

IPhO 2016

Теоретические задачи и решения · Цюрих, Швейцария · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/2016/

Задача 1: Две задачи по механике

Прежде чем приступать к этой задаче, прочитайте общие инструкции, находящиеся в отдельном конверте.

Часть А. Скрытый диск (3.5 балла)

Рассмотрим сплошной деревянный цилиндр радиуса r_1 и толщины h_1 . В некотором месте внутри деревянного цилиндра дерево заменено металлическим диском радиуса r_2 и толщины h_2 . Металлический диск расположен так, что его ось симметрии B параллельна оси симметрии S деревянного цилиндра, а расстояния от диска до верхнего и нижнего оснований деревянного цилиндра одинаковы. Обозначим расстояние между S и B через d . Плотность дерева равна ρ_1 , плотность металла равна $\rho_2 > \rho_1$. Общая масса деревянного цилиндра с находящимся внутри металлическим диском равна M .

В этой задаче мы кладём деревянный цилиндр на опорную поверхность так, чтобы он мог свободно катиться влево и вправо. Вид установки сбоку и сверху показан на рис. 1.

Цель этой задачи — определить размеры и положение металлического диска.

Далее, когда требуется выразить результат через известные величины, всегда можно считать известными следующие величины:

$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

Необходимо определить r_2 , h_2 и d с помощью косвенных измерений.

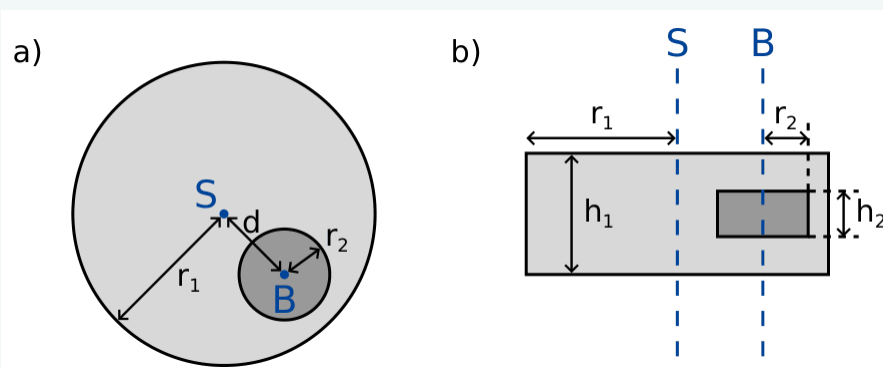


Рисунок 1: а) вид сбоку б) вид сверху

Обозначим через b расстояние между центром масс C всей системы и осью симметрии S деревянного цилиндра. Чтобы определить это расстояние, проведём следующий опыт: положим деревянный цилиндр на горизонтальную подставку так, чтобы он находился в устойчивом равновесии. Теперь медленно наклоним подставку на угол Θ (см. рис. 2).

Благодаря трению покоя деревянный цилиндр может свободно катиться без проскальзывания. Он немного скатится вниз по наклонной плоскости, но затем остановится в положении устойчивого равновесия, повернувшись на угол ϕ , который мы измеряем.

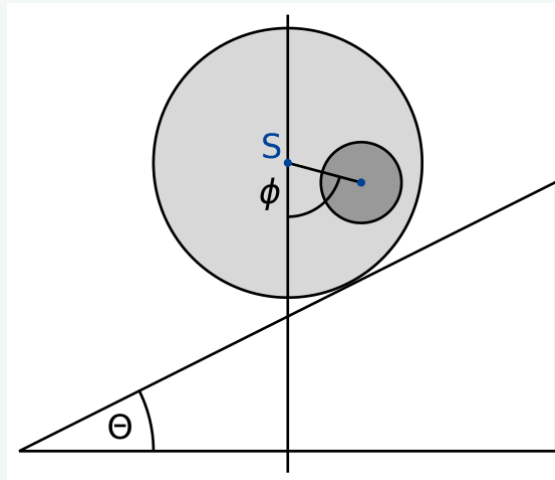


Рисунок 2: Цилиндр на наклонной подставке.

A.1 — 0.8 балла

Найдите выражение для b через величины (1), угол ϕ и угол наклона подставки Θ .

В дальнейшем можно считать значение b известным.

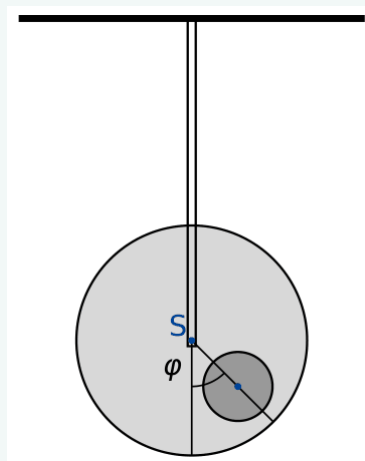


Рисунок 3: Подвешенная система.

Теперь мы хотим измерить момент инерции I_S системы относительно оси симметрии S . Для этого подвесим деревянный цилиндр за его ось симметрии на жёстком стержне. Затем отклоним его от положения равновесия на малый угол φ и отпустим. Установка показана на рисунке 3. Мы обнаруживаем, что φ изменяется периодически с периодом T .

A.2 — 0.5 балла

Найдите уравнение движения для φ . Выразите момент инерции I_S системы относительно её оси симметрии S через T , b и известные величины (1). Можно считать, что отклонение от положения равновесия мало, так что φ всегда очень мал.

Используя измерения из пунктов **A.1** и **A.2**, теперь мы хотим определить размеры и положение металлического диска внутри деревянного цилиндра.

A.3 — 0.4 балла

Найдите выражение для расстояния d через b и величины (1). В выражение можно также включить переменные r_2 и h_2 , поскольку они будут вычислены в пункте A.5.

A.4 — 0.7 балла

Найдите выражение для момента инерции I_S через b и известные величины (1). В выражение можно также включить переменные r_2 и h_2 , поскольку они будут вычислены в пункте A.5.

A.5 — 1.1 балла

Используя все полученные выше результаты, запишите выражения для h_2 и r_2 через b , T и известные величины (1). Можно выразить h_2 через r_2 .

Часть В. Вращающаяся космическая станция (6.5 балла)

Алиса — космонавт, живущий на космической станции. Космическая станция представляет собой гигантское колесо радиуса R , вращающееся вокруг своей оси и тем самым создающее искусственную тяжесть для космонавтов. Космонавты живут на внутренней стороне обода колеса. Гравитационным притяжением космической станции и кривизной пола можно пренебречь.

В.1 — 0.5 балла

С какой угловой скоростью ω_{ss} должна вращаться космическая станция, чтобы космонавты ощущали такое же ускорение свободного падения g_E , как на поверхности Земли?

Алиса и её друг-космонавт Боб спорят. Боб не верит, что они действительно живут на космической станции, и утверждает, что они находятся на Земле. Алиса хочет с помощью физики доказать Бобу, что они живут на вращающейся космической станции. Для этого она прикрепляет груз массы m к пружине жёсткости k и приводит его в колебательное движение. Груз колеблется только в вертикальном направлении и не может двигаться в горизонтальном направлении.

В.2 — 0.2 балла

Считая, что на Земле ускорение свободного падения постоянно и равно g_E , найдите угловую частоту колебаний ω_E , которую измерил бы человек на Земле.

В.3 — 0.6 балла

Какую угловую частоту колебаний ω измеряет Алиса на космической станции?

Алиса убеждена, что её опыт доказывает, что они находятся на вращающейся космической станции. Боб по-прежнему настроен скептически. Он утверждает, что при учёте изменения ускорения свободного падения с высотой над поверхностью Земли получается аналогичный эффект. В следующих пунктах мы исследуем, прав ли Боб.

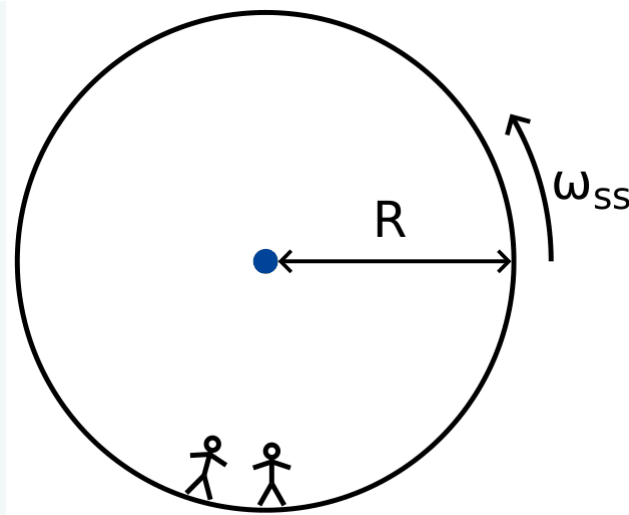


Рисунок 4: Космическая станция

В.4 — 0.8 балла

Выведите выражение для ускорения свободного падения $g_E(h)$ на малых высотах h над поверхностью Земли и вычислите частоту колебаний $\tilde{\omega}_E$ груза (достаточно линейного приближения). Обозначьте радиус Земли через R_E . Пренебрегите вращением Земли.

Действительно, на этой космической станции Алиса обнаруживает, что пружинный маятник колеблется с частотой, предсказанной Бобом.

В.5 — 0.3 балла

При каком радиусе R космической станции частота колебаний ω совпадает с частотой колебаний $\tilde{\omega}_E$ на Земле? Выразите ответ через R_E .

Раздражённая упрямством Боба, Алиса придумывает опыт, чтобы доказать свою правоту. Для этого она поднимается на башню высоты H над полом космической станции и роняет груз. Этот опыт можно рассмотреть как во вращающейся, так и в инерциальной системе отсчёта.

В равномерно вращающейся системе отсчёта космонавты ощущают силу инерции $\vec{F}_C$, называемую силой Кориолиса. Сила $\vec{F}_C$, действующая на тело массы m , движущееся со скоростью $\vec{v}$ в системе отсчёта, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}_{ss}$, задаётся выражением

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss}. \quad (2)$$

Для модулей величин можно использовать выражение

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi, \quad (3)$$

где ϕ — угол между скоростью и осью вращения. Сила перпендикулярна как скорости v , так и оси вращения. Знак силы можно определить по правилу правой руки, но далее вы можете выбрать его произвольно.

В.6 — 1.1 балла

Вычислите горизонтальную скорость v_x и горизонтальное смещение d_x груза (относительно основания башни, в направлении, перпендикулярном башне) в момент его удара о пол. Можно считать, что высота башни H мала, так что ускорение, измеряемое космонавтами, остаётся постоянным во время падения. Также можно считать, что $d_x \ll H$.

Чтобы получить хороший результат, Алиса решает провести этот опыт с гораздо более высокой башни, чем прежде. К её удивлению, груз падает на пол у основания башни, так что $d_x = 0$.

В.7 — 1.3 балла

Найдите нижнюю границу высоты башни, при которой возможно $d_x = 0$.

Алиса готова предпринять последнюю попытку убедить Боба. Она хочет использовать свой пружинный маятник, чтобы показать действие силы Кориолиса. Для этого она изменяет исходную установку: прикрепляет пружину к кольцу, которое может свободно, без трения скользить по горизонтальному стержню в направлении x . Сама пружина совершает колебания в направлении y . Стержень параллелен полу и перпендикулярен оси вращения космической станции. Таким образом, плоскость xy перпендикулярна оси вращения, а направление y обращено прямо к центру вращения станции.

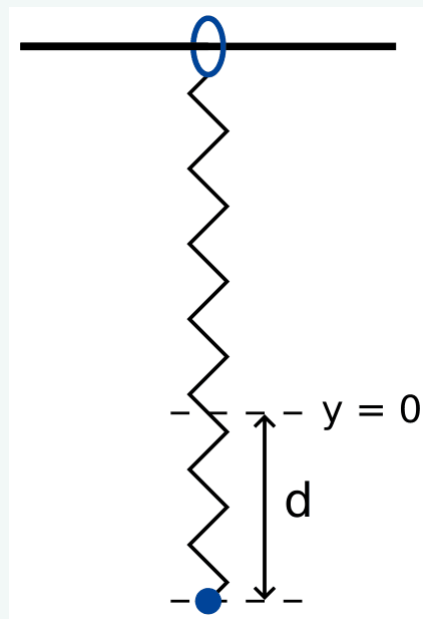


Рисунок 5: Установка.

В.8 — 1.7 балла

Алиса оттягивает груз вниз на расстояние d от положения равновесия $x = 0, y = 0$, а затем отпускает его (см. рисунок 5).

- Запишите алгебраические выражения для $x(t)$ и $y(t)$. Можно считать, что $\omega_{ss}d$ мало, и пренебречь силой Кориолиса для движения вдоль оси y .
- Изобразите эскиз траектории $(x(t), y(t))$, отметив все важные особенности, в том числе амплитуду.

Алиса и Боб продолжают спорить.

Общие справочные данные

Скорость света в вакууме	c	$= 299\,792\,458\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Магнитная проницаемость вакуума (магнитная постоянная)	μ_0	$= 4\pi \times 10^{-7}\text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Диэлектрическая проницаемость вакуума (электрическая постоянная)	ε_0	$= 8.854\,187\,817 \times 10^{-12}\text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Элементарный заряд	e	$= 1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19}\text{ A} \cdot \text{s}$
Масса электрона	m_e	$= 9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31}\text{ kg}$
		$= 0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Масса протона	m_p	$= 1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27}\text{ kg}$
		$= 938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Масса нейтрона	m_n	$= 1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27}\text{ kg}$
		$= 939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Унифицированная атомная единица массы	u	$= 1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27}\text{ kg}$
Постоянная Ридберга	R_∞	$= 10\,973\,731.568\,508(65)\text{ m}^{-1}$
Гравитационная постоянная	G	$= 6.674\,08(31) \times 10^{-11}\text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Ускорение свободного падения (в Цюрихе)	g	$= 9.81\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Постоянная Планка	h	$= 6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34}\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Число Авогадро	N_A	$= 6.022\,140\,857(74) \times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	R	$= 8.314\,4598(48)\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Постоянная молярной массы	M_u	$= 1 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Постоянная Больцмана	k_B	$= 1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23}\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Постоянная Стефана — Больцмана	σ	$= 5.670\,367(13) \times 10^{-8}\text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Для части А определим массу полностью деревянного цилиндра и избыточную массу, обусловленную заменой дерева металлом:

$$m_0 = \pi \rho_1 r_1^2 h_1, \quad \Delta m = M - m_0 = \pi(\rho_2 - \rho_1) r_2^2 h_2.$$

Для части В обозначим $\Omega = \omega_{ss}$ и выберем направление $+x$ по направлению вращения станции, а $+y$ — к её центру.

• А.1

$$b = \frac{r_1 \sin \Theta}{\sin \phi}.$$

• A.2

$$I_S \ddot{\varphi} = -Mgb \sin \varphi \simeq -Mgb \varphi, \quad I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2}.$$

• A.3

$$d = \frac{Mb}{\Delta m} = \frac{Mb}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2 h_2}.$$

• A.4

$$I_S = \frac{1}{2}m_0 r_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m r_2^2 + \frac{M^2 b^2}{\Delta m}.$$

• A.5

$$r_2 = \sqrt{\frac{MgbT^2}{2\pi^2 \Delta m} - \frac{m_0 r_1^2}{\Delta m} - \frac{2M^2 b^2}{(\Delta m)^2}}, \quad h_2 = \frac{\Delta m}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2}.$$

• B.1

$$\omega_{ss} = \sqrt{\frac{g_E}{R}}.$$

• B.2

$$\omega_E = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

• B.3

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g_E}{R}}.$$

• B.4

$$g_E(h) = \frac{g_E}{(1 + h/R_E)^2} \simeq g_E \left(1 - \frac{2h}{R_E}\right), \quad \tilde{\omega}_E = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}}.$$

• B.5

$$R = \frac{R_E}{2}.$$

• B.6

$$v_x = -2\Omega H, \quad d_x = -\frac{2}{3}\Omega H \sqrt{\frac{2H}{g_E}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}H \sqrt{\frac{H}{R}}.$$

Обе величины направлены против вращения станции.

- **B.7** Строгая нижняя граница имеет вид

$$H > R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2}} \right) \simeq 0.8428R.$$

Первое точное возвращение к основанию башни происходит при

$$H_{\min} \simeq 0.8716R.$$

- **B.8** При $a = 2\Omega d/\omega$

$$x(t) = a[\omega t - \sin(\omega t)], \quad y(t) = -d \cos(\omega t).$$

Траектория состоит из последовательных циклоидальных арок с точками возврата в $(2\pi na, -d)$, верхними точками поворота в $((2n + 1)\pi a, d)$ и горизонтальным шагом $2\pi a$. Вертикальная амплитуда равна d .

Решение

A.1

Пусть P — точка контакта с наклонной подставкой. Сила нормальной реакции и сила трения покоя приложены в точке P , поэтому их моменты относительно P равны нулю. Следовательно, для статического равновесия необходимо, чтобы вертикальная прямая, проходящая через центр масс C , проходила и через P .

Центр масс лежит на прямой SB . Используя углы, показанные на рисунке 2, получаем, что горизонтальные смещения точек P и C относительно S соответственно равны

$$x_P - x_S = r_1 \sin \Theta, \quad x_C - x_S = b \sin \phi.$$

Следовательно,

$$Mg(b \sin \phi - r_1 \sin \Theta) = 0,$$

откуда

$$b = \frac{r_1 \sin \Theta}{\sin \phi}.$$

Устойчивому равновесию соответствует ветвь с $\cos \phi > 0$. В частности, наклон должен быть достаточно малым, чтобы выполнялось $r_1 \sin \Theta < b$; равенство соответствует предельной конфигурации, в которой восстанавливающий момент отсутствует.

A.2

Подвес закрепляет ось S . Сила тяжести приложена в точке C , находящейся на расстоянии b от этой оси, и создаёт восстанавливающий момент

$$\tau_S = -Mgb \sin \varphi.$$

Поэтому уравнение вращательного движения имеет вид

$$I_S \ddot{\varphi} = -Mgb \sin \varphi.$$

При $|\varphi| \ll 1$ используем $\sin \varphi \simeq \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgb}{I_S} \varphi = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний, для которых

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{Mgb}{I_S}.$$

Таким образом,

$$I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2},$$

где данное в условии ускорение свободного падения равно $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$.

A.3

Представим фактическое распределение плотности в виде суммы:

1. Целого деревянного цилиндра массы

$$m_0 = \pi \rho_1 r_1^2 h_1,$$

с центром на оси S .

2. Дополнительного диска плотности $\rho_2 - \rho_1$ с центром на оси B и массой

$$\Delta m = \pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2 h_2 = M - m_0.$$

Такое представление учитывает дерево, удалённое перед установкой металла.

Вычисляя первый момент массы относительно S , получаем

$$Mb = m_0(0) + \Delta m d.$$

Отсюда следует

$$d = \frac{Mb}{\Delta m} = \frac{Mb}{M - \pi \rho_1 r_1^2 h_1} = \frac{Mb}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2 h_2}.$$

A.4

Вклад целого деревянного цилиндра равен

$$I_{\text{wood}} = \frac{1}{2} m_0 r_1^2.$$

Момент инерции дополнительного диска относительно собственной оси симметрии равен $\frac{1}{2} \Delta m r_2^2$. По теореме Штейнера его вклад в момент инерции относительно S равен

$$I_{\text{additional}} = \frac{1}{2} \Delta m r_2^2 + \Delta m d^2.$$

Поэтому

$$I_S = \frac{1}{2} m_0 r_1^2 + \frac{1}{2} \Delta m r_2^2 + \Delta m d^2.$$

Подставляя $d = Mb/\Delta m$, получаем

$$I_S = \frac{1}{2} m_0 r_1^2 + \frac{1}{2} \Delta m r_2^2 + \frac{M^2 b^2}{\Delta m}.$$

A.5

Приравнявая выражения для I_S из A.2 и A.4, получаем

$$\frac{MgbT^2}{4\pi^2} = \frac{1}{2}m_0r_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m r_2^2 + \frac{M^2b^2}{\Delta m}.$$

Выражая r_2^2 , находим

$$r_2^2 = \frac{MgbT^2}{2\pi^2\Delta m} - \frac{m_0r_1^2}{\Delta m} - \frac{2M^2b^2}{(\Delta m)^2}.$$

Берём положительный корень:

$$r_2 = \sqrt{\frac{MgbT^2}{2\pi^2\Delta m} - \frac{m_0r_1^2}{\Delta m} - \frac{2M^2b^2}{(\Delta m)^2}}.$$

Затем соотношение для массы определяет толщину:

$$h_2 = \frac{\Delta m}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2}.$$

Здесь $m_0 = \pi\rho_1r_1^2h_1$ и $\Delta m = M - m_0$, поэтому все величины в правой части известны или измерены. Физически согласованные результаты измерений должны давать положительное подкоренное выражение и удовлетворять условиям $d + r_2 \leq r_1$ и $h_2 \leq h_1$.

В.1

Космонавт, неподвижный относительно обода, движется по окружности радиуса R .

Необходимое центростремительное ускорение равно

$$a_c = \omega_{ss}^2 R.$$

Сила нормальной реакции, обеспечивающая это ускорение, воспринимается космонавтом как его вес. Для совпадения с ускорением на Земле необходимо

$$\omega_{ss}^2 R = g_E.$$

Таким образом,

$$\omega_{ss} = \sqrt{\frac{g_E}{R}}.$$

Далее обозначим $\Omega = \omega_{ss}$.

В.2

Пусть y обозначает смещение вверх от положения равновесия пружинного маятника.

Постоянная сила тяжести изменяет равновесное удлинение, но сокращается при записи уравнения относительно положения равновесия:

$$m\ddot{y} = -ky.$$

Поэтому

$$\omega_E = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

В.3

Рассмотрим вращающуюся систему отсчёта и направим y радиально внутрь от положения равновесия. Если радиус в положении равновесия равен r_0 , то мгновенный радиус равен $r_0 - y$.

Центробежная сила направлена наружу и имеет модуль

$$m\Omega^2(r_0 - y).$$

Направленная внутрь сила упругости пружины уменьшается на ky , когда груз смещается внутрь на y . В положении равновесия её значение F_0 удовлетворяет соотношению

$$F_0 = m\Omega^2 r_0.$$

Поэтому уравнение движения в направлении внутрь имеет вид

$$m\ddot{y} = (F_0 - ky) - m\Omega^2(r_0 - y) = -(k - m\Omega^2)y.$$

Связь, ограничивающая горизонтальное движение, уравнивает силу Кориолиса, поэтому та не изменяет это радиальное уравнение. Следовательно,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g_E}{R}}.$$

Для колебаний необходимо $k/m > \Omega^2$.

B.4

Пусть M_E — масса Земли. Закон всемирного тяготения Ньютона даёт

$$g_E(h) = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2}.$$

Поскольку $g_E = GM_E/R_E^2$,

$$g_E(h) = g_E \left(1 + \frac{h}{R_E}\right)^{-2}.$$

При $h \ll R_E$ разложение до первого порядка имеет вид

$$g_E(h) \simeq g_E \left(1 - \frac{2h}{R_E}\right).$$

Пусть высота положения равновесия равна h_0 , а y — смещение вверх от положения равновесия. Вычитая условие равновесия сил, получаем

$$m\ddot{y} = -ky - m[g_E(h_0 + y) - g_E(h_0)].$$

В линейном приближении

$$g_E(h_0 + y) - g_E(h_0) \simeq -\frac{2g_E}{R_E}y.$$

Таким образом,

$$m\ddot{y} = -\left(k - \frac{2mg_E}{R_E}\right)y,$$

откуда

$$\tilde{\omega}_E = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}}.$$

Ускорение свободного падения уменьшается с высотой, поэтому смещение вверх уменьшает направленную вниз силу тяжести. Это ослабляет результирующую восстанавливающую силу и снижает частоту.

B.5

Приравнявая квадраты частот из B.3 и B.4, получаем

$$\frac{k}{m} - \frac{g_E}{R} = \frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}.$$

Следовательно,

$$\boxed{R = \frac{R_E}{2}}.$$

B.6

Выберем направление $+x$ по направлению вращения станции, а $+y$ — внутрь, к её центру. При таком выборе составляющие ускорения Кориолиса равны

$$a_{C,x} = 2\Omega\dot{y}, \quad a_{C,y} = -2\Omega\dot{x}.$$

Для невысокой башни приближённо примем направленное вниз ускорение постоянным и равным $g_E = \Omega^2 R$. Малое горизонтальное отклонение позволяет пренебречь его обратным влиянием на вертикальное падение. Для груза, отпущенного без начальной скорости,

$$y(t) = H - \frac{1}{2}g_E t^2, \quad \dot{y} = -g_E t.$$

Время до удара равно

$$t_f = \sqrt{\frac{2H}{g_E}}.$$

Уравнение горизонтального движения принимает вид

$$\ddot{x} = 2\Omega\dot{y} = -2\Omega g_E t.$$

Интегрируя с учётом $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, получаем

$$\dot{x} = -\Omega g_E t^2, \quad x = -\frac{1}{3}\Omega g_E t^3.$$

В момент удара

$$\boxed{v_x = -\Omega g_E t_f^2 = -2\Omega H},$$

и

$$\boxed{d_x = -\frac{1}{3}\Omega g_E t_f^3 = -\frac{2}{3}\Omega H \sqrt{\frac{2H}{g_E}}}.$$

Используя $\Omega^2 = g_E/R$, получаем

$$\boxed{d_x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}H\sqrt{\frac{H}{R}}}.$$

Груз падает позади башни, в направлении, противоположном вращению. Условие согласованности приближения имеет вид

$$\frac{|d_x|}{H} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{H}{R}} \ll 1,$$

как и ожидается при $H \ll R$.

В.7

Для высокой башни воспользуемся инерциальной системой отсчёта и полностью учтём круговую геометрию. Приближение постоянного ускорения из В.6 уже неприменимо.

Пусть

$$r = R - H$$

— расстояние от точки отпускания груза до центра станции, причём $0 < r < R$. Выберем инерциальные координаты так, чтобы груз отпускали в точке $(r, 0)$ с касательной скоростью $(0, \Omega r)$.

После отпускания на груз не действуют реальные силы, поэтому его траектория — прямая:

$$X(t) = r, \quad Y(t) = \Omega r t.$$

Он впервые достигает обода, когда

$$X^2 + Y^2 = R^2.$$

Обозначая $u = \Omega t_f$, получаем

$$r^2(1 + u^2) = R^2, \quad u = \sqrt{\frac{R^2}{r^2} - 1}.$$

В момент удара угловая координата груза равна

$$\alpha = \arctan u, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

тогда как основание башни повернулось на угол u .

Чтобы груз попал в основание башни, их углы должны совпадать по модулю 2π :

$$u - \arctan u = 2\pi n.$$

При $u > 0$ выполняется $u > \arctan u$, поэтому $n = 0$ не может соответствовать ненулевой высоте башни. Следовательно, $n \geq 1$, откуда

$$u = 2\pi n + \arctan u > 2\pi.$$

Таким образом,

$$\frac{R^2}{r^2} - 1 > 4\pi^2, \quad r < \frac{R}{\sqrt{1 + 4\pi^2}}.$$

Поскольку $H = R - r$,

$$H > R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2}} \right) \simeq 0.8428R.$$

Для станции, определённой в В.5, это даёт $H > 0.4214R_E$.

Можно также найти наименьшую высоту, обеспечивающую точное возвращение. Функция

$$f(u) = u - \arctan u$$

строго возрастает при $u > 0$, поскольку

$$f'(u) = \frac{u^2}{1 + u^2} > 0.$$

Поэтому наименьшей высоте возвращения соответствует $n = 1$. Решение уравнения

$$u_1 - \arctan u_1 = 2\pi$$

даёт

$$u_1 \simeq 7.72525.$$

Следовательно,

$$H_{\min} = R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + u_1^2}} \right) \simeq 0.871625R.$$

Это более точное значение согласуется с требуемой нижней границей.

В.8

По-прежнему направим $+x$ по вращению, а $+y$ — внутрь. Свободно скользящий подвес не создаёт горизонтальной восстанавливающей силы.

Используем локальное приближение плоского пола и, как указано в условии, пренебрежём направленной вдоль y силой Кориолиса, возникающей из-за горизонтального движения.

Вертикальное уравнение остаётся прежним:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} - \Omega^2.$$

Начальные условия имеют вид

$$y(0) = -d, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Следовательно,

$$y(t) = -d \cos(\omega t).$$

Горизонтальное движение вызывается силой Кориолиса, связанной с вертикальной скоростью:

$$\ddot{x} = 2\Omega \dot{y}.$$

Интегрируя один раз, получаем

$$\dot{x} = 2\Omega [y(t) - y(0)] = 2\Omega d [1 - \cos(\omega t)].$$

Интегрируя ещё раз, получаем

$$x(t) = 2\Omega d \left[t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right].$$

Для описания эскиза введём обозначения

$$a = \frac{2\Omega d}{\omega}, \quad \tau = \omega t, \quad P = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Тогда

$$x = a(\tau - \sin \tau), \quad y = -d \cos \tau.$$

Это циклоида с независимо изменёнными масштабами горизонтальной и вертикальной координат.

Одна полная арка содержит следующие точки:

Время	x/a	y/d	Особенность
0	0	-1	Начальная точка возврата; груз неподвижен
$P/4$	$\pi/2 - 1$	0	Прохождение высоты равновесия при движении вверх
$P/2$	π	1	Наивысшая точка; горизонтальная касательная
$3P/4$	$3\pi/2 + 1$	0	Прохождение высоты равновесия при движении вниз
P	2π	-1	Следующая точка возврата; груз мгновенно останавливается

Полный эскиз состоит из этих арок, повторяющихся в сторону увеличения x :

- Вертикальная амплитуда равна d , а y изменяется от $-d$ до $+d$.
- Точки возврата находятся в $(2\pi na, -d)$, с вертикальными предельными касательными.
- Верхние точки поворота находятся в $((2n + 1)\pi a, d)$, с горизонтальными касательными.
- Расстояние между последовательными точками возврата равно

$$L = 2\pi a = \frac{4\pi\Omega d}{\omega}.$$

- Поскольку

$$\dot{x} = 2\Omega d(1 - \cos \omega t) \geq 0,$$

траектория непрерывно продвигается в направлении $+x$, не образуя петель.

- Средняя горизонтальная скорость дрейфа равна $2\Omega d$; горизонтальные колебания относительно этого равномерного дрейфа имеют амплитуду a .

Эти выражения применимы, пока остаются справедливыми указанное пренебрежение вертикальной силой Кориолиса и локальное приближение плоского пола.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Нелинейная динамика в электрических цепях

Прежде чем приступить к этой задаче, прочитайте общие инструкции, находящиеся в отдельном конверте.

Введение

Бистабильные нелинейные полупроводниковые элементы (например, тиристоры) широко используются в электронике в качестве переключателей и генераторов электромагнитных колебаний. Основная область применения тиристоров — управление переменными токами в силовой электронике, например выпрямление переменного тока в постоянный при мощностях порядка мегаватт. Бистабильные элементы могут также служить модельными системами для изучения явлений самоорганизации в физике (эта тема рассматривается в части В задачи), биологии (см. часть С) и других областях современной нелинейной науки.

Цели

Изучить неустойчивости и нетривиальную динамику цепей, содержащих элементы с нелинейными $I - V$ -характеристиками. Выявить возможные применения таких цепей в технике и при моделировании биологических систем.

Часть А. Стационарные состояния и неустойчивости (3 балла)

На рис. 1 показана так называемая **S-образная** $I - V$ -характеристика нелинейного элемента X . В диапазоне напряжений между $U_h = 4.00 \text{ V}$ (напряжение удержания) и $U_{th} = 10.0 \text{ V}$ (пороговое напряжение) эта $I - V$ -характеристика многозначна. Для простоты график на рис. 1 выбран кусочно-линейным (каждая ветвь представляет собой отрезок прямой). В частности, прямая, содержащая верхнюю ветвь, при продолжении проходит через начало координат. Это приближение хорошо описывает реальные тиристоры.

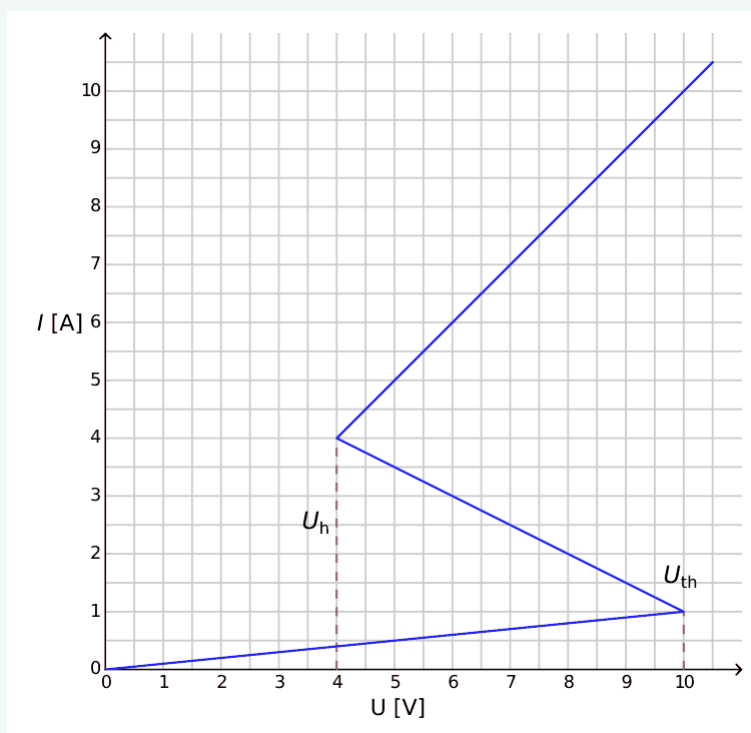


Рисунок 1: $I - V$ -характеристика нелинейного элемента X .

А.1 — 0.4 балла

Используя график, определите сопротивление $R_{\text{он}}$ элемента X на верхней ветви $I - V$ -характеристики и сопротивление $R_{\text{офф}}$ на нижней ветви соответственно. Средняя ветвь описывается уравнением

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \quad (1)$$

Найдите значения параметров I_0 и R_{int} .

Элемент X соединён последовательно (см. рис. 2) с резистором R , катушкой индуктивности L и идеальным источником напряжения $\mathcal{E}$. Говорят, что цепь находится в стационарном состоянии, если ток не изменяется со временем, $I(t) = \text{const}$.

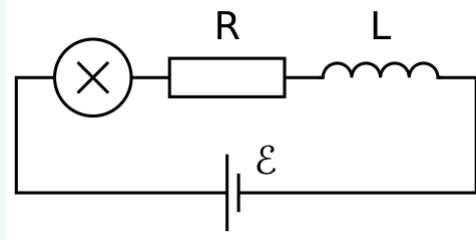


Рисунок 2: Цепь с элементом X , резистором R , катушкой индуктивности L и источником напряжения $\mathcal{E}$.

А.2 — 1 балл

Какое число стационарных состояний может иметь цепь на рис. 2 при фиксированном значении $\mathcal{E}$ и $R = 3.00 \, \Omega$? Как изменится ответ при $R = 1.00 \, \Omega$?

А.3 — 0.6 балла

Пусть в цепи, показанной на рис. 2, $R = 3.00 \, \Omega$, $L = 1.00 \, \mu\text{H}$ и $\mathcal{E} = 15.0 \, \text{V}$. Определите значения тока $I_{\text{stationary}}$ и напряжения $V_{\text{stationary}}$ на нелинейном элементе X в стационарном состоянии.

Цепь на рис. 2 находится в стационарном состоянии с $I(t) = I_{\text{stationary}}$. Это стационарное состояние называют устойчивым, если после небольшого отклонения (увеличения или уменьшения тока) ток возвращается к стационарному значению. Если же система продолжает удаляться от стационарного состояния, его называют неустойчивым.

А.4 — 1 балл

Используя численные значения из вопроса А.3, исследуйте устойчивость стационарного состояния с $I(t) = I_{\text{stationary}}$. Устойчиво оно или неустойчиво?

Часть В. Бистабильные нелинейные элементы в физике: радиопередатчик (5 баллов)

Теперь исследуем новую конфигурацию цепи (см. рис. 3). На этот раз нелинейный элемент X подключён параллельно конденсатору ёмкостью $C = 1.00 \, \mu\text{F}$. Этот блок, в свою очередь, соединён последовательно с резистором сопротивлением $R = 3.00 \, \Omega$ и идеальным источником постоянного напряжения $\mathcal{E} = 15.0 \, \text{V}$. Оказывается, в этой цепи возникают колебания, в ходе одного цикла которых нелинейный элемент X скачком переходит с одной ветви $I - V$ -характеристики на другую.

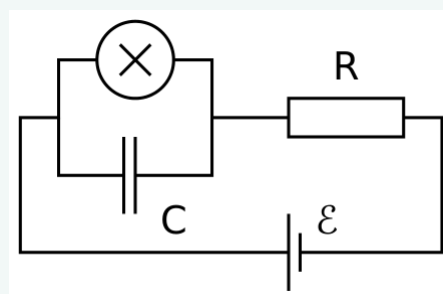


Рисунок 3: Цепь с элементом X , конденсатором C , резистором R и источником напряжения $\mathcal{E}$.

В.1 — 1.8 балла

Изобразите цикл колебаний на графике $I - V$, указав также направление его обхода (по часовой стрелке или против часовой стрелки). Обоснуйте ответ с помощью уравнений и схематических графиков.

В.2 — 1.9 балла

Найдите выражения для промежутков времени t_1 и t_2 , которые система проводит на каждой ветви графика $I - V$ в течение цикла колебаний. Определите их численные значения. Найдите численное значение периода колебаний T , считая время переходов между ветвями графика $I - V$ пренебрежимо малым.

В.3 — 0.7 балла

Оцените среднюю мощность P , рассеиваемую нелинейным элементом за одно колебание. Достаточно оценки по порядку величины.

Цепь на рис. 3 используется для создания радиопередатчика. Для этого элемент X подключают к одному концу линейной антенны (длинного прямого провода) длиной s . Другой конец провода свободен. В антенне образуется стоячая электромагнитная волна. Скорость электромагнитных волн вдоль антенны такая же, как в вакууме. Передатчик использует основную гармонику системы, период которой равен T из вопроса В.2.

В.4 — 0.6 балла

Каково оптимальное значение s , если оно не может превышать 1 km?

Часть С. Бистабильные нелинейные элементы в биологии: нейристор (2 балла)

В этой части задачи мы рассматриваем применение бистабильных нелинейных элементов для моделирования биологических процессов. Нейрон человеческого мозга обладает следующим свойством: при возбуждении внешним сигналом он совершает одно-единственное колебание, а затем возвращается в исходное состояние. Это свойство называется возбудимостью. Благодаря ему импульсы могут распространяться по сети связанных нейронов, образующих нервные системы. Полупроводниковая микросхема, предназначенная для воспроизведения возбудимости и распространения импульсов, называется *нейристором* (от слов «нейрон» и «транзистор»).

Попробуем смоделировать простой нейристор с помощью цепи, содержащей исследованный ранее нелинейный элемент X . Для этого напряжение $\mathcal{E}$ в цепи на рис. 3 уменьшают до значения $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$. Колебания прекращаются, и система достигает стационарного состояния. Затем напряжение быстро увеличивают обратно до значения $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$, а через промежуток времени τ (при $\tau < T$) вновь устанавливают равным $\mathcal{E}'$ (см. рис. 4). Оказывается, существует некоторое критическое значение τ_{crit} , и поведение системы качественно различается при $\tau < \tau_{\text{crit}}$ и при $\tau > \tau_{\text{crit}}$.

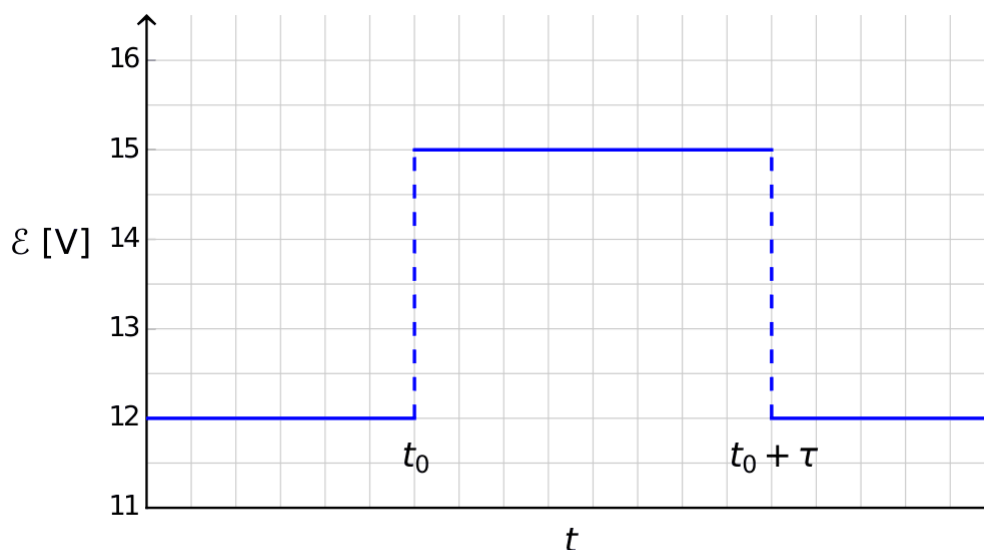


Рисунок 4: Зависимость напряжения источника от времени.

С.1 — 1.2 балла

Схематически изобразите графики зависимости тока $I_X(t)$ через нелинейный элемент X от времени для $\tau < \tau_{\text{crit}}$ и для $\tau > \tau_{\text{crit}}$.

С.2 — 0.6 балла

Найдите выражение и численное значение критического времени τ_{crit} , при котором меняется характер поведения системы.

С.3 — 0.2 балла

Является ли цепь с $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ с нейристором?

Общие справочные данные

Скорость света в вакууме	c	=	$299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Магнитная проницаемость вакуума (магнитная постоянная)	μ_0	=	$4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Диэлектрическая проницаемость вакуума (электрическая постоянная)	ε_0	=	$8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Элементарный заряд	e	=	$1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
Масса электрона	m_e	=	$9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31} \text{ kg}$
		=	$0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Масса протона	m_p	=	$1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		=	$938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Масса нейтрона	m_n	=	$1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		=	$939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Унифицированная атомная единица массы	u	=	$1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27} \text{ kg}$

Постоянная Ридберга	R_∞	=	$10\,973\,731.568\,508(65)\,\text{m}^{-1}$
Гравитационная постоянная	G	=	$6.674\,08(31) \times 10^{-11}\,\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Ускорение свободного падения (в Цюрихе)	g	=	$9.81\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Постоянная Планка	h	=	$6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Число Авогадро	N_A	=	$6.022\,140\,857(74) \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	R	=	$8.314\,4598(48)\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Постоянная молярной массы	M_u	=	$1 \times 10^{-3}\,\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Постоянная Больцмана	k_B	=	$1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Постоянная Стефана — Больцмана	σ	=	$5.670\,367(13) \times 10^{-8}\,\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **A.1:** $R_{\text{on}} = 1.00\,\Omega$, $R_{\text{off}} = 10.0\,\Omega$, $I_0 = 6.00\,\text{A}$, $R_{\text{int}} = 2.00\,\Omega$.
- **A.2:** При $R = 3.00\,\Omega$ существует **одно** стационарное состояние. При $R = 1.00\,\Omega$ их **три**, если $8.00\,\text{V} < \mathcal{E} < 11.0\,\text{V}$, **два** на каждой из границ этого интервала и **одно** в остальных случаях для рассматриваемого неотрицательного напряжения источника.
- **A.3:** $I_{\text{stationary}} = 3.00\,\text{A}$, $V_{\text{stationary}} = 6.00\,\text{V}$.
- **A.4:** **Устойчиво**; малые возмущения тока затухают экспоненциально с постоянной времени $1.00\,\mu\text{s}$.
- **B.1:** **Против часовой стрелки**. В координатах $(U/V, I_X/\text{A})$ цикл имеет вид
 $(4, 0.4) \rightarrow (10, 1) \rightarrow (10, 10) \rightarrow (4, 4) \rightarrow (4, 0.4)$.

- **B.2:** Обозначая через t_1 время на нижней ветви, а через t_2 время на верхней ветви, получаем

$$t_1 = \frac{30}{13} \ln \frac{49}{10} \mu\text{s} = 3.67 \mu\text{s}, \quad t_2 = \frac{3}{4} \ln 25 \mu\text{s} = 2.41 \mu\text{s},$$

$$T = 6.08 \mu\text{s}.$$

- **B.3:** P имеет порядок $10^1\,\text{W}$. Интегрирование в рамках идеальной модели даёт $P = 17.3\,\text{W}$.
- **B.4:** $s = cT/4 = 456\,\text{m}$.
- **C.1:** При $\tau < \tau_{\text{crit}}$ ток совершает небольшое непрерывное отклонение от $0.923\,\text{A}$, оставаясь ниже $1.00\,\text{A}$, и возвращается к $0.923\,\text{A}$. При $\tau > \tau_{\text{crit}}$ возникает один большой импульс: скачок $1.00 \rightarrow 10.0\,\text{A}$, спад до $4.00\,\text{A}$, скачок до $0.400\,\text{A}$ и восстановление до $0.923\,\text{A}$.
- **C.2:**

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{30}{13} \ln \frac{3}{2} \mu\text{s} = 0.936 \mu\text{s}.$$

- **C.3:** **Да**: поскольку $1.00\,\mu\text{s} > \tau_{\text{crit}}$, импульс вызывает одно полное отклонение с возвратом к исходному состоянию.

Решение

A.1

Верхняя ветвь при продолжении проходит через начало координат и через точку $(U, I) = (4.00 \text{ V}, 4.00 \text{ A})$. Следовательно,

$$R_{\text{on}} = \frac{U}{I} = \frac{4.00}{4.00} \Omega = \boxed{1.00 \Omega}.$$

Нижняя ветвь проходит через начало координат и точку $(10.0 \text{ V}, 1.00 \text{ A})$, откуда

$$R_{\text{off}} = \boxed{10.0 \Omega}.$$

Средняя ветвь соединяет точки $(4.00 \text{ V}, 4.00 \text{ A})$ и $(10.0 \text{ V}, 1.00 \text{ A})$, поэтому

$$-\frac{1}{R_{\text{int}}} = \frac{1.00 - 4.00}{10.0 - 4.00} \frac{\text{A}}{\text{V}} = -0.500 \Omega^{-1}.$$

Таким образом,

$$\boxed{R_{\text{int}} = 2.00 \Omega}, \quad I_0 = 4.00 \text{ A} + \frac{4.00 \text{ V}}{2.00 \Omega} = \boxed{6.00 \text{ A}}.$$

Здесь R_{int} положительно; дифференциальное сопротивление средней ветви равно $-R_{\text{int}}$.

A.2

Обозначим через U напряжение на X . По второму правилу Кирхгофа

$$\mathcal{E} = RI + U + L \frac{dI}{dt}.$$

В стационарном состоянии

$$\mathcal{E} = RI + U.$$

Таким образом, стационарные состояния соответствуют точкам пересечения характеристики с нагрузочной прямой $I = (\mathcal{E} - U)/R$.

Эквивалентным образом, представляя характеристику в виде $U(I)$, получаем

$$\mathcal{E}(I) = \begin{cases} (R + 10.0 \Omega)I, & 0 \leq I \leq 1.00 \text{ A}, \\ 12.0 \text{ V} + (R - 2.00 \Omega)I, & 1.00 \text{ A} \leq I \leq 4.00 \text{ A}, \\ (R + 1.00 \Omega)I, & I \geq 4.00 \text{ A}. \end{cases}$$

При $R = 3.00 \Omega$ все три участка возрастают с ростом I . Они непрерывно соединяются при $\mathcal{E} = 13.0 \text{ V}$ и 16.0 V . Следовательно, каждому неотрицательному напряжению источника соответствует ровно **одно стационарное состояние**.

При $R = 1.00 \Omega$ средний участок убывает с ростом I . Его концам соответствуют значения

$$\mathcal{E}(1.00 \text{ A}) = 11.0 \text{ V}, \quad \mathcal{E}(4.00 \text{ A}) = 8.00 \text{ V}.$$

Поэтому число различных стационарных состояний равно

Напряжение источника	Число стационарных состояний
$0 \leq \mathcal{E} < 8.00 \text{ V}$	1
$\mathcal{E} = 8.00 \text{ V}$	2
$8.00 \text{ V} < \mathcal{E} < 11.0 \text{ V}$	3

Напряжение источника	Число стационарных состояний
$\mathcal{E} = 11.0 \text{ V}$	2
$\mathcal{E} > 11.0 \text{ V}$	1

На каждой из границ две точки пересечения с ветвями совпадают в точке излома характеристики и считаются одним состоянием.

A.3

При $R = 3.00 \Omega$ и $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ стационарное состояние лежит на средней ветви, поскольку $13.0 < 15.0 < 16.0 \text{ V}$. Следовательно,

$$15.0 \text{ V} = 12.0 \text{ V} + (3.00 - 2.00) \Omega I_{\text{stationary}}.$$

Таким образом,

$$I_{\text{stationary}} = 3.00 \text{ A},$$

и

$$V_{\text{stationary}} = \mathcal{E} - RI_{\text{stationary}} = 6.00 \text{ V}.$$

A.4

Запишем $I = I_{\text{stationary}} + \delta I$. При достаточно малом возмущении состояние остаётся на средней ветви, где

$$U = R_{\text{int}}(I_0 - I).$$

Подставляя это выражение в правило Кирхгофа и вычитая уравнение стационарного состояния, получаем

$$L \frac{d(\delta I)}{dt} = -(R - R_{\text{int}})\delta I.$$

Следовательно,

$$\delta I(t) = \delta I(0) \exp \left[-\frac{R - R_{\text{int}}}{L} t \right].$$

Поскольку $R - R_{\text{int}} = 1.00 \Omega > 0$, возмущение затухает. Поэтому стационарное состояние **устойчиво**, а время релаксации равно

$$\frac{L}{R - R_{\text{int}}} = \frac{1.00 \mu\text{H}}{1.00 \Omega} = 1.00 \mu\text{s}.$$

Положительное дифференциальное сопротивление внешнего резистора превышает модуль отрицательного дифференциального сопротивления элемента.

B.1

Напряжения на конденсаторе и на X одинаковы и равны U . По первому правилу Кирхгофа

$$\frac{\mathcal{E} - U}{R} = I_X + C \frac{dU}{dt},$$

или

$$C \frac{dU}{dt} = \frac{\mathcal{E} - U}{R} - I_X(U).$$

На ветви с сопротивлением r имеем $I_X = U/r$, поэтому

$$C \frac{dU}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) U.$$

На **нижней ветви** напряжение, к которому релаксировала бы цепь, равно

$$U_{\infty, \text{off}} = \frac{\mathcal{E} R_{\text{off}}}{R + R_{\text{off}}} = \frac{150}{13} \text{ V} = 11.538 \dots \text{ V}.$$

Оно превышает $U_{\text{th}} = 10.0 \text{ V}$. Следовательно, на всём участке цикла, соответствующем нижней ветви, $dU/dt > 0$: конденсатор заряжается от 4.00 до 10.0 V.

При U_{th} нижняя ветвь заканчивается. Напряжение на конденсаторе не может измениться скачком, поэтому переход элемента X на графике $I - V$ происходит по вертикали:

$$(U, I_X) = (10.0 \text{ V}, 1.00 \text{ A}) \longrightarrow (10.0 \text{ V}, 10.0 \text{ A}).$$

На **верхней ветви** соответствующее предельное напряжение равно

$$U_{\infty, \text{on}} = \frac{\mathcal{E} R_{\text{on}}}{R + R_{\text{on}}} = 3.75 \text{ V}.$$

Оно ниже $U_h = 4.00 \text{ V}$. Поэтому $dU/dt < 0$: конденсатор разряжается от 10.0 до 4.00 V. При напряжении удержания ток скачком изменяется от 4.00 до 0.400 A, снова при неизменном напряжении.

Таким образом, требуемый схематический график состоит из следующих последовательных участков:

Участок	Движение на плоскости $I - V$
Нижняя ветвь	От (4.00 V, 0.400 A) вправо и немного вверх до (10.0 V, 1.00 A)
Переключение при пороговом напряжении	Вертикально вверх до (10.0 V, 10.0 A)
Верхняя ветвь	Влево и вниз до (4.00 V, 4.00 A)
Переключение при напряжении удержания	Вертикально вниз до (4.00 V, 0.400 A)

Направление обхода — **против часовой стрелки**.

В этой цепи с конденсатором равновесие на средней ветви неустойчиво. Действительно, вблизи $U = 6.00 \text{ V}$

$$C \frac{d(\delta U)}{dt} = \left(\frac{1}{R_{\text{int}}} - \frac{1}{R} \right) \delta U = \frac{\delta U}{6.00 \Omega}.$$

Возмущения напряжения растут, поэтому средняя ветвь не является участком цикла колебаний, на котором система может оставаться.

В.2

Для ветви с сопротивлением r введём обозначения

$$\theta_r = C \frac{Rr}{R + r}, \quad U_{\infty, r} = \frac{\mathcal{E} r}{R + r}.$$

Дифференциальное уравнение из В.1 принимает вид

$$\frac{dU}{dt} = \frac{U_{\infty,r} - U}{\theta_r},$$

и имеет решение

$$U(t) = U_{\infty,r} + (U(0) - U_{\infty,r})e^{-t/\theta_r}.$$

Обозначим через t_1 время на нижней ветви, а через t_2 — время на верхней ветви.

Для зарядки от U_h до U_{th}

$$t_1 = \theta_{\text{off}} \ln \left(\frac{U_{\infty,\text{off}} - U_h}{U_{\infty,\text{off}} - U_{th}} \right).$$

Здесь

$$\theta_{\text{off}} = \frac{30}{13} \mu\text{s},$$

поэтому

$$t_1 = \frac{30}{13} \mu\text{s} \ln \left(\frac{150/13 - 4}{150/13 - 10} \right) = \frac{30}{13} \ln \frac{49}{10} \mu\text{s} = \boxed{3.67 \mu\text{s}}.$$

Для разрядки от U_{th} до U_h

$$t_2 = \theta_{\text{on}} \ln \left(\frac{U_{th} - U_{\infty,\text{on}}}{U_h - U_{\infty,\text{on}}} \right).$$

Поскольку

$$\theta_{\text{on}} = 0.750 \mu\text{s},$$

получаем

$$t_2 = 0.750 \mu\text{s} \ln \left(\frac{10.0 - 3.75}{4.00 - 3.75} \right) = \frac{3}{4} \ln 25 \mu\text{s} = \boxed{2.41 \mu\text{s}}.$$

Пренебрегая длительностью переключений,

$$\boxed{T = t_1 + t_2 = 6.08 \mu\text{s}}.$$

В.3

На каждой из двух проводящих ветвей мгновенная мощность, рассеиваемая в X , равна

$$p_X = UI_X = \frac{U^2}{r}.$$

Пренебрежём энергией, рассеиваемой при идеальных мгновенных переключениях. Используя полученную выше зависимость напряжения от времени, найдём энергию, рассеиваемую на каждой ветви:

$$W_{\text{off}} = \frac{\theta_{\text{off}}}{R_{\text{off}}} \int_{U_h}^{U_{th}} \frac{U^2}{U_{\infty,\text{off}} - U} dU = 23.2 \mu\text{J},$$

и

$$W_{\text{on}} = \frac{\theta_{\text{on}}}{R_{\text{on}}} \int_{U_h}^{U_{th}} \frac{U^2}{U - U_{\infty,\text{on}}} dU = 82.3 \mu\text{J}.$$

Следовательно,

$$P = \frac{W_{\text{off}} + W_{\text{on}}}{T} = \frac{105.5 \mu\text{J}}{6.0816 \mu\text{s}} = \boxed{17.3 \text{ W}}.$$

Таким образом, требуемая оценка по порядку величины составляет

$$\boxed{P \sim 10^1 \text{ W}}.$$

В.4

Длина волны излучаемой основной гармоники равна

$$\lambda = cT = (299\,792\,458 \text{ m s}^{-1})(6.08162 \times 10^{-6} \text{ s}) = 1.82322 \times 10^3 \text{ m}.$$

В идеальной модели антенны свободный конец является узлом тока, а для эффективного возбуждения на подключённом к источнику конце должна находиться пучность тока. Расстояние между ними равно нечётному числу четвертей длины волны:

$$s = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Наименьшая резонансная длина равна

$$\boxed{s = \frac{\lambda}{4} = \frac{cT}{4} = 456 \text{ m}}.$$

Следующее возможное значение — $3\lambda/4 = 1.37 \text{ km}$, что превышает ограничение. Поэтому четвертьволновая длина является оптимальной среди допустимых.

С.1

Сначала найдём начальное стационарное состояние при $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$. Оно лежит на нижней ветви:

$$I_r = \frac{\mathcal{E}'}{R + R_{\text{off}}} = \frac{12}{13} \text{ A} = \boxed{0.923 \text{ A}},$$

$$U_r = R_{\text{off}} I_r = \frac{120}{13} \text{ V} = \boxed{9.23 \text{ V}}.$$

Пусть $u = t - t_0$. До импульса $I_X = I_r$. Пока напряжение источника равно 15.0 V и элемент остаётся на нижней ветви,

$$I_X(u) = \frac{\mathcal{E}}{R + R_{\text{off}}} + \left(I_r - \frac{\mathcal{E}}{R + R_{\text{off}}} \right) e^{-u/\theta_{\text{off}}},$$

или, в численном виде,

$$I_X(u) = \frac{15 - 3e^{-u/\theta_{\text{off}}}}{13} \text{ A}.$$

Критическая длительность — это время, необходимое для достижения током значения 1.00 A , соответствующего $U = U_{\text{th}}$.

При $\tau < \tau_{\text{crit}}$ график имеет вид небольшого непрерывного горба:

- До t_0 ток постоянен и равен 0.923 A .
- Во время импульса он возрастает по экспоненциальному закону с уменьшающимся наклоном графика, но остаётся ниже 1.00 A .
- В момент $t_0 + \tau$ ток непрерывен, а наклон графика меняет знак.

- После этого ток экспоненциально убывает обратно до 0.923 A:

$$I_X(u) = I_r + [I_X(\tau) - I_r] e^{-(u-\tau)/\theta_{\text{off}}}, \quad u \geq \tau.$$

Перехода между ветвями не происходит.

При $\tau > \tau_{\text{crit}}$ график содержит один большой импульс:

1. Вначале ток так же постепенно возрастает от 0.923 до 1.00 A.
2. В момент $t = t_0 + \tau_{\text{crit}}$ он скачком переходит по вертикали от 1.00 к 10.0 A.
3. Затем он уменьшается на верхней ветви. Пока напряжение источника остаётся равным 15.0 V,

$$I_X(u) = 3.75 \text{ A} + 6.25 \text{ A} e^{-(u-\tau_{\text{crit}})/\theta_{\text{on}}}.$$

4. Достигнув 4.00 A, он скачком переходит по вертикали к 0.400 A.
5. После этого он возрастает на нижней ветви и в конечном счёте приближается к 0.923 A снизу.

Если напряжение источника возвращается к 12.0 V, когда элемент ещё находится на верхней ветви, ток в этот момент остаётся непрерывным, но его спад ускоряется. Его последующая зависимость имеет вид

$$I_X(u) = 3.00 \text{ A} + [I_X(\tau) - 3.00 \text{ A}] e^{-(u-\tau)/\theta_{\text{on}}}.$$

Асимптотическое значение 3.00 A ниже тока удержания, поэтому ток обязательно достигает 4.00 A, и элемент выключается. Если это происходит при $u = u_d$, последующее восстановление описывается выражением

$$I_X(u) = I_r + (0.400 \text{ A} - I_r) e^{-(u-u_d)/\theta_{\text{off}}}.$$

При более длительном импульсе переход с верхней ветви на нижнюю может произойти до окончания импульса. Если напряжение источника остаётся равным 15.0 V, этот переход происходит при

$$u = \tau_{\text{crit}} + t_2 = 3.35 \mu\text{s}.$$

Затем ток восстанавливается на нижней ветви при напряжении источника 15.0 V до момента $u = \tau$, после чего приближается к состоянию покоя при 12.0 V. Изменения напряжения источника вызывают изменения наклона графика, а не мгновенные изменения I_X .

За время заданного импульса второй большой импульс тока возникнуть не может: при сохранении напряжения 15.0 V повторное достижение порога произошло бы при $u = \tau_{\text{crit}} + T > T > \tau$.

C.2

При критической длительности конденсатор как раз успевает зарядиться от U_r до U_{th} :

$$U_{\text{th}} = U_{\infty, \text{off}} + (U_r - U_{\infty, \text{off}}) e^{-\tau_{\text{crit}}/\theta_{\text{off}}}.$$

Решая это уравнение, получаем

$$\tau_{\text{crit}} = \theta_{\text{off}} \ln \left(\frac{U_{\infty, \text{off}} - U_r}{U_{\infty, \text{off}} - U_{\text{th}}} \right).$$

Через параметры цепи это выражается как

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{CRR_{\text{off}}}{R + R_{\text{off}}} \ln \left[\frac{(\mathcal{E} - \mathcal{E}')R_{\text{off}}}{\mathcal{E}R_{\text{off}} - (R + R_{\text{off}})U_{\text{th}}} \right].$$

Численно,

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{30}{13} \mu\text{s} \ln \left(\frac{150/13 - 120/13}{150/13 - 10} \right) = \frac{30}{13} \ln \frac{3}{2} \mu\text{s}.$$

Таким образом,

$$\tau_{\text{crit}} = 0.936 \mu\text{s}.$$

С.3

Для заданного импульса выполняются условия

$$\tau = 1.00 \mu\text{s} > \tau_{\text{crit}} = 0.936 \mu\text{s}, \quad \tau < T.$$

Поэтому он вызывает переход на верхнюю ветвь. Ток в цепи совершает одно большое отклонение, после чего цепь возвращается в исходное стационарное состояние при напряжении источника 12.0 V.

Да, цепь ведёт себя как нейристор.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Большой адронный коллайдер

Перед тем как приступить к решению этой задачи, прочитайте общие инструкции в отдельном конверте.

В этой задаче рассматривается физика ускорителя частиц ЛНС (Большого адронного коллайдера) в ЦЕРН. ЦЕРН — крупнейшая в мире лаборатория физики элементарных частиц. Её главная цель — изучение фундаментальных законов природы. Два пучка частиц ускоряют до высоких энергий, направляют по кольцу ускорителя с помощью сильного магнитного поля, а затем сталкивают друг с другом. Протоны распределены по окружности ускорителя не равномерно, а собраны в так называемые сгустки. Частицы, образующиеся при столкновениях, регистрируют с помощью больших детекторов. Некоторые параметры ЛНС приведены в таблице 1.

Кольцо ЛНС	
Длина окружности кольца	26659 m
Число сгустков в одном протонном пучке	2808
Число протонов в одном сгустке	1.15×10^{11}
Протонные пучки	
Энергия протонов	7.00 TeV
Энергия в системе центра масс	14.0 TeV

Таблица 1: Типичные численные значения соответствующих параметров ЛНС.

В физике элементарных частиц используют удобные единицы энергии, импульса и массы: энергию измеряют в электронвольтах [эВ]. По определению, 1 eV — это энергия, которую приобретает частица с элементарным зарядом e , проходя разность потенциалов в один вольт ($1\text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19}\text{ kg m}^2\text{s}^{-2}$).

Импульс измеряют в единицах eV/c , а массу — в единицах eV/c^2 , где c — скорость света в вакууме. Поскольку 1 eV — очень малая энергия, в физике элементарных частиц часто используют МэВ ($1\text{ MeV} = 10^6\text{ eV}$), ГэВ ($1\text{ GeV} = 10^9\text{ eV}$) или ТэВ ($1\text{ TeV} = 10^{12}\text{ eV}$).

Часть А посвящена ускорению протонов или электронов. В части В рассматривается идентификация частиц, образующихся при столкновениях в ЦЕРН.

Часть А. Ускоритель LHC (6 баллов)

Ускорение:

Предположим, что протоны были ускорены напряжением V так, что их скорость очень близка к скорости света; пренебрегайте любыми потерями энергии на излучение или столкновения с другими частицами.

A.1 — 0.7 балла

Найдите точное выражение для конечной скорости протонов v как функции ускоряющего напряжения V и физических постоянных.

В проекте будущего эксперимента в ЦЕРН планируется использовать протоны из LHC и сталкивать их с электронами, имеющими энергию 60.0 GeV .

A.2 — 0.8 балла

Для частиц с высокой энергией и малой массой относительное отклонение $\Delta = (c - v)/c$ конечной скорости v от скорости света очень мало. Найдите приближение первого порядка для Δ и вычислите Δ для электронов с энергией 60.0 GeV , используя ускоряющее напряжение V и физические постоянные.

Теперь вернёмся к протонам в LHC. Предположим, что вакуумная камера пучка имеет форму окружности.

A.3 — 1.0 балла

Выведите выражение для индукции однородного магнитного поля B , необходимого для удержания протонного пучка на круговой траектории. Выражение должно содержать только энергию протонов E , длину окружности L , фундаментальные постоянные и числа. Можно использовать подходящие приближения, если их влияние меньше точности, определяемой наименьшим числом значащих цифр.

Вычислите магнитную индукцию B для энергии протонов $E = 7.00\text{ TeV}$, пренебрегая взаимодействием между протонами.

Мощность излучения:

Ускоренно движущаяся заряженная частица излучает энергию в виде электромагнитных волн. Мощность излучения P_{rad} заряженной частицы, движущейся по окружности с постоянной угловой скоростью, зависит только от её ускорения a , её заряда q , скорости света c и электрической постоянной ϵ_0 .

A.4 — 1.0 балла

Используя анализ размерностей, найдите выражение для мощности излучения P_{rad} .

Настоящая формула для мощности излучения содержит множитель $1/(6\pi)$; кроме того, полный релятивистский вывод даёт дополнительный множитель γ^4 , где $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

A.5 — 1.0 балла

Вычислите P_{tot} , полную мощность излучения LHC, при энергии протонов $E = 7.00 \text{ TeV}$ (обратите внимание на таблицу 1). Можно использовать подходящие приближения.

Линейное ускорение:

В ЦЕРН первоначально покоящиеся протоны ускоряют в линейном ускорителе длиной $d = 30.0 \text{ m}$, пропуская их через разность потенциалов $V = 500 \text{ MV}$. Предположим, что электрическое поле однородно. Линейный ускоритель состоит из двух пластин, как схематически показано на рисунке 1.

A.6 — 1.5 балла

Определите время T , за которое протоны проходят через это поле.

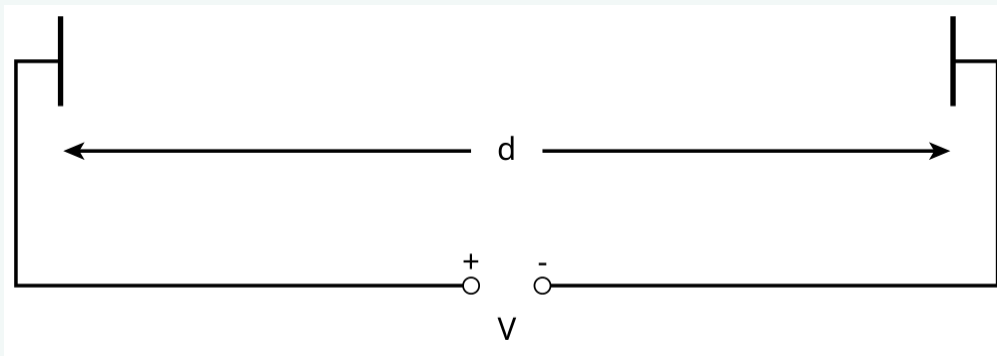


Рисунок 1: Схема ускорительного модуля.

Часть В. Идентификация частиц (4 балла)

Время пролёта:

Для интерпретации процесса взаимодействия важно идентифицировать частицы высокой энергии, образующиеся при столкновении. Простой метод заключается в измерении времени (t), за которое частица с известным импульсом проходит расстояние l в так называемом времяпролётном детекторе (ToF). Типичные частицы, идентифицируемые в детекторе, и их массы приведены в таблице 2.

Частица	Масса [MeV/c^2]
Дейтрон	1876
Протон	938
Заряженный каон	494
Заряженный пион	140
Электрон	0.511

Таблица 2: Частицы и их массы.

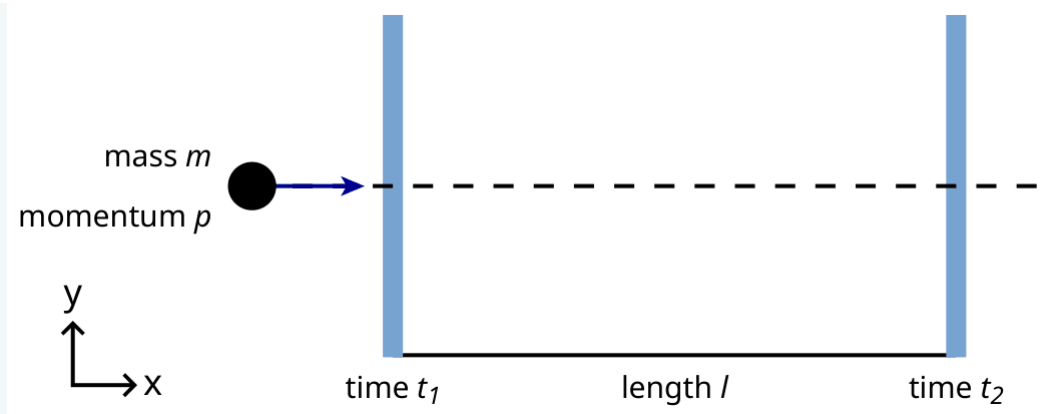


Рисунок 2: Схематическое изображение времяпролётного детектора.

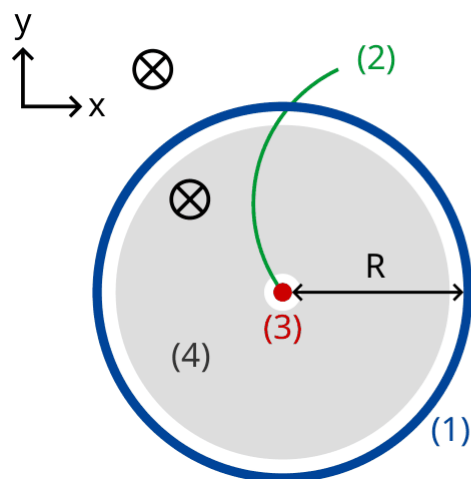
В.1 — 0.8 балла

Выразите массу частицы m через импульс p , длину пути l и время пролёта t , предполагая, что частицы имеют элементарный заряд e , движутся в ToF-детекторе со скоростью, близкой к c , по прямолинейным траекториям и перпендикулярно двум плоскостям регистрации (см. рисунок 2).

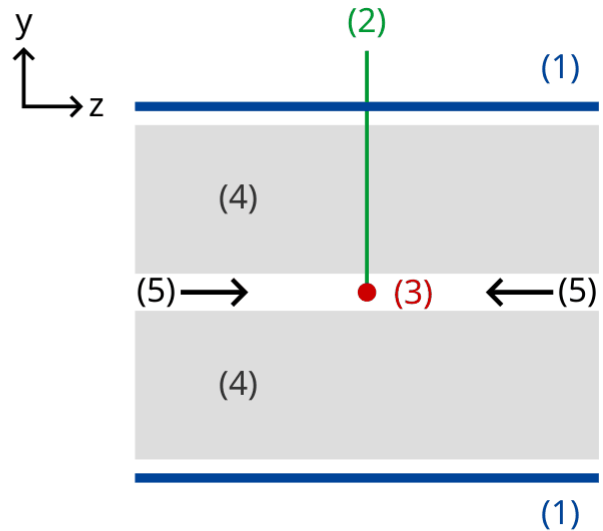
В.2 — 0.7 балла

Вычислите минимальную длину l ToF-детектора, позволяющую надёжно отличить заряженный каон от заряженного пиона, если измеренные импульсы обеих частиц равны $1.00 \text{ GeV}/c$. Для хорошего разделения требуется, чтобы разность времён пролёта превышала утроенное временное разрешение детектора. Типичное временное разрешение ToF-детектора составляет 150 ps ($1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$).

Далее частицы, образующиеся в типичном детекторе LHC, идентифицируются в двухступенчатом детекторе, состоящем из трекового детектора и ToF-детектора. На рисунке 3 показана установка в плоскостях, поперечной и продольной по отношению к протонным пучкам. Оба детектора представляют собой цилиндрические оболочки, окружающие область взаимодействия; пучок проходит по их оси. Трековый детектор измеряет траекторию заряженной частицы, проходящей через магнитное поле, направленное параллельно протонным пучкам. Радиус r траектории позволяет определить поперечный импульс p_T частицы. Поскольку момент столкновения известен, ToF-детектору для измерения времени пролёта (времени между столкновением и регистрацией в цилиндрической оболочке ToF) достаточно одной цилиндрической оболочки. Эта оболочка ToF расположена непосредственно снаружи трековой камеры. В этой задаче можно считать, что все частицы, образующиеся при столкновении, движутся перпендикулярно протонным пучкам, то есть у образовавшихся частиц отсутствует составляющая импульса вдоль направления протонных пучков.



transverse plane



cross section of the longitudinal view at the center of the tube along the beamline

- (1) - ToF tube
- (2) - track
- (3) - collision point
- (4) - tracking tube
- (5) - proton beams
- ⊗ - magnetic field

Рисунок 3: Экспериментальная установка для идентификации частиц с помощью трековой камеры и ToF-детектора. Оба детектора представляют собой цилиндрические оболочки, окружающие находящуюся в центре точку столкновения. Слева: поперечный вид, перпендикулярный оси пучка. Справа: продольный вид, параллельный оси пучка. Частица движется перпендикулярно оси пучка.

В.3 — 1.7 балла

Выразите массу частицы через магнитную индукцию B , радиус R цилиндрической оболочки ToF, фундаментальные постоянные и измеренные величины: радиус трека r и время пролёта t .

Мы зарегистрировали четыре частицы и хотим их идентифицировать. Магнитная индукция в трековом детекторе составляла $B = 0.500 \text{ Т}$. Радиус R цилиндрической оболочки ToF составлял 3.70 м . Результаты измерений приведены ниже ($1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$):

Частица	Радиус траектории r [м]	Время пролёта t [нс]
A	5.10	20
B	2.94	14
C	6.06	18
D	2.31	25

В.4 — 0.8 балла

Идентифицируйте эти четыре частицы, вычислив их массы.

Общие справочные данные

Скорость света в вакууме	c	$= 299\,792\,458\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Магнитная проницаемость вакуума (магнитная постоянная)	μ_0	$= 4\pi \times 10^{-7}\,\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Диэлектрическая проницаемость вакуума (электрическая постоянная)	ε_0	$= 8.854\,187\,817 \times 10^{-12}\,\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Элементарный заряд	e	$= 1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19}\,\text{A} \cdot \text{s}$
Масса электрона	m_e	$= 9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31}\,\text{kg}$
		$= 0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Масса протона	m_p	$= 1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27}\,\text{kg}$
		$= 938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Масса нейтрона	m_n	$= 1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27}\,\text{kg}$
		$= 939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Унифицированная атомная единица массы	u	$= 1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27}\,\text{kg}$
Постоянная Ридберга	R_∞	$= 10\,973\,731.568\,508(65)\,\text{m}^{-1}$
Гравитационная постоянная	G	$= 6.674\,08(31) \times 10^{-11}\,\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Ускорение свободного падения (в Цюрихе)	g	$= 9.81\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Постоянная Планка	h	$= 6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Число Авогадро	N_A	$= 6.022\,140\,857(74) \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	R	$= 8.314\,4598(48)\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Постоянная молярной массы	M_u	$= 1 \times 10^{-3}\,\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Постоянная Больцмана	k_B	$= 1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Постоянная Стефана — Больцмана	σ	$= 5.670\,367(13) \times 10^{-8}\,\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **A.1:** При ускорении из состояния покоя

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{m_p c^2}\right)^{-2}}.$$

- **A.2:**

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2} \simeq \frac{m^2 c^4}{2e^2 V^2}.$$

Для электронов с энергией 60.0 GeV

$$\Delta = 3.63 \times 10^{-11}.$$

- **A.3:**

$$B = \frac{2\pi}{ecL} \sqrt{E^2 - m_p^2 c^4} \simeq \frac{2\pi E}{ecL} = 5.50 \text{ Т.}$$

- **A.4:**

$$P_{\text{rad}} = C \frac{q^2 a^2}{\varepsilon_0 c^3},$$

где безразмерную постоянную C невозможно определить методом анализа размерностей.

- **A.5:** С учётом обоих протонных пучков

$$P_{\text{tot}} = 5.12 \text{ kW.}$$

- **A.6:**

$$T = \frac{d}{c} \sqrt{1 + \frac{2m_p c^2}{eV}} = 2.18 \times 10^{-7} \text{ s} = 0.218 \mu\text{s}.$$

- **B.1:**

$$m = \frac{p}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{l}\right)^2 - 1}.$$

- **B.2:** Пороговая длина равна

$$l_{\text{crit}} = 1.27739 \dots \text{ м.}$$

Указанный строгий критерий разделения требует $l > l_{\text{crit}}$, что даёт минимальную практически необходимую длину приблизительно $\boxed{1.28 \text{ м}}$.

- **B.3:**

$$m = \frac{eBr}{c} \sqrt{\left[\frac{ct}{2r \arcsin(R/(2r))}\right]^2 - 1}.$$

- **B.4:** А: протон, $m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$; В: заряженный пион, $m \approx 0.14 \text{ GeV}/c^2$; С: протон, $m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$; D: заряженный каон, $m \approx 0.50 \text{ GeV}/c^2$.

Решение

A.1

Для протона, ускоренного из состояния покоя, закон сохранения энергии даёт

$$eV = K = (\gamma - 1)m_p c^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Следовательно,

$$\gamma = 1 + \frac{eV}{m_p c^2}.$$

Выражая v , получаем

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{m_p c^2}\right)^{-2}}.$$

Это выражение является точным при условии ускорения из состояния покоя без потерь энергии.

A.2

Для частицы массы m

$$\Delta = 1 - \frac{v}{c} = 1 - \sqrt{1 - \gamma^{-2}}.$$

При высокой энергии $\gamma^{-2} \ll 1$. Используя разложение до первого порядка

$$\sqrt{1 - x} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2),$$

получаем

$$\Delta = \frac{1}{2\gamma^2} + O(\gamma^{-4}).$$

Через ускоряющее напряжение это выражается как

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2}.$$

При $eV \gg mc^2$ это выражение дополнительно упрощается:

$$\Delta \simeq \frac{m^2 c^4}{2e^2 V^2}.$$

Эквивалентно, используя полную энергию $E = \gamma mc^2$,

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2.$$

Для электронов

$$m_e c^2 = 0.5109989461 \text{ MeV}, \quad E = 60.0 \text{ GeV} = 6.00 \times 10^4 \text{ MeV},$$

поэтому

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{0.5109989461}{6.00 \times 10^4}\right)^2 = \boxed{3.63 \times 10^{-11}}.$$

A.3

Пусть радиус круговой орбиты равен

$$\rho = \frac{L}{2\pi}.$$

Магнитная сила изменяет направление релятивистского импульса, оставляя его модуль постоянным. При равномерном движении по окружности

$$\left| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right| = \frac{pv}{\rho}.$$

Приравнявая это выражение магнитной силе,

$$evB = \frac{pv}{\rho},$$

получаем

$$B = \frac{p}{e\rho}.$$

Релятивистская связь между энергией и импульсом имеет вид

$$E^2 = p^2c^2 + m_p^2c^4,$$

где E — полная энергия протона. Поэтому

$$B = \frac{2\pi}{ecL} \sqrt{E^2 - m_p^2c^4}.$$

При $E = 7.00 \text{ TeV}$

$$\frac{m_p c^2}{E} = \frac{938.2720813 \text{ MeV}}{7.00 \times 10^6 \text{ MeV}} \approx 1.34 \times 10^{-4}.$$

Замена pc на E вносит относительную поправку всего лишь

$$\frac{1}{2} \left(\frac{m_p c^2}{E} \right)^2 \approx 8.98 \times 10^{-9},$$

что намного меньше погрешности заданной энергии. Следовательно,

$$B \simeq \frac{2\pi E}{ecL}.$$

Используя $E = 7.00 \times 10^{12} \text{ eV}$, получаем

$$B \simeq \frac{2\pi(7.00 \times 10^{12})}{(299792458)(26659)} \text{ T} = \boxed{5.50 \text{ T}}.$$

A.4

Запишем

$$P_{\text{rad}} = Cq^\alpha a^\beta c^\delta \varepsilon_0^\eta,$$

где C — безразмерная величина. Выбирая массу, длину, время и заряд в качестве основных размерностей, имеем

$$[P] = ML^2T^{-3}, \quad [q] = Q, \quad [a] = LT^{-2}, \quad [c] = LT^{-1},$$

и

$$[\varepsilon_0] = Q^2T^2M^{-1}L^{-3}.$$

Приравнивание показателей степеней даёт

$$\begin{aligned} -\eta &= 1, & \alpha + 2\eta &= 0, \\ \beta + \delta - 3\eta &= 2, & -2\beta - \delta + 2\eta &= -3. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\eta = -1, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \delta = -3.$$

Следовательно,

$$P_{\text{rad}} = C \frac{q^2 a^2}{\varepsilon_0 c^3}.$$

Анализ размерностей определяет зависимость от физических величин, но не позволяет определить C .

A.5

С учётом численного множителя и релятивистской поправки, указанных в условии, мощность излучения одного протона равна

$$P_1 = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi \varepsilon_0 c^3}.$$

При движении по окружности

$$a = \frac{v^2}{\rho} \simeq \frac{c^2}{\rho}, \quad \rho = \frac{L}{2\pi}, \quad \gamma = \frac{E}{m_p c^2}.$$

Следовательно,

$$P_1 \simeq \frac{e^2 c}{6\pi \varepsilon_0 \rho^2} \left(\frac{E}{m_p c^2} \right)^4.$$

Численно

$$\rho = \frac{26659}{2\pi} \text{ m} = 4242.91 \text{ m}, \quad \gamma = \frac{7.00 \times 10^6}{938.2720813} = 7460.52.$$

Подстановка даёт

$$P_1 \simeq 7.93 \times 10^{-12} \text{ W}.$$

Имеются два пучка, каждый из которых содержит 2808 сгустков по 1.15×10^{11} протонов в каждом. Таким образом, полное число протонов равно

$$N = 2(2808)(1.15 \times 10^{11}) = 6.4584 \times 10^{14}.$$

Складывая мощности излучения отдельных протонов, получаем

$$P_{\text{tot}} = NP_1 \simeq 5.12467 \times 10^3 \text{ W}.$$

Следовательно,

$$P_{\text{tot}} = 5.12 \text{ kW}.$$

A.6

Напряжённость однородного электрического поля равна V/d , поэтому сила, действующая на протон, постоянна:

$$F = \frac{eV}{d}.$$

Релятивистское уравнение движения имеет вид

$$\frac{dp}{dt} = F.$$

Поскольку протон начинает движение из состояния покоя,

$$p_f = FT, \quad T = \frac{p_f}{F}.$$

Работа, совершаемая на всей длине ускорителя, равна eV , что даёт конечную полную энергию

$$E_f = m_p c^2 + eV.$$

Поэтому

$$p_f c = \sqrt{E_f^2 - m_p^2 c^4} = \sqrt{(eV)^2 + 2eV m_p c^2}.$$

Объединяя эти выражения, получаем

$$T = \frac{d}{eVc} \sqrt{(eV)^2 + 2eV m_p c^2},$$

или

$$T = \frac{d}{c} \sqrt{1 + \frac{2m_p c^2}{eV}}.$$

Здесь $eV = 500 \text{ MeV}$. Следовательно,

$$T = \frac{30.0}{299792458} \sqrt{1 + \frac{2(938.2720813)}{500}} \text{ s} = \boxed{2.18 \times 10^{-7} \text{ s}}.$$

Использование постоянной силы, а не постоянного ускорения, учитывает релятивистское изменение скорости.

B.1

Для прямолинейного пути

$$v = \frac{l}{t}.$$

Релятивистский импульс удовлетворяет соотношению

$$p = \gamma m v = \frac{m v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Выражая m , получаем

$$m = \frac{p}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = p \sqrt{\frac{t^2}{l^2} - \frac{1}{c^2}}.$$

Следовательно,

$$m = \frac{p}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{l}\right)^2 - 1}.$$

Это выражение точное; разложение в окрестности $v = c$ не требуется.

B.2

Выражая время пролёта из результата B.1, получаем

$$t(m) = \frac{l}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2}.$$

При одинаковом импульсе более тяжёлый каон приходит позже. Разность времён их пролёта равна

$$t_K - t_\pi = \frac{l}{c} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{m_K c}{p} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{m_\pi c}{p} \right)^2} \right].$$

Требуемое разделение определяется условием

$$t_K - t_\pi > 3(150 \text{ ps}) = 450 \text{ ps}.$$

Поэтому пороговая длина равна

$$l_{\text{crit}} = \frac{3\sigma_t c}{\sqrt{1 + (m_K c/p)^2} - \sqrt{1 + (m_\pi c/p)^2}}, \quad \sigma_t = 150 \text{ ps}.$$

Используя $p = 1000 \text{ MeV}/c$, получаем

$$l_{\text{crit}} = \frac{(450 \times 10^{-12})(299792458)}{\sqrt{1 + (494/1000)^2} - \sqrt{1 + (140/1000)^2}} \text{ m}.$$

Безразмерный знаменатель равен 0.10561117, откуда

$$l_{\text{crit}} = 1.27739 \dots \text{ m}.$$

Таким образом, l должна превышать этот порог; требуется приблизительно $\boxed{1.28 \text{ m}}$.

Используется точное релятивистское выражение, поскольку массой каона нельзя пренебречь по сравнению с p/c .

В.3

Поскольку у частицы нет составляющей импульса, параллельной оси пучка, весь её импульс направлен поперёк магнитного поля. Как и в А.3,

$$p = eBr.$$

Магнитное поле не совершает работы, поэтому модуль скорости остаётся постоянным вдоль кругового трека.

Пусть θ — угол, на который частица поворачивается относительно центра траектории до первого достижения цилиндрической оболочки ToF. Расстояние между точкой столкновения и точкой регистрации равно радиусу оболочки R . Эти точки также являются концами хорды окружности траектории, радиус которой равен r . Поэтому

$$R = 2r \sin \frac{\theta}{2}.$$

Для первого пересечения с оболочкой

$$\theta = 2 \arcsin \frac{R}{2r},$$

а длина пути равна

$$s = r\theta = 2r \arcsin \frac{R}{2r}.$$

Для этого необходимо $r \geq R/2$; при меньшем радиусе орбиты частица никогда не достигает оболочки.

Скорость равна

$$v = \frac{s}{t}.$$

Используя формулу для массы из В.1 с фактической длиной пути s , а также $p = eBr$, получаем

$$m = \frac{eBr}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{s}\right)^2 - 1}.$$

Следовательно,

$$m = \frac{eBr}{c} \sqrt{\left[\frac{ct}{2r \arcsin(R/(2r))}\right]^2 - 1}.$$

Арксинус вычисляется в радианах.

В.4

Для каждой частицы используем

$$s = 2r \arcsin \frac{3.70 \text{ m}}{2r}, \quad p = e(0.500 \text{ T})r,$$

и

$$m = \frac{p}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{s}\right)^2 - 1}.$$

Пересчёт единиц импульса непосредственно следует из $p = eBr$:

$$p [\text{GeV}/c] = 0.299792458 B [\text{T}] r [\text{m}].$$

Сохраняя дополнительные значащие цифры для сравнения вычисленных масс с таблицей 2, получаем:

Частица	Длина пути s [м]	Импульс p [МэВ/ с]	Вычисленная масса [МэВ/ с ²]	Идентификация
A	3.7864	764.47	938.65	Протон
B	4.0019	440.69	139.32	Заряженный пион
C	3.7600	908.37	935.10	Протон
D	4.2908	346.26	495.90	Заряженный каон

Небольшие отличия от табличных масс согласуются с округлением результатов измерений. С разумной точностью

$A :$	$m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$	протон,
$B :$	$m \approx 0.14 \text{ GeV}/c^2$	заряженный пион,
$C :$	$m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$	протон,
$D :$	$m \approx 0.50 \text{ GeV}/c^2$	заряженный каон.

Решение проверено по официальному решению.