

IPhO 2016

理论题与解答 · 瑞士苏黎世 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/2016/

题目 1: 两个力学问题

开始作答本题之前，请阅读另一个信封中的一般说明。

部分 A. 隐藏的圆盘 (3.5 分)

考虑一个半径为 r_1 、厚度为 h_1 的实心木制圆柱体。在木制圆柱体内部的某处，木材被替换成了一个半径为 r_2 、厚度为 h_2 的金属圆盘。金属圆盘的对称轴 B 与木制圆柱体的对称轴 S 平行，且金属圆盘到木制圆柱体上下两个端面的距离相等。用 d 表示 S 与 B 之间的距离。木材的密度为 ρ_1 ，金属的密度为 $\rho_2 > \rho_1$ 。木制圆柱体及其内部金属圆盘的总质量为 M 。

在本题中，我们将木制圆柱体放在地面上，使其能够自由地左右滚动。装置的侧视图和俯视图见图 1。

本题的目标是确定金属圆盘的尺寸和位置。

在下文中，当要求用已知量表示结果时，均可认为以下各量已知：

$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

目标是通过间接测量确定 r_2 、 h_2 和 d 。

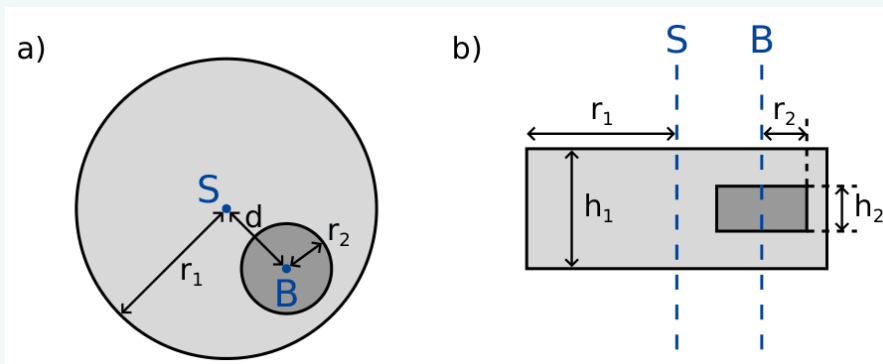


图 1: a) 侧视图 b) 俯视图

用 b 表示整个系统的质心 C 与木制圆柱体的对称轴 S 之间的距离。为了确定这一距离，我们设计了如下实验：将木制圆柱体放在水平底板上，使其处于稳定平衡状态。然后将底板缓慢倾斜一个角度 Θ （见图 2）。由于静摩擦力的作用，木制圆柱体可以自由滚动而不发生滑动。它会沿斜面向下滚动一小段距离，转过角度 ϕ 后静止下来，处于稳定平衡状态；我们测量这一角度。

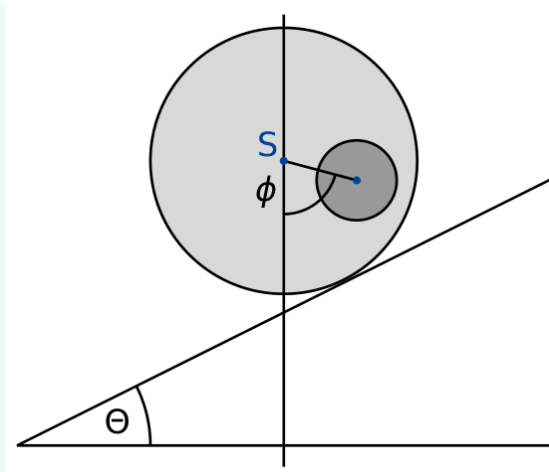


图 2：倾斜底板上的圆柱体。

A.1 — 0.8 分

求出 b 的表达式，用式 (1) 中的各量、角度 ϕ 以及底板的倾角 Θ 表示。

从现在起，可以认为 b 的值已知。

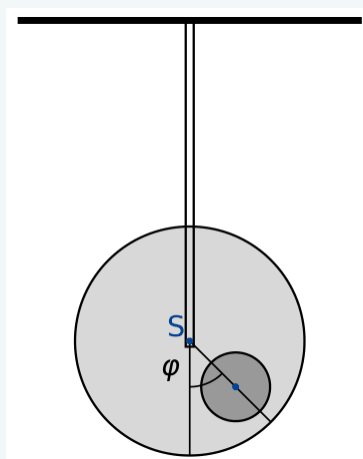


图 3：悬挂的系统。

接下来，我们要测量系统绕对称轴 S 的转动惯量 I_S 。为此，用一根刚性杆在木制圆柱体的对称轴处将其悬挂起来。然后使其偏离平衡位置一个小角度 φ ，再将其释放。装置如图 3 所示。我们发现 φ 随时间作周期性变化，周期为 T 。

A.2 — 0.5 分

求出 φ 的运动方程。用 T 、 b 和式 (1) 中的已知量表示系统绕其对称轴 S 的转动惯量 I_S 。可以假定系统偏离平衡位置的程度很小，因此 φ 始终很小。

现在，我们希望利用 A.1 和 A.2 中的测量结果，确定木制圆柱体内部金属圆盘的几何尺寸和位置。

A.3 — 0.4 分

求出距离 d 的表达式，用 b 和式 (1) 中的各量表示。表达式中也可以包含变量 r_2 和 h_2 ，它们将在小题目 A.5 中求出。

A.4 — 0.7 分

求出转动惯量 I_S 的表达式，用 b 和式 (1) 中的已知量表示。表达式中也可以包含变量 r_2 和 h_2 ，它们将在小题 A.5 中求出。

A.5 — 1.1 分

利用以上所有结果，写出 h_2 和 r_2 的表达式，用 b 、 T 和式 (1) 中的已知量表示。可以将 h_2 表示为 r_2 的函数。

部分 B. 旋转空间站 (6.5 分)

爱丽丝是一名生活在空间站上的宇航员。空间站是一个半径为 R 的巨型轮状结构，绕自身轴线旋转，从而为宇航员提供人造重力。宇航员生活在轮缘的内侧。空间站自身的引力以及地板的曲率均可忽略。

B.1 — 0.5 分

空间站应以多大的角频率 ω_{ss} 旋转，才能使宇航员感受到与地球表面相同的重力加速度 g_E ？

爱丽丝和她的宇航员朋友鲍勃发生了争论。鲍勃不相信他们实际上生活在空间站上，并声称他们在地球上。爱丽丝想利用物理学向鲍勃证明他们生活在一个旋转的空间站上。为此，她将一个质量为 m 的物体连接到劲度系数为 k 的弹簧上，并使其振动。物体仅沿竖直方向振动，不能沿水平方向运动。

B.2 — 0.2 分

假设地球上的重力加速度恒为 g_E ，地球上的人测得的振动角频率 ω_E 是多少？

B.3 — 0.6 分

爱丽丝在空间站上测得的振动角频率 ω 是多少？

爱丽丝确信她的实验证明了他们身处旋转空间站。鲍勃仍然持怀疑态度。他声称，如果考虑地球表面上方重力随高度的变化，也会发现类似的效应。在接下来的小题中，我们将研究鲍勃是否正确。

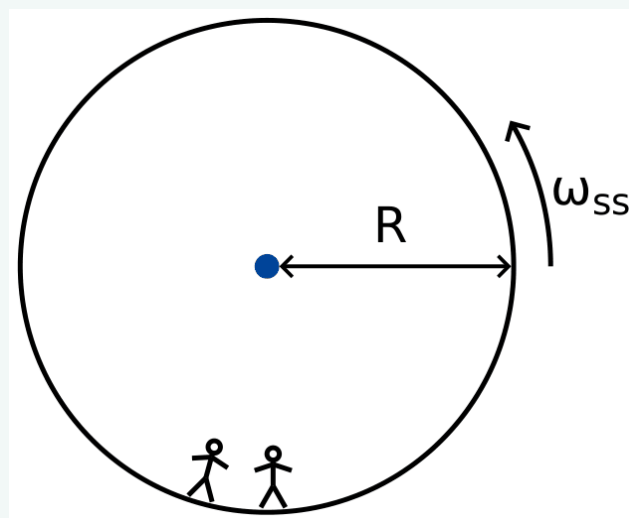


图 4：空间站

B.4 — 0.8 分

推导地球表面上方较小高度 h 处的重力加速度 $g_E(h)$ 的表达式，并计算振动物体的振动角频率 $\tilde{\omega}_E$ （采用线性近似即可）。用 R_E 表示地球半径。忽略地球自转。

对于这个空间站，爱丽丝确实发现弹簧振子的振动频率与鲍勃预言的相同。

B.5 — 0.3 分

当空间站的半径 R 为多少时，振动角频率 ω 与地球上的振动角频率 $\tilde{\omega}_E$ 相同？用 R_E 表示答案。

鲍勃的固执让爱丽丝十分恼火，于是她想出了一个实验来证明自己的观点。为此，她爬上一座高出空间站地板 H 的塔，并释放一个物体使其下落。这个实验既可以在旋转参考系中理解，也可以在惯性参考系中理解。

在匀速旋转参考系中，宇航员会感受到一种称为科里奥利力的惯性力 $\vec{F}_C$ 。在角频率恒为 $\vec{\omega}_{ss}$ 的旋转参考系中，一个质量为 m 、以速度 $\vec{v}$ 运动的物体所受的力 $\vec{F}_C$ 为

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss}. \quad (2)$$

用标量表示时，可以使用

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi, \quad (3)$$

其中 ϕ 是速度与转轴之间的夹角。该力既垂直于速度 v ，也垂直于转轴。力的正负号可以由右手定则确定，但在下文中可以自由选择。

B.6 — 1.1 分

计算物体撞击地板瞬间的水平速度 v_x 和水平位移 d_x （相对于塔底，沿垂直于塔的方向）。可以假设塔高 H 很小，因此宇航员测得的加速度在下落过程中保持不变。还可以假设 $d_x \ll H$ 。

为了获得良好的实验结果，爱丽丝决定在一座比之前高得多的塔上进行这个实验。令她惊讶的是，物体在塔底撞击地板，即 $d_x = 0$ 。

B.7 — 1.3 分

求出可能出现 $d_x = 0$ 时塔高的一个下界。

爱丽丝愿意再做最后一次尝试来说服鲍勃。她想用弹簧振子展示科里奥利力的效应。为此，她改变了原来的装置：将弹簧连接到一个圆环上，圆环可以沿水平杆的 x 方向无摩擦地自由滑动。弹簧本身沿 y 方向振动。杆平行于地板，并垂直于空间站的转轴。因此， xy 平面垂直于转轴， y 方向径直指向空间站的旋转中心。

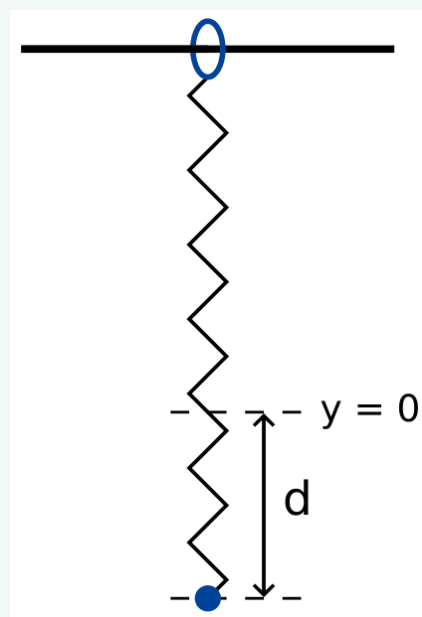


图 5：实验装置。

B.8 — 1.7 分

爱丽丝将物体从平衡位置 $x = 0$ 、 $y = 0$ 向下拉开距离 d ，然后释放（见图 5）。

- 给出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的代数表达式。可以假设 $\omega_{ss}d$ 很小，并忽略沿 y 轴方向运动所受的科里奥利力。
- 画出轨迹 $(x(t), y(t))$ 的示意图，标出振幅等所有重要特征。

爱丽丝和鲍勃继续争论着。

通用数据表

真空中的光速	c	$= 299\,792\,458\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
真空磁导率（磁常量）	μ_0	$= 4\pi \times 10^{-7}\text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
真空介电常数（电常量）	ϵ_0	$= 8.854\,187\,817 \times 10^{-12}\text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
元电荷	e	$= 1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19}\text{ A} \cdot \text{s}$
电子质量	m_e	$= 9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31}\text{ kg}$
		$= 0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
质子质量	m_p	$= 1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27}\text{ kg}$
		$= 938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
中子质量	m_n	$= 1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27}\text{ kg}$
		$= 939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
统一原子质量单位	u	$= 1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27}\text{ kg}$
里德伯常量	R_∞	$= 10\,973\,731.568\,508(65)\text{ m}^{-1}$
万有引力常量	G	$= 6.674\,08(31) \times 10^{-11}\text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
重力加速度（苏黎世）	g	$= 9.81\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
普朗克常量	h	$= 6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34}\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
阿伏伽德罗常数	N_A	$= 6.022\,140\,857(74) \times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$
摩尔气体常量	R	$= 8.314\,4598(48)\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
摩尔质量常量	M_u	$= 1 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
玻尔兹曼常量	k_B	$= 1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23}\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
斯特藩-玻尔兹曼常量	σ	$= 5.670\,367(13) \times 10^{-8}\text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

题目译自官方英文原文。

答案

对于部分 A，定义完全由木材构成的圆柱体的质量，以及用金属替换木材后增加的质量：

$$m_0 = \pi \rho_1 r_1^2 h_1, \quad \Delta m = M - m_0 = \pi(\rho_2 - \rho_1) r_2^2 h_2.$$

对于部分 B，记 $\Omega = \omega_{ss}$ ，并取 $+x$ 沿空间站的旋转方向、 $+y$ 指向其中心。

• A.1

$$b = \frac{r_1 \sin \Theta}{\sin \phi}.$$

• A.2

$$I_S \ddot{\varphi} = -Mgb \sin \varphi \simeq -Mgb\varphi,$$

$$I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2}.$$

• A.3

$$d = \frac{Mb}{\Delta m} = \frac{Mb}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2 h_2}.$$

• A.4

$$I_S = \frac{1}{2}m_0 r_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m r_2^2 + \frac{M^2 b^2}{\Delta m}.$$

• A.5

$$r_2 = \sqrt{\frac{MgbT^2}{2\pi^2 \Delta m} - \frac{m_0 r_1^2}{\Delta m} - \frac{2M^2 b^2}{(\Delta m)^2}},$$

$$h_2 = \frac{\Delta m}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2}.$$

• B.1

$$\omega_{ss} = \sqrt{\frac{g_E}{R}}.$$

• B.2

$$\omega_E = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

• B.3

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g_E}{R}}.$$

• B.4

$$g_E(h) = \frac{g_E}{(1 + h/R_E)^2} \simeq g_E \left(1 - \frac{2h}{R_E}\right),$$

$$\tilde{\omega}_E = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}}.$$

• B.5

$$R = \frac{R_E}{2}.$$

• B.6

$$v_x = -2\Omega H,$$

$$d_x = -\frac{2}{3}\Omega H \sqrt{\frac{2H}{g_E}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}H \sqrt{\frac{H}{R}}.$$

两者的方向均与空间站的旋转方向相反。

- B.7 一个严格的下界为

$$H > R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2}} \right) \simeq 0.8428R.$$

第一次恰好回到塔底时的高度为

$$H_{\min} \simeq 0.8716R.$$

- B.8 令 $a = 2\Omega d/\omega$, 则

$$x(t) = a[\omega t - \sin(\omega t)], \quad y(t) = -d \cos(\omega t).$$

轨迹由连续的摆线拱段组成, 尖点位于 $(2\pi na, -d)$, 上方转向点位于 $((2n+1)\pi a, d)$, 水平间距为 $2\pi a$. 竖直振幅为 d .

解答

A.1

设 P 为圆柱体与倾斜底板的接触点。支持力和静摩擦力均作用于 P , 因此它们对 P 的力矩均为零。所以, 静力平衡要求通过质心 C 的竖直线经过 P 。

质心位于 SB 上。利用图 2 所示的角度, P 和 C 相对于 S 的水平位移分别为

$$x_P - x_S = r_1 \sin \Theta, \quad x_C - x_S = b \sin \phi.$$

因此,

$$Mg(b \sin \phi - r_1 \sin \Theta) = 0,$$

从而

$$b = \frac{r_1 \sin \Theta}{\sin \phi}.$$

稳定平衡对应于 $\cos \phi > 0$ 的分支。特别地, 倾角必须足够小, 使得 $r_1 \sin \Theta < b$; 等号对应于没有恢复作用的极限构型。

A.2

悬挂装置将轴 S 固定。重力作用于 C , 它到该轴的距离为 b , 从而产生恢复力矩

$$\tau_S = -Mgb \sin \varphi.$$

因此, 转动运动方程为

$$I_S \ddot{\varphi} = -Mgb \sin \varphi.$$

当 $|\varphi| \ll 1$ 时, 利用 $\sin \varphi \simeq \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgb}{I_S} \varphi = 0.$$

这是简谐运动, 满足

$$\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{Mgb}{I_S}.$$

于是

$$I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2},$$

其中给定的重力加速度为 $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ 。

A.3

将实际的密度分布表示为以下两部分之和：

1. 一个完整的木制圆柱体，质量为

$$m_0 = \pi\rho_1 r_1^2 h_1,$$

中心位于 S 。

2. 一个密度为 $\rho_2 - \rho_1$ 的附加圆盘，中心位于 B ，质量为

$$\Delta m = \pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2 h_2 = M - m_0.$$

这样就计入了放入金属之前被移除的木材。

对 S 取质量的一阶矩，得

$$Mb = m_0(0) + \Delta m d.$$

由此可得

$$d = \frac{Mb}{\Delta m} = \frac{Mb}{M - \pi\rho_1 r_1^2 h_1} = \frac{Mb}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2 h_2}.$$

A.4

完整木制圆柱体的贡献为

$$I_{\text{wood}} = \frac{1}{2}m_0 r_1^2.$$

附加圆盘绕自身对称轴的转动惯量为 $\frac{1}{2}\Delta m r_2^2$ 。根据平行轴定理，它对绕 S 的转动惯量的贡献为

$$I_{\text{additional}} = \frac{1}{2}\Delta m r_2^2 + \Delta m d^2.$$

因此

$$I_S = \frac{1}{2}m_0 r_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m r_2^2 + \Delta m d^2.$$

代入 $d = Mb/\Delta m$ ，得

$$I_S = \frac{1}{2}m_0 r_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m r_2^2 + \frac{M^2 b^2}{\Delta m}.$$

A.5

将 A.2 和 A.4 中 I_S 的表达式相等，得

$$\frac{MgbT^2}{4\pi^2} = \frac{1}{2}m_0 r_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m r_2^2 + \frac{M^2 b^2}{\Delta m}.$$

解出 r_2^2 ，

$$r_2^2 = \frac{MgbT^2}{2\pi^2 \Delta m} - \frac{m_0 r_1^2}{\Delta m} - \frac{2M^2 b^2}{(\Delta m)^2}.$$

取正根，

$$r_2 = \sqrt{\frac{MgbT^2}{2\pi^2\Delta m} - \frac{m_0r_1^2}{\Delta m} - \frac{2M^2b^2}{(\Delta m)^2}}.$$

再由质量关系确定厚度：

$$h_2 = \frac{\Delta m}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2}.$$

这里 $m_0 = \pi\rho_1r_1^2h_1$, $\Delta m = M - m_0$, 因此右侧的所有量均为已知量或测量量。符合物理条件的测量结果必须使根号内的量为正, 并满足 $d + r_2 \leq r_1$ 和 $h_2 \leq h_1$ 。

B.1

相对于轮缘静止的宇航员沿半径为 R 的圆周运动。所需的向心加速度为

$$a_c = \omega_{ss}^2 R.$$

提供这一加速度的支持力被宇航员感受为自身的重量。要使加速度与地球上的相同, 必须满足

$$\omega_{ss}^2 R = g_E.$$

于是

$$\omega_{ss} = \sqrt{\frac{g_E}{R}}.$$

下文记 $\Omega = \omega_{ss}$ 。

B.2

用 y 表示相对于弹簧平衡位置的向上位移。恒定重力会改变平衡时的伸长量, 但以平衡位置为基准写出运动方程时, 恒定的重力项会被消去:

$$m\ddot{y} = -ky.$$

因此

$$\omega_E = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

B.3

采用旋转参考系, 并令 y 从平衡位置沿径向指向内侧。若平衡位置的半径为 r_0 , 则瞬时半径为 $r_0 - y$ 。

离心力指向外侧, 其大小为

$$m\Omega^2(r_0 - y).$$

当物体向内移动 y 时, 向内的弹簧力减小 ky 。在平衡位置, 弹簧力的大小 F_0 满足

$$F_0 = m\Omega^2 r_0.$$

因此, 向内方向的运动方程为

$$m\ddot{y} = (F_0 - ky) - m\Omega^2(r_0 - y) = -(k - m\Omega^2)y.$$

水平方向的约束力平衡了科里奥利力, 因此它不会改变这一径向方程。于是

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g_E}{R}}.$$

要发生振动, 必须满足 $k/m > \Omega^2$ 。

B.4

设地球质量为 M_E 。根据牛顿万有引力定律,

$$g_E(h) = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2}.$$

由于 $g_E = GM_E/R_E^2$,

$$g_E(h) = g_E \left(1 + \frac{h}{R_E}\right)^{-2}.$$

当 $h \ll R_E$ 时, 一阶展开为

$$g_E(h) \simeq g_E \left(1 - \frac{2h}{R_E}\right).$$

设平衡高度为 h_0 , 用 y 表示相对于平衡位置的向上位移。减去平衡位置的力平衡关系后, 得

$$m\ddot{y} = -ky - m[g_E(h_0 + y) - g_E(h_0)].$$

在线性近似下,

$$g_E(h_0 + y) - g_E(h_0) \simeq -\frac{2g_E}{R_E}y.$$

于是

$$m\ddot{y} = -\left(k - \frac{2mg_E}{R_E}\right)y,$$

从而

$$\tilde{\omega}_E = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}}.$$

重力随高度增加而减小, 因此向上的位移会使向下的重力减小。这削弱了净恢复力, 并使频率降低。

B.5

将 B.3 和 B.4 中的频率平方相等, 得

$$\frac{k}{m} - \frac{g_E}{R} = \frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}.$$

因此

$$R = \frac{R_E}{2}.$$

B.6

取 $+x$ 沿空间站的旋转方向, $+y$ 向内指向其中心。在这一约定下, 科里奥利加速度的分量为

$$a_{C,x} = 2\Omega\dot{y}, \quad a_{C,y} = -2\Omega\dot{x}.$$

对于较矮的塔, 将向下的加速度近似为常量 $g_E = \Omega^2 R$ 。由于水平偏移很小, 可以忽略其对竖直下落运动的反馈影响。物体从静止释放后,

$$y(t) = H - \frac{1}{2}g_E t^2, \quad \dot{y} = -g_E t.$$

撞击地板的时刻为

$$t_f = \sqrt{\frac{2H}{g_E}}.$$

水平方向的方程变为

$$\ddot{x} = 2\Omega\dot{y} = -2\Omega g_E t.$$

利用 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, 积分得

$$\dot{x} = -\Omega g_E t^2, \quad x = -\frac{1}{3}\Omega g_E t^3.$$

撞击瞬间,

$$v_x = -\Omega g_E t_f^2 = -2\Omega H,$$

以及

$$d_x = -\frac{1}{3}\Omega g_E t_f^3 = -\frac{2}{3}\Omega H \sqrt{\frac{2H}{g_E}}.$$

利用 $\Omega^2 = g_E/R$,

$$d_x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}H\sqrt{\frac{H}{R}}.$$

物体落在塔的后方, 即与旋转方向相反的一侧。自洽条件为

$$\frac{|d_x|}{H} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{H}{R}} \ll 1,$$

这与 $H \ll R$ 时的预期一致。

B.7

对于高塔, 采用惯性参考系, 并考虑完整的圆形几何关系。B.6 中的恒加速度近似不再适用。

令

$$r = R - H$$

为释放点到空间站中心的距离, 其中 $0 < r < R$ 。选取惯性坐标系, 使物体在 $(r, 0)$ 处释放, 切向速度为 $(0, \Omega r)$ 。

释放后, 物体不受任何真实力, 因此其轨迹为直线:

$$X(t) = r, \quad Y(t) = \Omega r t.$$

当满足

$$X^2 + Y^2 = R^2.$$

时, 它首次到达轮缘。记 $u = \Omega t_f$, 由此得到

$$r^2(1 + u^2) = R^2, \quad u = \sqrt{\frac{R^2}{r^2} - 1}.$$

撞击瞬间, 物体的角位置为

$$\alpha = \arctan u, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

而塔底已经转过角度 u 。

要使物体撞击塔底，两者的角位置必须在模 2π 的意义下相等：

$$u - \arctan u = 2\pi n.$$

对于 $u > 0$ ，有 $u > \arctan u$ ，因此 $n = 0$ 无法给出非零塔高。所以 $n \geq 1$ ，从而

$$u = 2\pi n + \arctan u > 2\pi.$$

因此，

$$\frac{R^2}{r^2} - 1 > 4\pi^2, \quad r < \frac{R}{\sqrt{1 + 4\pi^2}}.$$

由于 $H = R - r$ ，

$$H > R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2}} \right) \simeq 0.8428R.$$

对于 B.5 中确定的空间站，这给出 $H > 0.4214R_E$ 。

还可以求出恰好回到塔底所需的最小高度。函数

$$f(u) = u - \arctan u$$

在 $u > 0$ 时严格递增，因为

$$f'(u) = \frac{u^2}{1 + u^2} > 0.$$

因此，最小的返回高度对应于 $n = 1$ 。求解

$$u_1 - \arctan u_1 = 2\pi$$

得

$$u_1 \simeq 7.72525.$$

因此

$$H_{\min} = R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + u_1^2}} \right) \simeq 0.871625R.$$

这一更精确的值与题目所要求的下界相符。

B.8

继续取 $+x$ 沿旋转方向， $+y$ 向内。可自由滑动的支承不提供水平恢复力。

采用局部平坦地板近似，并按题意忽略水平运动产生的沿 y 方向的科里奥利力。竖直方向的方程仍为

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} - \Omega^2.$$

初始条件为

$$y(0) = -d, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

于是

$$y(t) = -d \cos(\omega t).$$

水平运动由竖直速度对应的科里奥利力驱动：

$$\ddot{x} = 2\Omega \dot{y}.$$

积分一次，得

$$\dot{x} = 2\Omega[y(t) - y(0)] = 2\Omega d[1 - \cos(\omega t)].$$

再次积分，得

$$x(t) = 2\Omega d \left[t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right].$$

为了描述轨迹示意图，定义

$$a = \frac{2\Omega d}{\omega}, \quad \tau = \omega t, \quad P = \frac{2\pi}{\omega}.$$

则

$$x = a(\tau - \sin \tau), \quad y = -d \cos \tau.$$

这是一条水平和竖直坐标分别缩放后的摆线。

一个完整的拱段包含以下各点：

时刻	x/a	y/d	特征
0	0	-1	起始尖点；物体静止
$P/4$	$\pi/2 - 1$	0	向上经过平衡高度
$P/2$	π	1	最高点；切线水平
$3P/4$	$3\pi/2 + 1$	0	向下经过平衡高度
P	2π	-1	下一个尖点；物体瞬时静止

完整的示意图由这些拱段沿 x 增大的方向重复排列而成：

- 竖直振幅为 d ， y 的取值范围为 $-d$ 到 $+d$ 。
- 尖点位于 $(2\pi na, -d)$ ，其极限切线为竖直方向。
- 上方转向点位于 $((2n + 1)\pi a, d)$ ，其切线为水平方向。
- 相邻尖点之间的距离为

$$L = 2\pi a = \frac{4\pi\Omega d}{\omega}.$$

- 由于

$$\dot{x} = 2\Omega d(1 - \cos \omega t) \geq 0,$$

轨迹持续沿 $+x$ 方向前进，不形成环圈。

- 平均水平漂移速度为 $2\Omega d$ ；相对于这一匀速漂移的水平振动振幅为 a 。

这些表达式适用于上述忽略竖直方向科里奥利力的条件以及局部平坦地板近似仍然成立的情况。

解答已与官方解答核对。

题目 2：电路中的非线性动力学

开始解答本题前，请阅读单独信封中的通用说明。

引言

双稳态非线性半导体元件（例如晶闸管）在电子技术中广泛用作开关和电磁振荡发生器。晶闸管的主要应用领域是电力电子技术中的交流电控制，例如在兆瓦功率级别上将交流电整流为直流电。双稳态元件还可作为模型系统，用于研究物理学（本题 B 部分涉及这一主题）、生物学（见 C 部分）以及现代非线性科学其他领域中的自组织现象。

目标

研究含有非线性 $I - V$ 特性元件的电路的不稳定性和非平凡动力学行为。探索此类电路在工程技术和生物系统建模中的潜在应用。

部分 A. 稳态与不稳定性 (3 分)

图 1 给出了非线性元件 X 的所谓 **S 形** $I - V$ 特性。在 $U_h = 4.00 \text{ V}$ （维持电压）与 $U_{th} = 10.0 \text{ V}$ （阈值电压）之间的电压范围内，该 $I - V$ 特性是多值的。为简单起见，图 1 中的曲线取为分段线性形式（每条支线都是一段直线）。特别地，上支线所在直线延长后通过原点。这一近似能够很好地描述实际晶闸管。

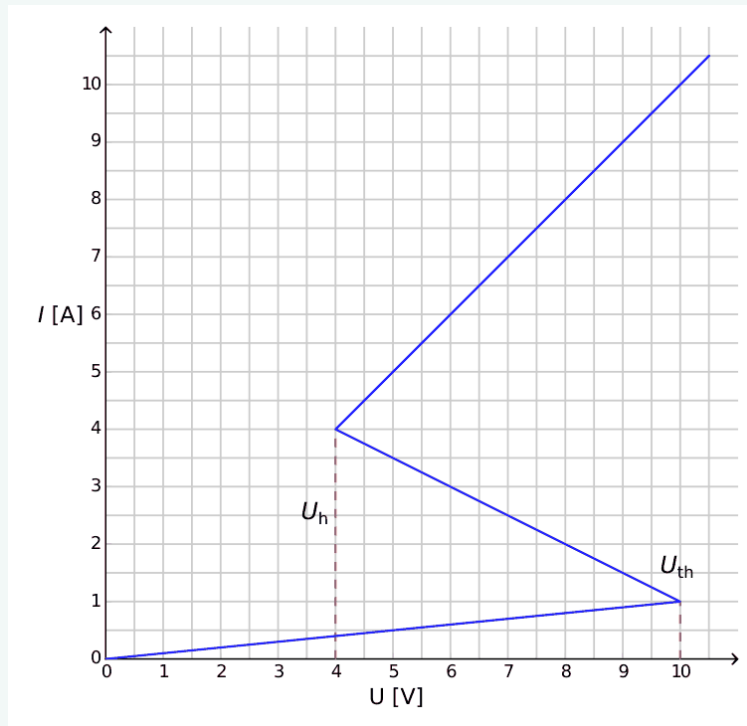


图 1: 非线性元件 X 的 $I - V$ 特性。

A.1 — 0.4 分

利用图像，分别确定元件 X 在 $I - V$ 特性上支线上的电阻 R_{on} 和下支线上的电阻 R_{off} 。中间支线由下式描述：

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{int}}. \quad (1)$$

求参数 I_0 和 R_{int} 的值。

将元件 X 与电阻 R 、电感 L 和理想电压源 $\mathcal{E}$ 串联（见图 2）。若电流不随时间变化，即 $I(t) = \text{const}$ ，则称电路处于稳态。

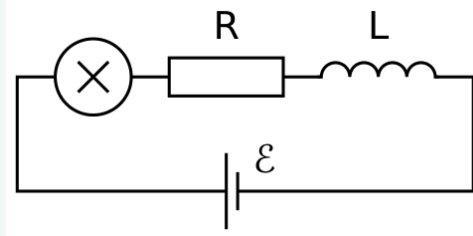


图 2：由元件 X 、电阻 R 、电感 L 和电压源 $\mathcal{E}$ 组成的电路。

A.2 — 1 分

对于固定的 $\mathcal{E}$ 值，当 $R = 3.00 \, \Omega$ 时，图 2 中电路的稳态数目可能有哪些？当 $R = 1.00 \, \Omega$ 时，答案如何变化？

A.3 — 0.6 分

在图 2 所示电路中，令 $R = 3.00 \, \Omega$ 、 $L = 1.00 \, \mu\text{H}$ 、 $\mathcal{E} = 15.0 \, \text{V}$ 。求稳态下流过非线性元件 X 的电流 $I_{\text{stationary}}$ 和其两端的电压 $V_{\text{stationary}}$ 。

图 2 中的电路处于 $I(t) = I_{\text{stationary}}$ 的稳态。若受到微小偏离（电流增大或减小）后，电流趋于返回稳态，则称该稳态是稳定的。若系统不断偏离该稳态，则称其是不稳定的。

A.4 — 1 分

使用 A.3 中的数值，研究 $I(t) = I_{\text{stationary}}$ 这一稳态的稳定性。它是稳定的还是不稳定的？

部分 B. 物理学中的双稳态非线性元件：无线电发射机 (5 分)

现在研究一种新的电路结构（见图 3）。这一次，将非线性元件 X 与电容为 $C = 1.00 \, \mu\text{F}$ 的电容器并联，再将这一并联组合与阻值为 $R = 3.00 \, \Omega$ 的电阻以及电压为 $\mathcal{E} = 15.0 \, \text{V}$ 的理想恒压源串联。该电路会发生振荡，在一个周期内，非线性元件 X 会从 $I - V$ 特性的一条支线跳变到另一条支线。

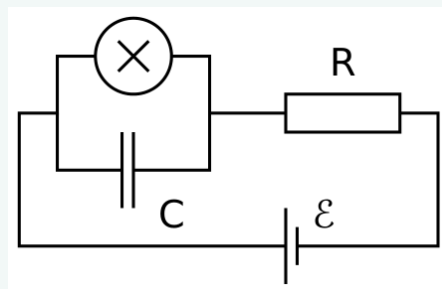


图 3：由元件 X 、电容器 C 、电阻 R 和电压源 $\mathcal{E}$ 组成的电路。

B.1 — 1.8 分

在 $I - V$ 图上画出振荡循环，并标明其方向（顺时针或逆时针）。用方程和示意图说明你的答案。

B.2 — 1.9 分

求振荡循环中系统在 $I - V$ 图的各条支线上停留的时间 t_1 和 t_2 的表达式，并求出其数值。假设在 $I - V$ 图的支线之间跳变所需的时间可以忽略，求振荡周期 T 的数值。

B.3 — 0.7 分

估算一个振荡周期内非线性元件耗散的平均功率 P 。只需给出数量级。

利用图 3 中的电路构建一台无线电发射机。为此，将元件 X 接到长度为 s 的线性天线（一根长直导线）的一端。导线的另一端自由。在天线中形成电磁驻波。电磁波沿天线传播的速度与在真空中的速度相同。发射机使用系统的基频，其周期为 B.2 中的 T 。

B.4 — 0.6 分

假设 s 不能超过 1 km，其最优值是多少？

部分 C. 生物学中的双稳态非线性元件：神经元模拟器（2 分）

在本题这一部分中，我们考虑双稳态非线性元件在生物过程建模中的一种应用。人脑中的神经元具有如下性质：受到外部信号激励时，它产生一次振荡，然后返回初始状态。这一特性称为兴奋性。由于这一性质，脉冲能够在由相互耦合的神经元构成的神经网络中传播。用于模拟兴奋性和脉冲传播的半导体芯片称为 *神经元模拟器*（neuristor，该词由 neuron〔神经元〕和 transistor〔晶体管〕组合而成）。

我们尝试用包含先前研究过的非线性元件 X 的电路，建立一个简单的神经元模拟器模型。为此，将图 3 中电路的电压 $\mathcal{E}$ 降至 $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$ 。振荡停止，系统达到稳态。随后，将电压迅速升回 $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ ，经过时间 τ （其中 $\tau < T$ ）后，再将其设为 $\mathcal{E}'$ （见图 4）。存在某个临界值 τ_{crit} ，当 $\tau < \tau_{\text{crit}}$ 和 $\tau > \tau_{\text{crit}}$ 时，系统表现出定性不同的行为。

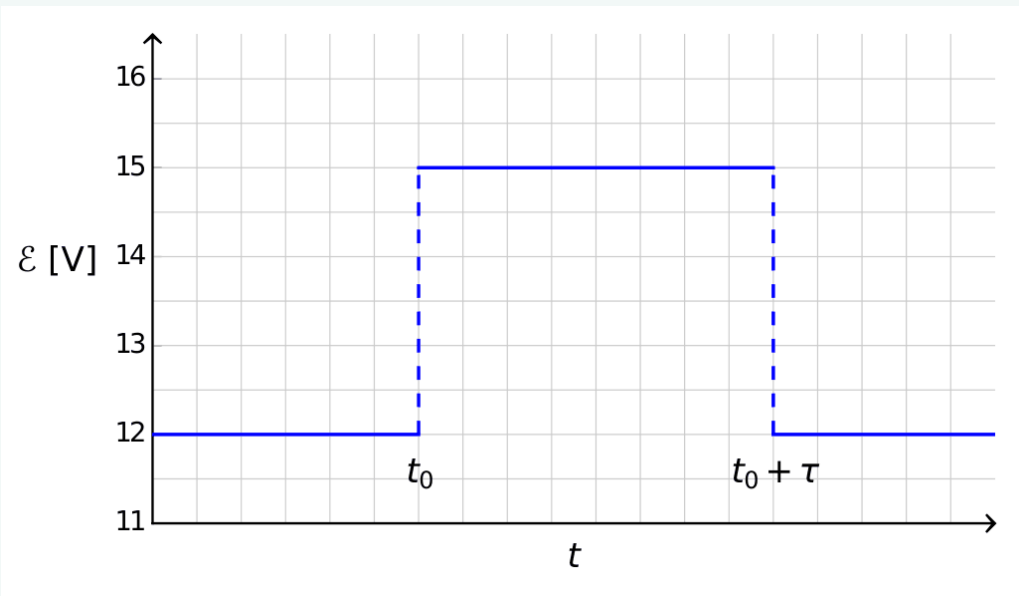


图 4：电压源的电压随时间的变化。

C.1 — 1.2 分

分别画出 $\tau < \tau_{\text{crit}}$ 和 $\tau > \tau_{\text{crit}}$ 时流过非线性元件 X 的电流 $I_X(t)$ 随时间变化的示意图。

C.2 — 0.6 分

求行为发生转变的临界时间 τ_{crit} 的表达式和数值。

C.3 — 0.2 分

当 $\tau = 1.00 \times 10^{-6} \text{ s}$ 时，该电路是神经元模拟器吗？

通用数据表

真空中的光速	c	=	$299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
真空磁导率（磁常数）	μ_0	=	$4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$

真空介电常数（电常数）	ε_0	=	$8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
元电荷	e	=	$1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
电子质量	m_e	=	$9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31} \text{ kg}$
		=	$0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
质子质量	m_p	=	$1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		=	$938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
中子质量	m_n	=	$1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		=	$939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
统一原子质量单位	u	=	$1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27} \text{ kg}$
里德伯常数	R_∞	=	$10\,973\,731.568\,508(65) \text{ m}^{-1}$
万有引力常数	G	=	$6.674\,08(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
重力加速度（苏黎世）	g	=	$9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
普朗克常数	h	=	$6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
阿伏伽德罗常数	N_A	=	$6.022\,140\,857(74) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
摩尔气体常数	R	=	$8.314\,4598(48) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
摩尔质量常数	M_u	=	$1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
玻尔兹曼常数	k_B	=	$1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
斯特藩-玻尔兹曼常数	σ	=	$5.670\,367(13) \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

题目译自官方英文原文。

答案

- **A.1:** $R_{\text{on}} = 1.00 \, \Omega$, $R_{\text{off}} = 10.0 \, \Omega$, $I_0 = 6.00 \, \text{A}$, $R_{\text{int}} = 2.00 \, \Omega$.
- **A.2:** 当 $R = 3.00 \, \Omega$ 时, 有一个稳态。当 $R = 1.00 \, \Omega$ 时, 对于图示的非负电源电压, 在 $8.00 \, \text{V} < \mathcal{E} < 11.0 \, \text{V}$ 时有三个稳态, 在两个端点处均有两个稳态, 其余情况下有一个稳态。
- **A.3:** $I_{\text{stationary}} = 3.00 \, \text{A}$, $V_{\text{stationary}} = 6.00 \, \text{V}$.
- **A.4:** 稳定; 微小电流扰动以时间常数 $1.00 \, \mu\text{s}$ 随时间指数衰减。
- **B.1:** 逆时针。在坐标 $(U/\text{V}, I_X/\text{A})$ 中, 循环为

$$(4, 0.4) \rightarrow (10, 1) \rightarrow (10, 10) \rightarrow (4, 4) \rightarrow (4, 0.4).$$

- **B.2:** 将下支线上的时间定义为 t_1 , 上支线上的时间定义为 t_2 , 则

$$t_1 = \frac{30}{13} \ln \frac{49}{10} \, \mu\text{s} = 3.67 \, \mu\text{s}, \quad t_2 = \frac{3}{4} \ln 25 \, \mu\text{s} = 2.41 \, \mu\text{s},$$

$$T = 6.08 \, \mu\text{s}.$$

- **B.3:** P 的数量级为 $10^1 \, \text{W}$ 。在理想模型中积分可得 $P = 17.3 \, \text{W}$ 。
- **B.4:** $s = cT/4 = 456 \, \text{m}$ 。
- **C.1:** 当 $\tau < \tau_{\text{crit}}$ 时, 电流从 $0.923 \, \text{A}$ 出发, 发生小幅连续偏移, 始终低于 $1.00 \, \text{A}$, 随后返回 $0.923 \, \text{A}$ 。当 $\tau > \tau_{\text{crit}}$ 时, 电流产生一个大尖峰: 先从 $1.00 \rightarrow 10.0 \, \text{A}$ 跳变, 再衰减至 $4.00 \, \text{A}$, 然后跳变至 $0.400 \, \text{A}$, 最后恢复至 $0.923 \, \text{A}$ 。

• C.2:

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{30}{13} \ln \frac{3}{2} \mu\text{s} = 0.936 \mu\text{s}.$$

• C.3: 是, 因为 $1.00 \mu\text{s} > \tau_{\text{crit}}$, 所以该脉冲触发一次完整的偏离与恢复过程。

解答

A.1

上支线延长后通过原点, 并通过 $(U, I) = (4.00 \text{ V}, 4.00 \text{ A})$ 。因此

$$R_{\text{on}} = \frac{U}{I} = \frac{4.00}{4.00} \Omega = \boxed{1.00 \Omega}.$$

下支线通过原点和 $(10.0 \text{ V}, 1.00 \text{ A})$, 可得

$$R_{\text{off}} = \boxed{10.0 \Omega}.$$

中间支线连接 $(4.00 \text{ V}, 4.00 \text{ A})$ 和 $(10.0 \text{ V}, 1.00 \text{ A})$, 因此

$$-\frac{1}{R_{\text{int}}} = \frac{1.00 - 4.00}{10.0 - 4.00} \frac{\text{A}}{\text{V}} = -0.500 \Omega^{-1}.$$

所以

$$\boxed{R_{\text{int}} = 2.00 \Omega}, \quad I_0 = 4.00 \text{ A} + \frac{4.00 \text{ V}}{2.00 \Omega} = \boxed{6.00 \text{ A}}.$$

这里 R_{int} 为正值; 中间支线的微分电阻为 $-R_{\text{int}}$ 。

A.2

用 U 表示 X 两端的电压。由基尔霍夫电压定律得

$$\mathcal{E} = RI + U + L \frac{dI}{dt}.$$

在稳态下,

$$\mathcal{E} = RI + U.$$

因此, 稳态对应于特性曲线与负载线 $I = (\mathcal{E} - U)/R$ 的交点。

等价地, 将特性表示为 $U(I)$, 有

$$\mathcal{E}(I) = \begin{cases} (R + 10.0 \Omega)I, & 0 \leq I \leq 1.00 \text{ A}, \\ 12.0 \text{ V} + (R - 2.00 \Omega)I, & 1.00 \text{ A} \leq I \leq 4.00 \text{ A}, \\ (R + 1.00 \Omega)I, & I \geq 4.00 \text{ A}. \end{cases}$$

当 $R = 3.00 \Omega$ 时, 三段均随 I 增大而增大。它们在 $\mathcal{E} = 13.0 \text{ V}$ 和 16.0 V 处连续相接。因此, 每个非负电源电压都恰好对应一个稳态。

当 $R = 1.00 \Omega$ 时, 中间一段随 I 增大而减小。其端点对应于

$$\mathcal{E}(1.00 \text{ A}) = 11.0 \text{ V}, \quad \mathcal{E}(4.00 \text{ A}) = 8.00 \text{ V}.$$

因此, 不同稳态的数目为

电源电压	稳态数目
$0 \leq \mathcal{E} < 8.00 \text{ V}$	1

电源电压	稳态数目
$\mathcal{E} = 8.00 \text{ V}$	2
$8.00 \text{ V} < \mathcal{E} < 11.0 \text{ V}$	3
$\mathcal{E} = 11.0 \text{ V}$	2
$\mathcal{E} > 11.0 \text{ V}$	1

在两个边界处，与两条支线的交点在特性曲线的折点处重合，计为一个状态。

A.3

当 $R = 3.00 \Omega$ 、 $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ 时，由于 $13.0 < 15.0 < 16.0 \text{ V}$ ，稳态位于中间支线上。因此

$$15.0 \text{ V} = 12.0 \text{ V} + (3.00 - 2.00) \Omega I_{\text{stationary}}.$$

所以

$$I_{\text{stationary}} = 3.00 \text{ A},$$

且

$$V_{\text{stationary}} = \mathcal{E} - RI_{\text{stationary}} = 6.00 \text{ V}.$$

A.4

令 $I = I_{\text{stationary}} + \delta I$ 。足够小的扰动使系统仍位于中间支线上，在该支线上有

$$U = R_{\text{int}}(I_0 - I).$$

代入基尔霍夫定律，并减去稳态方程，得

$$L \frac{d(\delta I)}{dt} = -(R - R_{\text{int}})\delta I.$$

于是

$$\delta I(t) = \delta I(0) \exp \left[-\frac{R - R_{\text{int}}}{L} t \right].$$

由于 $R - R_{\text{int}} = 1.00 \Omega > 0$ ，扰动衰减。因此，该稳态是稳定的，其弛豫时间为

$$\frac{L}{R - R_{\text{int}}} = \frac{1.00 \mu\text{H}}{1.00 \Omega} = 1.00 \mu\text{s}.$$

外接电阻的正微分电阻大于该元件负微分电阻的绝对值。

B.1

电容器与 X 两端的电压相同，均为 U 。由基尔霍夫电流定律得

$$\frac{\mathcal{E} - U}{R} = I_X + C \frac{dU}{dt},$$

即

$$C \frac{dU}{dt} = \frac{\mathcal{E} - U}{R} - I_X(U).$$

在电阻为 r 的支线上， $I_X = U/r$ ，因此

$$C \frac{dU}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) U.$$

在下支线上，电路弛豫所趋向的电压为

$$U_{\infty, \text{off}} = \frac{\mathcal{E}R_{\text{off}}}{R + R_{\text{off}}} = \frac{150}{13} \text{ V} = 11.538 \dots \text{ V}.$$

该值超过 $U_{\text{th}} = 10.0 \text{ V}$ 。因此，在循环的整个下支线阶段， $dU/dt > 0$ ：电容器从 4.00 充电至 10.0 V。

在 U_{th} 处，下支线终止。电容器两端的电压不能突变，因此 X 在 $I - V$ 图上沿竖直方向跳变：

$$(U, I_X) = (10.0 \text{ V}, 1.00 \text{ A}) \longrightarrow (10.0 \text{ V}, 10.0 \text{ A}).$$

在上支线上，相应的极限电压为

$$U_{\infty, \text{on}} = \frac{\mathcal{E}R_{\text{on}}}{R + R_{\text{on}}} = 3.75 \text{ V}.$$

该值低于 $U_{\text{h}} = 4.00 \text{ V}$ 。因此 $dU/dt < 0$ ：电容器从 10.0 放电至 4.00 V。在维持电压处，电流从 4.00 跳变至 0.400 A，跳变时电压同样保持不变。

因此，所要求的示意图依次包含以下各段：

区段	在 $I - V$ 平面中的运动
下支线	从 (4.00 V, 0.400 A) 向右并略向上移动至 (10.0 V, 1.00 A)
阈值处的跳变	竖直向上至 (10.0 V, 10.0 A)
上支线	向左下方移动至 (4.00 V, 4.00 A)
维持电压处的跳变	竖直向下至 (4.00 V, 0.400 A)

方向为**逆时针**。

在这一含电容器的电路中，中间支线上的平衡态是不稳定的。事实上，在 $U = 6.00 \text{ V}$ 附近，

$$C \frac{d(\delta U)}{dt} = \left(\frac{1}{R_{\text{int}}} - \frac{1}{R} \right) \delta U = \frac{\delta U}{6.00 \Omega}.$$

电压扰动会增大，因此中间支线不构成振荡循环中可持续的一段。

B.2

对于电阻为 r 的支线，定义

$$\theta_r = C \frac{Rr}{R + r}, \quad U_{\infty, r} = \frac{\mathcal{E}r}{R + r}.$$

B.1 中的微分方程变为

$$\frac{dU}{dt} = \frac{U_{\infty, r} - U}{\theta_r},$$

其解为

$$U(t) = U_{\infty, r} + (U(0) - U_{\infty, r})e^{-t/\theta_r}.$$

将下支线上的时间定义为 t_1 ，上支线上的时间定义为 t_2 。

从 U_{h} 充电至 U_{th} 时，

$$t_1 = \theta_{\text{off}} \ln \left(\frac{U_{\infty, \text{off}} - U_{\text{h}}}{U_{\infty, \text{off}} - U_{\text{th}}} \right).$$

这里

$$\theta_{\text{off}} = \frac{30}{13} \mu\text{s},$$

所以

$$t_1 = \frac{30}{13} \mu\text{s} \ln \left(\frac{150/13 - 4}{150/13 - 10} \right) = \frac{30}{13} \ln \frac{49}{10} \mu\text{s} = \boxed{3.67 \mu\text{s}}.$$

从 U_{th} 放电至 U_{h} 时,

$$t_2 = \theta_{\text{on}} \ln \left(\frac{U_{\text{th}} - U_{\infty, \text{on}}}{U_{\text{h}} - U_{\infty, \text{on}}} \right).$$

由于

$$\theta_{\text{on}} = 0.750 \mu\text{s},$$

得到

$$t_2 = 0.750 \mu\text{s} \ln \left(\frac{10.0 - 3.75}{4.00 - 3.75} \right) = \frac{3}{4} \ln 25 \mu\text{s} = \boxed{2.41 \mu\text{s}}.$$

忽略跳变所需的时间,

$$\boxed{T = t_1 + t_2 = 6.08 \mu\text{s}}.$$

B.3

在任一导电支线上, X 中耗散的瞬时功率为

$$p_X = UI_X = \frac{U^2}{r}.$$

忽略理想瞬时跳变过程中耗散的能量。利用上面推导的电压随时间变化的关系, 各支线上耗散的能量为

$$W_{\text{off}} = \frac{\theta_{\text{off}}}{R_{\text{off}}} \int_{U_{\text{h}}}^{U_{\text{th}}} \frac{U^2}{U_{\infty, \text{off}} - U} dU = 23.2 \mu\text{J},$$

以及

$$W_{\text{on}} = \frac{\theta_{\text{on}}}{R_{\text{on}}} \int_{U_{\text{h}}}^{U_{\text{th}}} \frac{U^2}{U - U_{\infty, \text{on}}} dU = 82.3 \mu\text{J}.$$

于是

$$P = \frac{W_{\text{off}} + W_{\text{on}}}{T} = \frac{105.5 \mu\text{J}}{6.0816 \mu\text{s}} = \boxed{17.3 \text{ W}}.$$

因此, 所要求的数量级估计为

$$\boxed{P \sim 10^1 \text{ W}}.$$

B.4

发射的基频波的波长为

$$\lambda = cT = (299\,792\,458 \text{ m s}^{-1})(6.08162 \times 10^{-6} \text{ s}) = 1.82322 \times 10^3 \text{ m}.$$

在理想天线模型中, 自由端为电流波节, 而为了高效激励, 馈电端应位于电流波腹。两端间距为四分之一波长的奇数倍:

$$s = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

最短的谐振长度为

$$s = \frac{\lambda}{4} = \frac{cT}{4} = 456 \text{ m}.$$

下一个可能值为 $3\lambda/4 = 1.37 \text{ km}$, 超过了限制。因此, 四分之一波长是在限制内允许的最优长度。

C.1

先求 $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$ 时的初始稳态。它位于下支线上:

$$I_r = \frac{\mathcal{E}'}{R + R_{\text{off}}} = \frac{12}{13} \text{ A} = \boxed{0.923 \text{ A}},$$

$$U_r = R_{\text{off}} I_r = \frac{120}{13} \text{ V} = \boxed{9.23 \text{ V}}.$$

令 $u = t - t_0$ 。脉冲到来前, $I_X = I_r$ 。当电源电压为 15.0 V , 且元件仍位于下支线上时,

$$I_X(u) = \frac{\mathcal{E}}{R + R_{\text{off}}} + \left(I_r - \frac{\mathcal{E}}{R + R_{\text{off}}} \right) e^{-u/\theta_{\text{off}}},$$

代入数值为

$$I_X(u) = \frac{15 - 3e^{-u/\theta_{\text{off}}}}{13} \text{ A}.$$

临界持续时间是这一电流达到 1.00 A 所需的时间, 对应于 $U = U_{\text{th}}$ 。

对于 $\tau < \tau_{\text{crit}}$, 图像呈现一个小幅连续隆起:

- 在 t_0 之前, 电流恒为 0.923 A 。
- 在脉冲期间, 电流按指数规律上升, 斜率逐渐减小, 但始终低于 1.00 A 。
- 在 $t_0 + \tau$ 时刻, 电流连续, 而其斜率改变符号。
- 随后, 电流按指数规律衰减回 0.923 A :

$$I_X(u) = I_r + [I_X(\tau) - I_r] e^{-(u-\tau)/\theta_{\text{off}}}, \quad u \geq \tau.$$

没有发生支线间的跳变。

对于 $\tau > \tau_{\text{crit}}$, 图像包含一个大尖峰:

1. 电流起初沿相同的缓慢上升过程, 从 0.923 升至 1.00 A 。
2. 在 $t = t_0 + \tau_{\text{crit}}$ 时, 电流从 1.00 竖直跳变至 10.0 A 。
3. 随后, 电流沿上支线减小。当电源电压仍为 15.0 V 时,

$$I_X(u) = 3.75 \text{ A} + 6.25 \text{ A} e^{-(u-\tau_{\text{crit}})/\theta_{\text{on}}}.$$

4. 达到 4.00 A 时, 电流竖直跳变至 0.400 A 。
5. 此后, 电流沿下支线上, 最终从下方趋近 0.923 A 。

若电源电压恢复为 12.0 V 时, 元件仍位于上支线上, 则该时刻电流保持连续, 但衰减变快。此后的表达式为

$$I_X(u) = 3.00 \text{ A} + [I_X(\tau) - 3.00 \text{ A}] e^{-(u-\tau)/\theta_{\text{on}}}.$$

渐近值 3.00 A 低于维持电流, 因此电流必然会达到 4.00 A 并使元件关断。若这一过程发生在 $u = u_d$, 则随后的恢复过程为

$$I_X(u) = I_r + (0.400 \text{ A} - I_r) e^{-(u-u_d)/\theta_{\text{off}}}.$$

对于较长的脉冲，从上支线到下支线的跳变可能在脉冲结束前发生。若电源电压保持为 15.0 V，则这一跳变发生在

$$u = \tau_{\text{crit}} + t_2 = 3.35 \mu\text{s}.$$

随后，电流在 15.0 V 电源作用下沿下支线恢复，直至 $u = \tau$ ，此后趋近于 12.0 V 电源下的静息态。电源电压的变化会使斜率改变，而不会使 I_X 瞬时改变。

在规定的脉冲期间，不可能产生第二个尖峰：若维持 15.0 V，第二次达到阈值的时刻为 $u = \tau_{\text{crit}} + T > T > \tau$ 。

C.2

在临界持续时间结束时，电容器恰好从 U_r 充电至 U_{th} ：

$$U_{\text{th}} = U_{\infty, \text{off}} + (U_r - U_{\infty, \text{off}})e^{-\tau_{\text{crit}}/\theta_{\text{off}}}.$$

解得

$$\tau_{\text{crit}} = \theta_{\text{off}} \ln \left(\frac{U_{\infty, \text{off}} - U_r}{U_{\infty, \text{off}} - U_{\text{th}}} \right).$$

用电路参数表示为

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{CRR_{\text{off}}}{R + R_{\text{off}}} \ln \left[\frac{(\mathcal{E} - \mathcal{E}')R_{\text{off}}}{\mathcal{E}R_{\text{off}} - (R + R_{\text{off}})U_{\text{th}}} \right].$$

代入数值，

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{30}{13} \mu\text{s} \ln \left(\frac{150/13 - 120/13}{150/13 - 10} \right) = \frac{30}{13} \ln \frac{3}{2} \mu\text{s}.$$

因此

$$\tau_{\text{crit}} = 0.936 \mu\text{s}.$$

C.3

给定脉冲满足

$$\tau = 1.00 \mu\text{s} > \tau_{\text{crit}} = 0.936 \mu\text{s}, \quad \tau < T.$$

因此，它会触发向上支线的跳变。电路完成一次大幅电流偏离与恢复过程，然后在 12.0 V 电源作用下返回原来的稳态。

是，该电路表现为神经元模拟器。

解答已与官方解答核对。

题目 3：大型强子对撞机

开始作答本题前，请先阅读另一个信封中的总说明。

本题讨论 CERN 的粒子加速器 LHC（大型强子对撞机）所涉及的物理。CERN 是世界上最大的粒子物理实验室，其主要目标是深入了解自然界的基本规律。两束粒子被加速到高能量，在强磁场的引导下沿加速器环运行，然后相互碰撞。质子并非沿加速器的圆周均匀分布，而是聚集成所谓的束团。碰撞产生的粒子由大型探测器观测。表 1 列出了 LHC 的一些参数。

LHC 环	
环的周长	26659 m
每束质子束的束团数	2808
每个束团的质子数	1.15×10^{11}
质子束	
质子的能量	7.00 TeV
质心能量	14.0 TeV

表 1: LHC 相关参数的典型数值。

粒子物理学家使用便于计算的能量、动量和质量单位：能量以电子伏特 [eV] 为单位。按照定义，1 eV 是一个带有元电荷 e 的粒子经过一伏特的电势差所获得的能量（ $1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ ）。

动量以 eV/c 为单位，质量以 eV/c^2 为单位，其中 c 为真空中的光速。由于 1 eV 是非常小的能量，粒子物理学家常使用 MeV ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$)、GeV ($1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$) 或 TeV ($1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$)。

部分 A 讨论质子或电子的加速。部分 B 讨论 CERN 的碰撞中所产生粒子的鉴别。

部分 A. LHC 加速器 (6 分)

加速：

假设质子已由电压 V 加速，其速度非常接近光速，并忽略辐射或与其他粒子碰撞所造成的任何能量损失。

A.1 — 0.7 分

求质子的最终速度 v 关于加速电压 V 和物理常量的精确表达式。

CERN 的一项未来实验设计计划使用 LHC 中的质子，使它们与能量为 60.0 GeV 的电子碰撞。

A.2 — 0.8 分

对于能量高、质量小的粒子，其最终速度 v 相对于光速的相对偏差 $\Delta = (c - v)/c$ 非常小。利用加速电压 V 和物理常量，求 Δ 的一阶近似式，并计算能量为 60.0 GeV 的电子的 Δ 。

现在回到 LHC 中的质子。假设束流管呈圆形。

A.3 — 1.0 分

推导使质子束保持在圆形轨道上所需的均匀磁感应强度 B 的表达式。表达式中只能包含质子的能量 E 、周长 L 、基本常量和数值。如果近似带来的影响小于最少有效数字位数所对应的精度，则可采用适当近似。

对于质子能量 $E = 7.00 \text{ TeV}$ ，计算磁感应强度 B ，忽略质子之间的相互作用。

辐射功率：

加速运动的带电粒子会以电磁波的形式辐射能量。以恒定角速度做圆周运动的带电粒子的辐射功率 P_{rad} 仅取决于其加速度 a 、电荷量 q 、光速 c 和真空介电常数 ϵ_0 。

A.4 — 1.0 分

利用量纲分析求辐射功率 P_{rad} 的表达式。

辐射功率的实际公式中含有因子 $1/(6\pi)$ ；此外，完整的相对论推导还给出一个额外的乘法因子 γ^4 ，其中 $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ 。

A.5 — 1.0 分

对于质子能量 $E = 7.00 \text{ TeV}$ ，计算 LHC 的总辐射功率 P_{tot} （注意表 1）。可以采用适当近似。

直线加速：

在 CERN，静止的质子在长度为 $d = 30.0 \text{ m}$ 的直线加速器中，经电势差 $V = 500 \text{ MV}$ 加速。假设电场均匀。直线加速器由两块极板组成，如图 1 所示。

A.6 — 1.5 分

求质子通过该电场所需的时间 T 。

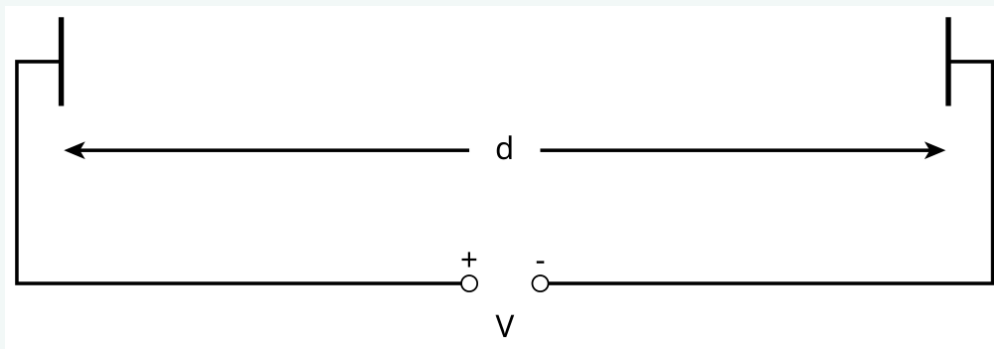


图 1：加速器模块示意图。

部分 B. 粒子鉴别（4 分）

飞行时间：

为了理解相互作用过程，鉴别碰撞产生的高能粒子十分重要。一种简单方法是：在所谓的飞行时间（ToF）探测器中，测量动量已知的粒子通过长度 l 所需的时间 (t)。表 2 列出了探测器中通常鉴别的粒子及其质量。

粒子	质量 $[\text{MeV}/c^2]$
氘核	1876
质子	938
带电 K 介子	494
带电 π 介子	140
电子	0.511

表 2：粒子及其质量。

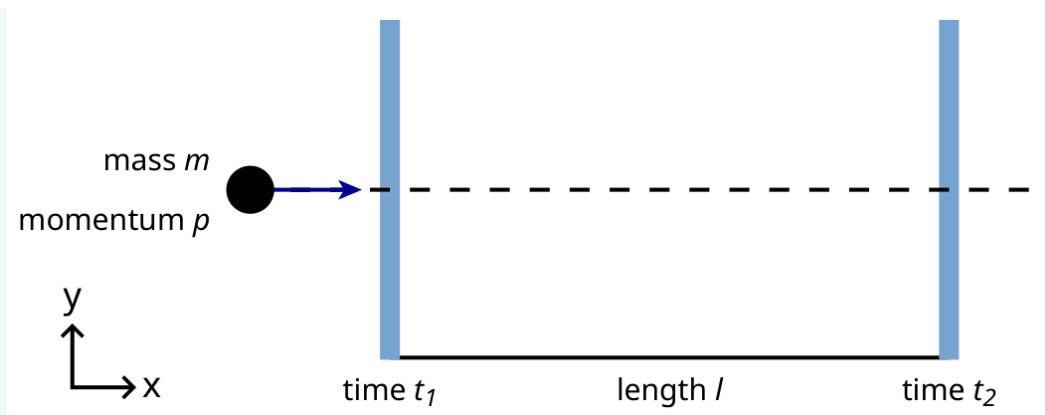


图 2：飞行时间探测器示意图。

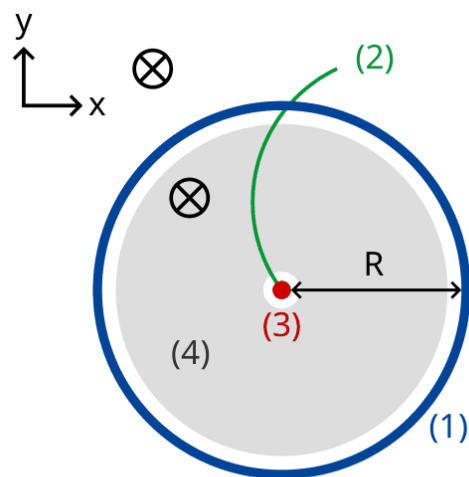
B.1 — 0.8 分

用动量 p 、飞行长度 l 和飞行时间 t 表示粒子的质量 m 。假设粒子带有元电荷 e ，在 ToF 探测器中以接近 c 的速度沿直线轨迹运动，且运动方向垂直于两个探测平面（见图 2）。

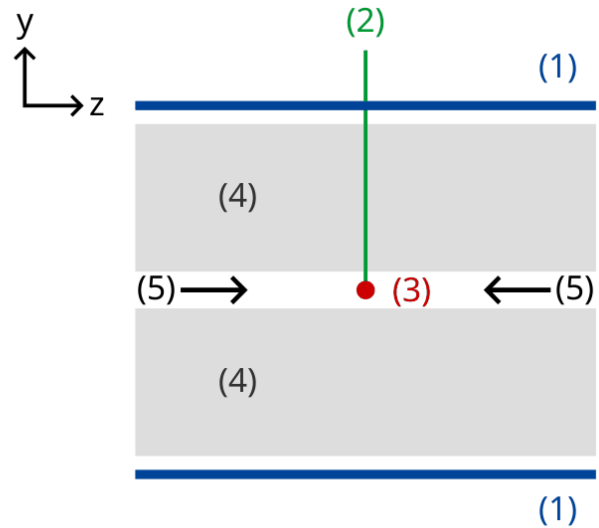
B.2 — 0.7 分

已测得带电 K 介子与带电 π 介子的动量均为 $1.00 \text{ GeV}/c$ ，计算能够可靠地区分二者的 ToF 探测器的最小长度 l 。为了实现良好的区分，要求飞行时间之差大于探测器时间分辨率的三倍。ToF 探测器的典型时间分辨率为 150 ps ($1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$)。

下文使用由径迹探测器和 ToF 探测器组成的两级探测器，鉴别典型 LHC 探测器中产生的粒子。图 3 给出了该装置在垂直于质子束的横截面和平行于质子束的纵截面内的示意图。两个探测器均为围绕相互作用区域的圆筒，束流从圆筒中央穿过。径迹探测器测量带电粒子在磁场中通过时的轨迹，磁场方向平行于质子束。由轨迹半径 r 可以确定粒子的横向动量 p_T 。由于碰撞时刻已知，ToF 探测器只需一个圆筒即可测量飞行时间（从碰撞到粒子在 ToF 圆筒中被探测到之间的时间）。该 ToF 圆筒位于径迹室的紧外侧。本题中，可假设碰撞产生的所有粒子都沿垂直于质子束的方向运动，也就是说，所产生的粒子沿质子束方向的动量为零。



transverse plane



cross section of the longitudinal view at the center of the tube along the beamline

- (1) - ToF tube
- (2) - track
- (3) - collision point
- (4) - tracking tube
- (5) - proton beams
- ⊗ - magnetic field

图 3：利用径迹室和 ToF 探测器进行粒子鉴别的实验装置。两个探测器均为围绕中央碰撞点的圆筒。左图：垂直于束流线的横截面图。右图：平行于束流线的纵截面图。粒子沿垂直于束流线的方向运动。

B.3 — 1.7 分

用磁感应强度 B 、ToF 圆筒的半径 R 、基本常量以及测得的轨迹半径 r 和飞行时间 t ，表示粒子的质量。

我们探测到了四个粒子，希望鉴别它们。径迹探测器中的磁感应强度为 $B = 0.500 \text{ T}$ 。ToF 圆筒的半径为 $R = 3.70 \text{ m}$ 。测量结果如下 ($1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$)：

粒子	轨迹半径 r [m]	飞行时间 t [ns]
A	5.10	20
B	2.94	14
C	6.06	18
D	2.31	25

B.4 — 0.8 分

通过计算质量，鉴别这四个粒子。

通用数据表

真空中的光速	c	$= 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
真空磁导率 (磁常量)	μ_0	$= 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$

真空介电常数（电常量）	ε_0	$= 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
元电荷	e	$= 1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
电子质量	m_e	$= 9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31} \text{ kg}$
		$= 0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
质子质量	m_p	$= 1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		$= 938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
中子质量	m_n	$= 1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		$= 939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
统一原子质量单位	u	$= 1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27} \text{ kg}$
里德伯常量	R_∞	$= 10\,973\,731.568\,508(65) \text{ m}^{-1}$
万有引力常量	G	$= 6.674\,08(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
重力加速度（苏黎世）	g	$= 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
普朗克常量	h	$= 6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
阿伏伽德罗常量	N_A	$= 6.022\,140\,857(74) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
摩尔气体常量	R	$= 8.314\,4598(48) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
摩尔质量常量	M_u	$= 1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
玻尔兹曼常量	k_B	$= 1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
斯特藩-玻尔兹曼常量	σ	$= 5.670\,367(13) \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

题目译自官方英文原文。

答案

- A.1: 对于从静止开始的加速,

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{m_p c^2}\right)^{-2}}.$$

- A.2:

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2} \simeq \frac{m^2 c^4}{2e^2 V^2}.$$

对于能量为 60.0 GeV 的电子,

$$\Delta = 3.63 \times 10^{-11}.$$

- A.3:

$$B = \frac{2\pi}{ecL} \sqrt{E^2 - m_p^2 c^4} \simeq \frac{2\pi E}{ecL} = 5.50 \text{ T}.$$

- A.4:

$$P_{\text{rad}} = C \frac{q^2 a^2}{\varepsilon_0 c^3},$$

其中无量纲常数 C 无法通过量纲分析确定。

- A.5: 计入两束质子束,

$$P_{\text{tot}} = 5.12 \text{ kW}.$$

- A.6:

$$T = \frac{d}{c} \sqrt{1 + \frac{2m_p c^2}{eV}} = 2.18 \times 10^{-7} \text{ s} = 0.218 \mu\text{s}.$$

- B.1:

$$m = \frac{p}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{l}\right)^2 - 1}.$$

- B.2: 临界长度为

$$l_{\text{crit}} = 1.27739 \dots \text{ m}.$$

题目给出的严格区分条件要求 $l > l_{\text{crit}}$, 因此实际所需的最小长度约为 $\boxed{1.28 \text{ m}}$ 。

- B.3:

$$m = \frac{eBr}{c} \sqrt{\left[\frac{ct}{2r \arcsin(R/(2r))}\right]^2 - 1}.$$

- B.4: A: 质子, $m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$; B: 带电 π 介子, $m \approx 0.14 \text{ GeV}/c^2$; C: 质子, $m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$; D: 带电 K 介子, $m \approx 0.50 \text{ GeV}/c^2$ 。

解答

A.1

对于从静止开始加速的质子, 由能量守恒得

$$eV = K = (\gamma - 1)m_p c^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

因此

$$\gamma = 1 + \frac{eV}{m_p c^2}.$$

解出 v , 得

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{m_p c^2}\right)^{-2}}.$$

在从静止开始加速且无能量损失的假设下, 这一表达式是精确的。

A.2

对于质量为 m 的粒子,

$$\Delta = 1 - \frac{v}{c} = 1 - \sqrt{1 - \gamma^{-2}}.$$

在高能情况下, $\gamma^{-2} \ll 1$ 。利用一阶展开

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2),$$

得到

$$\Delta = \frac{1}{2\gamma^2} + O(\gamma^{-4}).$$

用加速电压表示, 得

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{eV}{mc^2} \right)^{-2}.$$

当 $eV \gg mc^2$ 时, 可进一步化简为

$$\Delta \simeq \frac{m^2 c^4}{2e^2 V^2}.$$

等价地, 利用总能量 $E = \gamma mc^2$, 可写为

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2.$$

对于这些电子,

$$m_e c^2 = 0.5109989461 \text{ MeV}, \quad E = 60.0 \text{ GeV} = 6.00 \times 10^4 \text{ MeV},$$

因此

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{0.5109989461}{6.00 \times 10^4} \right)^2 = \boxed{3.63 \times 10^{-11}}.$$

A.3

设圆形轨道的半径为

$$\rho = \frac{L}{2\pi}.$$

磁场力改变相对论动量的方向, 但不改变其大小。对于匀速圆周运动,

$$\left| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right| = \frac{pv}{\rho}.$$

令其等于磁场力,

$$evB = \frac{pv}{\rho},$$

得到

$$B = \frac{p}{e\rho}.$$

相对论能量-动量关系为

$$E^2 = p^2 c^2 + m_p^2 c^4,$$

其中 E 为质子的总能量。因此,

$$B = \frac{2\pi}{ecL} \sqrt{E^2 - m_p^2 c^4}.$$

当 $E = 7.00 \text{ TeV}$ 时,

$$\frac{m_p c^2}{E} = \frac{938.2720813 \text{ MeV}}{7.00 \times 10^6 \text{ MeV}} \approx 1.34 \times 10^{-4}.$$

用 E 代替 pc 所对应的相对修正仅为

$$\frac{1}{2} \left(\frac{m_p c^2}{E} \right)^2 \approx 8.98 \times 10^{-9},$$

远小于给定能量的精度。因此

$$B \simeq \frac{2\pi E}{ecL}.$$

利用 $E = 7.00 \times 10^{12} e\text{J}$, 得

$$B \simeq \frac{2\pi(7.00 \times 10^{12})}{(299792458)(26659)} \text{ T} = \boxed{5.50 \text{ T}}.$$

A.4

设

$$P_{\text{rad}} = C q^\alpha a^\beta c^\delta \varepsilon_0^\eta,$$

其中 C 无量纲。以质量、长度、时间和电荷量作为基本量纲,

$$[P] = ML^2T^{-3}, \quad [q] = Q, \quad [a] = LT^{-2}, \quad [c] = LT^{-1},$$

且

$$[\varepsilon_0] = Q^2 T^2 M^{-1} L^{-3}.$$

比较各量纲的指数, 得

$$\begin{aligned} -\eta &= 1, & \alpha + 2\eta &= 0, \\ \beta + \delta - 3\eta &= 2, & -2\beta - \delta + 2\eta &= -3. \end{aligned}$$

因此

$$\eta = -1, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \delta = -3.$$

于是,

$$P_{\text{rad}} = C \frac{q^2 a^2}{\varepsilon_0 c^3}.$$

量纲分析能确定辐射功率对各物理量的依赖关系, 但不能确定 C 。

A.5

计入题目给出的数值因子和相对论修正后, 单个质子的辐射功率为

$$P_1 = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi \varepsilon_0 c^3}.$$

对于圆周运动,

$$a = \frac{v^2}{\rho} \simeq \frac{c^2}{\rho}, \quad \rho = \frac{L}{2\pi}, \quad \gamma = \frac{E}{m_p c^2}.$$

因此

$$P_1 \simeq \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0 \rho^2} \left(\frac{E}{m_p c^2} \right)^4.$$

数值上,

$$\rho = \frac{26659}{2\pi} \text{ m} = 4242.91 \text{ m}, \quad \gamma = \frac{7.00 \times 10^6}{938.2720813} = 7460.52.$$

代入得

$$P_1 \simeq 7.93 \times 10^{-12} \text{ W}.$$

共有两束质子束, 每束含 2808 个束团, 每个束团含 1.15×10^{11} 个质子。因此质子总数为

$$N = 2(2808)(1.15 \times 10^{11}) = 6.4584 \times 10^{14}.$$

将各质子的辐射功率相加, 得

$$P_{\text{tot}} = NP_1 \simeq 5.12467 \times 10^3 \text{ W}.$$

因此,

$$\boxed{P_{\text{tot}} = 5.12 \text{ kW}.}$$

A.6

均匀电场的场强大小为 V/d , 因此质子所受的力恒定:

$$F = \frac{eV}{d}.$$

相对论运动方程为

$$\frac{dp}{dt} = F.$$

由于质子从静止开始运动,

$$p_f = FT, \quad T = \frac{p_f}{F}.$$

质子通过加速器的过程中, 电场力所做的功为 eV , 因此最终总能量为

$$E_f = m_p c^2 + eV.$$

所以,

$$p_f c = \sqrt{E_f^2 - m_p^2 c^4} = \sqrt{(eV)^2 + 2eV m_p c^2}.$$

联立以上各式, 得

$$T = \frac{d}{eVc} \sqrt{(eV)^2 + 2eV m_p c^2},$$

或

$$\boxed{T = \frac{d}{c} \sqrt{1 + \frac{2m_p c^2}{eV}}}.$$

这里 $eV = 500 \text{ MeV}$ 。因此

$$T = \frac{30.0}{299792458} \sqrt{1 + \frac{2(938.2720813)}{500}} \text{ s} = \boxed{2.18 \times 10^{-7} \text{ s}}.$$

采用恒力而非恒加速度，便考虑到了速度变化的相对论效应。

B.1

对于直线路径，

$$v = \frac{l}{t}.$$

相对论动量满足

$$p = \gamma mv = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

解出 m ，得

$$m = \frac{p}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = p \sqrt{\frac{t^2}{l^2} - \frac{1}{c^2}}.$$

因此，

$$\boxed{m = \frac{p}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{l}\right)^2 - 1}}.$$

这一表达式是精确的；无需在 $v = c$ 附近展开。

B.2

由 B.1 的结果解出飞行时间，得

$$t(m) = \frac{l}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2}.$$

动量相同时，质量较大的 K 介子到达较晚。两者的时间差为

$$t_K - t_\pi = \frac{l}{c} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{m_K c}{p}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{m_\pi c}{p}\right)^2} \right].$$

要求满足的区分条件为

$$t_K - t_\pi > 3(150 \text{ ps}) = 450 \text{ ps}.$$

因此临界长度为

$$l_{\text{crit}} = \frac{3\sigma_t c}{\sqrt{1 + (m_K c/p)^2} - \sqrt{1 + (m_\pi c/p)^2}}, \quad \sigma_t = 150 \text{ ps}.$$

代入 $p = 1000 \text{ MeV}/c$ ，得

$$l_{\text{crit}} = \frac{(450 \times 10^{-12})(299792458)}{\sqrt{1 + (494/1000)^2} - \sqrt{1 + (140/1000)^2}} \text{ m}.$$

无量纲分母的数值为 0.10561117，得到

$$\boxed{l_{\text{crit}} = 1.27739 \dots \text{ m}.$$

因此 l 必须大于这一临界值；所需长度约为 $\boxed{1.28 \text{ m}}$ 。这里使用精确的相对论表达式，是因为 K 介子的质量相对于 p/c 不可忽略。

B.3

由于粒子沿束流线方向的动量为零，其全部动量都垂直于磁场。与 A.3 相同，

$$p = eBr.$$

磁场不做功，因此粒子沿圆形轨迹运动时速率恒定。

设 θ 为粒子首次到达 ToF 圆筒之前，绕轨迹圆心扫过的角度。碰撞点与探测点之间的距离为圆筒半径 R 。这两点也是半径为 r 的轨迹圆上一条弦的两个端点。因此，

$$R = 2r \sin \frac{\theta}{2}.$$

对于首次到达圆筒的情况，

$$\theta = 2 \arcsin \frac{R}{2r},$$

飞行路径长度为

$$s = r\theta = 2r \arcsin \frac{R}{2r}.$$

这要求 $r \geq R/2$ ；半径更小的轨道永远无法到达圆筒。

速率为

$$v = \frac{s}{t}.$$

在 B.1 的质量公式中使用实际路径长度 s ，并结合 $p = eBr$ ，得

$$m = \frac{eBr}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{s}\right)^2 - 1}.$$

于是，

$$\boxed{m = \frac{eBr}{c} \sqrt{\left[\frac{ct}{2r \arcsin(R/(2r))}\right]^2 - 1}.}$$

反正弦的值以弧度表示。

B.4

对每个粒子，使用

$$s = 2r \arcsin \frac{3.70 \text{ m}}{2r}, \quad p = e(0.500 \text{ T})r,$$

以及

$$m = \frac{p}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{s}\right)^2 - 1}.$$

动量的单位换算可直接由 $p = eBr$ 得到：

$$p [\text{GeV}/c] = 0.299792458 B [\text{T}] r [\text{m}].$$

为将计算所得质量与表 2 比较，保留额外位数，得到：

粒子	路径长度 s [m]	动量 p [MeV/c]	计算所得质量 [MeV/c ²]	鉴别结果
A	3.7864	764.47	938.65	质子
B	4.0019	440.69	139.32	带电 π 介子
C	3.7600	908.37	935.10	质子
D	4.2908	346.26	495.90	带电 K 介子

与表列质量的微小差异符合测量值经过舍入的情况。取合理精度，

$A :$	$m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$	质子,
$B :$	$m \approx 0.14 \text{ GeV}/c^2$	带电 π 介子,
$C :$	$m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$	质子,
$D :$	$m \approx 0.50 \text{ GeV}/c^2$	带电 K 介子.

解答已与官方解答核对。