

IPhO 2016

Problemas teóricos y soluciones · Zúrich, Suiza · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/2016/

Problema 1: Dos problemas de mecánica

Lea las instrucciones generales que se encuentran en el sobre separado antes de comenzar este problema.

Parte A. El disco oculto (3.5 puntos)

Consideramos un cilindro macizo de madera de radio r_1 y espesor h_1 . En algún lugar del interior del cilindro de madera, se ha sustituido la madera por un disco metálico de radio r_2 y espesor h_2 . El disco metálico está colocado de modo que su eje de simetría B es paralelo al eje de simetría S del cilindro de madera y se encuentra a la misma distancia de las caras superior e inferior del cilindro de madera. Denotamos por d la distancia entre S y B . La densidad de la madera es ρ_1 y la del metal es $\rho_2 > \rho_1$. La masa total del cilindro de madera y del disco metálico que contiene es M .

En esta tarea, colocamos el cilindro de madera sobre el suelo de modo que pueda rodar libremente hacia la izquierda y hacia la derecha. En la Fig. 1 se muestran una vista lateral y una vista superior del montaje.

El objetivo de esta tarea es determinar el tamaño y la posición del disco metálico.

En lo que sigue, cuando se le pida expresar el resultado en función de magnitudes conocidas, siempre puede suponer que se conocen las siguientes:

$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

El objetivo es determinar r_2 , h_2 y d mediante medidas indirectas.

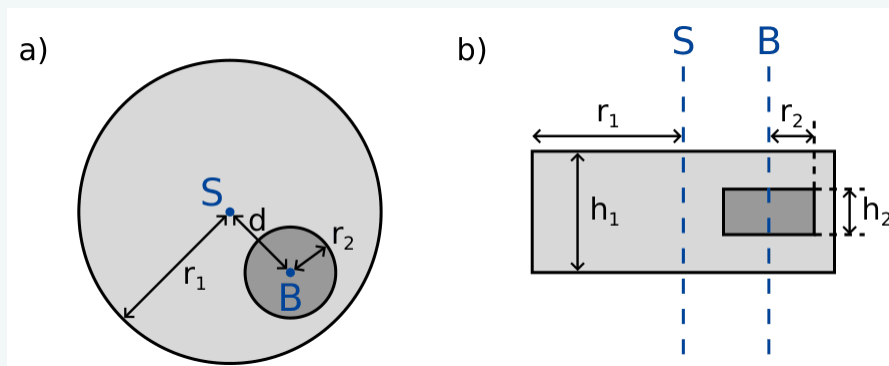


Figura 1: a) vista lateral b) vista desde arriba

Denotamos por b la distancia entre el centro de masas C del sistema completo y el eje de simetría S del cilindro de madera. Para determinar esta distancia, diseñamos el siguiente experimento: colocamos el cilindro de madera sobre una base horizontal de modo que se encuentre en

equilibrio estable. Inclinaamos ahora lentamente la base un ángulo Θ (véase la Fig. 2). Debido al rozamiento estático, el cilindro de madera puede rodar libremente sin deslizar. Rodará un poco cuesta abajo, pero después quedará en reposo en un equilibrio estable tras haber girado un ángulo ϕ , que medimos.

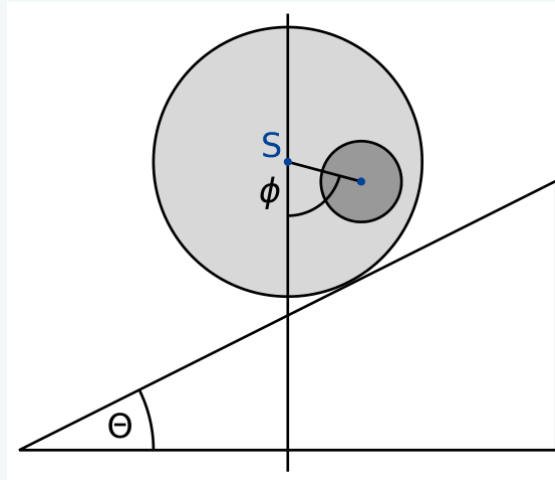


Figura 2: Cilindro sobre una base inclinada.

A.1 — 0.8pt

Obtenga una expresión para b en función de las magnitudes (1), del ángulo ϕ y del ángulo de inclinación Θ de la base.

A partir de ahora, podemos suponer que se conoce el valor de b .

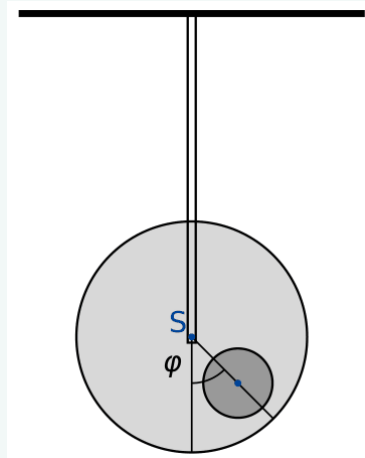


Figura 3: Sistema suspendido.

A continuación queremos medir el momento de inercia I_S del sistema respecto al eje de simetría S . Para ello, suspendemos el cilindro de madera por su eje de simetría de una varilla rígida. Después lo giramos un pequeño ángulo φ respecto a su posición de equilibrio y lo soltamos. El montaje se muestra en la figura 3. Observamos que φ describe un movimiento periódico de período T .

A.2 — 0.5pt

Obtenga la ecuación de movimiento de φ . Expresé el momento de inercia I_S del sistema respecto a su eje de simetría S en función de T , b y las magnitudes conocidas (1). Puede suponer que solo perturbamos ligeramente la posición de equilibrio, de modo que φ es siempre muy pequeño.

A partir de las medidas de las preguntas **A.1** y **A.2**, queremos determinar ahora la geometría y la posición del disco metálico situado en el interior del cilindro de madera.

A.3 — 0.4pt

Obtenga una expresión para la distancia d en función de b y de las magnitudes (1). También puede incluir r_2 y h_2 como variables en su expresión, ya que se calcularán en el apartado **A.5**.

A.4 — 0.7pt

Obtenga una expresión para el momento de inercia I_S en función de b y de las magnitudes conocidas (1). También puede incluir r_2 y h_2 como variables en su expresión, ya que se calcularán en el apartado **A.5**.

A.5 — 1.1pt

Utilizando todos los resultados anteriores, escriba una expresión para h_2 y r_2 en función de b , T y de las magnitudes conocidas (1). Puede expresar h_2 en función de r_2 .

Parte B. Estación espacial giratoria (6.5 puntos)

Alice es una astronauta que vive en una estación espacial. La estación espacial es una rueda gigantesca de radio R que gira alrededor de su eje, proporcionando así gravedad artificial a los astronautas. Los astronautas viven en la cara interior del aro de la rueda. Pueden despreciarse la atracción gravitatoria de la estación espacial y la curvatura del suelo.

B.1 — 0.5pt

¿Con qué frecuencia angular ω_{ss} debe girar la estación espacial para que los astronautas experimenten la misma gravedad g_E que en la superficie de la Tierra?

Alice y su amigo astronauta Bob tienen una discusión. Bob no cree que realmente vivan en una estación espacial y afirma que están en la Tierra. Alice quiere demostrarle a Bob, utilizando la física, que viven en una estación espacial giratoria. Para ello, sujeta una masa m a un muelle de constante elástica k y la deja oscilar. La masa oscila únicamente en dirección vertical y no puede moverse en dirección horizontal.

B.2 — 0.2pt

Suponiendo que en la Tierra la gravedad es constante, con aceleración g_E , ¿cuál sería la frecuencia angular de oscilación ω_E que mediría una persona en la Tierra?

B.3 — 0.6pt

¿Qué frecuencia angular de oscilación ω mide Alice en la estación espacial?

Alice está convencida de que su experimento demuestra que están en una estación espacial giratoria. Bob sigue escéptico. Afirma que, al tener en cuenta la variación de la gravedad por encima de la superficie terrestre, se obtiene un efecto similar. En los siguientes apartados investigamos si Bob tiene razón.

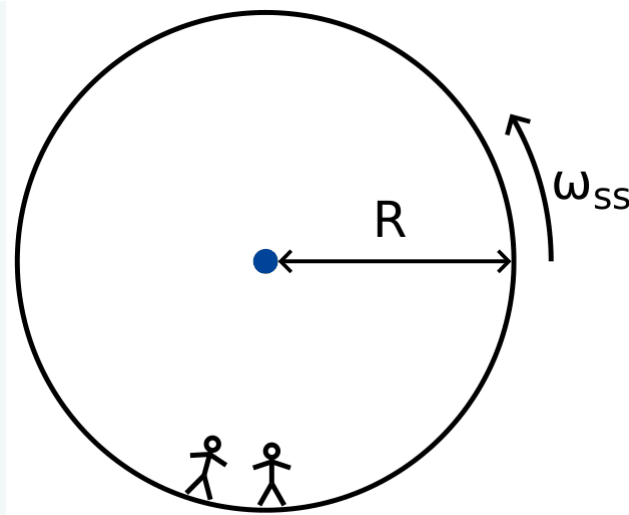


Figura 4: Estación espacial

B.4 — 0.8pt

Deduzca una expresión para la gravedad $g_E(h)$ a pequeñas alturas h sobre la superficie de la Tierra y calcule la frecuencia de oscilación $\tilde{\omega}_E$ de la masa oscilante (basta con una aproximación lineal). Denote por R_E el radio de la Tierra. Desprecie la rotación terrestre.

En efecto, para esta estación espacial, Alice comprueba que el oscilador de muelle oscila con la frecuencia que Bob había predicho.

B.5 — 0.3pt

¿Para qué radio R de la estación espacial coincide la frecuencia de oscilación ω con la frecuencia de oscilación $\tilde{\omega}_E$ en la Tierra? Exprese su respuesta en función de R_E .

Exasperada por la obstinación de Bob, Alice idea un experimento para demostrar que tiene razón. Para ello, sube a una torre de altura H sobre el suelo de la estación espacial y deja caer una masa. Este experimento puede entenderse tanto en el sistema de referencia giratorio como en un sistema de referencia inercial.

En un sistema de referencia que gira uniformemente, los astronautas perciben una fuerza ficticia $\vec{F}_C$ denominada fuerza de Coriolis. La fuerza $\vec{F}_C$ que actúa sobre un objeto de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en un sistema de referencia que gira con frecuencia angular constante $\vec{\omega}_{ss}$ viene dada por

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss}. \quad (2)$$

En términos de las magnitudes escalares, puede utilizar

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi, \quad (3)$$

donde ϕ es el ángulo entre la velocidad y el eje de rotación. La fuerza es perpendicular tanto a la velocidad v como al eje de rotación. El signo de la fuerza puede determinarse mediante la regla de la mano derecha, pero en lo que sigue puede elegirlo libremente.

B.6 — 1.1pt

Calcule la velocidad horizontal v_x y el desplazamiento horizontal d_x (respecto a la base de la torre, en la dirección perpendicular a ella) de la masa en el instante en que llega al suelo. Puede suponer que la altura H de la torre es pequeña, de modo que la aceleración medida por los astronautas es constante durante la caída. También puede suponer que $d_x \ll H$.

Para obtener un buen resultado, Alice decide realizar este experimento desde una torre mucho más alta que la anterior. Para su sorpresa, la masa llega al suelo en la base de la torre, de modo que $d_x = 0$.

B.7 — 1.3pt

Obtenga una cota inferior para la altura de la torre para la cual puede ocurrir que $d_x = 0$.

Alice está dispuesta a hacer un último intento de convencer a Bob. Quiere utilizar su oscilador de muelle para mostrar el efecto de la fuerza de Coriolis. Para ello modifica el montaje original: sujeta el muelle a un anillo que puede deslizarse libremente, sin rozamiento, por una varilla horizontal en la dirección x . El muelle oscila en la dirección y . La varilla es paralela al suelo y perpendicular al eje de rotación de la estación espacial. Por tanto, el plano xy es perpendicular al eje de rotación, y la dirección y apunta directamente hacia el centro de rotación de la estación.

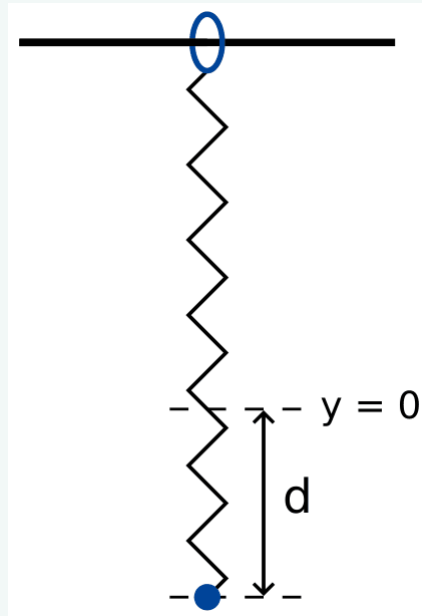


Figura 5: Montaje.

B.8 — 1.7pt

Alice tira de la masa hacia abajo una distancia d desde el punto de equilibrio $x = 0, y = 0$, y después la suelta (véase la figura 5).

- Dé una expresión algebraica de $x(t)$ e $y(t)$. Puede suponer que $\omega_{ss}d$ es pequeño y despreciar la fuerza de Coriolis para el movimiento a lo largo del eje y .
- Esboce la trayectoria $(x(t), y(t))$, indicando todas las características importantes, como la amplitud.

Alice y Bob siguen discutiendo.

Hoja de datos generales

Velocidad de la luz en el vacío	c	$= 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Permeabilidad del vacío (constante magnética)	μ_0	$= 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Permitividad del vacío (constante eléctrica)	ε_0	$= 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Carga elemental	e	$= 1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
Masa del electrón	m_e	$= 9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31} \text{ kg}$
		$= 0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Masa del protón	m_p	$= 1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		$= 938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Masa del neutrón	m_n	$= 1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		$= 939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Unidad de masa atómica unificada	u	$= 1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Constante de Rydberg	R_∞	$= 10\,973\,731.568\,508(65) \text{ m}^{-1}$
Constante de gravitación universal	G	$= 6.674\,08(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Aceleración de la gravedad (en Zúrich)	g	$= 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante de Planck	h	$= 6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Número de Avogadro	N_A	$= 6.022\,140\,857(74) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante molar de los gases	R	$= 8.314\,4598(48) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de masa molar	M_u	$= 1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	k_B	$= 1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$= 5.670\,367(13) \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Para la Parte A, definimos la masa de un cilindro enteramente de madera y la masa adicional introducida por el metal:

$$m_0 = \pi \rho_1 r_1^2 h_1, \quad \Delta m = M - m_0 = \pi (\rho_2 - \rho_1) r_2^2 h_2.$$

Para la Parte B, escribimos $\Omega = \omega_{ss}$ y elegimos $+x$ en el sentido de rotación de la estación y $+y$ hacia su centro.

• A.1

$$b = \frac{r_1 \sin \Theta}{\sin \phi}.$$

• A.2

$$I_S \ddot{\varphi} = -Mgb \sin \varphi \simeq -Mgb\varphi, \quad I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2}.$$

• A.3

$$d = \frac{Mb}{\Delta m} = \frac{Mb}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2 h_2}.$$

• A.4

$$I_S = \frac{1}{2}m_0 r_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m r_2^2 + \frac{M^2 b^2}{\Delta m}.$$

• A.5

$$r_2 = \sqrt{\frac{MgbT^2}{2\pi^2 \Delta m} - \frac{m_0 r_1^2}{\Delta m} - \frac{2M^2 b^2}{(\Delta m)^2}}, \quad h_2 = \frac{\Delta m}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2}.$$

• B.1

$$\omega_{ss} = \sqrt{\frac{g_E}{R}}.$$

• B.2

$$\omega_E = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

• B.3

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g_E}{R}}.$$

• B.4

$$g_E(h) = \frac{g_E}{(1 + h/R_E)^2} \simeq g_E \left(1 - \frac{2h}{R_E}\right), \quad \tilde{\omega}_E = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}}.$$

• B.5

$$R = \frac{R_E}{2}.$$

• B.6

$$v_x = -2\Omega H, \quad d_x = -\frac{2}{3}\Omega H \sqrt{\frac{2H}{g_E}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}H \sqrt{\frac{H}{R}}.$$

Ambos tienen sentido opuesto al de rotación de la estación.

- **B.7** Una cota inferior rigurosa es

$$H > R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2}} \right) \simeq 0.8428R.$$

El primer retorno exacto a la base de la torre se produce para

$$H_{\min} \simeq 0.8716R.$$

- **B.8** Con $a = 2\Omega d/\omega$,

$$x(t) = a[\omega t - \sin(\omega t)], \quad y(t) = -d \cos(\omega t).$$

La trayectoria consta de arcos cicloidales sucesivos, con cúspides en $(2\pi na, -d)$, puntos de retorno superiores en $((2n + 1)\pi a, d)$ y separación horizontal $2\pi a$. La amplitud vertical es d .

Solución

A.1

Sea P el punto de contacto con la base inclinada. Tanto la fuerza normal como el rozamiento estático actúan en P , por lo que no ejercen momento respecto a P . Por tanto, el equilibrio estático exige que la recta vertical que pasa por el centro de masas C pase también por P .

El centro de masas se encuentra sobre SB . Utilizando los ángulos indicados en la Figura 2, los desplazamientos horizontales de P y C respecto a S son, respectivamente,

$$x_P - x_S = r_1 \sin \Theta, \quad x_C - x_S = b \sin \phi.$$

Por consiguiente,

$$Mg(b \sin \phi - r_1 \sin \Theta) = 0,$$

y, por tanto,

$$b = \frac{r_1 \sin \Theta}{\sin \phi}.$$

El equilibrio estable corresponde a la rama con $\cos \phi > 0$. En particular, la inclinación debe ser suficientemente pequeña para que $r_1 \sin \Theta < b$; la igualdad corresponde a la configuración límite, sin efecto restaurador.

A.2

La suspensión mantiene fijo el eje S . La gravedad actúa en C , a una distancia b de este eje, y produce el momento restaurador

$$\tau_S = -Mgb \sin \varphi.$$

Por tanto, la ecuación del movimiento de rotación es

$$I_S \ddot{\varphi} = -Mgb \sin \varphi.$$

Para $|\varphi| \ll 1$, utilizamos $\sin \varphi \simeq \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgb}{I_S} \varphi = 0.$$

Se trata de un movimiento armónico simple con

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{Mgb}{I_S}.$$

Así,

$$I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2},$$

donde la aceleración gravitatoria proporcionada es $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$.

A.3

Representamos la distribución real de densidad como la suma de:

1. Un cilindro completo de madera, de masa

$$m_0 = \pi\rho_1 r_1^2 h_1,$$

centrado en S .

2. Un disco adicional de densidad $\rho_2 - \rho_1$, centrado en B , con masa

$$\Delta m = \pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2 h_2 = M - m_0.$$

Esto tiene en cuenta la madera que se retiró antes de introducir el metal.

Tomando el primer momento de la masa respecto a S ,

$$Mb = m_0(0) + \Delta m d.$$

Se deduce que

$$d = \frac{Mb}{\Delta m} = \frac{Mb}{M - \pi\rho_1 r_1^2 h_1} = \frac{Mb}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2 h_2}.$$

A.4

El cilindro completo de madera aporta

$$I_{\text{wood}} = \frac{1}{2}m_0 r_1^2.$$

El disco adicional tiene un momento de inercia $\frac{1}{2}\Delta m r_2^2$ respecto a su propio eje de simetría. Por el teorema de los ejes paralelos, su contribución respecto a S es

$$I_{\text{additional}} = \frac{1}{2}\Delta m r_2^2 + \Delta m d^2.$$

Por tanto,

$$I_S = \frac{1}{2}m_0 r_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m r_2^2 + \Delta m d^2.$$

Sustituyendo $d = Mb/\Delta m$, se obtiene

$$I_S = \frac{1}{2}m_0 r_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m r_2^2 + \frac{M^2 b^2}{\Delta m}.$$

A.5

Igualando las expresiones de I_S de A.2 y A.4,

$$\frac{MgbT^2}{4\pi^2} = \frac{1}{2}m_0r_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m r_2^2 + \frac{M^2b^2}{\Delta m}.$$

Despejando r_2^2 ,

$$r_2^2 = \frac{MgbT^2}{2\pi^2\Delta m} - \frac{m_0r_1^2}{\Delta m} - \frac{2M^2b^2}{(\Delta m)^2}.$$

Tomando la raíz positiva,

$$r_2 = \sqrt{\frac{MgbT^2}{2\pi^2\Delta m} - \frac{m_0r_1^2}{\Delta m} - \frac{2M^2b^2}{(\Delta m)^2}}.$$

La relación entre las masas determina entonces el espesor:

$$h_2 = \frac{\Delta m}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2}.$$

Aquí $m_0 = \pi\rho_1r_1^2h_1$ y $\Delta m = M - m_0$, por lo que todas las magnitudes del segundo miembro son conocidas o medidas. Unas medidas físicamente coherentes deben dar un radicando positivo y satisfacer $d + r_2 \leq r_1$ y $h_2 \leq h_1$.

B.1

Un astronauta en reposo respecto al aro describe una circunferencia de radio R . La aceleración centrípeta necesaria es

$$a_c = \omega_{ss}^2 R.$$

La fuerza normal que proporciona esta aceleración se percibe como el peso del astronauta. Para igualar la aceleración en la Tierra, se requiere

$$\omega_{ss}^2 R = g_E.$$

Así,

$$\omega_{ss} = \sqrt{\frac{g_E}{R}}.$$

En lo que sigue, escribimos $\Omega = \omega_{ss}$.

B.2

Sea y el desplazamiento hacia arriba desde la posición de equilibrio del muelle. La gravedad constante modifica el alargamiento de equilibrio, pero su fuerza constante se cancela al escribir la ecuación respecto al equilibrio:

$$m\ddot{y} = -ky.$$

Por tanto,

$$\omega_E = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

B.3

Utilizamos el sistema de referencia giratorio y tomamos y dirigido radialmente hacia dentro desde el equilibrio. Si el radio de equilibrio es r_0 , el radio instantáneo es $r_0 - y$.

La fuerza centrífuga actúa hacia fuera y su módulo es

$$m\Omega^2(r_0 - y).$$

La fuerza del muelle dirigida hacia dentro disminuye en ky cuando la masa se desplaza hacia dentro una distancia y . En el equilibrio, su valor F_0 satisface

$$F_0 = m\Omega^2 r_0.$$

Por tanto, la ecuación de movimiento en el sentido hacia dentro es

$$m\ddot{y} = (F_0 - ky) - m\Omega^2(r_0 - y) = -(k - m\Omega^2)y.$$

La restricción horizontal compensa la fuerza de Coriolis, por lo que esta no modifica la ecuación radial. Por ello,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g_E}{R}}.$$

Para que haya oscilaciones, se requiere $k/m > \Omega^2$.

B.4

Sea M_E la masa de la Tierra. La ley de gravitación de Newton da

$$g_E(h) = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2}.$$

Como $g_E = GM_E/R_E^2$,

$$g_E(h) = g_E \left(1 + \frac{h}{R_E}\right)^{-2}.$$

Para $h \ll R_E$, el desarrollo de primer orden es

$$g_E(h) \simeq g_E \left(1 - \frac{2h}{R_E}\right).$$

Sea h_0 la altura de equilibrio, y sea y el desplazamiento hacia arriba desde el equilibrio. Tras restar el balance de fuerzas en el equilibrio,

$$m\ddot{y} = -ky - m[g_E(h_0 + y) - g_E(h_0)].$$

Dentro de la aproximación lineal,

$$g_E(h_0 + y) - g_E(h_0) \simeq -\frac{2g_E}{R_E}y.$$

Así,

$$m\ddot{y} = -\left(k - \frac{2mg_E}{R_E}\right)y,$$

de donde se obtiene

$$\tilde{\omega}_E = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}}.$$

La gravedad disminuye con la altura, por lo que un desplazamiento hacia arriba reduce la fuerza gravitatoria dirigida hacia abajo. Esto debilita la fuerza restauradora neta y disminuye la frecuencia.

B.5

Igualando los cuadrados de las frecuencias de B.3 y B.4,

$$\frac{k}{m} - \frac{g_E}{R} = \frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}.$$

Por tanto,

$$\boxed{R = \frac{R_E}{2}}.$$

B.6

Elegimos $+x$ en el sentido de rotación de la estación y $+y$ hacia dentro, hacia su centro. Con esta convención, las componentes de la aceleración de Coriolis son

$$a_{C,x} = 2\Omega\dot{y}, \quad a_{C,y} = -2\Omega\dot{x}.$$

Para una torre de poca altura, aproximamos la aceleración hacia abajo por la constante $g_E = \Omega^2 R$. La pequeña desviación horizontal permite despreciar su efecto sobre la caída vertical. Al soltar la masa desde el reposo,

$$y(t) = H - \frac{1}{2}g_E t^2, \quad \dot{y} = -g_E t.$$

El instante de impacto es

$$t_f = \sqrt{\frac{2H}{g_E}}.$$

La ecuación horizontal pasa a ser

$$\ddot{x} = 2\Omega\dot{y} = -2\Omega g_E t.$$

Utilizando $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, la integración da

$$\dot{x} = -\Omega g_E t^2, \quad x = -\frac{1}{3}\Omega g_E t^3.$$

En el instante del impacto,

$$\boxed{v_x = -\Omega g_E t_f^2 = -2\Omega H},$$

y

$$\boxed{d_x = -\frac{1}{3}\Omega g_E t_f^3 = -\frac{2}{3}\Omega H \sqrt{\frac{2H}{g_E}}}.$$

Utilizando $\Omega^2 = g_E/R$,

$$\boxed{d_x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}H\sqrt{\frac{H}{R}}}.$$

La masa cae detrás de la torre, en el sentido opuesto al de rotación. La condición de coherencia es

$$\frac{|d_x|}{H} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{H}{R}} \ll 1,$$

como cabe esperar para $H \ll R$.

B.7

Para una torre alta, utilizamos un sistema de referencia inercial y la geometría circular completa. La aproximación de aceleración constante de B.6 deja de ser aplicable.

Sea

$$r = R - H$$

la distancia del punto de suelta al centro de la estación, con $0 < r < R$. Elegimos las coordenadas inerciales de modo que la masa se suelte en $(r, 0)$, con velocidad tangencial $(0, \Omega r)$.

Tras soltarla, ninguna fuerza real actúa sobre la masa, por lo que su trayectoria es una línea recta:

$$X(t) = r, \quad Y(t) = \Omega r t.$$

Alcanza el aro por primera vez cuando

$$X^2 + Y^2 = R^2.$$

Escribiendo $u = \Omega t_f$, se obtiene

$$r^2(1 + u^2) = R^2, \quad u = \sqrt{\frac{R^2}{r^2} - 1}.$$

En el instante del impacto, la posición angular de la masa es

$$\alpha = \arctan u, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

mientras que la base de la torre ha girado un ángulo u .

Para que la masa impacte en la base de la torre, sus ángulos deben coincidir módulo 2π :

$$u - \arctan u = 2\pi n.$$

Para $u > 0$, se cumple $u > \arctan u$, por lo que $n = 0$ no puede dar una altura de torre distinta de cero. Por tanto, $n \geq 1$, lo que implica

$$u = 2\pi n + \arctan u > 2\pi.$$

Por consiguiente,

$$\frac{R^2}{r^2} - 1 > 4\pi^2, \quad r < \frac{R}{\sqrt{1 + 4\pi^2}}.$$

Como $H = R - r$,

$$H > R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2}} \right) \simeq 0.8428R.$$

Para la estación identificada en B.5, esto equivale a $H > 0.4214R_E$.

También puede obtenerse la menor altura para un retorno exacto. La función

$$f(u) = u - \arctan u$$

es estrictamente creciente para $u > 0$, porque

$$f'(u) = \frac{u^2}{1 + u^2} > 0.$$

Por tanto, el primer retorno corresponde a $n = 1$. Al resolver

$$u_1 - \arctan u_1 = 2\pi$$

se obtiene

$$u_1 \simeq 7.72525.$$

Por tanto,

$$H_{\min} = R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + u_1^2}} \right) \simeq 0.871625R.$$

Este valor más preciso es coherente con la cota inferior solicitada.

B.8

Seguimos tomando $+x$ en el sentido de rotación y $+y$ hacia dentro. El soporte que se desliza libremente no proporciona ninguna fuerza restauradora horizontal.

Utilizamos la aproximación local de suelo plano y, como se indica en el enunciado, despreciamos la fuerza de Coriolis en la dirección y generada por el movimiento horizontal. La ecuación vertical sigue siendo

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} - \Omega^2.$$

Las condiciones iniciales son

$$y(0) = -d, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Por ello,

$$y(t) = -d \cos(\omega t).$$

El movimiento horizontal se debe a la fuerza de Coriolis asociada a la velocidad vertical:

$$\ddot{x} = 2\Omega \dot{y}.$$

Integrando una vez,

$$\dot{x} = 2\Omega [y(t) - y(0)] = 2\Omega d [1 - \cos(\omega t)].$$

Integrando de nuevo,

$$x(t) = 2\Omega d \left[t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right].$$

Para describir el esbozo, definimos

$$a = \frac{2\Omega d}{\omega}, \quad \tau = \omega t, \quad P = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Entonces

$$x = a(\tau - \sin \tau), \quad y = -d \cos \tau.$$

Esta es una cicloide cuyas coordenadas horizontal y vertical están escaladas de forma independiente.

Un arco completo contiene los siguientes puntos:

Tiempo	x/a	y/d	Característica
0	0	-1	Cúspide inicial; masa en reposo
$P/4$	$\pi/2 - 1$	0	Paso ascendente por la altura de equilibrio

Tiempo	x/a	y/d	Característica
$P/2$	π	1	Punto más alto; tangente horizontal
$3P/4$	$3\pi/2 + 1$	0	Paso descendente por la altura de equilibrio
P	2π	-1	Siguiente cúspide; masa momentáneamente en reposo

El esbozo completo consta de estos arcos repetidos hacia valores crecientes de x :

- La amplitud vertical es d , y y varía entre $-d$ y $+d$.
- Las cúspides se encuentran en $(2\pi na, -d)$, con tangentes límite verticales.
- Los puntos de retorno superiores se encuentran en $((2n + 1)\pi a, d)$, con tangentes horizontales.
- La distancia entre cúspides sucesivas es

$$L = 2\pi a = \frac{4\pi\Omega d}{\omega}.$$

- Como

$$\dot{x} = 2\Omega d(1 - \cos \omega t) \geq 0,$$

la trayectoria avanza continuamente en $+x$, sin bucles.

- La velocidad media de deriva horizontal es $2\Omega d$; la oscilación horizontal respecto a esa deriva uniforme tiene amplitud a .

Estas expresiones son aplicables mientras sigan siendo válidas la omisión indicada de la fuerza de Coriolis vertical y la aproximación local de suelo plano.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Dinámica no lineal en circuitos eléctricos

Lea las instrucciones generales que se encuentran en el sobre separado antes de comenzar este problema.

Introducción

Los elementos semiconductores no lineales biestables (por ejemplo, los tiristores) se utilizan ampliamente en electrónica como interruptores y generadores de oscilaciones electromagnéticas. El principal campo de aplicación de los tiristores es el control de corrientes alternas en electrónica de potencia, por ejemplo, la rectificación de corriente alterna a corriente continua a escala de megavatios. Los elementos biestables también pueden servir como sistemas modelo de fenómenos de autoorganización en física (este tema se aborda en la parte B del problema), biología (véase la parte C) y otros campos de la ciencia no lineal moderna.

Objetivos

Estudiar las inestabilidades y la dinámica no trivial de circuitos que incluyen elementos con características $I - V$ no lineales. Descubrir posibles aplicaciones de estos circuitos en ingeniería y en la modelización de sistemas biológicos.

Parte A. Estados estacionarios e inestabilidades (3 puntos)

La Fig. 1 muestra la denominada característica $I - V$ en forma de S de un elemento no lineal X . En el intervalo de tensiones comprendido entre $U_h = 4.00 \text{ V}$ (la tensión de mantenimiento) y $U_{th} = 10.0 \text{ V}$ (la tensión umbral), esta característica $I - V$ es multivaluada. Por simplicidad, se ha elegido que la gráfica de la Fig. 1 sea lineal por tramos (cada rama es un segmento de recta). En particular, la recta de la rama superior pasa por el origen si se prolonga. Esta aproximación describe bien los tiristores reales.

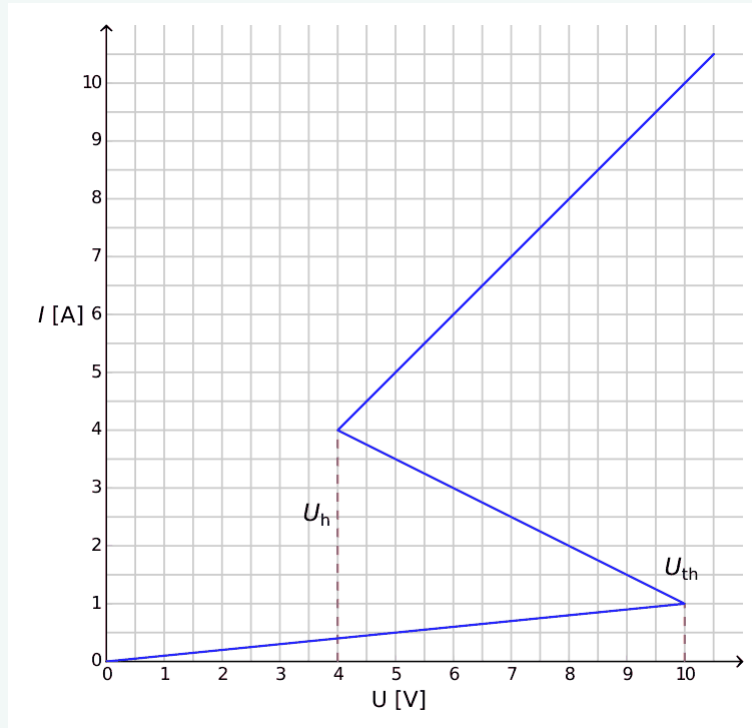


Figura 1: Característica $I - V$ del elemento no lineal X .

A.1 — 0.4pt

Utilizando la gráfica, determine la resistencia R_{on} del elemento X en la rama superior de la característica $I - V$, y R_{off} en la rama inferior, respectivamente. La rama intermedia se describe mediante la ecuación

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{int}}. \quad (1)$$

Halle los valores de los parámetros I_0 y R_{int} .

El elemento X está conectado en serie (véase la Fig. 2) con una resistencia R , una bobina L y una fuente ideal de tensión $\mathcal{E}$. Se dice que el circuito se encuentra en un estado estacionario si la corriente es constante en el tiempo, $I(t) = \text{const.}$

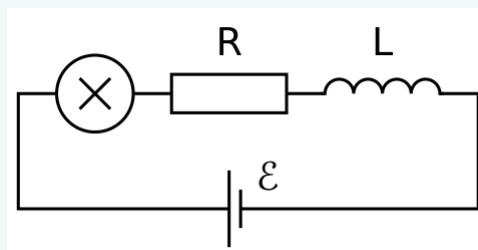


Figura 2: Circuito con el elemento X , la resistencia R , la bobina L y la fuente de tensión $\mathcal{E}$.

A.2 — 1pt

¿Cuáles son los posibles números de estados estacionarios que puede tener el circuito de la Fig. 2 para un valor fijo de $\mathcal{E}$ y para $R = 3.00 \Omega$? ¿Cómo cambia la respuesta para $R = 1.00 \Omega$?

A.3 — 0.6pt

Sean $R = 3.00 \Omega$, $L = 1.00 \mu\text{H}$ y $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ en el circuito mostrado en la Fig. 2. Determine los valores de la corriente $I_{\text{stationary}}$ y de la tensión $V_{\text{stationary}}$ en el elemento no lineal X en el estado estacionario.

El circuito de la Fig. 2 se encuentra en el estado estacionario con $I(t) = I_{\text{stationary}}$. Se dice que este estado estacionario es estable si, tras una pequeña desviación (un aumento o una disminución de la corriente), la corriente vuelve hacia el estado estacionario. Si el sistema sigue alejándose del estado estacionario, se dice que es inestable.

A.4 — 1pt

Utilice los valores numéricos de la pregunta A.3 y estudie la estabilidad del estado estacionario con $I(t) = I_{\text{stationary}}$. ¿Es estable o inestable?

Parte B. Elementos no lineales biestables en física: transmisor de radio (5 puntos)

Ahora investigamos una nueva configuración del circuito (véase la Fig. 3). Esta vez, el elemento no lineal X está conectado en paralelo con un condensador de capacidad $C = 1.00 \mu\text{F}$. Este conjunto se conecta a su vez en serie con una resistencia de valor $R = 3.00 \Omega$ y una fuente ideal de tensión constante de valor $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$. Resulta que este circuito presenta oscilaciones en las que el elemento no lineal X salta de una rama de la característica $I - V$ a otra a lo largo de un ciclo.

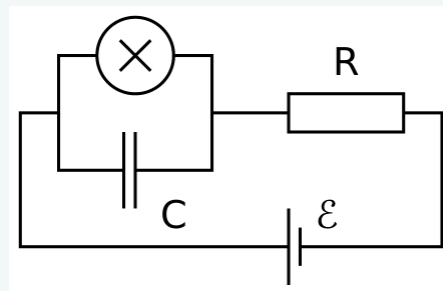


Figura 3: Circuito con el elemento X , el condensador C , la resistencia R y la fuente de tensión $\mathcal{E}$.

B.1 — 1.8pt

Dibuje el ciclo de oscilación en la gráfica $I - V$, indicando su sentido (horario o antihorario). Justifique su respuesta con ecuaciones y esquemas.

B.2 — 1.9pt

Halle expresiones para los tiempos t_1 y t_2 que el sistema pasa en cada rama de la gráfica $I - V$ durante el ciclo de oscilación. Determine sus valores numéricos. Halle el valor numérico del período de oscilación T suponiendo que el tiempo necesario para los saltos entre las ramas de la gráfica $I - V$ es despreciable.

B.3 — 0.7pt

Estime la potencia media P disipada por el elemento no lineal a lo largo de una oscilación. Basta con un orden de magnitud.

El circuito de la Fig. 3 se utiliza para construir un transmisor de radio. Para ello, el elemento X se conecta a un extremo de una antena lineal (un hilo largo y recto) de longitud s . El otro extremo del hilo está libre. En la antena se forma una onda electromagnética estacionaria. La velocidad de las ondas electromagnéticas a lo largo de la antena es la misma que en el vacío. El transmisor utiliza el armónico fundamental del sistema, cuyo período es el T de la pregunta B.2.

B.4 — 0.6pt

¿Cuál es el valor óptimo de s , suponiendo que no puede superar 1 km?

Parte C. Elementos no lineales biestables en biología: neuristor (2 puntos)

En esta parte del problema consideramos una aplicación de los elementos no lineales biestables a la modelización de procesos biológicos. Una neurona del cerebro humano tiene la siguiente propiedad: cuando se excita mediante una señal externa, realiza una única oscilación y después vuelve a su estado inicial. Esta característica se denomina excitabilidad. Gracias a esta propiedad, los pulsos pueden propagarse por la red de neuronas acopladas que constituyen los sistemas nerviosos. Un chip semiconductor diseñado para imitar la excitabilidad y la propagación de pulsos se denomina *neuristor* (de neurona y transistor).

Intentamos modelizar un neuristor sencillo utilizando un circuito que incluye el elemento no lineal X que hemos investigado anteriormente. Para ello, la tensión $\mathcal{E}$ del circuito de la Fig. 3 se reduce al valor $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$. Las oscilaciones cesan y el sistema alcanza su estado estacionario. A continuación, la tensión se aumenta rápidamente de nuevo hasta el valor $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ y, tras un intervalo de tiempo τ (con $\tau < T$), se fija otra vez en el valor $\mathcal{E}'$ (véase la Fig. 4). Resulta que existe un cierto valor crítico τ_{crit} , y el sistema presenta comportamientos cualitativamente diferentes para $\tau < \tau_{\text{crit}}$ y para $\tau > \tau_{\text{crit}}$.

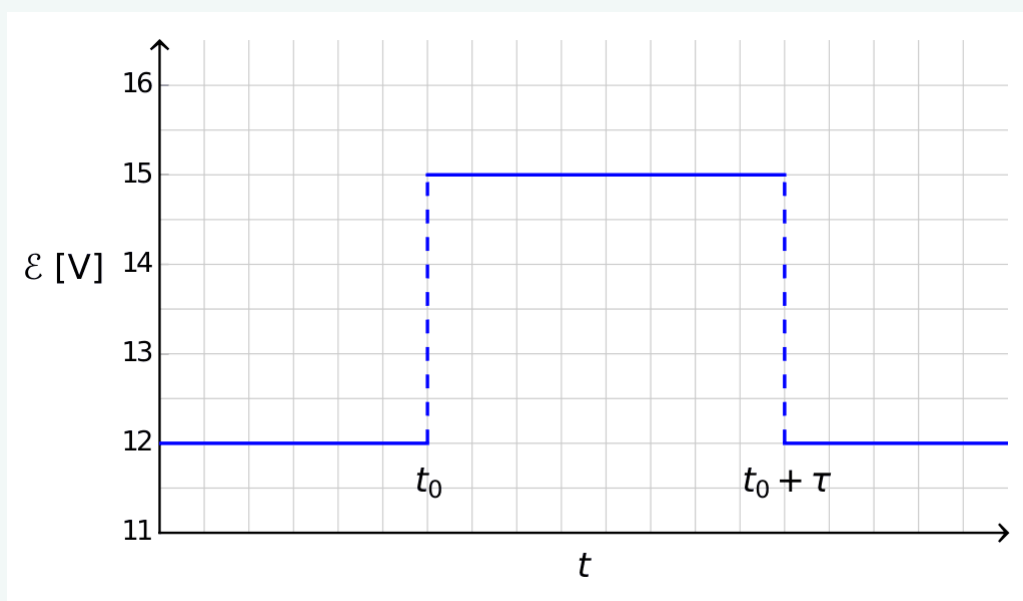


Figura 4: Tensión de la fuente en función del tiempo.

C.1 — 1.2pt

Esboce las gráficas de la dependencia temporal de la corriente $I_X(t)$ en el elemento no lineal X para $\tau < \tau_{\text{crit}}$ y para $\tau > \tau_{\text{crit}}$.

C.2 — 0.6pt

Halle la expresión y el valor numérico del tiempo crítico τ_{crit} para el que cambia el comportamiento.

C.3 — 0.2pt

¿Es el circuito con $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ s un neuristor?

Hoja general de datos

Velocidad de la luz en el vacío	c	=	$299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Permeabilidad del vacío (constante magnética)	μ_0	=	$4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Permitividad del vacío (constante eléctrica)	ϵ_0	=	$8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Carga elemental	e	=	$1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
Masa del electrón	m_e	=	$9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31} \text{ kg}$
		=	$0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Masa del protón	m_p	=	$1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		=	$938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Masa del neutrón	m_n	=	$1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		=	$939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Unidad de masa atómica unificada	u	=	$1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Constante de Rydberg	R_∞	=	$10\,973\,731.568\,508(65) \text{ m}^{-1}$
Constante de gravitación universal	G	=	$6.674\,08(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Aceleración de la gravedad (en Zúrich)	g	=	$9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante de Planck	h	=	$6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Número de Avogadro	N_A	=	$6.022\,140\,857(74) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante molar de los gases	R	=	$8.314\,4598(48) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de masa molar	M_u	=	$1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	k_B	=	$1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	=	$5.670\,367(13) \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **A.1:** $R_{\text{on}} = 1.00 \, \Omega$, $R_{\text{off}} = 10.0 \, \Omega$, $I_0 = 6.00 \, \text{A}$, $R_{\text{int}} = 2.00 \, \Omega$.

- **A.2:** Para $R = 3.00 \Omega$, hay **un** estado estacionario. Para $R = 1.00 \Omega$, hay **tres** cuando $8.00 \text{ V} < \mathcal{E} < 11.0 \text{ V}$, **dos** en cualquiera de los extremos y **uno** en los demás casos, para la tensión no negativa de la fuente representada.
- **A.3:** $I_{\text{stationary}} = 3.00 \text{ A}$, $V_{\text{stationary}} = 6.00 \text{ V}$.
- **A.4: Estable;** las pequeñas perturbaciones de corriente decaen exponencialmente con una constante de tiempo de $1.00 \mu\text{s}$.
- **B.1: Antihorario.** En coordenadas $(U/\text{V}, I_X/\text{A})$, el ciclo es

$$(4, 0.4) \rightarrow (10, 1) \rightarrow (10, 10) \rightarrow (4, 4) \rightarrow (4, 0.4).$$
- **B.2:** Definiendo t_1 en la rama inferior y t_2 en la rama superior,

$$t_1 = \frac{30}{13} \ln \frac{49}{10} \mu\text{s} = 3.67 \mu\text{s}, \quad t_2 = \frac{3}{4} \ln 25 \mu\text{s} = 2.41 \mu\text{s},$$

$$T = 6.08 \mu\text{s}.$$
- **B.3:** P es del orden de 10^1 W . La integración dentro del modelo ideal da $P = 17.3 \text{ W}$.
- **B.4:** $s = cT/4 = 456 \text{ m}$.
- **C.1:** Para $\tau < \tau_{\text{crit}}$, la corriente experimenta una pequeña variación continua desde 0.923 A , permanece por debajo de 1.00 A y vuelve a 0.923 A . Para $\tau > \tau_{\text{crit}}$, produce un único pico grande: un salto $1.00 \rightarrow 10.0 \text{ A}$, un decaimiento hasta 4.00 A , un salto a 0.400 A y una recuperación hasta 0.923 A .
- **C.2:**

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{30}{13} \ln \frac{3}{2} \mu\text{s} = 0.936 \mu\text{s}.$$
- **C.3: Sí,** porque $1.00 \mu\text{s} > \tau_{\text{crit}}$, de modo que el pulso desencadena una excursión completa.

Solución

A.1

La rama superior pasa por el origen al prolongarla y por $(U, I) = (4.00 \text{ V}, 4.00 \text{ A})$. Por tanto,

$$R_{\text{on}} = \frac{U}{I} = \frac{4.00}{4.00} \Omega = \boxed{1.00 \Omega}.$$

La rama inferior pasa por el origen y por $(10.0 \text{ V}, 1.00 \text{ A})$, lo que da

$$R_{\text{off}} = \boxed{10.0 \Omega}.$$

La rama intermedia une $(4.00 \text{ V}, 4.00 \text{ A})$ con $(10.0 \text{ V}, 1.00 \text{ A})$, de modo que

$$-\frac{1}{R_{\text{int}}} = \frac{1.00 - 4.00}{10.0 - 4.00} \frac{\text{A}}{\text{V}} = -0.500 \Omega^{-1}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{R_{\text{int}} = 2.00 \Omega}, \quad I_0 = 4.00 \text{ A} + \frac{4.00 \text{ V}}{2.00 \Omega} = \boxed{6.00 \text{ A}}.$$

Aquí R_{int} es positivo; la resistencia diferencial de la rama intermedia es $-R_{\text{int}}$.

A.2

Sea U la tensión entre los terminales de X . La ley de tensiones de Kirchhoff da

$$\mathcal{E} = RI + U + L \frac{dI}{dt}.$$

En un estado estacionario,

$$\mathcal{E} = RI + U.$$

Así pues, los estados estacionarios son las intersecciones de la característica con la recta de carga $I = (\mathcal{E} - U)/R$.

De manera equivalente, utilizando la característica en la forma $U(I)$,

$$\mathcal{E}(I) = \begin{cases} (R + 10.0 \, \Omega)I, & 0 \leq I \leq 1.00 \, \text{A}, \\ 12.0 \, \text{V} + (R - 2.00 \, \Omega)I, & 1.00 \, \text{A} \leq I \leq 4.00 \, \text{A}, \\ (R + 1.00 \, \Omega)I, & I \geq 4.00 \, \text{A}. \end{cases}$$

Para $R = 3.00 \, \Omega$, los tres tramos crecen con I . Se unen de forma continua en $\mathcal{E} = 13.0 \, \text{V}$ y $16.0 \, \text{V}$. En consecuencia, cada tensión no negativa de la fuente tiene exactamente **un estado estacionario**.

Para $R = 1.00 \, \Omega$, el tramo intermedio decrece con I . Sus extremos se encuentran en

$$\mathcal{E}(1.00 \, \text{A}) = 11.0 \, \text{V}, \quad \mathcal{E}(4.00 \, \text{A}) = 8.00 \, \text{V}.$$

El número de estados estacionarios distintos es, por tanto,

Tensión de la fuente	Número de estados estacionarios
$0 \leq \mathcal{E} < 8.00 \, \text{V}$	1
$\mathcal{E} = 8.00 \, \text{V}$	2
$8.00 \, \text{V} < \mathcal{E} < 11.0 \, \text{V}$	3
$\mathcal{E} = 11.0 \, \text{V}$	2
$\mathcal{E} > 11.0 \, \text{V}$	1

En cualquiera de los límites, dos intersecciones con las ramas coinciden en un vértice de la característica y cuentan como un solo estado.

A.3

Para $R = 3.00 \, \Omega$ y $\mathcal{E} = 15.0 \, \text{V}$, el estado estacionario se encuentra en la rama intermedia porque $13.0 < 15.0 < 16.0 \, \text{V}$. Por tanto,

$$15.0 \, \text{V} = 12.0 \, \text{V} + (3.00 - 2.00) \, \Omega I_{\text{stationary}}.$$

Por lo tanto,

$$I_{\text{stationary}} = 3.00 \, \text{A},$$

y

$$V_{\text{stationary}} = \mathcal{E} - RI_{\text{stationary}} = 6.00 \, \text{V}.$$

A.4

Escribamos $I = I_{\text{stationary}} + \delta I$. Una perturbación suficientemente pequeña permanece en la rama intermedia, donde

$$U = R_{\text{int}}(I_0 - I).$$

Al sustituir en la ley de Kirchhoff y restar la ecuación del estado estacionario, se obtiene

$$L \frac{d(\delta I)}{dt} = -(R - R_{\text{int}})\delta I.$$

Así,

$$\delta I(t) = \delta I(0) \exp \left[-\frac{R - R_{\text{int}}}{L} t \right].$$

Como $R - R_{\text{int}} = 1.00 \, \Omega > 0$, la perturbación decae. Por tanto, el estado estacionario es **estable**, con un tiempo de relajación

$$\frac{L}{R - R_{\text{int}}} = \frac{1.00 \, \mu\text{H}}{1.00 \, \Omega} = 1.00 \, \mu\text{s}.$$

La resistencia diferencial positiva de la resistencia externa supera el módulo de la resistencia diferencial negativa del elemento.

B.1

El condensador y X tienen la misma tensión U . La ley de corrientes de Kirchhoff da

$$\frac{\mathcal{E} - U}{R} = I_X + C \frac{dU}{dt},$$

o bien

$$C \frac{dU}{dt} = \frac{\mathcal{E} - U}{R} - I_X(U).$$

En una rama de resistencia r , $I_X = U/r$, de modo que

$$C \frac{dU}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) U.$$

En la **rama inferior**, la tensión hacia la que se relajaría el circuito es

$$U_{\infty, \text{off}} = \frac{\mathcal{E} R_{\text{off}}}{R + R_{\text{off}}} = \frac{150}{13} \, \text{V} = 11.538 \dots \, \text{V}.$$

Este valor supera $U_{\text{th}} = 10.0 \, \text{V}$. En consecuencia, durante toda la parte del ciclo que transcurre en la rama inferior, $dU/dt > 0$: el condensador se carga desde 4.00 hasta 10.0 V.

En U_{th} , la rama inferior termina. La tensión del condensador no puede saltar, por lo que X conmuta verticalmente en la gráfica $I - V$:

$$(U, I_X) = (10.0 \, \text{V}, 1.00 \, \text{A}) \longrightarrow (10.0 \, \text{V}, 10.0 \, \text{A}).$$

En la **rama superior**, la tensión límite correspondiente es

$$U_{\infty, \text{on}} = \frac{\mathcal{E} R_{\text{on}}}{R + R_{\text{on}}} = 3.75 \, \text{V}.$$

Este valor está por debajo de $U_h = 4.00 \, \text{V}$. Por tanto, $dU/dt < 0$: el condensador se descarga desde 10.0 hasta 4.00 V. En la tensión de mantenimiento, la corriente salta de 4.00 a 0.400 A, de nuevo a tensión constante.

El esquema solicitado tiene, por tanto, estos segmentos sucesivos:

Segmento	Movimiento en el plano $I - V$
Rama inferior	Desde (4.00 V, 0.400 A) hacia la derecha y ligeramente hacia arriba hasta (10.0 V, 1.00 A)
Conmutación en el umbral	Verticalmente hacia arriba hasta (10.0 V, 10.0 A)
Rama superior	Hacia la izquierda y hacia abajo hasta (4.00 V, 4.00 A)
Conmutación en la tensión de mantenimiento	Verticalmente hacia abajo hasta (4.00 V, 0.400 A)

El sentido es **antihorario**.

El equilibrio en la rama intermedia es inestable en este circuito con condensador. En efecto, cerca de $U = 6.00 \text{ V}$,

$$C \frac{d(\delta U)}{dt} = \left(\frac{1}{R_{\text{int}}} - \frac{1}{R} \right) \delta U = \frac{\delta U}{6.00 \Omega}.$$

Las perturbaciones de tensión crecen, de modo que la rama intermedia no constituye una parte sostenida del ciclo de oscilación.

B.2

Para una rama de resistencia r , definimos

$$\theta_r = C \frac{Rr}{R+r}, \quad U_{\infty,r} = \frac{\mathcal{E}r}{R+r}.$$

La ecuación diferencial de B.1 se convierte en

$$\frac{dU}{dt} = \frac{U_{\infty,r} - U}{\theta_r},$$

cuya solución es

$$U(t) = U_{\infty,r} + (U(0) - U_{\infty,r})e^{-t/\theta_r}.$$

Definimos t_1 como el tiempo en la rama inferior y t_2 como el tiempo en la rama superior.

Para la carga desde U_h hasta U_{th} ,

$$t_1 = \theta_{\text{off}} \ln \left(\frac{U_{\infty,\text{off}} - U_h}{U_{\infty,\text{off}} - U_{th}} \right).$$

Aquí

$$\theta_{\text{off}} = \frac{30}{13} \mu\text{s},$$

por lo que

$$t_1 = \frac{30}{13} \mu\text{s} \ln \left(\frac{150/13 - 4}{150/13 - 10} \right) = \frac{30}{13} \ln \frac{49}{10} \mu\text{s} = \boxed{3.67 \mu\text{s}}.$$

Para la descarga desde U_{th} hasta U_h ,

$$t_2 = \theta_{\text{on}} \ln \left(\frac{U_{th} - U_{\infty,\text{on}}}{U_h - U_{\infty,\text{on}}} \right).$$

Como

$$\theta_{\text{on}} = 0.750 \mu\text{s},$$

obtenemos

$$t_2 = 0.750 \mu\text{s} \ln \left(\frac{10.0 - 3.75}{4.00 - 3.75} \right) = \frac{3}{4} \ln 25 \mu\text{s} = \boxed{2.41 \mu\text{s}}.$$

Despreciando las duraciones de las conmutaciones,

$$\boxed{T = t_1 + t_2 = 6.08 \mu\text{s}}.$$

B.3

En cualquiera de las ramas conductoras, la potencia instantánea disipada en X es

$$p_X = UI_X = \frac{U^2}{r}.$$

Despreciamos la energía disipada durante las conmutaciones instantáneas ideales. Utilizando la evolución de la tensión deducida anteriormente, la energía disipada en cada rama es

$$W_{\text{off}} = \frac{\theta_{\text{off}}}{R_{\text{off}}} \int_{U_h}^{U_{\text{th}}} \frac{U^2}{U_{\infty, \text{off}} - U} dU = 23.2 \mu\text{J},$$

y

$$W_{\text{on}} = \frac{\theta_{\text{on}}}{R_{\text{on}}} \int_{U_h}^{U_{\text{th}}} \frac{U^2}{U - U_{\infty, \text{on}}} dU = 82.3 \mu\text{J}.$$

Así,

$$P = \frac{W_{\text{off}} + W_{\text{on}}}{T} = \frac{105.5 \mu\text{J}}{6.0816 \mu\text{s}} = \boxed{17.3 \text{ W}}.$$

La estimación del orden de magnitud solicitada es, por tanto,

$$\boxed{P \sim 10^1 \text{ W}}.$$

B.4

El armónico fundamental emitido tiene una longitud de onda

$$\lambda = cT = (299\,792\,458 \text{ m s}^{-1})(6.08162 \times 10^{-6} \text{ s}) = 1.82322 \times 10^3 \text{ m}.$$

En el modelo ideal de antena, el extremo libre es un nodo de corriente, mientras que una excitación eficiente sitúa un antinodo de corriente en el extremo alimentado. La separación entre ambos es un múltiplo impar de un cuarto de longitud de onda:

$$s = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

La longitud resonante más corta es

$$\boxed{s = \frac{\lambda}{4} = \frac{cT}{4} = 456 \text{ m}}.$$

La siguiente posibilidad es $3\lambda/4 = 1.37 \text{ km}$, que supera el límite. Por tanto, la longitud de un cuarto de onda es la opción óptima permitida.

C.1

Primero hallamos el estado estacionario inicial para $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$. Se encuentra en la rama inferior:

$$I_r = \frac{\mathcal{E}'}{R + R_{\text{off}}} = \frac{12}{13} \text{ A} = \boxed{0.923 \text{ A}},$$

$$U_r = R_{\text{off}} I_r = \frac{120}{13} \text{ V} = \boxed{9.23 \text{ V}}.$$

Sea $u = t - t_0$. Antes del pulso, $I_X = I_r$. Mientras la fuente está a 15.0 V y el elemento permanece en la rama inferior,

$$I_X(u) = \frac{\mathcal{E}}{R + R_{\text{off}}} + \left(I_r - \frac{\mathcal{E}}{R + R_{\text{off}}} \right) e^{-u/\theta_{\text{off}}},$$

o, numéricamente,

$$I_X(u) = \frac{15 - 3e^{-u/\theta_{\text{off}}}}{13} \text{ A}.$$

La duración crítica es el tiempo necesario para que esta corriente alcance 1.00 A, que corresponde a $U = U_{\text{th}}$.

Para $\tau < \tau_{\text{crit}}$, la gráfica presenta una pequeña protuberancia continua:

- Antes de t_0 , la corriente es constante e igual a 0.923 A.
- Durante el pulso, aumenta exponencialmente, con pendiente decreciente, pero permanece por debajo de 1.00 A.
- En $t_0 + \tau$, la corriente es continua y su pendiente cambia de signo.
- Después decae exponencialmente hasta volver a 0.923 A:

$$I_X(u) = I_r + [I_X(\tau) - I_r] e^{-(u-\tau)/\theta_{\text{off}}}, \quad u \geq \tau.$$

No hay conmutación entre ramas.

Para $\tau > \tau_{\text{crit}}$, la gráfica contiene un único pico grande:

1. La corriente sigue inicialmente el mismo aumento gradual de 0.923 a 1.00 A.
2. En $t = t_0 + \tau_{\text{crit}}$, salta verticalmente de 1.00 a 10.0 A.
3. A continuación disminuye en la rama superior. Mientras la fuente permanece a 15.0 V,

$$I_X(u) = 3.75 \text{ A} + 6.25 \text{ A} e^{-(u-\tau_{\text{crit}})/\theta_{\text{on}}}.$$

4. Al alcanzar 4.00 A, salta verticalmente a 0.400 A.
5. Posteriormente aumenta en la rama inferior y acaba aproximándose a 0.923 A desde abajo.

Si la fuente vuelve a 12.0 V mientras el elemento todavía está en la rama superior, la corriente permanece continua en ese instante, pero su decaimiento se hace más rápido. Su expresión posterior es

$$I_X(u) = 3.00 \text{ A} + [I_X(\tau) - 3.00 \text{ A}] e^{-(u-\tau)/\theta_{\text{on}}}.$$

La asíntota 3.00 A está por debajo de la corriente de mantenimiento, por lo que la corriente necesariamente alcanza 4.00 A y el elemento pasa al estado de baja conducción. Si esto ocurre en $u = u_d$, la recuperación posterior es

$$I_X(u) = I_r + (0.400 \text{ A} - I_r) e^{-(u-u_d)/\theta_{\text{off}}}.$$

Para un pulso más largo, la conmutación de la rama superior a la inferior puede ocurrir antes de que termine el pulso. Si la fuente permanece a 15.0 V, esa conmutación ocurre en

$$u = \tau_{\text{crit}} + t_2 = 3.35 \mu\text{s}.$$

La corriente se recupera entonces en la rama inferior con la fuente a 15.0 V hasta $u = \tau$, tras lo cual se aproxima al estado de reposo correspondiente a 12.0 V. Los cambios de la fuente producen cambios de pendiente, no cambios instantáneos en I_X .

No puede haber un segundo pico durante el pulso prescrito: manteniendo 15.0 V, el segundo cruce del umbral ocurriría en $u = \tau_{\text{crit}} + T > T > \tau$.

C.2

Al alcanzarse la duración crítica, el condensador acaba de cargarse desde U_r hasta U_{th} :

$$U_{\text{th}} = U_{\infty, \text{off}} + (U_r - U_{\infty, \text{off}})e^{-\tau_{\text{crit}}/\theta_{\text{off}}}.$$

Despejando,

$$\tau_{\text{crit}} = \theta_{\text{off}} \ln \left(\frac{U_{\infty, \text{off}} - U_r}{U_{\infty, \text{off}} - U_{\text{th}}} \right).$$

En función de los parámetros del circuito,

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{CRR_{\text{off}}}{R + R_{\text{off}}} \ln \left[\frac{(\mathcal{E} - \mathcal{E}')R_{\text{off}}}{\mathcal{E}R_{\text{off}} - (R + R_{\text{off}})U_{\text{th}}} \right].$$

Numéricamente,

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{30}{13} \mu\text{s} \ln \left(\frac{150/13 - 120/13}{150/13 - 10} \right) = \frac{30}{13} \ln \frac{3}{2} \mu\text{s}.$$

Por lo tanto,

$$\tau_{\text{crit}} = 0.936 \mu\text{s}.$$

C.3

El pulso especificado cumple

$$\tau = 1.00 \mu\text{s} > \tau_{\text{crit}} = 0.936 \mu\text{s}, \quad \tau < T.$$

Por tanto, desencadena la conmutación a la rama superior. El circuito completa una gran excursión de corriente y después vuelve a su estado estacionario original con la fuente a 12.0 V.

Sí, el circuito se comporta como un neuristor.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Gran Colisionador de Hadrones

Antes de comenzar este problema, lea las instrucciones generales que se encuentran en el sobre aparte.

En este problema se estudia la física del acelerador de partículas LHC (Gran Colisionador de Hadrones) del CERN. El CERN es el mayor laboratorio de física de partículas del mundo. Su principal objetivo es comprender las leyes fundamentales de la naturaleza. Dos haces de partículas se aceleran hasta alcanzar energías elevadas, se guían a lo largo del anillo del

acelerador mediante un intenso campo magnético y después se hacen colisionar entre sí. Los protones no se distribuyen uniformemente a lo largo de la circunferencia del acelerador, sino que se agrupan en los llamados paquetes. Las partículas producidas en las colisiones se observan mediante grandes detectores. En la tabla 1 se presentan algunos parámetros del LHC.

Anillo del LHC	
Circunferencia del anillo	26659 m
Número de paquetes por haz de protones	2808
Número de protones por paquete	1.15×10^{11}
Haces de protones	
Energía de los protones	7.00 TeV
Energía en el sistema del centro de masas	14.0 TeV

Tabla 1: Valores numéricos típicos de los parámetros relevantes del LHC.

Los físicos de partículas utilizan unidades convenientes para la energía, el momento lineal y la masa: la energía se mide en electronvoltios [eV]. Por definición, 1 eV es la cantidad de energía que adquiere una partícula con carga elemental, e , al atravesar una diferencia de potencial de un voltio ($1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$).

El momento lineal se mide en unidades de eV/c y la masa en unidades de eV/c^2 , donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Dado que 1 eV es una cantidad de energía muy pequeña, los físicos de partículas suelen utilizar MeV ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$), GeV ($1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$) o TeV ($1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$).

La Parte A trata de la aceleración de protones o electrones. La Parte B se ocupa de la identificación de las partículas producidas en las colisiones en el CERN.

Parte A. Acelerador LHC (6 puntos)

Aceleración:

Suponga que los protones se han acelerado mediante una tensión V de modo que su velocidad es muy próxima a la de la luz, y desprecie cualquier pérdida de energía debida a la radiación o a las colisiones con otras partículas.

A.1 — 0.7pt

Halle la expresión exacta de la velocidad final v de los protones en función de la tensión de aceleración V y de las constantes físicas.

El diseño de un futuro experimento en el CERN prevé utilizar los protones del LHC y hacerlos colisionar con electrones de energía 60.0 GeV.

A.2 — 0.8pt

Para partículas de energía elevada y masa pequeña, la desviación relativa $\Delta = (c - v)/c$ de la velocidad final v respecto a la velocidad de la luz es muy pequeña. Halle una aproximación de primer orden para Δ y calcule Δ para electrones con una energía de 60.0 GeV utilizando la tensión de aceleración V y las constantes físicas.

Volvamos ahora a los protones del LHC. Suponga que el tubo del haz tiene forma circular.

A.3 — 1.0pt

Deduzca una expresión para la densidad de flujo magnético uniforme B necesaria para mantener el haz de protones en una trayectoria circular. La expresión debe contener únicamente la energía de los protones E , la circunferencia L , constantes fundamentales y números. Puede utilizar aproximaciones adecuadas si su efecto es menor que la precisión correspondiente al menor número de cifras significativas de los datos.

Calcule la densidad de flujo magnético B para una energía de los protones de $E = 7.00 \text{ TeV}$, despreciando las interacciones entre los protones.

Potencia radiada:

Una partícula cargada acelerada emite energía en forma de ondas electromagnéticas. La potencia radiada P_{rad} por una partícula cargada que describe una trayectoria circular con velocidad angular constante depende únicamente de su aceleración a , su carga q , la velocidad de la luz c y la permitividad del vacío ϵ_0 .

A.4 — 1.0pt

Utilice el análisis dimensional para hallar una expresión de la potencia radiada P_{rad} .

La fórmula real de la potencia radiada contiene un factor $1/(6\pi)$; además, una deducción relativista completa introduce un factor multiplicativo adicional γ^4 , con $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

A.5 — 1.0pt

Calcule P_{tot} , la potencia total radiada por el LHC, para una energía de los protones de $E = 7.00 \text{ TeV}$ (consulte la tabla 1). Puede utilizar aproximaciones adecuadas.

Aceleración lineal:

En el CERN, los protones inicialmente en reposo se aceleran mediante un acelerador lineal de longitud $d = 30.0 \text{ m}$, atravesando una diferencia de potencial de $V = 500 \text{ MV}$. Suponga que el campo eléctrico es homogéneo. Un acelerador lineal consta de dos placas, como se muestra esquemáticamente en la figura 1.

A.6 — 1.5pt

Determine el tiempo T que tardan los protones en atravesar este campo.

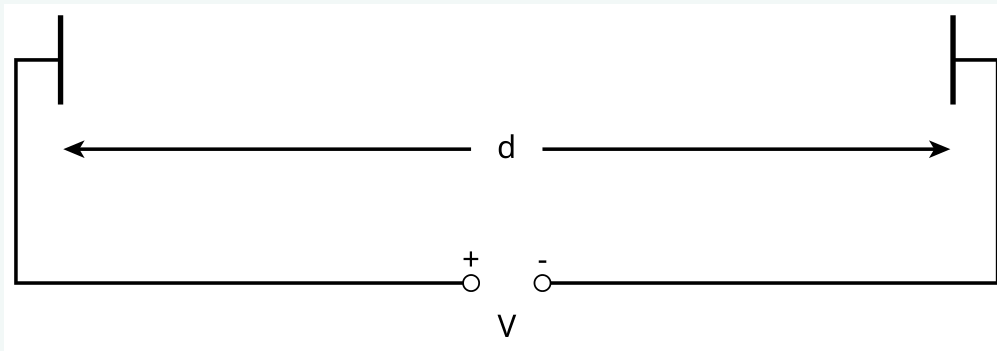


Figura 1: Esquema de un módulo acelerador.

Parte B. Identificación de partículas (4 puntos)

Tiempo de vuelo:

Es importante identificar las partículas de alta energía generadas en la colisión para interpretar el proceso de interacción. Un método sencillo consiste en medir el tiempo (t) que necesita una partícula de momento lineal conocido para recorrer una longitud l en un detector denominado de tiempo de vuelo (ToF). En la tabla 2 se enumeran algunas partículas típicas identificadas en el detector, junto con sus masas.

Partícula	Masa [MeV/ c^2]
Deuterón	1876
Protón	938
Kaón cargado	494
Pión cargado	140
Electrón	0.511

Tabla 2: Partículas y sus masas.

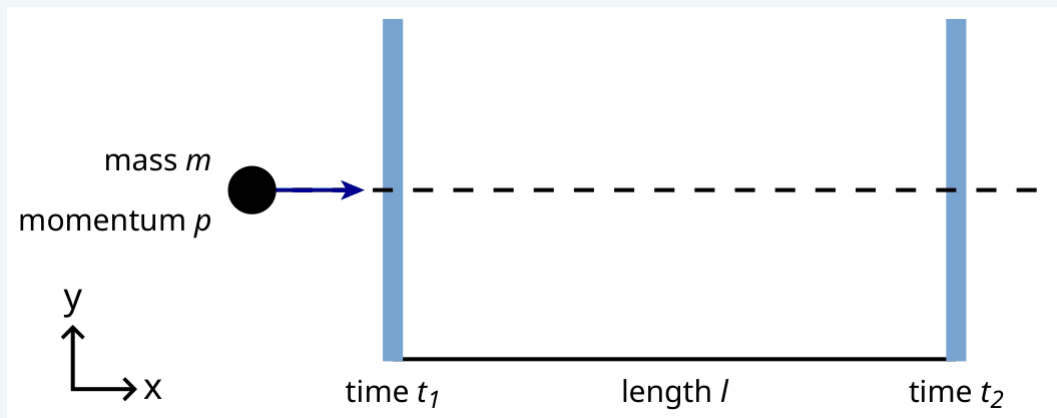


Figura 2: Vista esquemática de un detector de tiempo de vuelo.

B.1 — 0.8pt

Expresa la masa de la partícula m en función del momento lineal p , la longitud de vuelo l y el tiempo de vuelo t , suponiendo que las partículas tienen carga elemental e , se desplazan con una velocidad próxima a c siguiendo trayectorias rectas en el detector ToF y se mueven perpendicularmente a los dos planos de detección (véase la figura 2).

B.2 — 0.7pt

Calcule la longitud mínima l de un detector ToF que permita distinguir con seguridad un kaón cargado de un pión cargado, si el momento lineal medido de ambos es $1.00 \text{ GeV}/c$. Para una buena separación, se requiere que la diferencia entre los tiempos de vuelo sea mayor que tres veces la resolución temporal del detector. La resolución típica de un detector ToF es 150 ps ($1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$).

A continuación, las partículas producidas en un detector típico del LHC se identifican en un detector de dos etapas, compuesto por un detector de trazas y un detector ToF. La figura 3 muestra el montaje en los planos transversal y longitudinal respecto a los haces de protones. Ambos detectores son tubos que rodean la región de interacción, y el haz pasa por el centro de

los tubos. El detector de trazas mide la trayectoria de una partícula cargada que atraviesa un campo magnético cuya dirección es paralela a los haces de protones. El radio r de la trayectoria permite determinar el momento lineal transversal p_T de la partícula. Como se conoce el instante de la colisión, el detector ToF solo necesita un tubo para medir el tiempo de vuelo (el tiempo transcurrido entre la colisión y la detección en el tubo ToF). Este tubo ToF se sitúa justo fuera de la cámara de trazas. Para este problema puede suponer que todas las partículas creadas en la colisión se desplazan perpendicularmente a los haces de protones, lo que significa que las partículas creadas no tienen momento lineal en la dirección de los haces de protones.

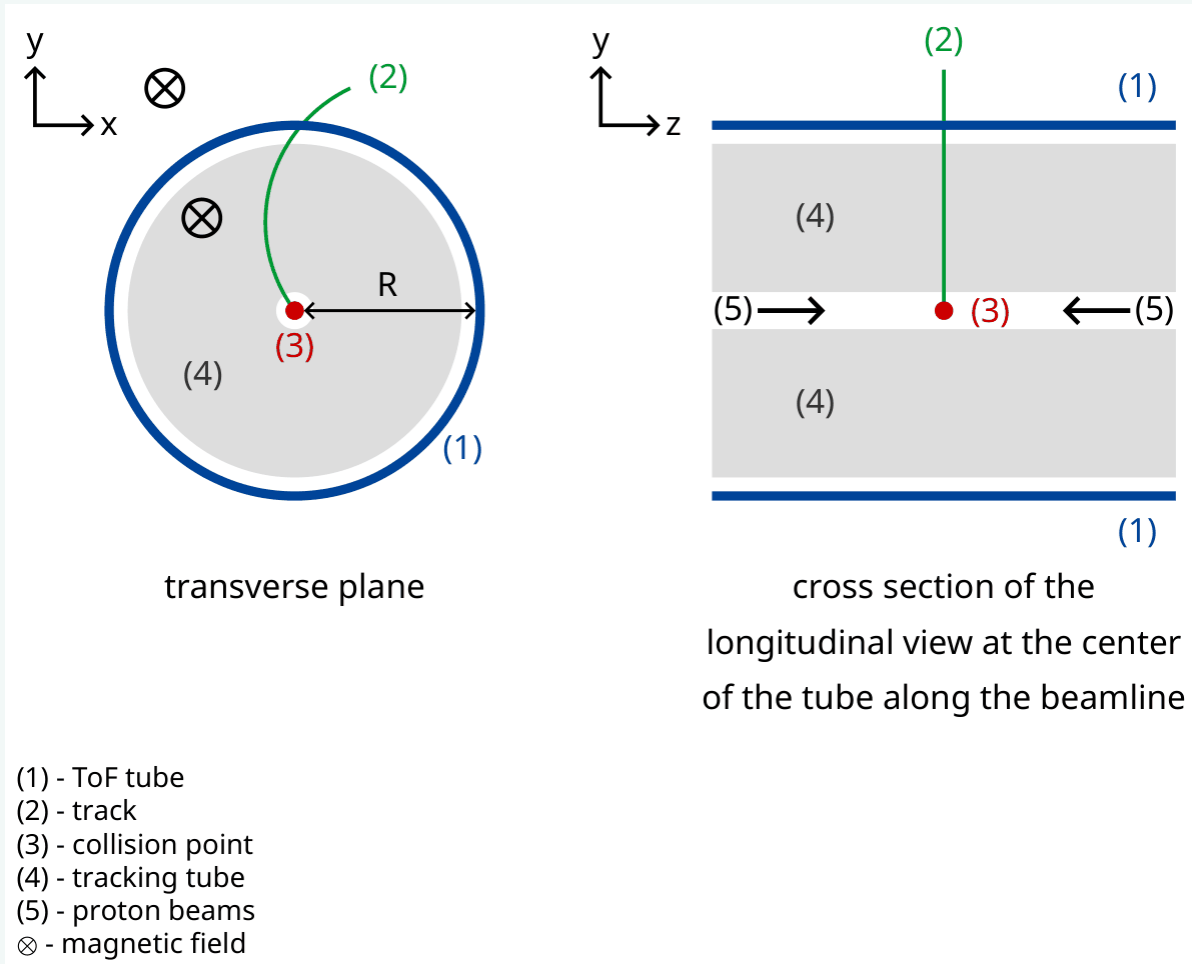


Figura 3: Montaje experimental para la identificación de partículas mediante una cámara de trazas y un detector ToF. Ambos detectores son tubos que rodean el punto de colisión situado en el centro. Izquierda: vista transversal perpendicular a la línea del haz. Derecha: vista longitudinal paralela a la línea del haz. La partícula se desplaza perpendicularmente a la línea del haz.

B.3 — 1.7pt

Expresa la masa de la partícula en función de la densidad de flujo magnético B , el radio R del tubo ToF, las constantes fundamentales y las magnitudes medidas: el radio r de la traza y el tiempo de vuelo t .

Hemos detectado cuatro partículas y queremos identificarlas. La densidad de flujo magnético en el detector de trazas era $B = 0.500$ T. El radio R del tubo ToF era 3.70 m. Estas son las medidas ($1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$):

Partícula	Radio de la trayectoria r [m]	Tiempo de vuelo t [ns]
A	5.10	20
B	2.94	14
C	6.06	18
D	2.31	25

B.4 — 0.8pt

Identifique las cuatro partículas calculando sus masas.

Hoja de datos generales

Velocidad de la luz en el vacío	c	$= 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Permeabilidad del vacío (constante magnética)	μ_0	$= 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Permitividad del vacío (constante eléctrica)	ε_0	$= 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Carga elemental	e	$= 1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
Masa del electrón	m_e	$= 9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31} \text{ kg}$
		$= 0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Masa del protón	m_p	$= 1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		$= 938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Masa del neutrón	m_n	$= 1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		$= 939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Unidad de masa atómica unificada	u	$= 1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Constante de Rydberg	R_∞	$= 10\,973\,731.568\,508(65) \text{ m}^{-1}$
Constante de gravitación universal	G	$= 6.674\,08(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Aceleración de la gravedad (en Zúrich)	g	$= 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante de Planck	h	$= 6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Número de Avogadro	N_A	$= 6.022\,140\,857(74) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante molar de los gases	R	$= 8.314\,4598(48) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de masa molar	M_u	$= 1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	k_B	$= 1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$= 5.670\,367(13) \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **A.1:** Para una aceleración desde el reposo,

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{m_p c^2}\right)^{-2}}.$$

- **A.2:**

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{eV}{m c^2}\right)^{-2} \simeq \frac{m^2 c^4}{2 e^2 V^2}.$$

Para los electrones de 60.0 GeV,

$$\Delta = 3.63 \times 10^{-11}.$$

- **A.3:**

$$B = \frac{2\pi}{ecL} \sqrt{E^2 - m_p^2 c^4} \simeq \frac{2\pi E}{ecL} = 5.50 \text{ T}.$$

- **A.4:**

$$P_{\text{rad}} = C \frac{q^2 a^2}{\varepsilon_0 c^3},$$

donde el análisis dimensional no permite determinar la constante adimensional C .

- **A.5:** Incluyendo ambos haces de protones,

$$P_{\text{tot}} = 5.12 \text{ kW}.$$

- **A.6:**

$$T = \frac{d}{c} \sqrt{1 + \frac{2m_p c^2}{eV}} = 2.18 \times 10^{-7} \text{ s} = 0.218 \mu\text{s}.$$

- **B.1:**

$$m = \frac{p}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{l}\right)^2 - 1}.$$

- **B.2:** La longitud umbral es

$$l_{\text{crit}} = 1.27739 \dots \text{ m}.$$

El criterio estricto de separación indicado exige $l > l_{\text{crit}}$, lo que da una longitud mínima práctica de aproximadamente $\boxed{1.28 \text{ m}}$.

- **B.3:**

$$m = \frac{eBr}{c} \sqrt{\left[\frac{ct}{2r \arcsin(R/(2r))}\right]^2 - 1}.$$

- **B.4:** A: protón, $m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$; B: pión cargado, $m \approx 0.14 \text{ GeV}/c^2$; C: protón, $m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$; D: kaón cargado, $m \approx 0.50 \text{ GeV}/c^2$.

Solución

A.1

Para un protón acelerado desde el reposo, la conservación de la energía da

$$eV = K = (\gamma - 1)m_p c^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Por tanto,

$$\gamma = 1 + \frac{eV}{m_p c^2}.$$

Despejando v ,

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{m_p c^2}\right)^{-2}}.$$

Esta expresión es exacta bajo la hipótesis de una aceleración desde el reposo sin pérdidas de energía.

A.2

Para una partícula de masa m ,

$$\Delta = 1 - \frac{v}{c} = 1 - \sqrt{1 - \gamma^{-2}}.$$

A energías elevadas, $\gamma^{-2} \ll 1$. Utilizando el desarrollo de primer orden

$$\sqrt{1 - x} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2),$$

obtenemos

$$\Delta = \frac{1}{2\gamma^2} + O(\gamma^{-4}).$$

En función de la tensión de aceleración,

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2}.$$

Cuando $eV \gg mc^2$, esta expresión se reduce además a

$$\Delta \simeq \frac{m^2 c^4}{2e^2 V^2}.$$

De manera equivalente, utilizando la energía total $E = \gamma mc^2$,

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2.$$

Para los electrones,

$$m_e c^2 = 0.5109989461 \text{ MeV}, \quad E = 60.0 \text{ GeV} = 6.00 \times 10^4 \text{ MeV},$$

de modo que

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{0.5109989461}{6.00 \times 10^4} \right)^2 = \boxed{3.63 \times 10^{-11}}.$$

A.3

Sea el radio de la órbita circular

$$\rho = \frac{L}{2\pi}.$$

La fuerza magnética cambia la dirección del momento lineal relativista, manteniendo constante su módulo. Para el movimiento circular uniforme,

$$\left| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right| = \frac{pv}{\rho}.$$

Igualando esta expresión a la fuerza magnética,

$$evB = \frac{pv}{\rho},$$

se obtiene

$$B = \frac{p}{e\rho}.$$

La relación relativista entre la energía y el momento lineal es

$$E^2 = p^2c^2 + m_p^2c^4,$$

donde E es la energía total del protón. Por tanto,

$$B = \frac{2\pi}{ecL} \sqrt{E^2 - m_p^2c^4}.$$

Para $E = 7.00 \text{ TeV}$,

$$\frac{m_p c^2}{E} = \frac{938.2720813 \text{ MeV}}{7.00 \times 10^6 \text{ MeV}} \approx 1.34 \times 10^{-4}.$$

Sustituir pc por E introduce una corrección relativa de tan solo

$$\frac{1}{2} \left(\frac{m_p c^2}{E} \right)^2 \approx 8.98 \times 10^{-9},$$

muy inferior a la precisión de la energía dada. Por consiguiente,

$$B \simeq \frac{2\pi E}{ecL}.$$

Utilizando $E = 7.00 \times 10^{12} e\text{J}$,

$$B \simeq \frac{2\pi(7.00 \times 10^{12})}{(299792458)(26659)} \text{ T} = \boxed{5.50 \text{ T}}.$$

A.4

Escribimos

$$P_{\text{rad}} = Cq^\alpha a^\beta c^\delta \varepsilon_0^\eta,$$

donde C es adimensional. Utilizando la masa, la longitud, el tiempo y la carga como dimensiones fundamentales,

$$[P] = ML^2T^{-3}, \quad [q] = Q, \quad [a] = LT^{-2}, \quad [c] = LT^{-1},$$

y

$$[\varepsilon_0] = Q^2T^2M^{-1}L^{-3}.$$

Igualando los exponentes se obtiene

$$\begin{aligned} -\eta &= 1, & \alpha + 2\eta &= 0, \\ \beta + \delta - 3\eta &= 2, & -2\beta - \delta + 2\eta &= -3. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\eta = -1, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \delta = -3.$$

En consecuencia,

$$P_{\text{rad}} = C \frac{q^2 a^2}{\varepsilon_0 c^3}.$$

El análisis dimensional determina la dependencia respecto de las magnitudes físicas, pero no permite determinar C .

A.5

Incluyendo el factor numérico y la corrección relativista especificados en el enunciado, un protón radia una potencia

$$P_1 = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi \varepsilon_0 c^3}.$$

Para el movimiento circular,

$$a = \frac{v^2}{\rho} \simeq \frac{c^2}{\rho}, \quad \rho = \frac{L}{2\pi}, \quad \gamma = \frac{E}{m_p c^2}.$$

Por consiguiente,

$$P_1 \simeq \frac{e^2 c}{6\pi \varepsilon_0 \rho^2} \left(\frac{E}{m_p c^2} \right)^4.$$

Numéricamente,

$$\rho = \frac{26659}{2\pi} \text{ m} = 4242.91 \text{ m}, \quad \gamma = \frac{7.00 \times 10^6}{938.2720813} = 7460.52.$$

Al sustituir se obtiene

$$P_1 \simeq 7.93 \times 10^{-12} \text{ W}.$$

Hay dos haces, cada uno de los cuales contiene 2808 paquetes con 1.15×10^{11} protones por paquete. Por tanto, el número total de protones es

$$N = 2(2808)(1.15 \times 10^{11}) = 6.4584 \times 10^{14}.$$

Sumando las potencias radiadas individuales,

$$P_{\text{tot}} = NP_1 \simeq 5.12467 \times 10^3 \text{ W}.$$

Por tanto,

$$P_{\text{tot}} = 5.12 \text{ kW}.$$

A.6

El campo eléctrico homogéneo tiene un módulo V/d , por lo que la fuerza sobre un protón es constante:

$$F = \frac{eV}{d}.$$

En el régimen relativista, la ecuación de movimiento es

$$\frac{dp}{dt} = F.$$

Como el protón parte del reposo,

$$p_f = FT, \quad T = \frac{p_f}{F}.$$

El trabajo realizado a lo largo del acelerador es eV , lo que da una energía total final

$$E_f = m_p c^2 + eV.$$

Por tanto,

$$p_f c = \sqrt{E_f^2 - m_p^2 c^4} = \sqrt{(eV)^2 + 2eV m_p c^2}.$$

Combinando estas expresiones,

$$T = \frac{d}{eVc} \sqrt{(eV)^2 + 2eV m_p c^2},$$

o bien

$$T = \frac{d}{c} \sqrt{1 + \frac{2m_p c^2}{eV}}.$$

Aquí $eV = 500 \text{ MeV}$. Por tanto,

$$T = \frac{30.0}{299792458} \sqrt{1 + \frac{2(938.2720813)}{500}} \text{ s} = 2.18 \times 10^{-7} \text{ s}.$$

El uso de una fuerza constante, en lugar de una aceleración constante, tiene en cuenta la variación relativista de la velocidad.

B.1

Para la trayectoria rectilínea,

$$v = \frac{l}{t}.$$

El momento lineal relativista satisface

$$p = \gamma m v = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Despejando m ,

$$m = \frac{p}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = p \sqrt{\frac{t^2}{l^2} - \frac{1}{c^2}}.$$

Por tanto,

$$m = \frac{p}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{l}\right)^2 - 1}.$$

Esta expresión es exacta; no se necesita ningún desarrollo en torno a $v = c$.

B.2

Al despejar el tiempo de vuelo en el resultado de B.1 se obtiene

$$t(m) = \frac{l}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2}.$$

A igualdad de momento lineal, el kaón, que es más pesado, llega más tarde. La diferencia entre sus tiempos de vuelo es

$$t_K - t_\pi = \frac{l}{c} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{m_K c}{p}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{m_\pi c}{p}\right)^2} \right].$$

La separación requerida es

$$t_K - t_\pi > 3(150 \text{ ps}) = 450 \text{ ps}.$$

La longitud umbral es, por tanto,

$$l_{\text{crit}} = \frac{3\sigma_t c}{\sqrt{1 + (m_K c/p)^2} - \sqrt{1 + (m_\pi c/p)^2}}, \quad \sigma_t = 150 \text{ ps}.$$

Utilizando $p = 1000 \text{ MeV}/c$,

$$l_{\text{crit}} = \frac{(450 \times 10^{-12})(299792458)}{\sqrt{1 + (494/1000)^2} - \sqrt{1 + (140/1000)^2}} \text{ m}.$$

El denominador adimensional es 0.10561117, lo que da

$$l_{\text{crit}} = 1.27739 \dots \text{ m}.$$

Por tanto, l debe superar este umbral; se requieren aproximadamente $\boxed{1.28 \text{ m}}$. Se utiliza la expresión relativista exacta porque la masa del kaón no es despreciable en comparación con p/c .

B.3

Como la partícula no tiene momento lineal paralelo a la línea del haz, todo su momento lineal es transversal al campo magnético. Como en A.3,

$$p = eBr.$$

El campo magnético no realiza trabajo, por lo que el módulo de la velocidad es constante a lo largo de la trayectoria circular.

Sea θ el ángulo barrido respecto al centro de la trayectoria antes de que la partícula alcance por primera vez el tubo ToF. El punto de colisión y el punto de detección están separados por el radio del tubo R . También son los extremos de una cuerda de la circunferencia de la trayectoria, cuyo radio es r . Por tanto,

$$R = 2r \sin \frac{\theta}{2}.$$

Para el primer encuentro con el tubo,

$$\theta = 2 \arcsin \frac{R}{2r},$$

y la longitud de la trayectoria de vuelo es

$$s = r\theta = 2r \arcsin \frac{R}{2r}.$$

Esto exige $r \geq R/2$; una órbita más pequeña nunca alcanza el tubo.

El módulo de la velocidad es

$$v = \frac{s}{t}.$$

Utilizando la fórmula de la masa de B.1 con la longitud real de la trayectoria s , junto con $p = eBr$,

$$m = \frac{eBr}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{s}\right)^2 - 1}.$$

En consecuencia,

$$m = \frac{eBr}{c} \sqrt{\left[\frac{ct}{2r \arcsin(R/(2r))}\right]^2 - 1}.$$

El arcoseno se evalúa en radianes.

B.4

Para cada partícula, se utiliza

$$s = 2r \arcsin \frac{3.70 \text{ m}}{2r}, \quad p = e(0.500 \text{ T})r,$$

y

$$m = \frac{p}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{s}\right)^2 - 1}.$$

La conversión de unidades del momento lineal se deduce directamente de $p = eBr$:

$$p [\text{GeV}/c] = 0.299792458 B [\text{T}] r [\text{m}].$$

Conservando cifras adicionales para comparar las masas calculadas con la tabla 2, se obtiene:

Partícula	Longitud de la trayectoria s [m]	Momento lineal p [MeV/c]	Masa calculada [MeV/c ²]	Identificación
A	3.7864	764.47	938.65	Protón
B	4.0019	440.69	139.32	Pión cargado
C	3.7600	908.37	935.10	Protón
D	4.2908	346.26	495.90	Kaón cargado

Las pequeñas diferencias respecto a las masas tabuladas son compatibles con el redondeo de los valores medidos. Con una precisión razonable,

$A :$	$m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$	protón,
$B :$	$m \approx 0.14 \text{ GeV}/c^2$	pión cargado,
$C :$	$m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$	protón,
$D :$	$m \approx 0.50 \text{ GeV}/c^2$	kaón cargado.

La solución se comprobó con la solución oficial.