

IPhO 2016

Teorik sorular ve çözümler · Zürih, İsviçre · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2016/

Soru 1: İki Mekanik Problemi

Bu soruya başlamadan önce lütfen ayrı zarftaki genel yönergeleri okuyunuz.

Bölüm A. Gizli Disk (3.5 puan)

Yarıçapı r_1 ve kalınlığı h_1 olan dolu bir ahşap silindir ele alıyoruz. Ahşap silindirin içinde bir yerde, ahşabın yerine yarıçapı r_2 ve kalınlığı h_2 olan metal bir disk yerleştirilmiştir. Metal disk, simetri eksenini B , ahşap silindirin simetri eksenine S 'ye paralel olacak ve ahşap silindirin üst ve alt yüzeylerine eşit uzaklıkta bulunacak şekilde yerleştirilmiştir. S ile B arasındaki uzaklığı d ile gösteriyoruz. Ahşabın yoğunluğu ρ_1 , metalin yoğunluğu ise $\rho_2 > \rho_1$ 'dir. Ahşap silindir ile içindeki metal diskin toplam kütlesi M 'dir.

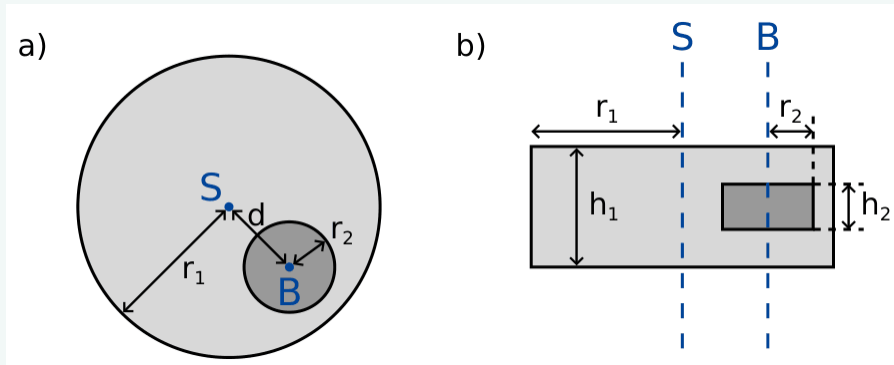
Bu soruda ahşap silindiri, sağa ve sola serbestçe yuvarlanabilecek şekilde yere koyuyoruz. Düzenegin yandan ve üstten görünüşleri için Şekil 1'e bakınız.

Bu sorunun amacı, metal diskin boyutlarını ve konumunu belirlemektir.

Aşağıda, sonucu bilinen nicelikler cinsinden ifade etmeniz istendiğinde, şu niceliklerin bilindiğini her zaman varsayabilirsiniz:

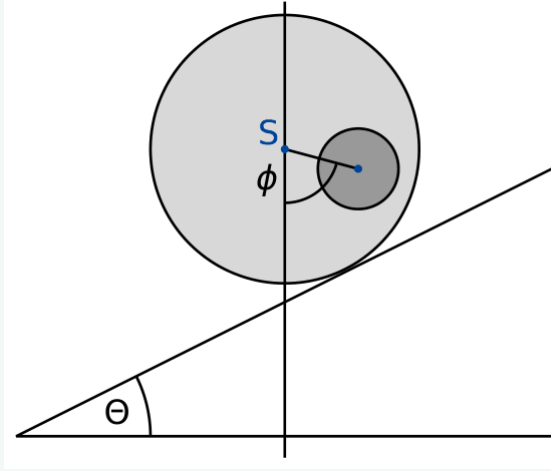
$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

Amaç, dolaylı ölçümler yoluyla r_2 , h_2 ve d 'yi belirlemektir.



Şekil 1: a) yandan görünüş b) üstten görünüş

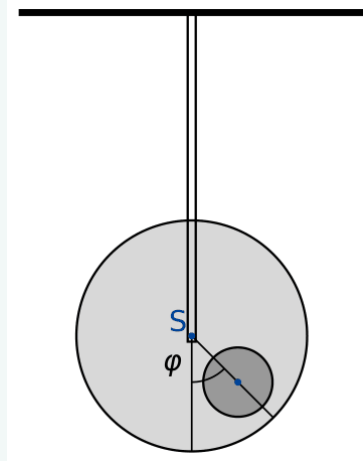
Tüm sistemin kütle merkezi C ile ahşap silindirin simetri eksenine S arasındaki uzaklığı b ile gösteriyoruz. Bu uzaklığı belirlemek için şu deneyi tasarlıyoruz: Ahşap silindiri, kararlı dengede olacak şekilde yatay bir taban üzerine yerleştiriyoruz. Şimdi tabanı yavaşça Θ açısı kadar eğelim (bkz. Şekil 2). Statik sürtünme sayesinde ahşap silindir kaymadan serbestçe yuvarlanabilir. Silindir eğim boyunca biraz aşağı yuvarlanacak, ancak daha sonra ölçtüğümüz ϕ açısı kadar dönmüş olarak kararlı bir denge durumunda duracaktır.



Şekil 2: Eğik bir taban üzerindeki silindir.

A.1 — 0.8 puan

b için, (1)'deki niceliklerin, ϕ açısının ve tabanın eğim açısı Θ 'nın fonksiyonu olan bir ifade bulunuz. Bundan sonra b 'nin değerinin bilindiğini varsayabiliriz.



Şekil 3: Asılı sistem.

Şimdi sistemin simetri eksenini S 'ye göre eylemsizlik momenti I_S 'yi ölçmek istiyoruz. Bu amaçla ahşap silindiri, simetri ekseninden rijit bir çubuğa asıyoruz. Ardından denge konumundan küçük bir φ açısı kadar döndürüp serbest bırakıyoruz. Düzenek için Şekil 3'e bakınız. φ 'nin, periyodu T olan periyodik bir hareket yaptığını gözlemliyoruz.

A.2 — 0.5 puan

φ için hareket denklemini bulunuz. Sistemin simetri eksenini S etrafındaki eylemsizlik momenti I_S 'yi, T , b ve (1)'deki bilinen nicelikler cinsinden ifade ediniz. Sistemi denge konumundan yalnızca çok az saptırdığımızı ve bu nedenle φ 'nin her zaman çok küçük olduğunu varsayabilirsiniz.

Şimdi A.1 ve A.2 sorularındaki ölçümlerden yararlanarak ahşap silindirin içindeki metal diskin geometrisini ve konumunu belirlemek istiyoruz.

A.3 — 0.4 puan

d uzaklığı için, b ve (1)'deki niceliklerin fonksiyonu olan bir ifade bulunuz. A.5 alt sorusunda hesaplanacakları için, ifadenize r_2 ve h_2 'yi de değişken olarak dahil edebilirsiniz.

A.4 — 0.7 puan

Eylemsizlik momenti I_S için, b ve (1)'deki bilinen nicelikler cinsinden bir ifade bulunuz. **A.5** alt sorusunda hesaplanacakları için, ifadenize r_2 ve h_2 'yi de değişken olarak dahil edebilirsiniz.

A.5 — 1.1 puan

Yukarıdaki tüm sonuçları kullanarak h_2 ve r_2 için, b , T ve (1)'deki bilinen nicelikler cinsinden birer ifade yazınız. h_2 'yi r_2 'nin bir fonksiyonu olarak ifade edebilirsiniz.

Bölüm B. Dönen Uzay İstasyonu (6.5 puan)

Alice, bir uzay istasyonunda yaşayan bir astronottur. Uzay istasyonu, kendi eksenini etrafında dönerek astronotlar için yapay yerçekimi sağlayan, yarıçapı R olan devasa bir tekerlektir. Astronotlar tekerleğin çemberinin iç yüzeyinde yaşarlar. Uzay istasyonunun kütleçekim etkisi ve zeminin eğriliği ihmal edilebilir.

B.1 — 0.5 puan

Astronotların Dünya yüzeyindekiyle aynı g_E yerçekimi ivmesini hissetmeleri için uzay istasyonu hangi ω_{ss} açısal frekansıyla dönmelidir?

Alice ile astronot arkadaşı Bob tartışırlar. Bob, aslında bir uzay istasyonunda yaşadıklarına inanmaz ve Dünya'da olduklarını iddia eder. Alice, fizikten yararlanarak Bob'a dönen bir uzay istasyonunda yaşadıklarını kanıtlamak ister. Bu amaçla yay sabiti k olan bir yaya m kütleli bir cisim bağlar ve salınmasını sağlar. Cisim yalnızca düşey doğrultuda salınır ve yatay doğrultuda hareket edemez.

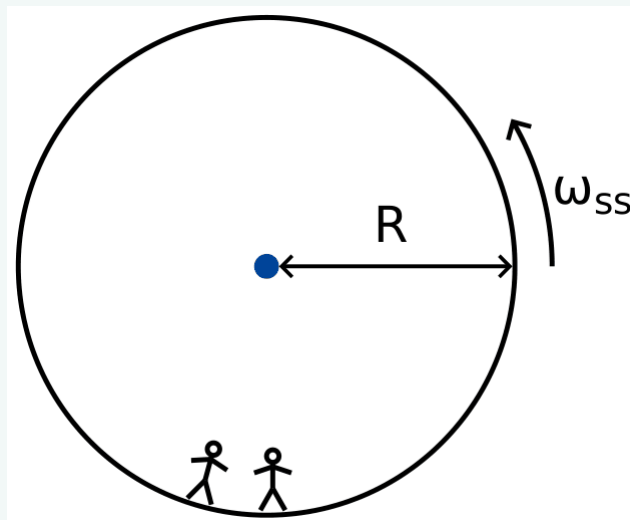
B.2 — 0.2 puan

Dünya'da yerçekimi ivmesinin sabit ve g_E olduğunu varsayarsak, Dünya'daki bir kişinin ölçeceği açısal salınım frekansı ω_E ne olurdu?

B.3 — 0.6 puan

Alice uzay istasyonunda hangi ω açısal salınım frekansını ölçer?

Alice, deneyinin dönen bir uzay istasyonunda olduklarını kanıtladığına emindir. Bob ise şüpheli kalır. Dünya yüzeyinin üzerinde yerçekiminin değişimi dikkate alındığında benzer bir etkinin ortaya çıkacağını iddia eder. Aşağıdaki sorularda Bob'un haklı olup olmadığını araştırıyoruz.



Şekil 4: Uzay istasyonu

B.4 — 0.8 puan

Dünya yüzeyinin üzerindeki küçük h yükseklikleri için yerçekimi ivmesi $g_E(h)$ 'nin ifadesini türetiniz ve salınan cismin salınım frekansı $\tilde{\omega}_E$ 'yi hesaplayınız (doğrusal yaklaşım yeterlidir). Dünya'nın yarıçapını R_E ile gösteriniz. Dünya'nın dönmesini ihmal ediniz.

Gerçekten de Alice, bu uzay istasyonunda yaylı sarkacın Bob'un öngördüğü frekansta salındığını bulur.

B.5 — 0.3 puan

Uzay istasyonunun yarıçapı R hangi değeri aldığında salınım frekansı ω , Dünya'daki salınım frekansı $\tilde{\omega}_E$ ile aynı olur? Cevabınızı R_E cinsinden ifade ediniz.

Bob'un inatçılığından bunalan Alice, haklı olduğunu kanıtlamak için bir deney düşünür. Bu amaçla uzay istasyonunun zemininden yüksekliği H olan bir kuleye tırmanır ve bir cisim bırakır. Bu deney hem dönen referans sisteminde hem de eylemsiz bir referans sisteminde anlaşılabilir.

Düzgün dönen bir referans sisteminde astronotlar, Coriolis kuvveti adı verilen $\vec{F}_C$ sanal kuvvetini hissederler. Sabit $\vec{\omega}_{ss}$ açısal frekansıyla dönen bir referans sisteminde $\vec{v}$ hızıyla hareket eden m kütleli bir cisme etki eden $\vec{F}_C$ kuvveti şu şekilde verilir:

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss}. \quad (2)$$

Skaler nicelikler cinsinden şu ifadeyi kullanabilirsiniz:

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi, \quad (3)$$

Burada ϕ , hız ile dönme eksenini arasındaki açıdır. Kuvvet hem v hızına hem de dönme eksenine diktir. Kuvvetin işareti sağ el kuralıyla belirlenebilir, ancak aşağıdaki sorularda bunu serbestçe seçebilirsiniz.

B.6 — 1.1 puan

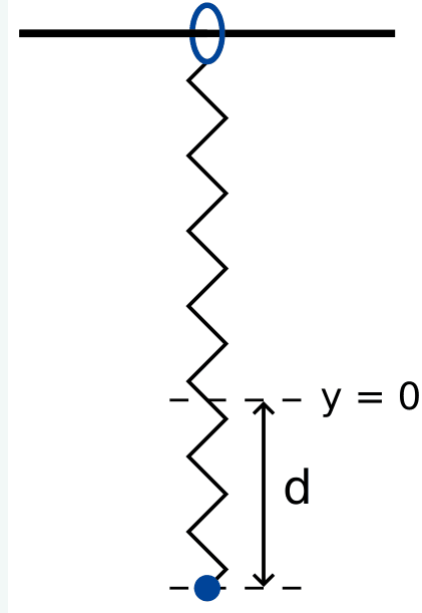
Cismin zemine çarptığı andaki yatay hızı v_x 'i ve yatay yer değiştirmesi d_x 'i (kulenin tabanına göre, kuleye dik doğrultuda) hesaplayınız. Kulenin yüksekliği H 'nin küçük olduğunu ve dolayısıyla astronotların ölçtüğü ivmenin düşüş boyunca sabit kaldığını varsayabilirsiniz. Ayrıca $d_x \ll H$ olduğunu da varsayabilirsiniz.

İyi bir sonuç elde etmek için Alice, bu deneyi öncekinden çok daha yüksek bir kuleden yapmaya karar verir. Şaşırtıcı biçimde cisim, kulenin tabanında zemine çarpar; dolayısıyla $d_x = 0$ olur.

B.7 — 1.3 puan

$d_x = 0$ olmasının mümkün olduğu kule yüksekliği için bir alt sınır bulunuz.

Alice, Bob'u ikna etmek için son bir girişimde bulunmaya isteklidir. Coriolis kuvvetinin etkisini göstermek için yaylı osilatörünü kullanmak ister. Bu amaçla ilk düzeneği değiştirir: Yayını, yatay bir çubuk üzerinde x doğrultusunda sürtünmesiz olarak serbestçe kayabilen bir halkaya bağlar. Yayın kendisi y doğrultusunda salınır. Çubuk zemine paralel ve uzay istasyonunun dönme eksenine diktir. Böylece xy düzlemi dönme eksenine dik olur ve y doğrultusu doğrudan istasyonun dönme merkezine yönelir.



Şekil 5: Düzenek.

B.8 — 1.7 puan

Alice, cismi $x = 0$, $y = 0$ denge noktasından aşağıya doğru d kadar çeker ve ardından serbest bırakır (bkz. Şekil 5).

- $x(t)$ ve $y(t)$ için cebirsel birer ifade veriniz. $\omega_{ss}d$ 'nin küçük olduğunu varsayabilir ve y eksenini boyunca harekette Coriolis kuvvetini ihmal edebilirsiniz.
- Genlik gibi tüm önemli özellikleri işaretleyerek $(x(t), y(t))$ yörüngesini çiziniz.

Alice ve Bob tartışmaya devam ederler.

Genel Veri Tablosu

Işığın boşluktaki hızı	c	$= 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Boşluğun manyetik geçirgenliği (manyetik sabit)	μ_0	$= 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Boşluğun elektriksel geçirgenliği (elektrik sabiti)	ε_0	$= 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Temel yük	e	$= 1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
Elektronun kütlesi	m_e	$= 9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31} \text{ kg}$
		$= 0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Protonun kütlesi	m_p	$= 1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		$= 938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Nötronun kütlesi	m_n	$= 1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		$= 939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Birleşik atomik kütle birimi	u	$= 1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Rydberg sabiti	R_∞	$= 10\,973\,731.568\,508(65) \text{ m}^{-1}$

Evrensel kütleçekim sabiti	G	$= 6.674\,08(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Yerçekimi ivmesi (Zürih'te)	g	$= 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Planck sabiti	h	$= 6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Avogadro sayısı	N_A	$= 6.022\,140\,857(74) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Molar gaz sabiti	R	$= 8.314\,4598(48) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Molar kütle sabiti	M_u	$= 1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Boltzmann sabiti	k_B	$= 1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Stefan-Boltzmann sabiti	σ	$= 5.670\,367(13) \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Bölüm A için, tamamen ahşaptan oluşan bir silindirin kütesini ve metalin eklediği fazla kütleyi tanımlayalım:

$$m_0 = \pi \rho_1 r_1^2 h_1, \quad \Delta m = M - m_0 = \pi(\rho_2 - \rho_1) r_2^2 h_2.$$

Bölüm B için $\Omega = \omega_{ss}$ yazalım; $+x$ yönünü istasyonun dönme yönünde, $+y$ yönünü ise merkezine doğru seçelim.

• A.1

$$b = \frac{r_1 \sin \Theta}{\sin \phi}.$$

• A.2

$$I_S \ddot{\varphi} = -Mgb \sin \varphi \simeq -Mgb\varphi, \quad I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2}.$$

• A.3

$$d = \frac{Mb}{\Delta m} = \frac{Mb}{\pi(\rho_2 - \rho_1) r_2^2 h_2}.$$

• A.4

$$I_S = \frac{1}{2} m_0 r_1^2 + \frac{1}{2} \Delta m r_2^2 + \frac{M^2 b^2}{\Delta m}.$$

• A.5

$$r_2 = \sqrt{\frac{MgbT^2}{2\pi^2 \Delta m} - \frac{m_0 r_1^2}{\Delta m} - \frac{2M^2 b^2}{(\Delta m)^2}}, \quad h_2 = \frac{\Delta m}{\pi(\rho_2 - \rho_1) r_2^2}.$$

• B.1

$$\omega_{ss} = \sqrt{\frac{g_E}{R}}.$$

• B.2

$$\omega_E = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

• B.3

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g_E}{R}}.$$

• B.4

$$g_E(h) = \frac{g_E}{(1 + h/R_E)^2} \simeq g_E \left(1 - \frac{2h}{R_E}\right), \quad \tilde{\omega}_E = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}}.$$

• B.5

$$R = \frac{R_E}{2}.$$

• B.6

$$v_x = -2\Omega H, \quad d_x = -\frac{2}{3}\Omega H \sqrt{\frac{2H}{g_E}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}H \sqrt{\frac{H}{R}}.$$

Her ikisi de istasyonun dönme yönüne zıttır.

• B.7 Kesin olarak kanıtlanmış bir alt sınır şudur:

$$H > R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2}}\right) \simeq 0.8428R.$$

Kulenin tabanına ilk tam dönüş şu yükseklikte gerçekleşir:

$$H_{\min} \simeq 0.8716R.$$

• B.8 $a = 2\Omega d/\omega$ olmak üzere,

$$x(t) = a[\omega t - \sin(\omega t)], \quad y(t) = -d \cos(\omega t).$$

Yörünge, sivri uçları $(2\pi na, -d)$, üst dönüş noktaları $((2n + 1)\pi a, d)$ ve yatay aralıkları $2\pi a$ olan ardışık sikloid yaylarından oluşur. Düşey genlik d 'dir.

Çözüm

A.1

Eğik tabanla temas noktası P olsun. Normal kuvvet ve statik sürtünme kuvvetinin ikisi de P 'de etki eder; dolayısıyla P 'ye göre tork oluşturmazlar. Bu nedenle statik denge, kütle merkezi C 'den geçen düşey doğrunun P 'den geçmesini gerektirir.

Kütle merkezi SB doğrultusu üzerindedir. Şekil 2'de gösterilen açılar kullanıldığında, P ve C 'nin S 'ye göre yatay yer değiştirmeleri sırasıyla şöyledir:

$$x_P - x_S = r_1 \sin \Theta, \quad x_C - x_S = b \sin \phi.$$

Dolayısıyla,

$$Mg(b \sin \phi - r_1 \sin \Theta) = 0,$$

ve buradan

$$b = \frac{r_1 \sin \Theta}{\sin \phi}.$$

Kararlı denge, $\cos \phi > 0$ olan dala karşılık gelir. Özellikle, eğim $r_1 \sin \Theta < b$ olacak kadar küçük olmalıdır; eşitlik, geri çağırıcı etkinin bulunmadığı sınır durumuna karşılık gelir.

A.2

Askı, S eksenini sabit tutar. Yerçekimi, bu eksenenden b uzaklıktaki C noktasında etki eder ve şu geri çağırıcı torku oluşturur:

$$\tau_S = -Mgb \sin \varphi.$$

Dolayısıyla dönme hareketinin denklemi şöyledir:

$$I_S \ddot{\varphi} = -Mgb \sin \varphi.$$

$|\varphi| \ll 1$ için $\sin \varphi \simeq \varphi$ yaklaşımını kullanalım:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgb}{I_S} \varphi = 0.$$

Bu, aşağıdaki bağıntıyı sağlayan bir basit harmonik harekettir:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{Mgb}{I_S}.$$

Böylece

$$I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2},$$

burada verilen yerçekimi ivmesi $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ 'dir.

A.3

Gerçek yoğunluk dağılımını şu iki bileşenin toplamı olarak gösterelim:

1. Merkezi S üzerinde olan, kütlesi

$$m_0 = \pi \rho_1 r_1^2 h_1,$$

olan tam bir ahşap silindir.

2. Merkezi B üzerinde olan, yoğunluğu $\rho_2 - \rho_1$ ve kütlesi

$$\Delta m = \pi(\rho_2 - \rho_1) r_2^2 h_2 = M - m_0.$$

olan ek bir disk.

Bu gösterim, metal yerleştirilmeden önce çıkarılan ahşabı hesaba katar.

S 'ye göre kütlenin birinci momentini alırsak,

$$Mb = m_0(0) + \Delta m d.$$

Buradan şu sonuç elde edilir:

$$d = \frac{Mb}{\Delta m} = \frac{Mb}{M - \pi\rho_1 r_1^2 h_1} = \frac{Mb}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2 h_2}.$$

A.4

Tam ahşap silindirin katkısı şöyledir:

$$I_{\text{wood}} = \frac{1}{2}m_0 r_1^2.$$

Ek diskin kendi simetri eksenine göre eylemsizlik momenti $\frac{1}{2}\Delta m r_2^2$ 'dir. Paralel eksen teoremine göre, S' 'ye göre katkısı şöyledir:

$$I_{\text{additional}} = \frac{1}{2}\Delta m r_2^2 + \Delta m d^2.$$

Dolayısıyla

$$I_S = \frac{1}{2}m_0 r_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m r_2^2 + \Delta m d^2.$$

$d = Mb/\Delta m$ yerine yazıldığında şu sonuç elde edilir:

$$I_S = \frac{1}{2}m_0 r_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m r_2^2 + \frac{M^2 b^2}{\Delta m}.$$

A.5

A.2 ve A.4'teki I_S ifadelerini eşitlersek,

$$\frac{MgbT^2}{4\pi^2} = \frac{1}{2}m_0 r_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m r_2^2 + \frac{M^2 b^2}{\Delta m}.$$

r_2^2 için çözersek,

$$r_2^2 = \frac{MgbT^2}{2\pi^2 \Delta m} - \frac{m_0 r_1^2}{\Delta m} - \frac{2M^2 b^2}{(\Delta m)^2}.$$

Pozitif kökü alırsak,

$$r_2 = \sqrt{\frac{MgbT^2}{2\pi^2 \Delta m} - \frac{m_0 r_1^2}{\Delta m} - \frac{2M^2 b^2}{(\Delta m)^2}}.$$

Ardından kütle bağıntısı kalınlığı belirler:

$$h_2 = \frac{\Delta m}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2}.$$

Burada $m_0 = \pi\rho_1 r_1^2 h_1$ ve $\Delta m = M - m_0$ olduğundan, sağ taraftaki tüm nicelikler bilinmektedir veya ölçülmüştür. Fiziksel olarak tutarlı ölçümler, kök içindeki ifadenin pozitif olmasını ve $d + r_2 \leq r_1$ ile $h_2 \leq h_1$ koşullarını sağlamalıdır.

B.1

Çembere göre durgun olan bir astronot, yarıçapı R olan bir çember üzerinde hareket eder. Gerekli merkezci ivme şöyledir:

$$a_c = \omega_{ss}^2 R.$$

Bu ivmeyi sağlayan normal kuvvet, astronotun ağırlığı olarak hissedilir. İvmenin Dünya'dakiyle aynı olması şu koşulu gerektirir:

$$\omega_{ss}^2 R = g_E.$$

Böylece

$$\omega_{ss} = \sqrt{\frac{g_E}{R}}.$$

Aşağıda $\Omega = \omega_{ss}$ yazalım.

B.2

y , yayın denge konumundan yukarı doğru yer değiştirmeyi gösterebilir. Sabit yerçekimi, denge konumundaki uzamayı değiştirir; ancak denklem denge konumuna göre yazıldığında sabit yerçekimi kuvveti sadeleşir:

$$m\ddot{y} = -ky.$$

Dolayısıyla

$$\omega_E = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

B.3

Dönen referans sistemini kullanalım ve y yönünü denge konumundan radyal olarak içeriye doğru seçelim. Denge konumunun yarıçapı r_0 ise anlık yarıçap $r_0 - y$ 'dir.

Merkezkaç kuvveti dışarı doğru etki eder ve büyüklüğü şöyledir:

$$m\Omega^2(r_0 - y).$$

Cisim içeriye doğru y kadar hareket ettiğinde, içeriye doğru olan yay kuvveti ky kadar azalır. Dengedeki değeri F_0 , şu koşulu sağlar:

$$F_0 = m\Omega^2 r_0.$$

Dolayısıyla içeriye doğru hareket denklemi şöyledir:

$$m\ddot{y} = (F_0 - ky) - m\Omega^2(r_0 - y) = -(k - m\Omega^2)y.$$

Yatay harekete getirilen kısıtlama, Coriolis kuvvetini dengeler; dolayısıyla bu radyal denklemi değiştirmez. Buradan

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g_E}{R}}.$$

Salınımların gerçekleşmesi için $k/m > \Omega^2$ olmalıdır.

B.4

Dünya'nın kütlesi M_E olsun. Newton'un kütleçekim yasası şu ifadeyi verir:

$$g_E(h) = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2}.$$

$g_E = GM_E/R_E^2$ olduğundan,

$$g_E(h) = g_E \left(1 + \frac{h}{R_E} \right)^{-2}.$$

$h \ll R_E$ için birinci mertebeden açılım şöyledir:

$$g_E(h) \simeq g_E \left(1 - \frac{2h}{R_E} \right).$$

Denge yüksekliği h_0 , denge konumundan yukarı doğru yer değiştirme ise y olsun. Dengedeki kuvvet dengesi çıkarıldıktan sonra,

$$m\ddot{y} = -ky - m[g_E(h_0 + y) - g_E(h_0)].$$

Doğrusal yaklaşım içinde,

$$g_E(h_0 + y) - g_E(h_0) \simeq -\frac{2g_E}{R_E}y.$$

Böylece

$$m\ddot{y} = -\left(k - \frac{2mg_E}{R_E}\right)y,$$

ve buradan

$$\tilde{\omega}_E = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}}.$$

Yerçekimi yükseklikle azalır; bu nedenle yukarı doğru bir yer değiştirme, aşağı yönlü yerçekimi kuvvetini azaltır. Bu durum, net geri çağırıcı kuvveti zayıflatır ve frekansı düşürür.

B.5

B.3 ve B.4'teki frekansların karelerini eşitlersek,

$$\frac{k}{m} - \frac{g_E}{R} = \frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}.$$

Dolayısıyla

$$R = \frac{R_E}{2}.$$

B.6

$+x$ yönünü istasyonun dönme yönünde, $+y$ yönünü ise içeriye, merkezine doğru seçelim. Bu seçime göre Coriolis ivmesinin bileşenleri şöyledir:

$$a_{C,x} = 2\Omega\dot{y}, \quad a_{C,y} = -2\Omega\dot{x}.$$

Kısa bir kule için aşağı yönlü ivmeyi sabit $g_E = \Omega^2 R$ değeriyle yaklaşık olarak ifade edelim. Yatay sapmanın küçük olması, bunun düşey düşüş üzerindeki geri etkisini ihmal etmemize olanak verir. Cisim durgun hâlden bırakıldığında,

$$y(t) = H - \frac{1}{2}g_E t^2, \quad \dot{y} = -g_E t.$$

Çarpma zamanı şöyledir:

$$t_f = \sqrt{\frac{2H}{g_E}}.$$

Yatay hareket denklemi şu hâli alır:

$$\ddot{x} = 2\Omega\dot{y} = -2\Omega g_E t.$$

$x(0) = \dot{x}(0) = 0$ kullanılarak integral alındığında,

$$\dot{x} = -\Omega g_E t^2, \quad x = -\frac{1}{3}\Omega g_E t^3.$$

Çarpma anında,

$$v_x = -\Omega g_E t_f^2 = -2\Omega H,$$

ve

$$d_x = -\frac{1}{3}\Omega g_E t_f^3 = -\frac{2}{3}\Omega H \sqrt{\frac{2H}{g_E}}.$$

$\Omega^2 = g_E/R$ kullanıldığında,

$$d_x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}H \sqrt{\frac{H}{R}}.$$

Cisim, kulenin arkasına, dönme yönünün tersindeki bir noktaya düşer. Tutarlılık koşulu şöyledir:

$$\frac{|d_x|}{H} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{H}{R}} \ll 1,$$

bu da $H \ll R$ için beklendiği gibidir.

B.7

Yüksek bir kule için eylemsiz bir referans sistemi ve tam dairesel geometriyi kullanalım. B.6'daki sabit ivme yaklaşımı artık geçerli değildir.

Bırakılma noktasının istasyonun merkezinden uzaklığı

$$r = R - H$$

olsun; burada $0 < r < R$ 'dir. Eylemsiz koordinatları, bırakılma $(r, 0)$ noktasında ve $(0, \Omega r)$ teğetsel hızıyla gerçekleşecek şekilde seçelim.

Serbest bırakıldıktan sonra cisme hiçbir gerçek kuvvet etki etmez; dolayısıyla yörüngesi bir doğru olur:

$$X(t) = r, \quad Y(t) = \Omega r t.$$

Cisim çembere ilk kez şu koşul sağlandığında ulaşır:

$$X^2 + Y^2 = R^2.$$

$u = \Omega t_f$ yazıldığında buradan

$$r^2(1 + u^2) = R^2, \quad u = \sqrt{\frac{R^2}{r^2} - 1}.$$

Çarpma anında cismin açısal konumu

$$\alpha = \arctan u, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

iken kulenin tabanı u açısı kadar dönmüştür.

Cismin kulenin tabanına çarpması için açıları 2π modülünde aynı olmalıdır:

$$u - \arctan u = 2\pi n.$$

$u > 0$ için $u > \arctan u$ olduğundan, $n = 0$ sıfırdan farklı bir kule yüksekliği veremez. Dolayısıyla $n \geq 1$ 'dir ve bu da şu sonucu verir:

$$u = 2\pi n + \arctan u > 2\pi.$$

Bunun sonucunda,

$$\frac{R^2}{r^2} - 1 > 4\pi^2, \quad r < \frac{R}{\sqrt{1 + 4\pi^2}}.$$

$H = R - r$ olduğundan,

$$H > R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2}} \right) \simeq 0.8428R.$$

B.5'te belirlenen istasyon için bu sınır $H > 0.4214R_E$ 'dir.

Tam dönüşün gerçekleştiği en küçük yükseklik de bulunabilir. Şu fonksiyon,

$$f(u) = u - \arctan u$$

$u > 0$ için kesin artandır, çünkü

$$f'(u) = \frac{u^2}{1 + u^2} > 0.$$

Dolayısıyla en küçük dönüş yüksekliği $n = 1$ 'e karşılık gelir. Şu denklem çözüldüğünde,

$$u_1 - \arctan u_1 = 2\pi$$

şu sonuç elde edilir:

$$u_1 \simeq 7.72525.$$

Dolayısıyla

$$H_{\min} = R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + u_1^2}} \right) \simeq 0.871625R.$$

Bu daha kesin değer, istenen alt sınırla tutarlıdır.

B.8

$+x$ yönünü dönme yönünde, $+y$ yönünü ise içeriye doğru almayı sürdürelim. Serbestçe kayan destek, yatay bir geri çağırıcı kuvvet sağlamaz.

Yerel düz zemin yaklaşımını kullanalım ve yönergede belirtildiği gibi, yatay hareketin oluşturduğu y yönündeki Coriolis kuvvetini ihmal edelim. Düşey hareket denklemi aynı kalır:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} - \Omega^2.$$

Başlangıç koşulları şöyledir:

$$y(0) = -d, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Buradan

$$y(t) = -d \cos(\omega t).$$

Yatay hareketi, düşey hızla ilişkili Coriolis kuvveti oluşturur:

$$\ddot{x} = 2\Omega \dot{y}.$$

Bir kez integral alırsak,

$$\dot{x} = 2\Omega [y(t) - y(0)] = 2\Omega d [1 - \cos(\omega t)].$$

Bir kez daha integral alırsak,

$$x(t) = 2\Omega d \left[t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right].$$

Çizimi betimlemek için şu tanımları yapalım:

$$a = \frac{2\Omega d}{\omega}, \quad \tau = \omega t, \quad P = \frac{2\pi}{\omega}.$$

O hâlde

$$x = a(\tau - \sin \tau), \quad y = -d \cos \tau.$$

Bu, yatay ve düşey koordinatları birbirinden bağımsız olarak ölçeklendirilmiş bir sikloiddir.

Tam bir yay aşağıdaki noktaları içerir:

Zaman	x/a	y/d	Özellik
0	0	-1	Başlangıçtaki sivri uç; cisim durgun
$P/4$	$\pi/2 - 1$	0	Denge yüksekliğinden yukarı doğru geçiş
$P/2$	π	1	En yüksek nokta; yatay teğet
$3P/4$	$3\pi/2 + 1$	0	Denge yüksekliğinden aşağı doğru geçiş
P	2π	-1	Sonraki sivri uç; cisim anlık olarak durgun

Çizimin tamamı, bu yayların artan x yönünde tekrarlanmasından oluşur:

- Düşey genlik d 'dir; y , $-d$ ile $+d$ arasında değişir.
- Sivri uçlar $(2\pi na, -d)$ noktalarında oluşur ve bu noktalara yaklaşıırken teğetler düşey olur.
- Üst dönüş noktaları $((2n + 1)\pi a, d)$ noktalarında oluşur ve teğetleri yataydır.
- Ardışık sivri uçlar arasındaki uzaklık şöyledir:

$$L = 2\pi a = \frac{4\pi\Omega d}{\omega}.$$

- Şu bağıntı sağlandığından,

$$\dot{x} = 2\Omega d(1 - \cos \omega t) \geq 0,$$

yörüngeilmek oluşturmada sürekli olarak $+x$ yönünde ilerler.

- Ortalama yatay sürüklenme hızı $2\Omega d$ 'dir; bu düzgün sürüklenme etrafındaki yatay salınımın genliği a 'dır.

Bu ifadeler, düşey Coriolis kuvvetinin belirtilen şekilde ihmal edilmesi ve yerel düz zemin yaklaşımı geçerliliğini koruduğu sürece uygulanabilir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Elektrik Devrelerinde Doğrusal Olmayan Dinamik

Bu soruya başlamadan önce lütfen ayrı zarfta bulunan genel yönergeleri okuyunuz.

Giriş

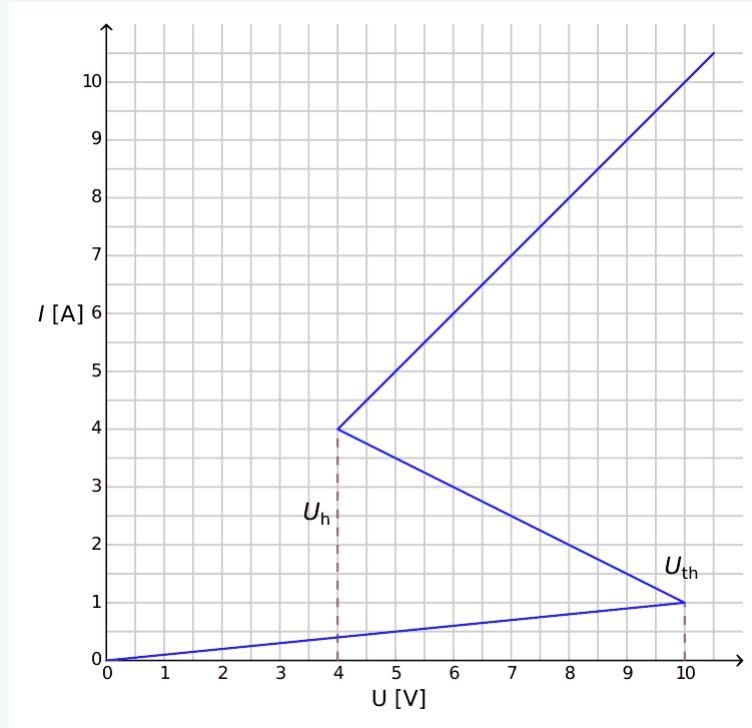
İki kararlı durumlu, doğrusal olmayan yarı iletken elemanlar (örneğin tristörler), elektronikte anahtar ve elektromanyetik salınım üretici olarak yaygın biçimde kullanılır. Tristörlerin başlıca uygulama alanı, güç elektroniğinde alternatif akımların denetlenmesidir; örneğin megawatt ölçeğinde alternatif akımın doğru akıma doğrultulmasıdır. İki kararlı durumlu elemanlar, fizikte (bu konu sorunun B bölümünde ele alınmaktadır), biyolojide (bkz. C bölümü) ve modern doğrusal olmayan bilimin diğer alanlarında özörgütlenme olguları için model sistemler olarak da kullanılabilir.

Amaçlar

Doğrusal olmayan $I - V$ karakteristiklerine sahip elemanlar içeren devrelerin kararsızlıklarını ve basit olmayan dinamiklerini incelemek. Bu tür devrelerin mühendislikte ve biyolojik sistemlerin modellenmesindeki olası uygulamalarını keşfetmek.

Bölüm A. Durağan durumlar ve kararsızlıklar (3 puan)

Şekil 1, doğrusal olmayan bir X elemanının **S biçimli** olarak adlandırılan $I - V$ karakteristiğini göstermektedir. $U_h = 4.00 \text{ V}$ (tutma gerilimi) ile $U_{th} = 10.0 \text{ V}$ (eşik gerilimi) arasındaki gerilim aralığında bu $I - V$ karakteristiği çok değerlidir. Basitlik açısından, Şekil 1'deki grafik parçalı doğrusal olarak seçilmiştir (her dal bir doğru parçasıdır). Özellikle, üst daldaki doğru uzatıldığında orijinden geçer. Bu yaklaşım, gerçek tristörleri iyi bir şekilde betimler.



Şekil 1: Doğrusal olmayan X elemanının $I - V$ karakteristiği.

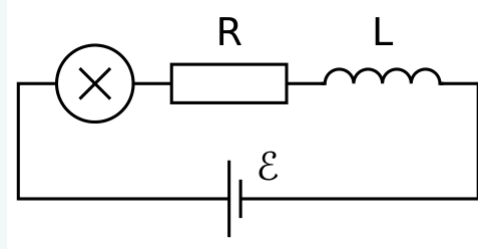
A.1 — 0.4 puan

Grafiği kullanarak X elemanın $I - V$ karakteristiğinin üst dalındaki R_{on} direncini ve alt dalındaki R_{off} direncini belirleyiniz. Orta dal şu denklemle tanımlanmaktadır:

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \quad (1)$$

I_0 ve R_{int} parametrelerinin değerlerini bulunuz.

X elemanı, bir R direnci, bir L bobini ve ideal bir $\mathcal{E}$ gerilim kaynağı ile seri bağlanmıştır (bkz. Şekil 2). Akım zamanla değişmiyorsa, yani $I(t) = \text{const}$ ise, devrenin durağan durumda olduğu söylenir.



Şekil 2: X elemanı, R direnci, L bobini ve $\mathcal{E}$ gerilim kaynağından oluşan devre.

A.2 — 1 puan

Sabit bir $\mathcal{E}$ değeri ve $R = 3.00 \, \Omega$ için Şekil 2'deki devrenin sahip olabileceği durağan durum sayıları nelerdir? $R = 1.00 \, \Omega$ için cevap nasıl değişir?

A.3 — 0.6 puan

Şekil 2'de gösterilen devrede $R = 3.00 \, \Omega$, $L = 1.00 \, \mu\text{H}$ ve $\mathcal{E} = 15.0 \, \text{V}$ olsun. Durağan durumdaki $I_{\text{stationary}}$ akımının ve doğrusal olmayan X elemanının uçları arasındaki $V_{\text{stationary}}$ geriliminin değerlerini belirleyiniz.

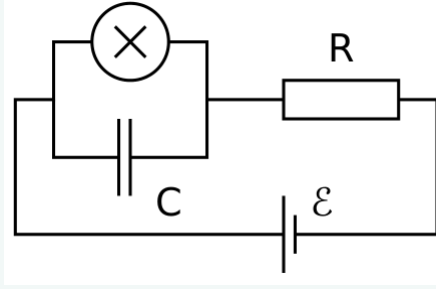
Şekil 2'deki devre, $I(t) = I_{\text{stationary}}$ olan durağan durumdadır. Küçük bir sapmadan (akımda artış veya azalış) sonra akım durağan duruma doğru geri dönüyorsa, bu durağan durumun kararlı olduğu söylenir. Sistem durağan durumdan uzaklaşmayı sürdürüyorsa, durumun kararsız olduğu söylenir.

A.4 — 1 puan

A.3 sorusundaki sayısal değerleri kullanarak $I(t) = I_{\text{stationary}}$ olan durağan durumun kararlılığını inceleyiniz. Bu durum kararlı mıdır, kararsız mıdır?

Bölüm B. Fizikte iki kararlı durumlu, doğrusal olmayan elemanlar: radyo vericisi (5 puan)

Şimdi yeni bir devre düzenini inceleyeceğiz (bkz. Şekil 3). Bu kez doğrusal olmayan X elemanı, sığası $C = 1.00 \, \mu\text{F}$ olan bir kondansatöre paralel bağlanmıştır. Bu blok daha sonra direnci $R = 3.00 \, \Omega$ olan bir dirence ve gerilimi $\mathcal{E} = 15.0 \, \text{V}$ olan ideal bir sabit gerilim kaynağına seri bağlanmıştır. Bu devrenin, doğrusal olmayan X elemanının bir çevrim boyunca $I - V$ karakteristiğinin bir dalından diğerine sıçradığı salınımlar yaptığı görülür.



Şekil 3: X elemanı, C kondansatörü, R direnci ve $\mathcal{E}$ gerilim kaynağından oluşan devre.

B.1 — 1.8 puan

Salınım çevrimini, yönünü de (saat yönünde veya saat yönünün tersine) belirterek $I - V$ grafiği üzerinde çizin. Cevabınızı denklemler ve çizimlerle gerekçelendiriniz.

B.2 — 1.9 puan

Sistemin salınım çevrimi sırasında $I - V$ grafiğinin her bir dalında geçirdiği t_1 ve t_2 süreleri için ifadeler bulunuz. Bunların sayısal değerlerini belirleyiniz. $I - V$ grafiğinin dalları arasındaki sıçramalar için gereken sürenin ihmal edilebilir olduğunu varsayarak salınım periyodu T 'nin sayısal değerini bulunuz.

B.3 — 0.7 puan

Doğrusal olmayan elemanda bir salınım boyunca harcanan ortalama P gücünü tahmin ediniz. Büyüklük mertebesini bulmak yeterlidir.

Şekil 3'teki devre bir radyo vericisi yapmak için kullanılmaktadır. Bu amaçla, X elemanı uzunluğu s olan doğrusal bir antenin (uzun, düz bir telin) bir ucuna bağlanır. Telin diğer ucu serbesttir. Antende elektromanyetik bir duran dalga oluşur. Anten boyunca elektromanyetik dalgaların hızı, boşluktaki hızlarıyla aynıdır. Verici, sistemin B.2 sorusundaki T periyoduna sahip temel harmoniğini kullanmaktadır.

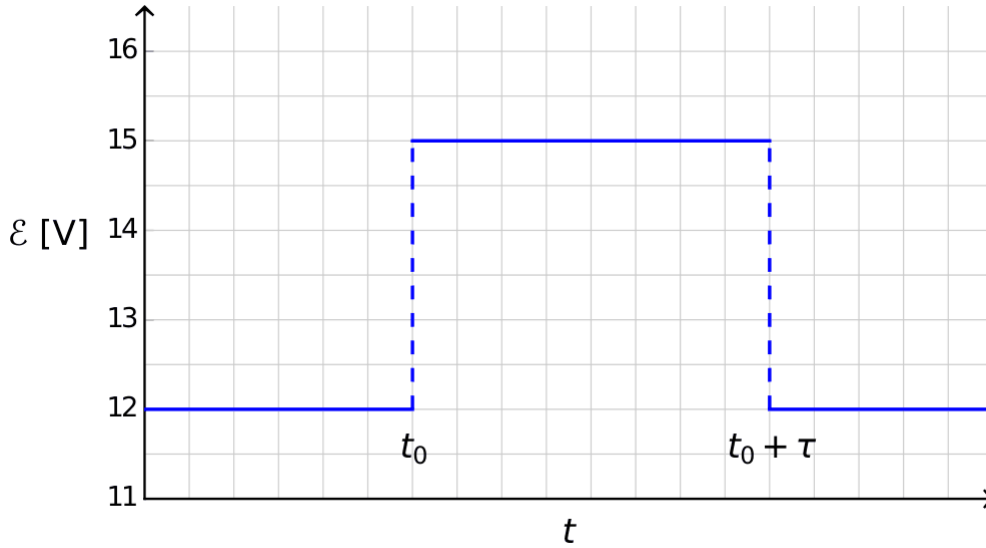
B.4 — 0.6 puan

1 km'yi aşamayacağı varsayımıyla s 'nin en uygun değeri nedir?

Bölüm C. Biyolojide iki kararlı durumlu, doğrusal olmayan elemanlar: nöristör (2 puan)

Sorunun bu bölümünde, iki kararlı durumlu, doğrusal olmayan elemanların biyolojik süreçlerin modellenmesine yönelik bir uygulamasını ele alıyoruz. İnsan beynindeki bir nöron şu özelliğe sahiptir: dışarıdan gelen bir sinyalle uyarıldığında tek bir salınım yapar ve ardından başlangıç durumuna döner. Bu özelliğe uyarılabilirlik denir. Bu özellik sayesinde, sinir sistemlerini oluşturan birbirine bağlı nöron ağlarında darbeler yayılabilir. Uyarılabilirliği ve darbe yayılımını taklit etmek üzere tasarlanmış bir yarı iletken yongaya, nöron ve transistör sözcüklerinden türetilen *nöristör* adı verilir.

Daha önce incelediğimiz doğrusal olmayan X elemanını içeren bir devre kullanarak basit bir nöristörü modellemeye çalışıyoruz. Bu amaçla, Şekil 3'teki devrede $\mathcal{E}$ gerilimi $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$ değerine düşürülür. Salınımlar durur ve sistem durağan durumuna ulaşır. Ardından gerilim hızla tekrar $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ değerine yükseltilir ve τ süresinin ardından ($\tau < T$ olmak üzere) yeniden $\mathcal{E}'$ değerine ayarlanır (bkz. Şekil 4). Belirli bir τ_{crit} kritik değeri olduğu ve sistemin $\tau < \tau_{\text{crit}}$ ile $\tau > \tau_{\text{crit}}$ için niteliksel olarak farklı davranışlar gösterdiği görülür.



Şekil 4: Gerilim kaynağının zamana bağlı gerilimi.

C.1 — 1.2 puan

$\tau < \tau_{\text{crit}}$ ve $\tau > \tau_{\text{crit}}$ için doğrusal olmayan X elemanından geçen $I_X(t)$ akımının zamana bağlı grafiklerini çiziniz.

C.2 — 0.6 puan

Davranışın değiştiği kritik τ_{crit} süresinin ifadesini ve sayısal değerini bulunuz.

C.3 — 0.2 puan

$\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ s olan devre bir nöristör müdür?

Genel Veri Tablosu

Işığın boşluktaki hızı	c	=	$299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Boşluğun manyetik geçirgenliği (manyetik sabit)	μ_0	=	$4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Boşluğun elektriksel geçirgenliği (elektrik sabiti)	ε_0	=	$8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Temel yük	e	=	$1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
Elektronun kütlesi	m_e	=	$9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31} \text{ kg}$
		=	$0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Protonun kütlesi	m_p	=	$1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		=	$938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Nötronun kütlesi	m_n	=	$1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		=	$939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Birleşik atomik kütle birimi	u	=	$1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Rydberg sabiti	R_∞	=	$10\,973\,731.568\,508(65) \text{ m}^{-1}$

Evrensel kütle çekim sabiti	G	=	$6.674\,08(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Yer çekimi ivmesi (Zürich'te)	g	=	$9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Planck sabiti	h	=	$6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Avogadro sayısı	N_A	=	$6.022\,140\,857(74) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Molar gaz sabiti	R	=	$8.314\,4598(48) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Molar kütle sabiti	M_u	=	$1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Boltzmann sabiti	k_B	=	$1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Stefan-Boltzmann sabiti	σ	=	$5.670\,367(13) \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **A.1:** $R_{\text{on}} = 1.00 \, \Omega$, $R_{\text{off}} = 10.0 \, \Omega$, $I_0 = 6.00 \, \text{A}$, $R_{\text{int}} = 2.00 \, \Omega$.
- **A.2:** $R = 3.00 \, \Omega$ için **bir** durağan durum vardır. $R = 1.00 \, \Omega$ için, gösterilen negatif olmayan kaynak gerilimlerinde, $8.00 \, \text{V} < \mathcal{E} < 11.0 \, \text{V}$ olduğunda **üç**, her iki sınır değerinde **iki**, diğer durumlarda ise **bir** durağan durum vardır.
- **A.3:** $I_{\text{stationary}} = 3.00 \, \text{A}$, $V_{\text{stationary}} = 6.00 \, \text{V}$.
- **A.4: Kararlı;** akımdaki küçük pertürbasyonlar $1.00 \, \mu\text{s}$ zaman sabitiyle üstel olarak sönümlenir.
- **B.1: Saat yönünün tersine.** (U/V , I_X/A) koordinatlarında çevrim şöyledir:
 $(4, 0.4) \rightarrow (10, 1) \rightarrow (10, 10) \rightarrow (4, 4) \rightarrow (4, 0.4)$.
- **B.2:** Alt daldaki süre t_1 , üst daldaki süre t_2 olarak tanımlandığında,

$$t_1 = \frac{30}{13} \ln \frac{49}{10} \, \mu\text{s} = 3.67 \, \mu\text{s}, \quad t_2 = \frac{3}{4} \ln 25 \, \mu\text{s} = 2.41 \, \mu\text{s},$$

$$T = 6.08 \, \mu\text{s}.$$
- **B.3:** P , $10^1 \, \text{W}$ mertebesinde. İdeal modelde integral alınması $P = 17.3 \, \text{W}$ sonucunu verir.
- **B.4:** $s = cT/4 = 456 \, \text{m}$.
- **C.1:** $\tau < \tau_{\text{crit}}$ için akım, $0.923 \, \text{A}$ değerinden küçük ve sürekli bir sapma yapar, $1.00 \, \text{A}$ değerinin altında kalır ve $0.923 \, \text{A}$ değerine döner. $\tau > \tau_{\text{crit}}$ için tek bir büyük sivri darbe oluşturur: $1.00 \rightarrow 10.0 \, \text{A}$ sıçraması, $4.00 \, \text{A}$ değerine azalma, $0.400 \, \text{A}$ değerine sıçrama ve $0.923 \, \text{A}$ değerine geri dönüş.
- **C.2:**

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{30}{13} \ln \frac{3}{2} \, \mu\text{s} = 0.936 \, \mu\text{s}.$$
- **C.3: Evet,** $1.00 \, \mu\text{s} > \tau_{\text{crit}}$ olduğundan darbe, tam bir sapma ve geri dönüş sürecini tetikler.

Çözüm

A.1

Üst dal, uzatıldığında orijinden ve $(U, I) = (4.00 \text{ V}, 4.00 \text{ A})$ noktasından geçer. Dolayısıyla

$$R_{\text{on}} = \frac{U}{I} = \frac{4.00}{4.00} \Omega = \boxed{1.00 \Omega}.$$

Alt dal, orijinden ve $(10.0 \text{ V}, 1.00 \text{ A})$ noktasından geçer; buradan

$$R_{\text{off}} = \boxed{10.0 \Omega}.$$

Orta dal, $(4.00 \text{ V}, 4.00 \text{ A})$ ile $(10.0 \text{ V}, 1.00 \text{ A})$ noktalarını birleştirir; bu nedenle

$$-\frac{1}{R_{\text{int}}} = \frac{1.00 - 4.00}{10.0 - 4.00} \frac{\text{A}}{\text{V}} = -0.500 \Omega^{-1}.$$

Böylece

$$\boxed{R_{\text{int}} = 2.00 \Omega}, \quad I_0 = 4.00 \text{ A} + \frac{4.00 \text{ V}}{2.00 \Omega} = \boxed{6.00 \text{ A}}.$$

Burada R_{int} pozitifdir; orta dalın diferansiyel direnci $-R_{\text{int}}$ 'tir.

A.2

U , X 'in uçları arasındaki gerilimi gösterebilir. Kirchhoff'un gerilim yasası şunu verir:

$$\mathcal{E} = RI + U + L \frac{dI}{dt}.$$

Durağan durumda,

$$\mathcal{E} = RI + U.$$

Dolayısıyla durağan durumlar, karakteristik eğri ile $I = (\mathcal{E} - U)/R$ yük doğrusunun kesişimleridir.

Eşdeğer olarak, karakteristiği $U(I)$ biçiminde kullanırsak,

$$\mathcal{E}(I) = \begin{cases} (R + 10.0 \Omega)I, & 0 \leq I \leq 1.00 \text{ A}, \\ 12.0 \text{ V} + (R - 2.00 \Omega)I, & 1.00 \text{ A} \leq I \leq 4.00 \text{ A}, \\ (R + 1.00 \Omega)I, & I \geq 4.00 \text{ A}. \end{cases}$$

$R = 3.00 \Omega$ için üç parçanın tümü I ile artar. Parçalar $\mathcal{E} = 13.0 \text{ V}$ ve 16.0 V değerlerinde sürekli biçimde birleşir. Sonuç olarak, negatif olmayan her kaynak gerilimi için tam olarak **bir durağan durum** vardır.

$R = 1.00 \Omega$ için orta parça I ile azalır. Uç noktaları şu değerlerdedir:

$$\mathcal{E}(1.00 \text{ A}) = 11.0 \text{ V}, \quad \mathcal{E}(4.00 \text{ A}) = 8.00 \text{ V}.$$

Dolayısıyla farklı durağan durumların sayısı şöyledir:

Kaynak gerilimi	Durağan durum sayısı
$0 \leq \mathcal{E} < 8.00 \text{ V}$	1
$\mathcal{E} = 8.00 \text{ V}$	2
$8.00 \text{ V} < \mathcal{E} < 11.0 \text{ V}$	3
$\mathcal{E} = 11.0 \text{ V}$	2

Kaynak gerilimi	Durağan durum sayısı
$\mathcal{E} > 11.0 \text{ V}$	1

Her iki sınırdan da iki dalın yük doğrusu ile kesişimleri, karakteristiğin bir köşe noktasında çakışır ve tek bir durum olarak sayılır.

A.3

$R = 3.00 \Omega$ ve $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ için, $13.0 < 15.0 < 16.0 \text{ V}$ olduğundan durağan durum orta dal üzerinde bulunur. Dolayısıyla

$$15.0 \text{ V} = 12.0 \text{ V} + (3.00 - 2.00) \Omega I_{\text{stationary}}.$$

Böylece

$$I_{\text{stationary}} = 3.00 \text{ A},$$

ve

$$V_{\text{stationary}} = \mathcal{E} - RI_{\text{stationary}} = 6.00 \text{ V}.$$

A.4

$I = I_{\text{stationary}} + \delta I$ yazalım. Yeterince küçük bir pertürbasyon, şu bağıntının geçerli olduğu orta dal üzerinde kalır:

$$U = R_{\text{int}}(I_0 - I).$$

Kirchhoff yasasında yerine koyup durağan durum denklemini çıkardığımızda,

$$L \frac{d(\delta I)}{dt} = -(R - R_{\text{int}})\delta I.$$

Böylece

$$\delta I(t) = \delta I(0) \exp \left[-\frac{R - R_{\text{int}}}{L} t \right].$$

$R - R_{\text{int}} = 1.00 \Omega > 0$ olduğundan pertürbasyon sönümlenir. Dolayısıyla durağan durum **kararlıdır** ve gevşeme süresi şöyledir:

$$\frac{L}{R - R_{\text{int}}} = \frac{1.00 \mu\text{H}}{1.00 \Omega} = 1.00 \mu\text{s}.$$

Dış direncin pozitif diferansiyel direnci, elemanın negatif diferansiyel direncinin mutlak değerinden büyüktür.

B.1

Kondansatörün ve X 'in uçları arasındaki gerilim aynı U değerindedir. Kirchhoff'un akım yasası şunu verir:

$$\frac{\mathcal{E} - U}{R} = I_X + C \frac{dU}{dt},$$

ya da

$$C \frac{dU}{dt} = \frac{\mathcal{E} - U}{R} - I_X(U).$$

Direnci r olan bir dalda $I_X = U/r$ olduğundan,

$$C \frac{dU}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) U.$$

Alt dalda, devrenin gevşeyerek yaklaşacağı gerilim şöyledir:

$$U_{\infty, \text{off}} = \frac{\mathcal{E} R_{\text{off}}}{R + R_{\text{off}}} = \frac{150}{13} \text{ V} = 11.538 \dots \text{ V}.$$

Bu değer $U_{\text{th}} = 10.0 \text{ V}$ 'u aşar. Sonuç olarak, çevrimin alt daldaki bölümü boyunca $dU/dt > 0$ olur: kondansatör 4.00 değerinden 10.0 V değerine kadar şarj olur.

Alt dal U_{th} değerinde sona erer. Kondansatör gerilimi sıçrayamayacağı için X , $I - V$ grafiğinde düşey yönde geçiş yapar:

$$(U, I_X) = (10.0 \text{ V}, 1.00 \text{ A}) \longrightarrow (10.0 \text{ V}, 10.0 \text{ A}).$$

Üst dalda, karşılık gelen sınır gerilimi şöyledir:

$$U_{\infty, \text{on}} = \frac{\mathcal{E} R_{\text{on}}}{R + R_{\text{on}}} = 3.75 \text{ V}.$$

Bu değer $U_h = 4.00 \text{ V}$ 'un altındadır. Dolayısıyla $dU/dt < 0$ olur: kondansatör 10.0 değerinden 4.00 V değerine kadar deşarj olur. Tutma geriliminde akım, yine sabit gerilimde, 4.00 değerinden 0.400 A değerine sıçrar.

Dolayısıyla istenen çizim, art arda gelen şu parçalardan oluşur:

Parça	$I - V$ düzlemindeki hareket
Alt dal	(4.00 V, 0.400 A) noktasından sağa ve hafifçe yukarı doğru (10.0 V, 1.00 A) noktasına
Eşik geriliminde geçiş	Düşey olarak yukarı doğru (10.0 V, 10.0 A) noktasına
Üst dal	Sola ve aşağı doğru (4.00 V, 4.00 A) noktasına
Tutma geriliminde geçiş	Düşey olarak aşağı doğru (4.00 V, 0.400 A) noktasına

Yön, **saat yönünün tersinedir**.

Bu kondansatörlü devrede orta daldaki denge kararsızdır. Gerçekten de $U = 6.00 \text{ V}$ yakınında,

$$C \frac{d(\delta U)}{dt} = \left(\frac{1}{R_{\text{int}}} - \frac{1}{R} \right) \delta U = \frac{\delta U}{6.00 \Omega}.$$

Gerilim pertürbasyonları büyür; bu nedenle orta dal, salınım çevriminin üzerinde kalınan bir parçası değildir.

B.2

Direnci r olan bir dal için şu tanımları yapalım:

$$\theta_r = C \frac{Rr}{R + r}, \quad U_{\infty, r} = \frac{\mathcal{E}r}{R + r}.$$

B.1'deki diferansiyel denklem şu biçimi alır:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{U_{\infty, r} - U}{\theta_r},$$

ve çözümü şöyledir:

$$U(t) = U_{\infty,r} + (U(0) - U_{\infty,r})e^{-t/\theta_r}.$$

Alt daldaki geçirilen süreyi t_1 , üst daldaki geçirilen süreyi ise t_2 olarak tanımlayalım.

U_h değerinden U_{th} değerine şarj olma için,

$$t_1 = \theta_{\text{off}} \ln \left(\frac{U_{\infty,\text{off}} - U_h}{U_{\infty,\text{off}} - U_{th}} \right).$$

Burada

$$\theta_{\text{off}} = \frac{30}{13} \mu\text{s},$$

olduğundan

$$t_1 = \frac{30}{13} \mu\text{s} \ln \left(\frac{150/13 - 4}{150/13 - 10} \right) = \frac{30}{13} \ln \frac{49}{10} \mu\text{s} = \boxed{3.67 \mu\text{s}}.$$

U_{th} değerinden U_h değerine deşarj olma için,

$$t_2 = \theta_{\text{on}} \ln \left(\frac{U_{th} - U_{\infty,\text{on}}}{U_h - U_{\infty,\text{on}}} \right).$$

Şu bağıntı geçerli olduğundan,

$$\theta_{\text{on}} = 0.750 \mu\text{s},$$

şunu elde ederiz:

$$t_2 = 0.750 \mu\text{s} \ln \left(\frac{10.0 - 3.75}{4.00 - 3.75} \right) = \frac{3}{4} \ln 25 \mu\text{s} = \boxed{2.41 \mu\text{s}}.$$

Geçiş sürelerini ihmal edersek,

$$T = t_1 + t_2 = 6.08 \mu\text{s}.$$

B.3

İletken dalların her birinde, X 'te harcanan anlık güç şöyledir:

$$p_X = UI_X = \frac{U^2}{r}.$$

İdeal anlık geçişler sırasında harcanan enerjiyi ihmal ediyoruz. Yukarıda türetilen gerilimin zamana bağlı değişimini kullanırsak, her daldaki harcanan enerji şöyledir:

$$W_{\text{off}} = \frac{\theta_{\text{off}}}{R_{\text{off}}} \int_{U_h}^{U_{th}} \frac{U^2}{U_{\infty,\text{off}} - U} dU = 23.2 \mu\text{J},$$

ve

$$W_{\text{on}} = \frac{\theta_{\text{on}}}{R_{\text{on}}} \int_{U_h}^{U_{th}} \frac{U^2}{U - U_{\infty,\text{on}}} dU = 82.3 \mu\text{J}.$$

Böylece

$$P = \frac{W_{\text{off}} + W_{\text{on}}}{T} = \frac{105.5 \mu\text{J}}{6.0816 \mu\text{s}} = \boxed{17.3 \text{ W}}.$$

Dolayısıyla istenen büyüklük mertebesi tahmini şöyledir:

$$P \sim 10^1 \text{ W}.$$

B.4

Yayılan temel harmoniğin dalga boyu şöyledir:

$$\lambda = cT = (299\,792\,458 \text{ m s}^{-1})(6.08162 \times 10^{-6} \text{ s}) = 1.82322 \times 10^3 \text{ m}.$$

İdeal anten modelinde serbest uç bir akım düğümüdür; verimli uyarım için beslenen uçta bir akım karını bulunur. Aralarındaki uzaklık, çeyrek dalga boyunun tek katıdır:

$$s = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Rezonans sağlayan en kısa uzunluk şöyledir:

$$s = \frac{\lambda}{4} = \frac{cT}{4} = 456 \text{ m}.$$

Bir sonraki olasılık $3\lambda/4 = 1.37 \text{ km}$ olup sınırı aşar. Dolayısıyla çeyrek dalga boyu, izin verilen en uygun uzunluktur.

C.1

Önce $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$ için başlangıçtaki durağan durumu bulalım. Bu durum alt dal üzerindedir:

$$I_r = \frac{\mathcal{E}'}{R + R_{\text{off}}} = \frac{12}{13} \text{ A} = \boxed{0.923 \text{ A}},$$

$$U_r = R_{\text{off}} I_r = \frac{120}{13} \text{ V} = \boxed{9.23 \text{ V}}.$$

$u = t - t_0$ olsun. Darbeden önce $I_X = I_r$ 'dir. Kaynak 15.0 V değerindeyken ve eleman alt dalda kaldığı sürece,

$$I_X(u) = \frac{\mathcal{E}}{R + R_{\text{off}}} + \left(I_r - \frac{\mathcal{E}}{R + R_{\text{off}}} \right) e^{-u/\theta_{\text{off}}},$$

ya da sayısal olarak,

$$I_X(u) = \frac{15 - 3e^{-u/\theta_{\text{off}}}}{13} \text{ A}.$$

Kritik süre, bu akımın $U = U_{\text{th}}$ değerine karşılık gelen 1.00 A değerine ulaşması için gereken süredir.

$\tau < \tau_{\text{crit}}$ için grafik, küçük ve sürekli bir tümsek biçimindedir:

- t_0 'dan önce akım 0.923 A değerinde sabittir.
- Darbe sırasında akım, eğimi azalarak üstel biçimde yükselir, ancak 1.00 A değerinin altında kalır.
- $t_0 + \tau$ anında akım süreklidir ve eğimi işaret değiştirir.
- Daha sonra üstel biçimde azalarak yeniden 0.923 A değerine döner:

$$I_X(u) = I_r + [I_X(\tau) - I_r] e^{-(u-\tau)/\theta_{\text{off}}}, \quad u \geq \tau.$$

Dallar arasında geçiş olmaz.

$\tau > \tau_{\text{crit}}$ için grafik tek bir büyük sivri darbe içerir:

1. Akım başlangıçta 0.923 değerinden 1.00 A değerine kadar aynı kademeli yükselişi izler.
2. $t = t_0 + \tau_{\text{crit}}$ anında 1.00 değerinden 10.0 A değerine düşey olarak sıçrar.

3. Ardından üst dalda azalır. Kaynak 15.0 V değerinde kaldığı sürece,

$$I_X(u) = 3.75 \text{ A} + 6.25 \text{ A} e^{-(u-\tau_{\text{crit}})/\theta_{\text{on}}}.$$

4. 4.00 A değerine ulaştığında, düşey olarak 0.400 A değerine sıçrar.

5. Daha sonra alt dalda yükselir ve sonunda 0.923 A değerine alttan yaklaşır.

Eleman hâlâ üst daldayken kaynak 12.0 V değerine dönerse, akım o anda sürekli kalır, ancak azalması hızlanır. Bundan sonraki ifadesi şöyledir:

$$I_X(u) = 3.00 \text{ A} + [I_X(\tau) - 3.00 \text{ A}] e^{-(u-\tau)/\theta_{\text{on}}}.$$

3.00 A asimptotu tutma akımının altında olduğundan akım mutlaka 4.00 A değerine ulaşır ve eleman kesime geçer. Bu, $u = u_d$ anında gerçekleşirse, ardından gelen geri dönüş şöyledir:

$$I_X(u) = I_r + (0.400 \text{ A} - I_r) e^{-(u-u_d)/\theta_{\text{off}}}.$$

Daha uzun bir darbe için üst daldan alt dala geçiş, darbe sona ermeden gerçekleşebilir. Kaynak 15.0 V değerinde kalırsa bu geçiş şu anda gerçekleşir:

$$u = \tau_{\text{crit}} + t_2 = 3.35 \mu\text{s}.$$

Akım daha sonra $u = \tau$ anına kadar 15.0 V'luk kaynak altında alt dalda toparlanır; ardından 12.0 V'luk kaynağa karşılık gelen dinlenme durumuna yaklaşır. Kaynaktaki değişimler, I_X 'te ani değişimlere değil, eğim değişimlerine yol açar.

Verilen darbe süresince ikinci bir sivri darbe oluşamaz: 15.0 V korunursa, eşiğin ikinci kez aşılması $u = \tau_{\text{crit}} + T > T > \tau$ anında gerçekleşir.

C.2

Kritik sürenin sonunda kondansatör, U_r değerinden U_{th} değerine henüz şarj olmuştur:

$$U_{\text{th}} = U_{\infty, \text{off}} + (U_r - U_{\infty, \text{off}}) e^{-\tau_{\text{crit}}/\theta_{\text{off}}}.$$

Çözersek,

$$\tau_{\text{crit}} = \theta_{\text{off}} \ln \left(\frac{U_{\infty, \text{off}} - U_r}{U_{\infty, \text{off}} - U_{\text{th}}} \right).$$

Devre parametreleri cinsinden,

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{CRR_{\text{off}}}{R + R_{\text{off}}} \ln \left[\frac{(\mathcal{E} - \mathcal{E}')R_{\text{off}}}{\mathcal{E}R_{\text{off}} - (R + R_{\text{off}})U_{\text{th}}} \right].$$

Sayısal olarak,

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{30}{13} \mu\text{s} \ln \left(\frac{150/13 - 120/13}{150/13 - 10} \right) = \frac{30}{13} \ln \frac{3}{2} \mu\text{s}.$$

Dolayısıyla

$$\tau_{\text{crit}} = 0.936 \mu\text{s}.$$

C.3

Verilen darbe şu koşulları sağlar:

$$\tau = 1.00 \mu\text{s} > \tau_{\text{crit}} = 0.936 \mu\text{s}, \quad \tau < T.$$

Dolayısıyla üst dala geçişi tetikler. Devre, akımda tek bir büyük sapma ve geri dönüş sürecini tamamlar, ardından 12.0 V'luk kaynak altında başlangıçtaki durağan durumuna döner.

Evet, devre bir nöristör gibi davranır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Büyük Hadron Çarpıştırıcısı

Bu soruya başlamadan önce lütfen ayrı zarfta bulunan genel yönergeleri okuyunuz.

Bu soruda, CERN'deki LHC (Büyük Hadron Çarpıştırıcısı) parçacık hızlandırıcısının fiziği ele alınmaktadır. CERN, dünyanın en büyük parçacık fiziği laboratuvarıdır. Temel amacı, doğanın temel yasalarını anlamaktır. İki parçacık demeti yüksek enerjilere kadar hızlandırılır, güçlü bir manyetik alanla hızlandırıcı halkası boyunca yönlendirilir ve ardından birbiriyle çarpıştırılır. Protonlar hızlandırıcının çevresi boyunca düzgün dağılmaz; paket adı verilen kümeler hâlinde toplanır. Çarpışmalar sonucunda oluşan parçacıklar büyük dedektörlerle gözlenir. LHC'nin bazı parametreleri tablo 1'de verilmiştir.

LHC halkası	
Halkanın çevresi	26659 m
Her proton demetindeki paket sayısı	2808
Her paketteki proton sayısı	1.15×10^{11}
Proton demetleri	
Protonların enerjisi	7.00 TeV
Kütle merkezi enerjisi	14.0 TeV

Tablo 1: İlgili LHC parametrelerinin tipik sayısal değerleri.

Parçacık fizikçileri enerji, momentum ve kütle için kullanışlı birimler kullanır: Enerji, elektronvolt [eV] cinsinden ölçülür. Tanım gereği 1 eV, temel yük e 'ye sahip bir parçacığın bir voltluk potansiyel farkından geçerken kazandığı enerji miktarıdır ($1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$).

Momentum eV/c , kütle ise eV/c^2 birimleriyle ölçülür; burada c , ışığın boşluktaki hızıdır. 1 eV çok küçük bir enerji miktarı olduğundan, parçacık fizikçileri sıklıkla MeV ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$), GeV ($1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$) veya TeV ($1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$) kullanır.

Kısım A, protonların veya elektronların hızlandırılmasını ele alır. Kısım B ise CERN'deki çarpışmalarda üretilen parçacıkların tanımlanmasıyla ilgilidir.

Kısım A. LHC hızlandırıcısı (6 puan)

Hızlandırma:

Protonların, hızları ışık hızına çok yakın olacak şekilde bir V gerilimiyle hızlandırıldığını varsayınız ve ışıma veya diğer parçacıklarla çarpışma nedeniyle oluşan tüm enerji kayıplarını ihmal ediniz.

A.1 — 0.7 puan

Protonların son hızı v 'nin, hızlandırma gerilimi V ve fiziksel sabitler cinsinden tam ifadesini bulunuz.

CERN'de gelecekte yapılacak bir deney için hazırlanan bir tasarımda, LHC'den gelen protonların kullanılması ve bunların enerjileri 60.0 GeV olan elektronlarla çarpıştırılması planlanmaktadır.

A.2 — 0.8 puan

Enerjisi yüksek ve kütlesi küçük parçacıklar için son hız v 'nin ışık hızından bağıl sapması $\Delta = (c - v)/c$ çok küçüktür. Δ için birinci mertebeden bir yaklaşım bulunuz ve hızlandırma gerilimi V ile fiziksel sabitleri kullanarak, enerjisi 60.0 GeV olan elektronlar için Δ 'yı hesaplayınız.

Şimdi LHC'deki protonlara dönüyoruz. Demet borusunun dairesel olduğunu varsayınız.

A.3 — 1.0 puan

Proton demetini dairesel bir yörüngede tutmak için gereken düzgün manyetik akı yoğunluğu B için bir ifade türetiniz. Bu ifade yalnızca protonların enerjisi E 'yi, çevre uzunluğu L 'yi, temel sabitleri ve sayıları içermelidir. Etkileri, en az anlamlı basamak sayısının belirlediği hassasiyetten küçük olmak koşuluyla uygun yaklaşımlar kullanabilirsiniz.

Protonlar arasındaki etkileşimleri ihmal ederek, $E = 7.00$ TeV proton enerjisi için manyetik akı yoğunluğu B 'yi hesaplayınız.

Işıma gücü:

İvmelenen yüklü bir parçacık, elektromanyetik dalgalar biçiminde enerji yayar. Sabit açısal hızla dairesel hareket yapan yüklü bir parçacığın ışıma gücü P_{rad} , yalnızca ivmesi a 'ya, yükü q 'ya, ışık hızı c 'ye ve boşluğun elektriksel geçirgenliği ϵ_0 'a bağlıdır.

A.4 — 1.0 puan

Boyut analizini kullanarak ışıma gücü P_{rad} için bir ifade bulunuz.

Işıma gücünün gerçek formülü $1/(6\pi)$ çarpanını içerir; ayrıca, tam bir görelilik hesabı, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ olmak üzere ek bir γ^4 çarpanı verir.

A.5 — 1.0 puan

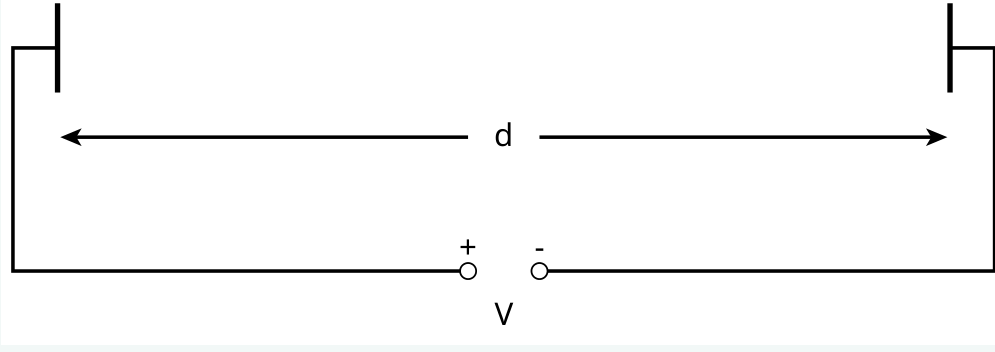
$E = 7.00$ TeV proton enerjisi için LHC'nin toplam ışıma gücü P_{tot} 'u hesaplayınız (tablo 1'i dikkate alınız). Uygun yaklaşımlar kullanabilirsiniz.

Doğrusal hızlandırma:

CERN'de, başlangıçta durgun olan protonlar, uzunluğu $d = 30.0$ m olan doğrusal bir hızlandırıcıda $V = 500$ MV potansiyel farkı boyunca hızlandırılır. Elektrik alanının homojen olduğunu varsayınız. Doğrusal bir hızlandırıcı, Şekil 1'de şematik olarak gösterildiği gibi iki levhadan oluşur.

A.6 — 1.5 puan

Protonların bu alanı geçmesi için gereken T süresini belirleyiniz.



Şekil 1: Bir hızlandırıcı modülünün şeması.

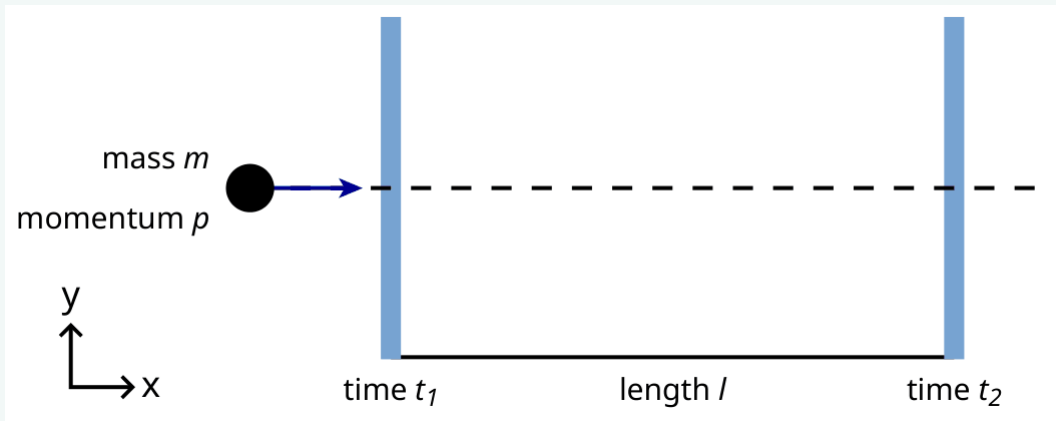
Kısım B. Parçacıkların tanımlanması (4 puan)

Uçuş süresi:

Etkileşim sürecini yorumlayabilmek için çarpışmada oluşan yüksek enerjili parçacıkların tanımlanması önemlidir. Basit bir yöntem, momentumu bilinen bir parçacığın, Uçuş Süresi (ToF) dedektörü adı verilen bir dedektörde l uzunluğunu katetmesi için gereken süreyi (t) ölçmektir. Dedektörde tanımlanan tipik parçacıklar, kütleleriyle birlikte tablo 2'de listelenmiştir.

Parçacık	Kütle [MeV/c^2]
Döteron	1876
Proton	938
Yüklü kaon	494
Yüklü pion	140
Elektron	0.511

Tablo 2: Parçacıklar ve kütleleri.



Şekil 2: Bir uçuş süresi dedektörünün şematik görünümü.

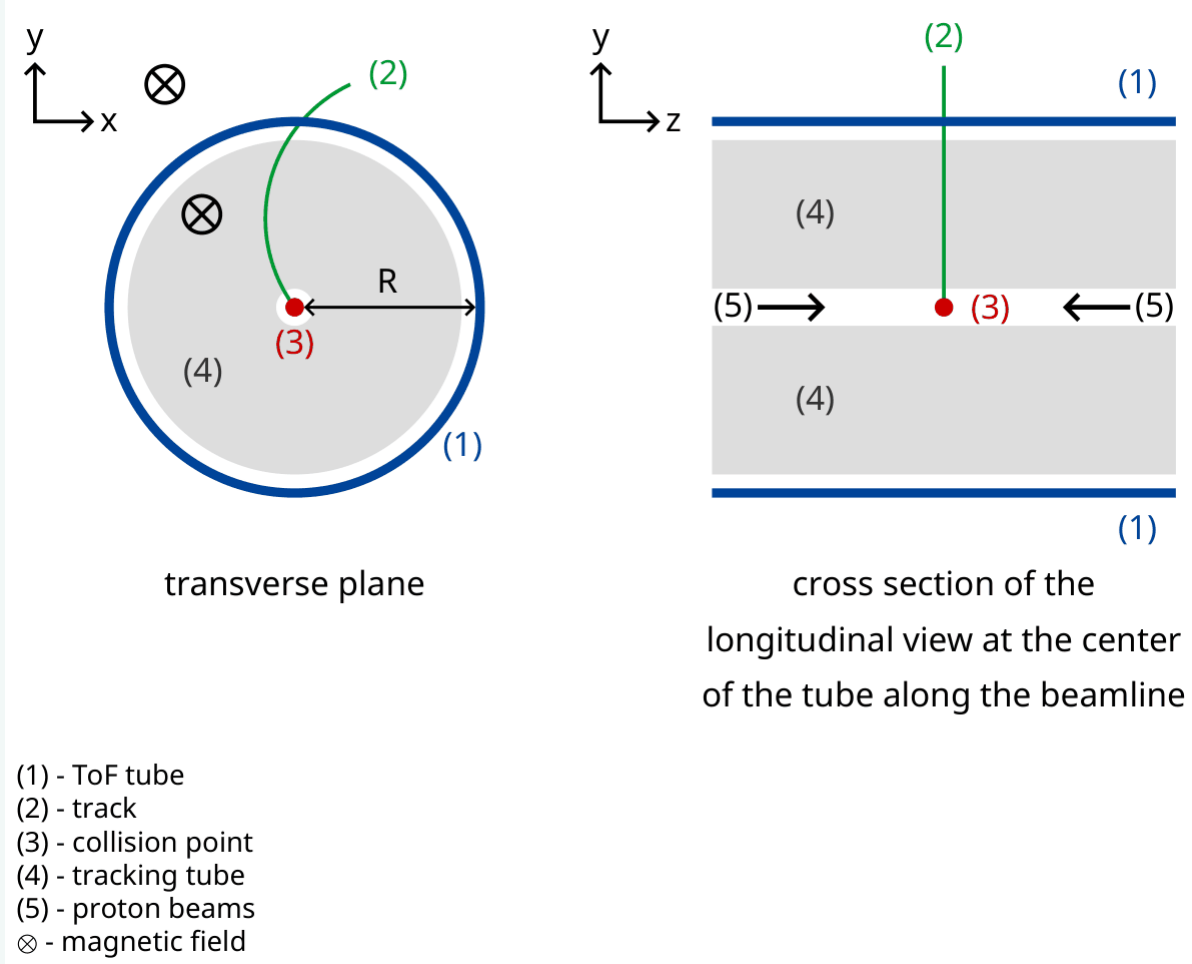
B.1 — 0.8 puan

Parçacıkların temel yük e 'ye sahip olduğunu, ToF dedektöründe doğrusal yörüngeler boyunca c 'ye yakın hızlarla ilerlediğini ve iki algılama düzlemine dik hareket ettiğini varsayarak (bkz. şekil 2), parçacık kütlesi m 'yi momentum p , uçuş uzunluğu l ve uçuş süresi t cinsinden ifade ediniz.

B.2 — 0.7 puan

Her ikisinin de momentumu $1.00 \text{ GeV}/c$ olarak ölçülen yüklü bir kaonu yüklü bir piondan güvenilir biçimde ayırt etmeyi sağlayan bir ToF dedektörünün en küçük l uzunluğunu hesaplayınız. İyi bir ayırım için uçuş süreleri arasındaki farkın, dedektörün zaman çözünürlüğünün üç katından büyük olması gerekir. Bir ToF dedektörünün tipik çözünürlüğü 150 ps 'dir ($1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$).

Aşağıda, tipik bir LHC dedektöründe üretilen parçacıklar, bir iz dedektörü ile bir ToF dedektöründen oluşan iki aşamalı bir dedektörde tanımlanmaktadır. Şekil 3, düzeneğin proton demetlerine göre enine ve boyuna düzlemlerdeki görünümünü göstermektedir. Her iki dedektör de etkileşim bölgesini çevreleyen tüplerden oluşur ve demet bu tüplerin ortasından geçer. İz dedektörü, proton demetlerine paralel yöndeki bir manyetik alandan geçen yüklü bir parçacığın yörüngesini ölçer. Yörüngenin yarıçapı r , parçacığın enine momentumu p_T 'nin belirlenmesini sağlar. Çarpışma anı bilindiğinden, ToF dedektörünün uçuş süresini (çarpışma ile ToF tüpünde algılanma arasındaki süreyi) ölçmek için yalnızca bir tüpe ihtiyacı vardır. Bu ToF tüpü, iz odasının hemen dışında yer alır. Bu soru için, çarpışmada oluşan tüm parçacıkların proton demetlerine dik hareket ettiğini varsayabilirsiniz; başka bir deyişle, oluşan parçacıkların proton demetleri doğrultusunda momentumu yoktur.



Şekil 3: Bir iz odası ve bir ToF dedektörüyle parçacık tanımlamak için kullanılan deney düzeneği. Her iki dedektör de ortadaki çarpışma noktasını çevreleyen tüplerdir. Sol: demet hattına dik enine görünüm. Sağ: demet hattına paralel boyuna görünüm. Parçacık, demet hattına dik hareket etmektedir.

B.3 — 1.7 puan

Parçacık kütlesini, manyetik akı yoğunluğu B , ToF tüpünün yarıçapı R , temel sabitler ve ölçülen büyüklükler olan iz yarıçapı r ile uçuş süresi t cinsinden ifade ediniz.

Dört parçacık algıladık ve bunları tanımlamak istiyoruz. İz dedektöründeki manyetik akı yoğunluğu $B = 0.500 \text{ T}$ idi. ToF tüpünün yarıçapı R , 3.70 m idi. Ölçümler aşağıdadır ($1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$):

Parçacık	Yörüngenin yarıçapı r [m]	Uçuş süresi t [ns]
A	5.10	20
B	2.94	14
C	6.06	18
D	2.31	25

B.4 — 0.8 puan

Kütlelerini hesaplayarak dört parçacığı tanımlayınız.

Genel veri tablosu

Işığın boşluktaki hızı	c	$= 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Boşluğun manyetik geçirgenliği (manyetik sabit)	μ_0	$= 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Boşluğun elektriksel geçirgenliği (elektrik sabiti)	ϵ_0	$= 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Temel yük	e	$= 1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
Elektronun kütlesi	m_e	$= 9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31} \text{ kg}$
		$= 0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Protonun kütlesi	m_p	$= 1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		$= 938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Nötronun kütlesi	m_n	$= 1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		$= 939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Birleşik atomik kütle birimi	u	$= 1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Rydberg sabiti	R_∞	$= 10\,973\,731.568\,508(65) \text{ m}^{-1}$
Evrensel kütle çekim sabiti	G	$= 6.674\,08(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Yer çekimi ivmesi (Zürich'te)	g	$= 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Planck sabiti	h	$= 6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Avogadro sayısı	N_A	$= 6.022\,140\,857(74) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Molar gaz sabiti	R	$= 8.314\,4598(48) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Molar kütle sabiti	M_u	$= 1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Boltzmann sabiti	k_B	$= 1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Stefan-Boltzmann sabiti	σ	$= 5.670\,367(13) \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

Cevaplar

- **A.1:** Durgun hâlden hızlandırma için,

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{m_p c^2}\right)^{-2}}.$$

- **A.2:**

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2} \simeq \frac{m^2 c^4}{2e^2 V^2}.$$

60.0 GeV enerjili elektronlar için,

$$\Delta = 3.63 \times 10^{-11}.$$

- **A.3:**

$$B = \frac{2\pi}{ecL} \sqrt{E^2 - m_p^2 c^4} \simeq \frac{2\pi E}{ecL} = 5.50 \text{ T}.$$

- **A.4:**

$$P_{\text{rad}} = C \frac{q^2 a^2}{\varepsilon_0 c^3},$$

burada boyutsuz sabit C , boyut analiziyle belirlenemez.

- **A.5:** Her iki proton demeti de hesaba katıldığında,

$$P_{\text{tot}} = 5.12 \text{ kW}.$$

- **A.6:**

$$T = \frac{d}{c} \sqrt{1 + \frac{2m_p c^2}{eV}} = 2.18 \times 10^{-7} \text{ s} = 0.218 \mu\text{s}.$$

- **B.1:**

$$m = \frac{p}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{l}\right)^2 - 1}.$$

- **B.2:** Eşik uzunluğu

$$l_{\text{crit}} = 1.27739 \dots \text{ m}.$$

Belirtilen kesin eşitsizlikli ayırma ölçütü $l > l_{\text{crit}}$ olmasını gerektirir; bu da pratikte gereken en küçük uzunluğun yaklaşık 1.28 m olmasını sağlar.

• B.3:

$$m = \frac{eBr}{c} \sqrt{\left[\frac{ct}{2r \arcsin(R/(2r))} \right]^2 - 1}.$$

- B.4: A: proton, $m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$; B: yüklü pion, $m \approx 0.14 \text{ GeV}/c^2$; C: proton, $m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$; D: yüklü kaon, $m \approx 0.50 \text{ GeV}/c^2$.

Çözüm

A.1

Durgun hâlden hızlandırılan bir proton için enerjinin korunumu

$$eV = K = (\gamma - 1)m_p c^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

bağıntısını verir. Dolayısıyla

$$\gamma = 1 + \frac{eV}{m_p c^2}.$$

v için çözüldüğünde,

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{m_p c^2}\right)^{-2}}.$$

Bu ifade, enerji kaybı olmadan durgun hâlden hızlandırma varsayımı altında tamdır.

A.2

Kütlesi m olan bir parçacık için,

$$\Delta = 1 - \frac{v}{c} = 1 - \sqrt{1 - \gamma^{-2}}.$$

Yüksek enerjide $\gamma^{-2} \ll 1$ olur. Birinci mertebeden

$$\sqrt{1 - x} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2),$$

açılımını kullanarak

$$\Delta = \frac{1}{2\gamma^2} + O(\gamma^{-4}).$$

sonucunu elde ederiz. Hızlandırma gerilimi cinsinden,

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2}.$$

$eV \gg mc^2$ olduğunda bu ifade daha da sadeleşir:

$$\Delta \simeq \frac{m^2 c^4}{2e^2 V^2}.$$

Eşdeğer olarak, toplam enerji $E = \gamma mc^2$ kullanıldığında,

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2.$$

Elektronlar için,

$$m_e c^2 = 0.5109989461 \text{ MeV}, \quad E = 60.0 \text{ GeV} = 6.00 \times 10^4 \text{ MeV},$$

dolayısıyla

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{0.5109989461}{6.00 \times 10^4} \right)^2 = \boxed{3.63 \times 10^{-11}}.$$

A.3

Dairesel yörüngenin yarıçapı

$$\rho = \frac{L}{2\pi}.$$

olsun. Manyetik kuvvet, görel momentumun büyüklüğünü sabit tutarken yönünü değiştirir. Düzgün çembersel hareket için,

$$\left| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right| = \frac{pv}{\rho}.$$

Bu ifade manyetik kuvvete eşitlendiğinde,

$$evB = \frac{pv}{\rho},$$

buradan

$$B = \frac{p}{e\rho}.$$

elde edilir.

Görel enerji-momentum bağıntısı

$$E^2 = p^2 c^2 + m_p^2 c^4,$$

şeklinde; burada E , protonun toplam enerjisidir. Bu nedenle,

$$\boxed{B = \frac{2\pi}{ecL} \sqrt{E^2 - m_p^2 c^4}}.$$

$E = 7.00 \text{ TeV}$ için,

$$\frac{m_p c^2}{E} = \frac{938.2720813 \text{ MeV}}{7.00 \times 10^6 \text{ MeV}} \approx 1.34 \times 10^{-4}.$$

pc yerine E alınması, yalnızca

$$\frac{1}{2} \left(\frac{m_p c^2}{E} \right)^2 \approx 8.98 \times 10^{-9},$$

kadar bir bağıl düzeltmeye yol açar; bu, verilen enerjinin hassasiyetinin çok altındadır. Dolayısıyla

$$B \simeq \frac{2\pi E}{ecL}.$$

$E = 7.00 \times 10^{12} \text{ eV}$ kullanıldığında,

$$B \simeq \frac{2\pi(7.00 \times 10^{12})}{(299792458)(26659)} \text{ T} = \boxed{5.50 \text{ T}}.$$

A.4

$$P_{\text{rad}} = Cq^\alpha a^\beta c^\delta \epsilon_0^\eta,$$

yazalım; burada C boyutsuzdur. Temel boyutlar olarak kütle, uzunluk, zaman ve yük kullanıldığında,

$$[P] = ML^2T^{-3}, \quad [q] = Q, \quad [a] = LT^{-2}, \quad [c] = LT^{-1},$$

ve

$$[\epsilon_0] = Q^2T^2M^{-1}L^{-3}.$$

Üslerin eşitlenmesiyle

$$\begin{aligned} -\eta &= 1, & \alpha + 2\eta &= 0, \\ \beta + \delta - 3\eta &= 2, & -2\beta - \delta + 2\eta &= -3. \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\eta = -1, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \delta = -3.$$

Sonuç olarak,

$$P_{\text{rad}} = C \frac{q^2 a^2}{\epsilon_0 c^3}.$$

Boyut analizi, fiziksel büyüklüklere bağımlılığı belirler ancak C 'yi belirleyemez.

A.5

Soruda belirtilen sayısal çarpan ve görelilik düzeltmesi hesaba katıldığında, bir protonun ışıma gücü

$$P_1 = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 c^3}.$$

olur. Çembersel hareket için,

$$a = \frac{v^2}{\rho} \simeq \frac{c^2}{\rho}, \quad \rho = \frac{L}{2\pi}, \quad \gamma = \frac{E}{m_p c^2}.$$

Dolayısıyla

$$P_1 \simeq \frac{e^2 c}{6\pi \epsilon_0 \rho^2} \left(\frac{E}{m_p c^2} \right)^4.$$

Sayısal olarak,

$$\rho = \frac{26659}{2\pi} \text{ m} = 4242.91 \text{ m}, \quad \gamma = \frac{7.00 \times 10^6}{938.2720813} = 7460.52.$$

Değerler yerine konulduğunda

$$P_1 \simeq 7.93 \times 10^{-12} \text{ W}.$$

elde edilir.

Her biri 2808 paket içeren ve her paketinde 1.15×10^{11} proton bulunan iki demet vardır. Dolayısıyla toplam proton sayısı

$$N = 2(2808)(1.15 \times 10^{11}) = 6.4584 \times 10^{14}.$$

olur. Tek tek protonların ışıma güçleri toplandığında,

$$P_{\text{tot}} = NP_1 \simeq 5.12467 \times 10^3 \text{ W}.$$

Bu nedenle,

$$P_{\text{tot}} = 5.12 \text{ kW}.$$

A.6

Homojen elektrik alanının büyüklüğü V/d olduğundan, bir protona etki eden kuvvet sabittir:

$$F = \frac{eV}{d}.$$

Göreliliğe göre hareket denklemi

$$\frac{dp}{dt} = F.$$

şeklindedir. Proton durgun hâlden harekete başladığı için,

$$p_f = FT, \quad T = \frac{p_f}{F}.$$

Hızlandırıcı boyunca yapılan iş eV olduğundan, son toplam enerji

$$E_f = m_p c^2 + eV.$$

olur. Dolayısıyla,

$$p_f c = \sqrt{E_f^2 - m_p^2 c^4} = \sqrt{(eV)^2 + 2eV m_p c^2}.$$

Bu ifadeler birleştirildiğinde,

$$T = \frac{d}{eVc} \sqrt{(eV)^2 + 2eV m_p c^2},$$

veya

$$T = \frac{d}{c} \sqrt{1 + \frac{2m_p c^2}{eV}}.$$

Burada $eV = 500 \text{ MeV}$ 'dir. Dolayısıyla

$$T = \frac{30.0}{299792458} \sqrt{1 + \frac{2(938.2720813)}{500}} \text{ s} = \boxed{2.18 \times 10^{-7} \text{ s}}.$$

Sabit ivme yerine sabit kuvvet kullanılması, hızdaki görelî değişimi hesaba katar.

B.1

Doğrusal yol için,

$$v = \frac{l}{t}.$$

Görelî momentum

$$p = \gamma m v = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

bağıntısını sağlar. m için çözüldüğünde,

$$m = \frac{p}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = p \sqrt{\frac{t^2}{l^2} - \frac{1}{c^2}}.$$

Bu nedenle,

$$m = \frac{p}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{l}\right)^2 - 1}.$$

Bu ifade tamdır; $v = c$ çevresinde bir açılım yapılması gerekmez.

B.2

B.1'deki sonuç uçuş süresi için çözüldüğünde

$$t(m) = \frac{l}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2}.$$

elde edilir. Momentumlar eşit olduğunda, daha ağır olan kaon daha geç ulaşır. Aralarındaki süre farkı

$$t_K - t_\pi = \frac{l}{c} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{m_K c}{p}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{m_\pi c}{p}\right)^2} \right].$$

olur. Gerekli ayırım koşulu

$$t_K - t_\pi > 3(150 \text{ ps}) = 450 \text{ ps}.$$

şeklindedir. Dolayısıyla eşik uzunluğu

$$l_{\text{crit}} = \frac{3\sigma_t c}{\sqrt{1 + (m_K c/p)^2} - \sqrt{1 + (m_\pi c/p)^2}}, \quad \sigma_t = 150 \text{ ps}.$$

$p = 1000 \text{ MeV}/c$ kullanıldığında,

$$l_{\text{crit}} = \frac{(450 \times 10^{-12})(299792458)}{\sqrt{1 + (494/1000)^2} - \sqrt{1 + (140/1000)^2}} \text{ m}.$$

Boyutsuz payda 0.10561117'dir ve buradan

$$l_{\text{crit}} = 1.27739 \dots \text{ m}.$$

elde edilir. Dolayısıyla l , bu eşik değerini aşmalıdır; yaklaşık $\boxed{1.28 \text{ m}}$ gereklidir. Kaonun kütlesi p/c 'ye kıyasla ihmal edilebilir olmadığından, tam görelî ifade kullanılmıştır.

B.3

Parçacığın demet hattına paralel momentumu olmadığından, momentumunun tamamı manyetik alana diktir. A.3'te olduğu gibi,

$$p = eBr.$$

Manyetik alan iş yapmadığından, sürat dairesel yörünge boyunca sabittir.

Parçacığın ToF tüpüne ilk kez ulaşınca kadar yörünge merkezi etrafında taradığı açı θ olsun. Çarpışma noktası ile algılama noktası arasındaki uzaklık, tüp yarıçapı R 'ye eşittir. Bu iki nokta aynı zamanda yarıçapı r olan yörünge çemberinin bir kirişinin uç noktalarıdır. Dolayısıyla,

$$R = 2r \sin \frac{\theta}{2}.$$

Tüple ilk karşılaşma için,

$$\theta = 2 \arcsin \frac{R}{2r},$$

ve uçuş yolu uzunluğu

$$s = r\theta = 2r \arcsin \frac{R}{2r}.$$

olur. Bunun için $r \geq R/2$ gereklidir; daha küçük bir yörünge tüpe hiçbir zaman ulaşmaz.

Sürat

$$v = \frac{s}{t}.$$

olur. B.1'deki kütle formülünde gerçek yol uzunluğu s kullanılıp $p = eBr$ bağıntısıyla birleştirildiğinde,

$$m = \frac{eBr}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{s}\right)^2 - 1}.$$

Sonuç olarak,

$$m = \frac{eBr}{c} \sqrt{\left[\frac{ct}{2r \arcsin(R/(2r))}\right]^2 - 1}.$$

Ters sinüs radyan cinsinden hesaplanır.

B.4

Her parçacık için,

$$s = 2r \arcsin \frac{3.70 \text{ m}}{2r}, \quad p = e(0.500 \text{ T})r,$$

ve

$$m = \frac{p}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{s}\right)^2 - 1}.$$

bağıntılarını kullanınız.

Momentum birimi dönüşümü doğrudan $p = eBr$ bağıntısından elde edilir:

$$p [\text{GeV}/c] = 0.299792458 B [\text{T}] r [\text{m}].$$

Hesaplanan kütleleri Tablo 2 ile karşılaştırmak için ara hesaplarda ek basamaklar korunduğunda şu sonuçlar elde edilir:

Parçacık	Yol uzunluğu s [m]	Momentum p [MeV/ c]	Hesaplanan kütle [MeV/ c^2]	Tanımlanan parçacık
A	3.7864	764.47	938.65	Proton
B	4.0019	440.69	139.32	Yüklü pion
C	3.7600	908.37	935.10	Proton
D	4.2908	346.26	495.90	Yüklü kaon

Tablodaki kütlelerden küçük sapmalar, ölçüm değerlerinin yuvarlatılmış olmasıyla tutarlıdır. Uygun bir hassasiyetle,

$A :$	$m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$	proton,
$B :$	$m \approx 0.14 \text{ GeV}/c^2$	yüklü pion,
$C :$	$m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$	proton,
$D :$	$m \approx 0.50 \text{ GeV}/c^2$	yüklü kaon.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.