ

$$\phi_{\text{start}}^2 \simeq \phi_{\text{end}}^2 + 2nM_{pl}^2\mathcal{N} = \frac{n}{2}(4\mathcal{N} + n)M_{pl}^2.$$

إذن معاملا التدرج البطيء عند البداية هما

$$\epsilon_{\text{start}} \simeq \frac{n}{4\mathcal{N} + n}, \quad \eta_{V,\text{start}} \simeq \frac{2(n-1)}{4\mathcal{N} + n}.$$

ومن ثم

$$r \simeq \frac{16n}{4\mathcal{N} + n}$$

و

$$n_s \simeq 1 + \frac{4(n-1) - 6n}{4\mathcal{N} + n} = 1 - \frac{2(n+2)}{4\mathcal{N} + n}.$$

وفق اصطلاح الإشارة في نص المسألة، تصبح هاتان العلاقتان

$$r \simeq \frac{16n}{n - 4N_{\text{start}}}, \quad n_s \simeq 1 - \frac{2(n+2)}{n - 4N_{\text{start}}}.$$

عندما $\mathcal{N} \gg n$ ، تكون الصيغ المألوفة إلى الرتبة الرائدة

$$r \simeq \frac{4n}{\mathcal{N}}, \quad n_s \simeq 1 - \frac{n+2}{2\mathcal{N}}.$$

بتفسير القيمة المطلوبة $N = 60$ على أنها مدة موجبة $\mathcal{N} = 60$ ، يعطي القيد على النسبة المتوتيرة

$$\frac{16n}{240 + n} < 0.12 \implies n < \frac{28.8}{15.88} \simeq 1.814.$$

ولذلك فإن العدد الصحيح الموجب الوحيد الذي يحقق هذا القيد هو $n = 1$.

التنبؤات العددية، وجميعها عديمة الأبعاد، هي:

المقارنة بالقيود المذكورة	n_s	r	n
يحق $r < 0.12$ ؛ و n_s أعلى قليلاً من 0.974	0.9751	0.0664	1
يحق المجال المذكور لـ n_s ؛ ويتجاوز القيد على r	0.9669	0.1322	2
خارج كلا القيدين المذكورين	0.9588	0.1975	3

ومن ثم

$$n = 1 \text{ إذا فُرض الحد الأعلى للنسبة الموترية}$$

مؤشره الطيفي المتوقع أعلى بنحو 0.0011 من الطرف العلوي للمجال المذكور. والعدد الصحيح $n = 2$ أقرب إلى القيمة المركزية للمؤشر الطيفي، لكنه يخالف القيد على النسبة الموترية. لا يوجد عدد صحيح موجب يحقق كلا القيدين المذكورين في آن واحد.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.