

IPhO 2016

Theorieaufgaben und Lösungen · Zürich, Schweiz · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/2016/

Aufgabe 1: Zwei Probleme der Mechanik

Bitte lesen Sie die allgemeinen Hinweise im separaten Umschlag, bevor Sie mit dieser Aufgabe beginnen.

Teil A. Die verborgene Scheibe (3.5 Punkte)

Wir betrachten einen massiven Holzzylinder mit dem Radius r_1 und der Dicke h_1 . An einer Stelle im Inneren des Holzzylinders wurde das Holz durch eine Metallscheibe mit dem Radius r_2 und der Dicke h_2 ersetzt. Die Metallscheibe ist so angeordnet, dass ihre Symmetrieachse B parallel zur Symmetrieachse S des Holzzylinders verläuft und sie von der oberen und der unteren Stirnfläche des Holzzylinders jeweils den gleichen Abstand hat. Den Abstand zwischen S und B bezeichnen wir mit d . Die Dichte des Holzes beträgt ρ_1 , die Dichte des Metalls beträgt $\rho_2 > \rho_1$. Die Gesamtmasse des Holzzylinders mit der darin befindlichen Metallscheibe beträgt M .

In dieser Aufgabe legen wir den Holzzylinder so auf den Boden, dass er frei nach links und rechts rollen kann. Abb. 1 zeigt eine Seitenansicht und eine Draufsicht des Aufbaus.

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Größe und die Lage der Metallscheibe zu bestimmen.

Wenn im Folgenden ein Ergebnis durch bekannte Größen ausgedrückt werden soll, dürfen Sie stets annehmen, dass die folgenden Größen bekannt sind:

$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

Ziel ist es, r_2 , h_2 und d durch indirekte Messungen zu bestimmen.

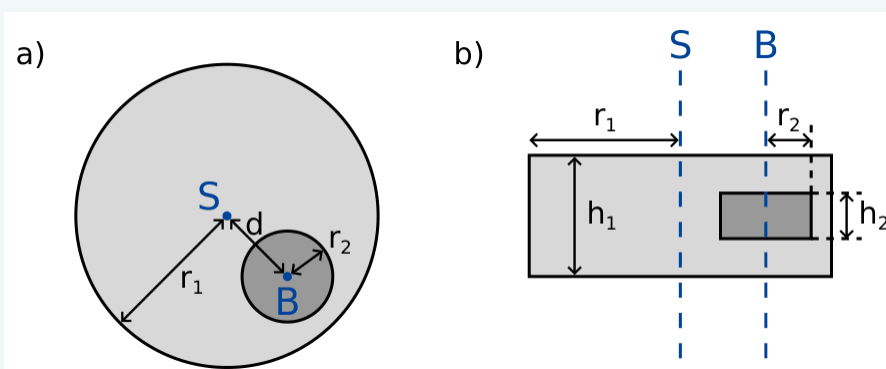


Abbildung 1: a) Seitenansicht b) Draufsicht

Mit b bezeichnen wir den Abstand zwischen dem Schwerpunkt C des Gesamtsystems und der Symmetrieachse S des Holzzylinders. Um diesen Abstand zu bestimmen, entwerfen wir folgendes Experiment: Wir legen den Holzzylinder so auf eine horizontale Unterlage, dass er sich in einem stabilen Gleichgewicht befindet. Nun neigen wir die Unterlage langsam um einen Winkel Θ (siehe

Abb. 2). Aufgrund der Haftreibung kann der Holzzylinder frei rollen, ohne zu gleiten. Er rollt ein kleines Stück die schiefe Ebene hinab, kommt dann aber in einem stabilen Gleichgewicht zur Ruhe, nachdem er sich um einen Winkel ϕ gedreht hat, den wir messen.

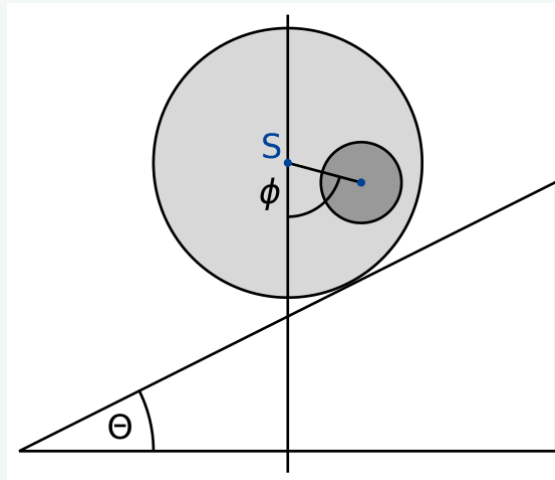


Abbildung 2: Zylinder auf einer geneigten Unterlage.

A.1 — 0.8 Punkte

Bestimmen Sie einen Ausdruck für b als Funktion der Größen (1), des Winkels ϕ und des Neigungswinkels Θ der Unterlage.

Von nun an können wir annehmen, dass der Wert von b bekannt ist.

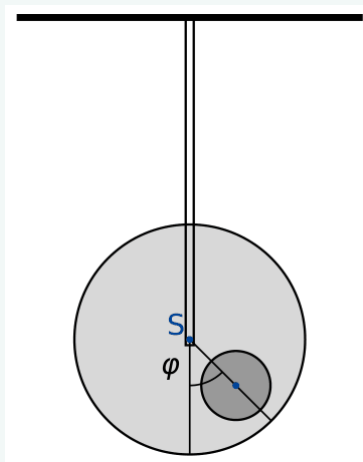


Abbildung 3: Aufgehängtes System.

Als Nächstes wollen wir das Trägheitsmoment I_S des Systems bezüglich der Symmetrieachse S messen. Dazu hängen wir den Holzzylinder an seiner Symmetrieachse an einer starren Stange auf. Anschließend drehen wir ihn um einen kleinen Winkel φ aus seiner Gleichgewichtslage und lassen ihn los. Abbildung 3 zeigt den Aufbau. Wir stellen fest, dass φ eine periodische Bewegung mit der Periodendauer T beschreibt.

A.2 — 0.5 Punkte

Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für φ . Drücken Sie das Trägheitsmoment I_S des Systems bezüglich seiner Symmetrieachse S durch T , b und die bekannten Größen (1) aus. Sie dürfen annehmen, dass wir das System nur geringfügig aus seiner Gleichgewichtslage auslenken, sodass φ stets sehr klein ist.

Aus den Messungen in den Teilaufgaben **A.1** und **A.2** wollen wir nun die Geometrie und die Lage der Metallscheibe im Inneren des Holzzylinders bestimmen.

A.3 — 0.4 Punkte

Bestimmen Sie einen Ausdruck für den Abstand d als Funktion von b und den Größen (1). Sie dürfen in Ihrem Ausdruck auch r_2 und h_2 als Variablen verwenden, da diese in Teilaufgabe **A.5** berechnet werden.

A.4 — 0.7 Punkte

Bestimmen Sie einen Ausdruck für das Trägheitsmoment I_S in Abhängigkeit von b und den bekannten Größen (1). Sie dürfen in Ihrem Ausdruck auch r_2 und h_2 als Variablen verwenden, da diese in Teilaufgabe **A.5** berechnet werden.

A.5 — 1.1 Punkte

Geben Sie mithilfe aller bisherigen Ergebnisse jeweils einen Ausdruck für h_2 und r_2 in Abhängigkeit von b , T und den bekannten Größen (1) an. Sie dürfen h_2 als Funktion von r_2 ausdrücken.

Teil B. Rotierende Raumstation (6.5 Punkte)

Alice ist Astronautin und lebt auf einer Raumstation. Die Raumstation ist ein riesiges Rad mit dem Radius R , das sich um seine Achse dreht und dadurch künstliche Schwerkraft für die Astronauten erzeugt. Die Astronauten leben auf der Innenseite des Radkranzes. Die Gravitationsanziehung der Raumstation und die Krümmung des Bodens können vernachlässigt werden.

B.1 — 0.5 Punkte

Mit welcher Winkelgeschwindigkeit ω_{ss} dreht sich die Raumstation, damit die Astronauten die gleiche Schwerebeschleunigung g_E wie auf der Erdoberfläche erfahren?

Alice und ihr Astronautenfreund Bob streiten sich. Bob glaubt nicht, dass sie tatsächlich auf einer Raumstation leben, und behauptet, sie seien auf der Erde. Alice möchte Bob mithilfe der Physik beweisen, dass sie auf einer rotierenden Raumstation leben. Dazu befestigt sie eine Masse m an einer Feder mit der Federkonstanten k und lässt sie schwingen. Die Masse schwingt nur in vertikaler Richtung und kann sich nicht in horizontaler Richtung bewegen.

B.2 — 0.2 Punkte

Welche Kreisfrequenz ω_E der Schwingung würde eine Person auf der Erde messen, wenn man annimmt, dass dort die Schwerebeschleunigung konstant gleich g_E ist?

B.3 — 0.6 Punkte

Welche Kreisfrequenz ω der Schwingung misst Alice auf der Raumstation?

Alice ist überzeugt, dass ihr Experiment beweist, dass sie sich auf einer rotierenden Raumstation befinden. Bob bleibt skeptisch. Er behauptet, dass man einen ähnlichen Effekt erhält, wenn man die Änderung der Schwerebeschleunigung oberhalb der Erdoberfläche berücksichtigt. In den folgenden Teilaufgaben untersuchen wir, ob Bob recht hat.

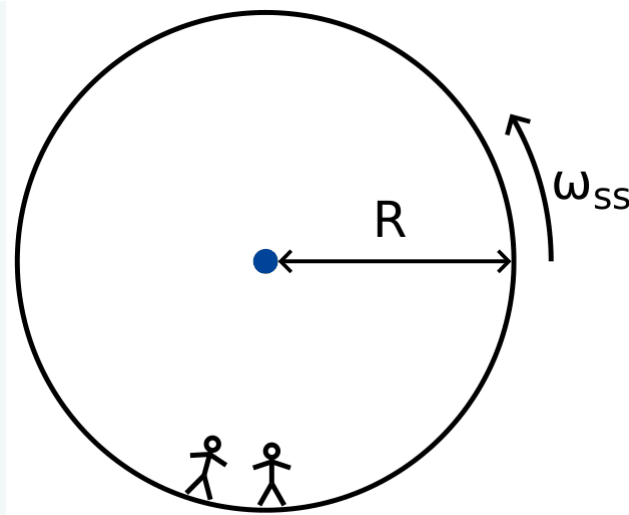


Abbildung 4: Raumstation

B.4 — 0.8 Punkte

Leiten Sie einen Ausdruck für die Schwerebeschleunigung $g_E(h)$ in kleinen Höhen h über der Erdoberfläche her und berechnen Sie die Kreisfrequenz $\tilde{\omega}_E$ der schwingenden Masse (eine lineare Näherung genügt). Bezeichnen Sie den Erdradius mit R_E . Vernachlässigen Sie die Erdrotation.

Tatsächlich stellt Alice bei dieser Raumstation fest, dass das Federpendel mit der von Bob vorhergesagten Frequenz schwingt.

B.5 — 0.3 Punkte

Bei welchem Radius R der Raumstation stimmt die Kreisfrequenz ω mit der Kreisfrequenz $\tilde{\omega}_E$ auf der Erde überein? Drücken Sie Ihre Antwort durch R_E aus.

Verärgert über Bobs Sturheit denkt sich Alice ein Experiment aus, mit dem sie ihre Behauptung beweisen will. Dazu steigt sie auf einen Turm der Höhe H über dem Boden der Raumstation und lässt eine Masse fallen. Dieses Experiment lässt sich sowohl im rotierenden Bezugssystem als auch in einem Inertialsystem verstehen.

In einem gleichförmig rotierenden Bezugssystem nehmen die Astronauten eine Scheinkraft $\vec{F}_C$ wahr, die Corioliskraft genannt wird. Die Kraft $\vec{F}_C$, die auf einen Körper der Masse m wirkt, der sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einem Bezugssystem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_{ss}$ bewegt, ist gegeben durch

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss}. \quad (2)$$

Für die skalaren Größen dürfen Sie

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi, \quad (3)$$

verwenden, wobei ϕ der Winkel zwischen der Geschwindigkeit und der Rotationsachse ist. Die Kraft steht sowohl senkrecht auf der Geschwindigkeit v als auch auf der Rotationsachse. Das Vorzeichen der Kraft lässt sich mit der Rechte-Hand-Regel bestimmen, im Folgenden dürfen Sie es jedoch frei wählen.

B.6 — 1.1 Punkte

Berechnen Sie die horizontale Geschwindigkeit v_x und die horizontale Verschiebung d_x (relativ zum Fuß des Turms, in der Richtung senkrecht zum Turm) der Masse in dem Augenblick, in dem sie auf den Boden trifft. Sie dürfen annehmen, dass die Höhe H des Turms klein ist, sodass die von den Astronauten gemessene Beschleunigung während des Falls konstant ist. Außerdem dürfen Sie annehmen, dass $d_x \ll H$ gilt.

Um ein gutes Ergebnis zu erhalten, beschließt Alice, dieses Experiment von einem wesentlich höheren Turm als zuvor durchzuführen. Zu ihrer Überraschung trifft die Masse am Fuß des Turms auf den Boden, sodass $d_x = 0$ ist.

B.7 — 1.3 Punkte

Bestimmen Sie eine untere Schranke für die Turmhöhe, bei der $d_x = 0$ auftreten kann.

Alice ist bereit, einen letzten Versuch zu unternehmen, Bob zu überzeugen. Sie möchte mit ihrem Federpendel die Wirkung der Corioliskraft zeigen. Dazu verändert sie den ursprünglichen Aufbau: Sie befestigt ihre Feder an einem Ring, der auf einer horizontalen Stange reibungsfrei in x -Richtung gleiten kann. Die Feder selbst schwingt in y -Richtung. Die Stange verläuft parallel zum Boden und senkrecht zur Rotationsachse der Raumstation. Die xy -Ebene steht somit senkrecht zur Rotationsachse, wobei die y -Richtung unmittelbar zum Rotationszentrum der Station zeigt.

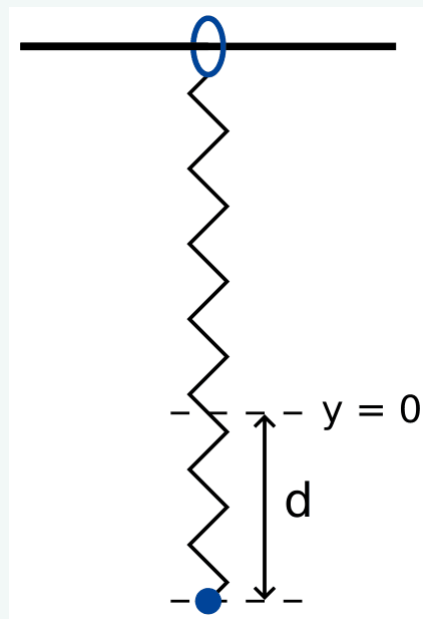


Abbildung 5: Versuchsaufbau.

B.8 — 1.7 Punkte

Alice zieht die Masse vom Gleichgewichtspunkt $x = 0, y = 0$ um eine Strecke d nach unten und lässt sie dann los (siehe Abbildung 5).

- Geben Sie jeweils einen algebraischen Ausdruck für $x(t)$ und $y(t)$ an. Sie dürfen annehmen, dass $\omega_{ss}d$ klein ist, und die Corioliskraft für die Bewegung entlang der y -Achse vernachlässigen.
- Skizzieren Sie die Bahnkurve $(x(t), y(t))$ und kennzeichnen Sie alle wichtigen Merkmale, beispielsweise die Amplitude.

Alice und Bob streiten weiter.

Allgemeines Datenblatt

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$= 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Magnetische Feldkonstante (Vakuumpermeabilität)	μ_0	$= 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Elektrische Feldkonstante (Vakuumpermittivität)	ε_0	$= 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Elementarladung	e	$= 1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
Elektronenmasse	m_e	$= 9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31} \text{ kg}$
		$= 0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Protonenmasse	m_p	$= 1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		$= 938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Neutronenmasse	m_n	$= 1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		$= 939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Atomare Masseneinheit	u	$= 1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Rydberg-Konstante	R_∞	$= 10\,973\,731.568\,508(65) \text{ m}^{-1}$
Universelle Gravitationskonstante	G	$= 6.674\,08(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Fallbeschleunigung (in Zürich)	g	$= 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Plancksches Wirkungsquantum	h	$= 6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Avogadro-Konstante	N_A	$= 6.022\,140\,857(74) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Molare Gaskonstante	R	$= 8.314\,4598(48) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Molare Massenkostante	M_u	$= 1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Boltzmann-Konstante	k_B	$= 1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	$= 5.670\,367(13) \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Für Teil A definieren wir die Masse eines vollständig aus Holz bestehenden Zylinders und die durch das Metall hinzukommende Masse:

$$m_0 = \pi \rho_1 r_1^2 h_1, \quad \Delta m = M - m_0 = \pi(\rho_2 - \rho_1) r_2^2 h_2.$$

Für Teil B schreiben wir $\Omega = \omega_{ss}$ und wählen $+x$ in Drehrichtung der Station und $+y$ in Richtung ihres Zentrums.

• A.1

$$b = \frac{r_1 \sin \Theta}{\sin \phi}.$$

• A.2

$$I_S \ddot{\varphi} = -Mgb \sin \varphi \simeq -Mgb\varphi, \quad I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2}.$$

• A.3

$$d = \frac{Mb}{\Delta m} = \frac{Mb}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2 h_2}.$$

• A.4

$$I_S = \frac{1}{2}m_0 r_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m r_2^2 + \frac{M^2 b^2}{\Delta m}.$$

• A.5

$$r_2 = \sqrt{\frac{MgbT^2}{2\pi^2 \Delta m} - \frac{m_0 r_1^2}{\Delta m} - \frac{2M^2 b^2}{(\Delta m)^2}}, \quad h_2 = \frac{\Delta m}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2}.$$

• B.1

$$\omega_{ss} = \sqrt{\frac{g_E}{R}}.$$

• B.2

$$\omega_E = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

• B.3

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g_E}{R}}.$$

• B.4

$$g_E(h) = \frac{g_E}{(1 + h/R_E)^2} \simeq g_E \left(1 - \frac{2h}{R_E}\right), \quad \tilde{\omega}_E = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}}.$$

• B.5

$$R = \frac{R_E}{2}.$$

• B.6

$$v_x = -2\Omega H, \quad d_x = -\frac{2}{3}\Omega H \sqrt{\frac{2H}{g_E}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}H \sqrt{\frac{H}{R}}.$$

Beide sind der Drehrichtung der Station entgegengesetzt.

- **B.7** Eine streng gültige untere Schranke lautet

$$H > R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2}} \right) \simeq 0.8428R.$$

Die erste exakte Rückkehr zum Fuß des Turms tritt auf bei

$$H_{\min} \simeq 0.8716R.$$

- **B.8** Mit $a = 2\Omega d/\omega$ gilt

$$x(t) = a[\omega t - \sin(\omega t)], \quad y(t) = -d \cos(\omega t).$$

Die Bahnkurve besteht aus aufeinanderfolgenden Zykloidenbögen mit Spitzen bei $(2\pi na, -d)$, oberen Umkehrpunkten bei $((2n + 1)\pi a, d)$ und einem horizontalen Abstand von $2\pi a$. Die vertikale Amplitude beträgt d .

Lösung

A.1

Sei P der Berührungspunkt mit der geneigten Unterlage. Die Normalkraft und die Haftreibung greifen beide in P an und üben daher kein Drehmoment bezüglich P aus. Im statischen Gleichgewicht muss somit die vertikale Gerade durch den Schwerpunkt C durch P verlaufen.

Der Schwerpunkt liegt auf SB . Mit den in Abbildung 2 gezeigten Winkeln ergeben sich für die horizontalen Verschiebungen von P beziehungsweise C gegenüber S

$$x_P - x_S = r_1 \sin \Theta, \quad x_C - x_S = b \sin \phi.$$

Folglich gilt

$$Mg(b \sin \phi - r_1 \sin \Theta) = 0,$$

und damit

$$b = \frac{r_1 \sin \Theta}{\sin \phi}.$$

Das stabile Gleichgewicht entspricht dem Lösungszweig mit $\cos \phi > 0$. Insbesondere muss die Neigung so klein sein, dass $r_1 \sin \Theta < b$ gilt; Gleichheit entspricht der Grenzkonfiguration ohne Rückstellwirkung.

A.2

Die Aufhängung fixiert die Achse S . Die Gewichtskraft greift in C im Abstand b von dieser Achse an und erzeugt das rücktreibende Drehmoment

$$\tau_S = -Mgb \sin \varphi.$$

Die Bewegungsgleichung der Rotation lautet daher

$$I_S \ddot{\varphi} = -Mgb \sin \varphi.$$

Für $|\varphi| \ll 1$ verwenden wir $\sin \varphi \simeq \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgb}{I_S} \varphi = 0.$$

Dies ist eine harmonische Schwingung mit

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{Mgb}{I_S}.$$

Somit gilt

$$I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2},$$

wobei die angegebene Fallbeschleunigung $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ beträgt.

A.3

Wir stellen die tatsächliche Dichteverteilung als Summe folgender Beiträge dar:

1. Ein vollständiger Holzzylinder mit der Masse

$$m_0 = \pi \rho_1 r_1^2 h_1,$$

dessen Mittelpunkt auf S liegt.

2. Eine zusätzliche Scheibe mit der Dichte $\rho_2 - \rho_1$, deren Mittelpunkt auf B liegt, mit der Masse

$$\Delta m = \pi(\rho_2 - \rho_1) r_2^2 h_2 = M - m_0.$$

Damit wird das Holz berücksichtigt, das vor dem Einsetzen des Metalls entfernt wurde.

Das erste Massenmoment bezüglich S liefert

$$Mb = m_0(0) + \Delta m d.$$

Daraus folgt

$$d = \frac{Mb}{\Delta m} = \frac{Mb}{M - \pi \rho_1 r_1^2 h_1} = \frac{Mb}{\pi(\rho_2 - \rho_1) r_2^2 h_2}.$$

A.4

Der vollständige Holzzylinder liefert den Beitrag

$$I_{\text{wood}} = \frac{1}{2} m_0 r_1^2.$$

Die zusätzliche Scheibe hat bezüglich ihrer eigenen Symmetrieachse das Trägheitsmoment $\frac{1}{2} \Delta m r_2^2$.

Nach dem Satz von Steiner beträgt ihr Beitrag bezüglich S

$$I_{\text{additional}} = \frac{1}{2} \Delta m r_2^2 + \Delta m d^2.$$

Daher gilt

$$I_S = \frac{1}{2} m_0 r_1^2 + \frac{1}{2} \Delta m r_2^2 + \Delta m d^2.$$

Einsetzen von $d = Mb/\Delta m$ ergibt

$$I_S = \frac{1}{2} m_0 r_1^2 + \frac{1}{2} \Delta m r_2^2 + \frac{M^2 b^2}{\Delta m}.$$

A.5

Wir setzen die Ausdrücke für I_S aus A.2 und A.4 gleich:

$$\frac{MgbT^2}{4\pi^2} = \frac{1}{2}m_0r_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m r_2^2 + \frac{M^2b^2}{\Delta m}.$$

Auflösen nach r_2^2 ergibt

$$r_2^2 = \frac{MgbT^2}{2\pi^2\Delta m} - \frac{m_0r_1^2}{\Delta m} - \frac{2M^2b^2}{(\Delta m)^2}.$$

Wir wählen die positive Wurzel:

$$r_2 = \sqrt{\frac{MgbT^2}{2\pi^2\Delta m} - \frac{m_0r_1^2}{\Delta m} - \frac{2M^2b^2}{(\Delta m)^2}}.$$

Die Massenbeziehung bestimmt anschließend die Dicke:

$$h_2 = \frac{\Delta m}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2}.$$

Hier sind $m_0 = \pi\rho_1r_1^2h_1$ und $\Delta m = M - m_0$, sodass alle Größen auf der rechten Seite bekannt oder gemessen sind. Physikalisch konsistente Messwerte müssen einen positiven Radikanden ergeben und $d + r_2 \leq r_1$ sowie $h_2 \leq h_1$ erfüllen.

B.1

Ein Astronaut, der relativ zum Radkranz ruht, bewegt sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius R . Die erforderliche Zentripetalbeschleunigung beträgt

$$a_c = \omega_{ss}^2 R.$$

Die Normalkraft, die diese Beschleunigung hervorruft, wird vom Astronauten als Gewicht wahrgenommen. Damit die Beschleunigung derjenigen auf der Erde entspricht, muss

$$\omega_{ss}^2 R = g_E$$

gelten. Somit ist

$$\omega_{ss} = \sqrt{\frac{g_E}{R}}.$$

Im Folgenden schreiben wir $\Omega = \omega_{ss}$.

B.2

Sei y die nach oben gerichtete Auslenkung aus der Gleichgewichtslage der Feder. Eine konstante Schwerebeschleunigung verändert die Dehnung im Gleichgewicht; die konstante Gewichtskraft fällt jedoch weg, wenn die Gleichung für die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage aufgestellt wird:

$$m\ddot{y} = -ky.$$

Daher gilt

$$\omega_E = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

B.3

Wir verwenden das rotierende Bezugssystem und lassen y von der Gleichgewichtslage aus radial nach innen zeigen. Ist der Radius der Gleichgewichtslage r_0 , so beträgt der momentane Radius $r_0 - y$.

Die Zentrifugalkraft wirkt nach außen und hat den Betrag

$$m\Omega^2(r_0 - y).$$

Die nach innen gerichtete Federkraft nimmt um ky ab, wenn sich die Masse um y nach innen bewegt. Im Gleichgewicht erfüllt ihr Wert F_0 die Beziehung

$$F_0 = m\Omega^2 r_0.$$

Die Bewegungsgleichung in Richtung nach innen lautet daher

$$m\ddot{y} = (F_0 - ky) - m\Omega^2(r_0 - y) = -(k - m\Omega^2)y.$$

Die horizontale Zwangskraft gleicht die Corioliskraft aus, sodass diese die radiale Bewegungsgleichung nicht verändert. Somit gilt

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g_E}{R}}.$$

Schwingungen setzen $k/m > \Omega^2$ voraus.

B.4

Sei M_E die Erdmasse. Das Newtonsche Gravitationsgesetz liefert

$$g_E(h) = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2}.$$

Wegen $g_E = GM_E/R_E^2$ gilt

$$g_E(h) = g_E \left(1 + \frac{h}{R_E}\right)^{-2}.$$

Für $h \ll R_E$ ergibt die Entwicklung erster Ordnung

$$g_E(h) \simeq g_E \left(1 - \frac{2h}{R_E}\right).$$

Die Höhe der Gleichgewichtslage sei h_0 , und y bezeichne die nach oben gerichtete Auslenkung aus dieser Lage. Nach Subtraktion der Kräftebilanz im Gleichgewicht gilt

$$m\ddot{y} = -ky - m[g_E(h_0 + y) - g_E(h_0)].$$

In der linearen Näherung ist

$$g_E(h_0 + y) - g_E(h_0) \simeq -\frac{2g_E}{R_E}y.$$

Somit gilt

$$m\ddot{y} = -\left(k - \frac{2mg_E}{R_E}\right)y,$$

woraus

$$\tilde{\omega}_E = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}}$$

folgt.

Die Schwerebeschleunigung nimmt mit der Höhe ab, sodass eine Auslenkung nach oben die nach unten gerichtete Gewichtskraft verringert. Dadurch wird die resultierende Rückstellkraft schwächer und die Frequenz sinkt.

B.5

Wir setzen die quadrierten Kreisfrequenzen aus B.3 und B.4 gleich:

$$\frac{k}{m} - \frac{g_E}{R} = \frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}.$$

Daraus folgt

$$R = \frac{R_E}{2}.$$

B.6

Wir wählen $+x$ in Drehrichtung der Station und $+y$ nach innen, zu ihrem Zentrum hin. Mit dieser Konvention lauten die Komponenten der Coriolisbeschleunigung

$$a_{C,x} = 2\Omega\dot{y}, \quad a_{C,y} = -2\Omega\dot{x}.$$

Bei einem niedrigen Turm nähern wir die nach unten gerichtete Beschleunigung durch die Konstante $g_E = \Omega^2 R$ an. Wegen der kleinen horizontalen Ablenkung können wir deren Rückwirkung auf den vertikalen Fall vernachlässigen. Wird die Masse aus der Ruhe losgelassen, gilt

$$y(t) = H - \frac{1}{2}g_E t^2, \quad \dot{y} = -g_E t.$$

Der Aufprallzeitpunkt ist

$$t_f = \sqrt{\frac{2H}{g_E}}.$$

Die horizontale Bewegungsgleichung wird zu

$$\ddot{x} = 2\Omega\dot{y} = -2\Omega g_E t.$$

Mit $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ergibt die Integration

$$\dot{x} = -\Omega g_E t^2, \quad x = -\frac{1}{3}\Omega g_E t^3.$$

Beim Aufprall gilt

$$v_x = -\Omega g_E t_f^2 = -2\Omega H,$$

und

$$d_x = -\frac{1}{3}\Omega g_E t_f^3 = -\frac{2}{3}\Omega H \sqrt{\frac{2H}{g_E}}.$$

Mit $\Omega^2 = g_E/R$ folgt

$$d_x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}H\sqrt{\frac{H}{R}}.$$

Die Masse landet hinter dem Turm, entgegen der Drehrichtung. Die Konsistenzbedingung lautet

$$\frac{|d_x|}{H} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{H}{R}} \ll 1,$$

wie für $H \ll R$ zu erwarten.

B.7

Für einen hohen Turm verwenden wir ein Inertialsystem und berücksichtigen die vollständige Kreisgeometrie. Die Näherung einer konstanten Beschleunigung aus B.6 ist nicht mehr anwendbar.

Sei

$$r = R - H$$

der Abstand des Loslasspunkts vom Zentrum der Station, wobei $0 < r < R$ gilt. Wir wählen die Inertialkoordinaten so, dass die Masse bei $(r, 0)$ mit der Tangentialgeschwindigkeit $(0, \Omega r)$ losgelassen wird.

Nach dem Loslassen wirkt keine reale Kraft auf die Masse, sodass ihre Bahn eine Gerade ist:

$$X(t) = r, \quad Y(t) = \Omega r t.$$

Sie erreicht den Radkranz erstmals, wenn

$$X^2 + Y^2 = R^2.$$

Mit $u = \Omega t_f$ ergibt sich daraus

$$r^2(1 + u^2) = R^2, \quad u = \sqrt{\frac{R^2}{r^2} - 1}.$$

Beim Aufprall beträgt die Winkelposition der Masse

$$\alpha = \arctan u, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

während sich der Fuß des Turms um den Winkel u gedreht hat.

Damit die Masse am Fuß des Turms auftrifft, müssen ihre Winkel modulo 2π übereinstimmen:

$$u - \arctan u = 2\pi n.$$

Für $u > 0$ gilt $u > \arctan u$, sodass $n = 0$ keine von null verschiedene Turmhöhe liefern kann. Daher ist $n \geq 1$, woraus

$$u = 2\pi n + \arctan u > 2\pi$$

folgt.

Folglich gilt

$$\frac{R^2}{r^2} - 1 > 4\pi^2, \quad r < \frac{R}{\sqrt{1 + 4\pi^2}}.$$

Wegen $H = R - r$ erhalten wir

$$H > R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2}} \right) \simeq 0.8428R.$$

Für die in B.5 bestimmte Station entspricht dies $H > 0.4214R_E$.

Man kann auch die kleinste Höhe für eine exakte Rückkehr bestimmen. Die Funktion

$$f(u) = u - \arctan u$$

ist für $u > 0$ streng monoton steigend, denn

$$f'(u) = \frac{u^2}{1+u^2} > 0.$$

Die kleinste Rückkehrhöhe entspricht somit $n = 1$. Das Lösen von

$$u_1 - \arctan u_1 = 2\pi$$

ergibt

$$u_1 \simeq 7.72525.$$

Daher gilt

$$H_{\min} = R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+u_1^2}} \right) \simeq 0.871625R.$$

Dieser genauere Wert ist mit der gesuchten unteren Schranke vereinbar.

B.8

Wir behalten $+x$ in Drehrichtung und $+y$ nach innen bei. Die frei gleitende Aufhängung übt keine horizontale Rückstellkraft aus.

Wir verwenden die Näherung eines lokal ebenen Bodens und vernachlässigen wie vorgegeben die in y -Richtung wirkende Corioliskraft, die durch die horizontale Bewegung entsteht. Die vertikale Bewegungsgleichung bleibt

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} - \Omega^2.$$

Die Anfangsbedingungen lauten

$$y(0) = -d, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Daher gilt

$$y(t) = -d \cos(\omega t).$$

Die horizontale Bewegung wird durch die mit der vertikalen Geschwindigkeit verbundene Corioliskraft hervorgerufen:

$$\ddot{x} = 2\Omega \dot{y}.$$

Einmalige Integration ergibt

$$\dot{x} = 2\Omega [y(t) - y(0)] = 2\Omega d [1 - \cos(\omega t)].$$

Erneute Integration liefert

$$x(t) = 2\Omega d \left[t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right].$$

Zur Beschreibung der Skizze definieren wir

$$a = \frac{2\Omega d}{\omega}, \quad \tau = \omega t, \quad P = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Dann gilt

$$x = a(\tau - \sin \tau), \quad y = -d \cos \tau.$$

Dies ist eine Zyklode mit unabhängig voneinander skalierten horizontalen und vertikalen Koordinaten.

Ein vollständiger Bogen enthält die folgenden Punkte:

Zeit	x/a	y/d	Merkmal
0	0	-1	Anfangsspitze; Masse in Ruhe
$P/4$	$\pi/2 - 1$	0	Durchgang durch die Gleichgewichtshöhe nach oben
$P/2$	π	1	Höchster Punkt; horizontale Tangente
$3P/4$	$3\pi/2 + 1$	0	Durchgang durch die Gleichgewichtshöhe nach unten
P	2π	-1	Nächste Spitze; Masse momentan in Ruhe

Die vollständige Skizze besteht aus diesen Bögen, die sich in Richtung zunehmender x -Werte wiederholen:

- Die vertikale Amplitude beträgt d , wobei y von $-d$ bis $+d$ reicht.
- Spitzen treten bei $(2\pi na, -d)$ auf; ihre Grenztangenten sind vertikal.
- Obere Umkehrpunkte treten bei $((2n + 1)\pi a, d)$ auf und haben horizontale Tangenten.
- Der Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Spitzen beträgt

$$L = 2\pi a = \frac{4\pi\Omega d}{\omega}.$$

- Da

$$\dot{x} = 2\Omega d(1 - \cos \omega t) \geq 0,$$

verläuft die Bahn kontinuierlich in $+x$ -Richtung, ohne Schleifen.

- Die mittlere horizontale Driftgeschwindigkeit beträgt $2\Omega d$; die horizontale Schwingung um diese gleichförmige Drift hat die Amplitude a .

Diese Ausdrücke gelten, solange die vorgegebene Vernachlässigung der vertikalen Corioliskraft und die Näherung eines lokal ebenen Bodens gültig bleiben.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Nichtlineare Dynamik in elektrischen Schaltungen

Bitte lesen Sie die allgemeinen Hinweise im separaten Umschlag, bevor Sie mit dieser Aufgabe beginnen.

Einleitung

Bistabile nichtlineare Halbleiterbauelemente (z. B. Thyristoren) werden in der Elektronik häufig als Schalter und zur Erzeugung elektromagnetischer Schwingungen eingesetzt. Das Hauptanwendungsgebiet von Thyristoren ist die Steuerung von Wechselströmen in der Leistungselektronik, beispielsweise die Gleichrichtung von Wechselstrom zu Gleichstrom im Megawattbereich. Bistabile Bauelemente können auch als Modellsysteme für Selbstorganisationsphänomene in der Physik (dieses Thema wird in Teil B der Aufgabe behandelt), in der Biologie (siehe Teil C) und in anderen Bereichen der modernen nichtlinearen Wissenschaft dienen.

Ziele

Untersuchung von Instabilitäten und nichttrivialer Dynamik in Schaltungen mit Bauelementen mit nichtlinearen $I - V$ -Kennlinien. Erkundung möglicher Anwendungen solcher Schaltungen in der Technik und bei der Modellierung biologischer Systeme.

Teil A. Stationäre Zustände und Instabilitäten (3 Punkte)

Abb. 1 zeigt die sogenannte **S-förmige** $I - V$ -Kennlinie eines nichtlinearen Bauelements X . Im Spannungsbereich zwischen $U_h = 4.00 \text{ V}$ (der Haltespannung) und $U_{th} = 10.0 \text{ V}$ (der Schwellenspannung) ist diese $I - V$ -Kennlinie mehrwertig. Der Einfachheit halber ist der Graph in Abb. 1 stückweise linear gewählt (jeder Zweig ist ein Geradenstück). Insbesondere verläuft die Verlängerung des oberen Zweigs durch den Ursprung. Diese Näherung beschreibt reale Thyristoren gut.

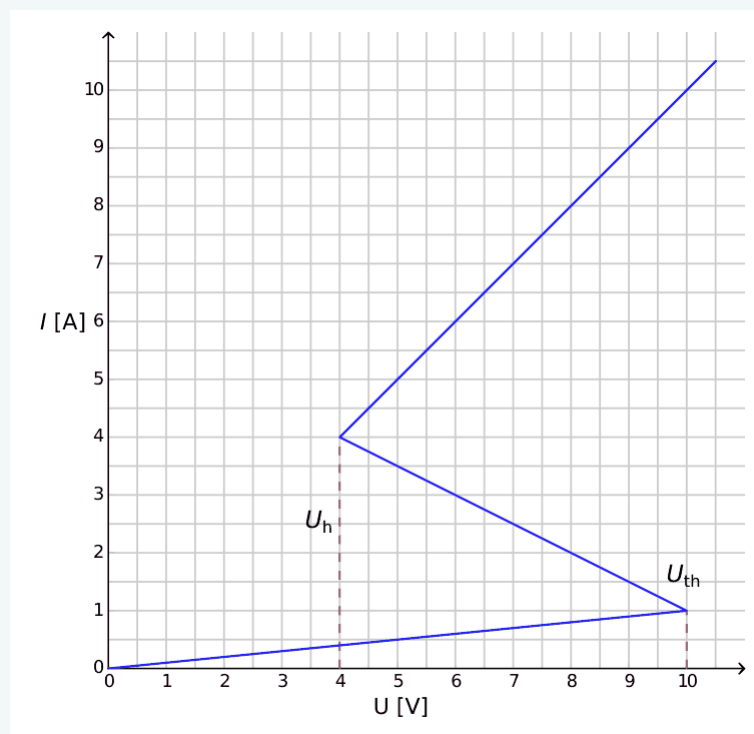


Abbildung 1: $I - V$ -Kennlinie des nichtlinearen Bauelements X .

A.1 — 0.4 Punkte

Bestimmen Sie anhand des Graphen den Widerstand R_{on} des Bauelements X auf dem oberen Zweig der $I - V$ -Kennlinie sowie R_{off} auf dem unteren Zweig. Der mittlere Zweig wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{int}}. \quad (1)$$

Bestimmen Sie die Werte der Parameter I_0 und R_{int} .

Das Bauelement X wird mit einem Widerstand R , einer Spule mit der Induktivität L und einer idealen Spannungsquelle $\mathcal{E}$ in Reihe geschaltet (siehe Abb. 2). Man sagt, dass sich die Schaltung in einem stationären Zustand befindet, wenn der Strom zeitlich konstant ist, $I(t) = \text{const}$.

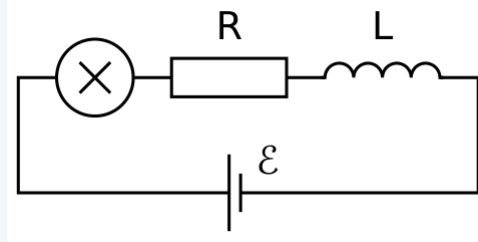


Abbildung 2: Schaltung mit dem Bauelement X , dem Widerstand R , der Spule mit der Induktivität L und der Spannungsquelle $\mathcal{E}$.

A.2 — 1 Punkt

Welche Anzahlen stationärer Zustände sind für die Schaltung in Abb. 2 bei einem festen Wert von $\mathcal{E}$ und für $R = 3.00 \, \Omega$ möglich? Wie ändert sich die Antwort für $R = 1.00 \, \Omega$?

A.3 — 0.6 Punkte

Für die Schaltung in Abb. 2 seien $R = 3.00 \, \Omega$, $L = 1.00 \, \mu\text{H}$ und $\mathcal{E} = 15.0 \, \text{V}$. Bestimmen Sie den Strom $I_{\text{stationary}}$ und die Spannung $V_{\text{stationary}}$ am nichtlinearen Bauelement X im stationären Zustand.

Die Schaltung in Abb. 2 befindet sich im stationären Zustand mit $I(t) = I_{\text{stationary}}$. Dieser stationäre Zustand heißt stabil, wenn der Strom nach einer kleinen Auslenkung (Erhöhung oder Verringerung des Stroms) zum stationären Zustand zurückkehrt. Entfernt sich das System dagegen immer weiter vom stationären Zustand, so heißt dieser instabil.

A.4 — 1 Punkt

Verwenden Sie die Zahlenwerte aus Teilaufgabe A.3 und untersuchen Sie die Stabilität des stationären Zustands mit $I(t) = I_{\text{stationary}}$. Ist er stabil oder instabil?

Teil B. Bistabile nichtlineare Bauelemente in der Physik: Funksender (5 Punkte)

Wir untersuchen nun eine neue Schaltungsanordnung (siehe Abb. 3). Diesmal ist das nichtlineare Bauelement X parallel zu einem Kondensator mit der Kapazität $C = 1.00 \, \mu\text{F}$ geschaltet. Diese Parallelschaltung ist wiederum mit einem Widerstand $R = 3.00 \, \Omega$ und einer idealen Gleichspannungsquelle mit der Spannung $\mathcal{E} = 15.0 \, \text{V}$ in Reihe geschaltet. Es zeigt sich, dass in dieser Schaltung Schwingungen auftreten, wobei das nichtlineare Bauelement X im Verlauf einer Periode von einem Zweig der $I - V$ -Kennlinie auf einen anderen springt.

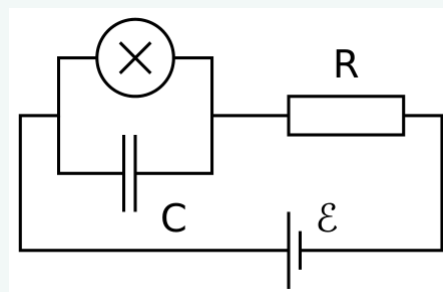


Abbildung 3: Schaltung mit dem Bauelement X , dem Kondensator C , dem Widerstand R und der Spannungsquelle $\mathcal{E}$.

B.1 — 1.8 Punkte

Zeichnen Sie den Schwingungszyklus in das $I - V$ -Diagramm ein und geben Sie seine Umlaufrichtung an (im oder gegen den Uhrzeigersinn). Begründen Sie Ihre Antwort mit Gleichungen und Skizzen.

B.2 — 1.9 Punkte

Bestimmen Sie Ausdrücke für die Zeiten t_1 und t_2 , die das System während des Schwingungszyklus auf den einzelnen Zweigen des $I - V$ -Diagramms verbringt. Berechnen Sie ihre Zahlenwerte. Bestimmen Sie den Zahlenwert der Schwingungsdauer T unter der Annahme, dass die für die Sprünge zwischen den Zweigen des $I - V$ -Diagramms benötigte Zeit vernachlässigbar ist.

B.3 — 0.7 Punkte

Schätzen Sie die mittlere Leistung P ab, die im nichtlinearen Bauelement während einer Schwingung dissipiert wird. Die Angabe der Größenordnung genügt.

Die Schaltung in Abb. 3 wird zum Bau eines Funksenders verwendet. Dazu wird das Bauelement X an ein Ende einer linearen Antenne (eines langen geraden Drahtes) der Länge s angeschlossen. Das andere Ende des Drahtes ist frei. In der Antenne bildet sich eine stehende elektromagnetische Welle aus. Die Geschwindigkeit elektromagnetischer Wellen entlang der Antenne ist gleich derjenigen im Vakuum. Der Sender nutzt die Grundschiwingung des Systems, deren Periodendauer T in Teilaufgabe B.2 bestimmt wurde.

B.4 — 0.6 Punkte

Welcher Wert von s ist optimal, wenn die Länge 1 km nicht überschreiten darf?

Teil C. Bistabile nichtlineare Bauelemente in der Biologie: Neuristor (2 Punkte)

In diesem Teil der Aufgabe betrachten wir eine Anwendung bistabiler nichtlinearer Bauelemente zur Modellierung biologischer Prozesse. Ein Neuron im menschlichen Gehirn besitzt folgende Eigenschaft: Wird es durch ein äußeres Signal angeregt, führt es eine einzige Schwingung aus und kehrt anschließend in seinen Ausgangszustand zurück. Diese Eigenschaft wird als Erregbarkeit bezeichnet. Aufgrund dieser Eigenschaft können sich Impulse in dem Netzwerk gekoppelter Neuronen ausbreiten, aus dem das Nervensystem besteht. Ein Halbleiterchip, der Erregbarkeit und Impulsausbreitung nachbilden soll, wird als *Neuristor* bezeichnet (aus Neuron und Transistor).

Wir versuchen, einen einfachen Neuristor mithilfe einer Schaltung zu modellieren, die das zuvor untersuchte nichtlineare Bauelement X enthält. Dazu wird die Spannung $\mathcal{E}$ in der Schaltung aus Abb. 3 auf den Wert $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$ verringert. Die Schwingungen hören auf, und das System erreicht seinen stationären Zustand. Anschließend wird die Spannung rasch wieder auf den Wert $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ erhöht und nach einer Zeitspanne τ (mit $\tau < T$) erneut auf den Wert $\mathcal{E}'$ gesetzt (siehe Abb. 4). Es zeigt sich, dass es einen bestimmten kritischen Wert τ_{crit} gibt und dass das System für $\tau < \tau_{\text{crit}}$ und für $\tau > \tau_{\text{crit}}$ qualitativ unterschiedliches Verhalten zeigt.

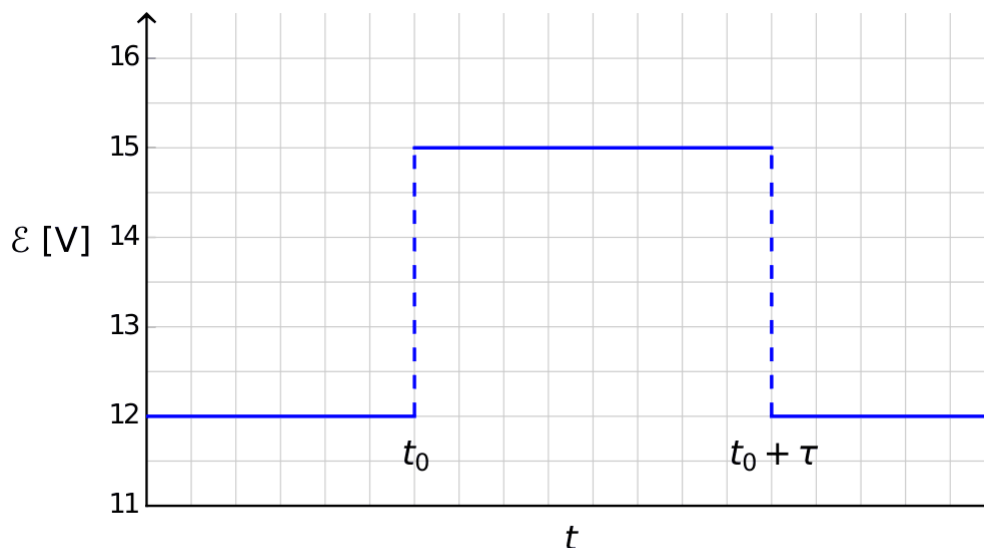


Abbildung 4: Spannung der Spannungsquelle als Funktion der Zeit.

C.1 — 1.2 Punkte

Skizzieren Sie die zeitlichen Verläufe des Stroms $I_X(t)$ durch das nichtlineare Bauelement X für $\tau < \tau_{\text{crit}}$ und für $\tau > \tau_{\text{crit}}$.

C.2 — 0.6 Punkte

Bestimmen Sie den Ausdruck und den Zahlenwert der kritischen Zeit τ_{crit} , bei der das Verhalten umschlägt.

C.3 — 0.2 Punkte

Ist die Schaltung mit $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ s ein Neuristor?

Allgemeines Datenblatt

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	=	$299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Vakuumpermeabilität (magnetische Feldkonstante)	μ_0	=	$4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Vakuumpermittivität (elektrische Feldkonstante)	ε_0	=	$8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Elementarladung	e	=	$1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
Masse des Elektrons	m_e	=	$9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31} \text{ kg}$
		=	$0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Masse des Protons	m_p	=	$1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		=	$938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Masse des Neutrons	m_n	=	$1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		=	$939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Vereinheitlichte atomare Masseneinheit	u	=	$1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27} \text{ kg}$

Rydberg-Konstante	R_∞	=	$10\,973\,731.568\,508(65)\,\text{m}^{-1}$
Universelle Gravitationskonstante	G	=	$6.674\,08(31) \times 10^{-11}\,\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Erdbeschleunigung (in Zürich)	g	=	$9.81\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Plancksches Wirkungsquantum	h	=	$6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Avogadro-Konstante	N_A	=	$6.022\,140\,857(74) \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$
Molare Gaskonstante	R	=	$8.314\,4598(48)\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Molare Massenkostante	M_u	=	$1 \times 10^{-3}\,\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Boltzmann-Konstante	k_B	=	$1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	=	$5.670\,367(13) \times 10^{-8}\,\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **A.1:** $R_{\text{on}} = 1.00\,\Omega$, $R_{\text{off}} = 10.0\,\Omega$, $I_0 = 6.00\,\text{A}$, $R_{\text{int}} = 2.00\,\Omega$.
- **A.2:** Für $R = 3.00\,\Omega$ gibt es **einen** stationären Zustand. Für $R = 1.00\,\Omega$ gibt es **drei**, wenn $8.00\,\text{V} < \mathcal{E} < 11.0\,\text{V}$, **zwei** an jedem der beiden Randpunkte und **einen** in allen anderen Fällen, jeweils für die dargestellte nichtnegative Quellenspannung.
- **A.3:** $I_{\text{stationary}} = 3.00\,\text{A}$, $V_{\text{stationary}} = 6.00\,\text{V}$.
- **A.4: Stabil;** kleine Stromstörungen klingen exponentiell mit der Zeitkonstante $1.00\,\mu\text{s}$ ab.
- **B.1: Gegen den Uhrzeigersinn.** In den Koordinaten (U/V , I_X/A) lautet der Zyklus
 $(4, 0.4) \rightarrow (10, 1) \rightarrow (10, 10) \rightarrow (4, 4) \rightarrow (4, 0.4)$.
- **B.2:** Bezeichnet t_1 die Zeit auf dem unteren Zweig und t_2 die Zeit auf dem oberen Zweig, so gilt

$$t_1 = \frac{30}{13} \ln \frac{49}{10} \mu\text{s} = 3.67 \mu\text{s}, \quad t_2 = \frac{3}{4} \ln 25 \mu\text{s} = 2.41 \mu\text{s},$$

$$T = 6.08 \mu\text{s}.$$

- **B.3:** P liegt in der Größenordnung $10^1\,\text{W}$. Die Integration im idealisierten Modell ergibt $P = 17.3\,\text{W}$.
- **B.4:** $s = cT/4 = 456\,\text{m}$.
- **C.1:** Für $\tau < \tau_{\text{crit}}$ führt der Strom ausgehend von $0.923\,\text{A}$ eine kleine, stetige Auslenkung aus, bleibt dabei unter $1.00\,\text{A}$ und kehrt zu $0.923\,\text{A}$ zurück. Für $\tau > \tau_{\text{crit}}$ entsteht eine große Stromspitze: ein Sprung $1.00 \rightarrow 10.0\,\text{A}$, ein Abfall auf $4.00\,\text{A}$, ein Sprung auf $0.400\,\text{A}$ und die Rückkehr zu $0.923\,\text{A}$.
- **C.2:**

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{30}{13} \ln \frac{3}{2} \mu\text{s} = 0.936 \mu\text{s}.$$

- **C.3: Ja**, denn $1.00\,\mu\text{s} > \tau_{\text{crit}}$, sodass der Impuls eine vollständige Auslenkung auslöst.

Lösung

A.1

Die Verlängerung des oberen Zweigs verläuft durch den Ursprung; außerdem verläuft dieser Zweig durch $(U, I) = (4.00 \text{ V}, 4.00 \text{ A})$. Daher gilt

$$R_{\text{on}} = \frac{U}{I} = \frac{4.00}{4.00} \Omega = \boxed{1.00 \Omega}.$$

Der untere Zweig verläuft durch den Ursprung und durch $(10.0 \text{ V}, 1.00 \text{ A})$, woraus folgt:

$$R_{\text{off}} = \boxed{10.0 \Omega}.$$

Der mittlere Zweig verbindet $(4.00 \text{ V}, 4.00 \text{ A})$ mit $(10.0 \text{ V}, 1.00 \text{ A})$, also gilt

$$-\frac{1}{R_{\text{int}}} = \frac{1.00 - 4.00}{10.0 - 4.00} \frac{\text{A}}{\text{V}} = -0.500 \Omega^{-1}.$$

Daraus folgt

$$\boxed{R_{\text{int}} = 2.00 \Omega}, \quad I_0 = 4.00 \text{ A} + \frac{4.00 \text{ V}}{2.00 \Omega} = \boxed{6.00 \text{ A}}.$$

Hier ist R_{int} positiv; der differentielle Widerstand des mittleren Zweigs ist $-R_{\text{int}}$.

A.2

Mit U sei die Spannung über X bezeichnet. Die Kirchhoffsche Maschenregel liefert

$$\mathcal{E} = RI + U + L \frac{dI}{dt}.$$

Im stationären Zustand gilt

$$\mathcal{E} = RI + U.$$

Stationäre Zustände entsprechen somit den Schnittpunkten der Kennlinie mit der Lastgeraden $I = (\mathcal{E} - U)/R$.

Gleichwertig lässt sich mit der Kennlinie in der Form $U(I)$ schreiben:

$$\mathcal{E}(I) = \begin{cases} (R + 10.0 \Omega)I, & 0 \leq I \leq 1.00 \text{ A}, \\ 12.0 \text{ V} + (R - 2.00 \Omega)I, & 1.00 \text{ A} \leq I \leq 4.00 \text{ A}, \\ (R + 1.00 \Omega)I, & I \geq 4.00 \text{ A}. \end{cases}$$

Für $R = 3.00 \Omega$ steigen alle drei Teilstücke mit I an. Sie schließen bei $\mathcal{E} = 13.0 \text{ V}$ und 16.0 V stetig aneinander an. Folglich gibt es für jede nichtnegative Quellenspannung genau **einen stationären Zustand**.

Für $R = 1.00 \Omega$ fällt das mittlere Teilstück mit wachsendem I ab. Seine Endpunkte liegen bei

$$\mathcal{E}(1.00 \text{ A}) = 11.0 \text{ V}, \quad \mathcal{E}(4.00 \text{ A}) = 8.00 \text{ V}.$$

Die Anzahl verschiedener stationärer Zustände beträgt daher

Quellenspannung	Anzahl stationärer Zustände
$0 \leq \mathcal{E} < 8.00 \text{ V}$	1
$\mathcal{E} = 8.00 \text{ V}$	2
$8.00 \text{ V} < \mathcal{E} < 11.0 \text{ V}$	3

Quellenspannung	Anzahl stationärer Zustände
$\mathcal{E} = 11.0 \text{ V}$	2
$\mathcal{E} > 11.0 \text{ V}$	1

An jeder der beiden Grenzen fallen zwei Schnittpunkte mit den Zweigen an einem Knick der Kennlinie zusammen und zählen als ein Zustand.

A.3

Für $R = 3.00 \, \Omega$ und $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ liegt der stationäre Zustand auf dem mittleren Zweig, da $13.0 < 15.0 < 16.0 \text{ V}$. Somit gilt

$$15.0 \text{ V} = 12.0 \text{ V} + (3.00 - 2.00) \, \Omega I_{\text{stationary}}.$$

Daraus folgt

$$I_{\text{stationary}} = 3.00 \text{ A},$$

und

$$V_{\text{stationary}} = \mathcal{E} - RI_{\text{stationary}} = 6.00 \text{ V}.$$

A.4

Wir schreiben $I = I_{\text{stationary}} + \delta I$. Bei einer hinreichend kleinen Störung bleibt das System auf dem mittleren Zweig, auf dem gilt:

$$U = R_{\text{int}}(I_0 - I).$$

Einsetzen in die Kirchhoffsche Maschenregel und Subtrahieren der Gleichung für den stationären Zustand ergibt

$$L \frac{d(\delta I)}{dt} = -(R - R_{\text{int}})\delta I.$$

Damit gilt

$$\delta I(t) = \delta I(0) \exp \left[-\frac{R - R_{\text{int}}}{L} t \right].$$

Da $R - R_{\text{int}} = 1.00 \, \Omega > 0$, klingt die Störung ab. Der stationäre Zustand ist daher **stabil**, mit der Relaxationszeit

$$\frac{L}{R - R_{\text{int}}} = \frac{1.00 \, \mu\text{H}}{1.00 \, \Omega} = 1.00 \, \mu\text{s}.$$

Der positive differentielle Widerstand des äußeren Widerstands ist größer als der Betrag des negativen differentiellen Widerstands des Bauelements.

B.1

Am Kondensator und an X liegt dieselbe Spannung U an. Die Kirchhoffsche Knotenregel liefert

$$\frac{\mathcal{E} - U}{R} = I_X + C \frac{dU}{dt},$$

oder

$$C \frac{dU}{dt} = \frac{\mathcal{E} - U}{R} - I_X(U).$$

Auf einem Zweig mit dem Widerstand r gilt $I_X = U/r$, also

$$C \frac{dU}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) U.$$

Auf dem **unteren Zweig** würde die Schaltung gegen folgende Spannung relaxieren:

$$U_{\infty, \text{off}} = \frac{\mathcal{E} R_{\text{off}}}{R + R_{\text{off}}} = \frac{150}{13} \text{ V} = 11.538 \dots \text{ V}.$$

Diese liegt über $U_{\text{th}} = 10.0 \text{ V}$. Daher gilt während des gesamten Abschnitts des Zyklus auf dem unteren Zweig $dU/dt > 0$: Der Kondensator lädt sich von 4.00 auf 10.0 V auf.

Bei U_{th} endet der untere Zweig. Die Kondensatorspannung kann sich nicht sprunghaft ändern, daher schaltet X im $I - V$ -Diagramm vertikal um:

$$(U, I_X) = (10.0 \text{ V}, 1.00 \text{ A}) \longrightarrow (10.0 \text{ V}, 10.0 \text{ A}).$$

Auf dem **oberen Zweig** beträgt die entsprechende Grenzspannung

$$U_{\infty, \text{on}} = \frac{\mathcal{E} R_{\text{on}}}{R + R_{\text{on}}} = 3.75 \text{ V}.$$

Diese liegt unter $U_h = 4.00 \text{ V}$. Somit gilt $dU/dt < 0$: Der Kondensator entlädt sich von 10.0 auf 4.00 V. Bei der Haltespannung springt der Strom von 4.00 auf 0.400 A, wiederum bei konstanter Spannung.

Die geforderte Skizze enthält daher nacheinander diese Abschnitte:

Abschnitt	Bewegung in der $I - V$ -Ebene
Unterer Zweig	Von (4.00 V, 0.400 A) nach rechts und leicht aufwärts bis (10.0 V, 1.00 A)
Umschalten an der Schwellenspannung	Vertikal aufwärts bis (10.0 V, 10.0 A)
Oberer Zweig	Nach links und abwärts bis (4.00 V, 4.00 A)
Umschalten an der Haltespannung	Vertikal abwärts bis (4.00 V, 0.400 A)

Die Umlaufrichtung ist **gegen den Uhrzeigersinn**.

Das Gleichgewicht auf dem mittleren Zweig ist in dieser Kondensatorschaltung instabil. In der Nähe von $U = 6.00 \text{ V}$ gilt nämlich

$$C \frac{d(\delta U)}{dt} = \left(\frac{1}{R_{\text{int}}} - \frac{1}{R} \right) \delta U = \frac{\delta U}{6.00 \Omega}.$$

Spannungsstörungen wachsen an, sodass der mittlere Zweig kein dauerhaft durchlaufener Abschnitt des Schwingungszyklus ist.

B.2

Für einen Zweig mit dem Widerstand r definieren wir

$$\theta_r = C \frac{Rr}{R + r}, \quad U_{\infty, r} = \frac{\mathcal{E} r}{R + r}.$$

Die Differentialgleichung aus B.1 wird damit zu

$$\frac{dU}{dt} = \frac{U_{\infty,r} - U}{\theta_r},$$

mit der Lösung

$$U(t) = U_{\infty,r} + (U(0) - U_{\infty,r})e^{-t/\theta_r}.$$

Wir bezeichnen mit t_1 die Zeit auf dem unteren Zweig und mit t_2 die Zeit auf dem oberen Zweig.

Für das Aufladen von U_h auf U_{th} gilt

$$t_1 = \theta_{\text{off}} \ln \left(\frac{U_{\infty,\text{off}} - U_h}{U_{\infty,\text{off}} - U_{th}} \right).$$

Hier ist

$$\theta_{\text{off}} = \frac{30}{13} \mu\text{s},$$

also

$$t_1 = \frac{30}{13} \mu\text{s} \ln \left(\frac{150/13 - 4}{150/13 - 10} \right) = \frac{30}{13} \ln \frac{49}{10} \mu\text{s} = \boxed{3.67 \mu\text{s}}.$$

Für das Entladen von U_{th} auf U_h gilt

$$t_2 = \theta_{\text{on}} \ln \left(\frac{U_{th} - U_{\infty,\text{on}}}{U_h - U_{\infty,\text{on}}} \right).$$

Wegen

$$\theta_{\text{on}} = 0.750 \mu\text{s},$$

erhalten wir

$$t_2 = 0.750 \mu\text{s} \ln \left(\frac{10.0 - 3.75}{4.00 - 3.75} \right) = \frac{3}{4} \ln 25 \mu\text{s} = \boxed{2.41 \mu\text{s}}.$$

Unter Vernachlässigung der Umschaltzeiten gilt

$$\boxed{T = t_1 + t_2 = 6.08 \mu\text{s}}.$$

B.3

Auf jedem der beiden leitenden Zweige beträgt die momentan in X dissipierte Leistung

$$p_X = UI_X = \frac{U^2}{r}.$$

Wir vernachlässigen die Energie, die während der idealisierten augenblicklichen Umschaltvorgänge dissipiert wird. Mit dem oben hergeleiteten Spannungsverlauf ergibt sich für die auf den einzelnen Zweigen dissipierte Energie

$$W_{\text{off}} = \frac{\theta_{\text{off}}}{R_{\text{off}}} \int_{U_h}^{U_{th}} \frac{U^2}{U_{\infty,\text{off}} - U} dU = 23.2 \mu\text{J},$$

und

$$W_{\text{on}} = \frac{\theta_{\text{on}}}{R_{\text{on}}} \int_{U_h}^{U_{th}} \frac{U^2}{U - U_{\infty,\text{on}}} dU = 82.3 \mu\text{J}.$$

Somit gilt

$$P = \frac{W_{\text{off}} + W_{\text{on}}}{T} = \frac{105.5 \mu\text{J}}{6.0816 \mu\text{s}} = \boxed{17.3 \text{ W}}.$$

Die geforderte Größenordnung ist daher

$$\boxed{P \sim 10^1 \text{ W}}.$$

B.4

Die abgestrahlte Grundschiwingung hat die Wellenlänge

$$\lambda = cT = (299\,792\,458 \text{ m s}^{-1})(6.08162 \times 10^{-6} \text{ s}) = 1.82322 \times 10^3 \text{ m}.$$

Im idealisierten Antennenmodell ist das freie Ende ein Stromknoten, während für eine effiziente Anregung am gespeisten Ende ein Strombauch liegt. Ihr Abstand ist ein ungeradzahliges Vielfaches einer Viertelwellenlänge:

$$s = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Die kürzeste Resonanzlänge ist

$$\boxed{s = \frac{\lambda}{4} = \frac{cT}{4} = 456 \text{ m}}.$$

Die nächste Möglichkeit ist $3\lambda/4 = 1.37 \text{ km}$, was die Grenze überschreitet. Somit ist die Viertelwellenlänge das zulässige Optimum.

C.1

Zunächst bestimmen wir den anfänglichen stationären Zustand bei $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$. Er liegt auf dem unteren Zweig:

$$I_r = \frac{\mathcal{E}'}{R + R_{\text{off}}} = \frac{12}{13} \text{ A} = \boxed{0.923 \text{ A}},$$

$$U_r = R_{\text{off}} I_r = \frac{120}{13} \text{ V} = \boxed{9.23 \text{ V}}.$$

Es sei $u = t - t_0$. Vor dem Impuls gilt $I_X = I_r$. Solange die Quellenspannung 15.0 V beträgt und das Bauelement auf dem unteren Zweig bleibt, gilt

$$I_X(u) = \frac{\mathcal{E}}{R + R_{\text{off}}} + \left(I_r - \frac{\mathcal{E}}{R + R_{\text{off}}} \right) e^{-u/\theta_{\text{off}}},$$

oder mit Zahlenwerten

$$I_X(u) = \frac{15 - 3e^{-u/\theta_{\text{off}}}}{13} \text{ A}.$$

Die kritische Dauer ist die Zeit, die dieser Strom benötigt, um 1.00 A zu erreichen, entsprechend $U = U_{\text{th}}$.

Für $\tau < \tau_{\text{crit}}$ zeigt der Graph eine kleine stetige Erhebung:

- Vor t_0 ist der Strom konstant bei 0.923 A .
- Während des Impulses steigt er exponentiell mit abnehmender Steigung an, bleibt jedoch unter 1.00 A .
- Bei $t_0 + \tau$ ist der Strom stetig, und seine Steigung wechselt das Vorzeichen.

- Danach fällt er exponentiell auf 0.923 A zurück:

$$I_X(u) = I_r + [I_X(\tau) - I_r] e^{-(u-\tau)/\theta_{\text{off}}}, \quad u \geq \tau.$$

Es findet kein Wechsel des Zweigs statt.

Für $\tau > \tau_{\text{crit}}$ enthält der Graph eine große Stromspitze:

1. Der Strom folgt zunächst demselben allmählichen Anstieg von 0.923 auf 1.00 A.
2. Bei $t = t_0 + \tau_{\text{crit}}$ springt er vertikal von 1.00 auf 10.0 A.
3. Anschließend nimmt er auf dem oberen Zweig ab. Solange die Quellenspannung bei 15.0 V bleibt, gilt

$$I_X(u) = 3.75 \text{ A} + 6.25 \text{ A} e^{-(u-\tau_{\text{crit}})/\theta_{\text{on}}}.$$

4. Beim Erreichen von 4.00 A springt er vertikal auf 0.400 A.
5. Danach steigt er auf dem unteren Zweig an und nähert sich schließlich von unten 0.923 A.

Kehrt die Quellenspannung auf 12.0 V zurück, während sich das Bauelement noch auf dem oberen Zweig befindet, so bleibt der Strom in diesem Moment stetig, fällt jedoch anschließend schneller ab. Sein weiterer Verlauf lautet

$$I_X(u) = 3.00 \text{ A} + [I_X(\tau) - 3.00 \text{ A}] e^{-(u-\tau)/\theta_{\text{on}}}.$$

Die Asymptote 3.00 A liegt unter dem Haltestrom, sodass der Strom zwangsläufig 4.00 A erreicht und das Bauelement in den ausgeschalteten Zustand wechselt. Geschieht dies bei $u = u_d$, so lautet der anschließende Rückkehrverlauf

$$I_X(u) = I_r + (0.400 \text{ A} - I_r) e^{-(u-u_d)/\theta_{\text{off}}}.$$

Bei einem längeren Impuls kann der Wechsel vom oberen zum unteren Zweig bereits vor dem Ende des Impulses erfolgen. Bleibt die Quellenspannung bei 15.0 V, so erfolgt dieser Wechsel bei

$$u = \tau_{\text{crit}} + t_2 = 3.35 \mu\text{s}.$$

Der Strom steigt dann auf dem unteren Zweig bei einer Quellenspannung von 15.0 V bis $u = \tau$ wieder an; danach nähert er sich dem Ruhezustand bei 12.0 V. Die Änderungen der Quellenspannung bewirken Änderungen der Steigung, keine augenblicklichen Änderungen von I_X .

Während des vorgegebenen Impulses kann keine zweite Stromspitze auftreten: Bei unverändert beibehaltener Quellenspannung von 15.0 V würde die Schwelle zum zweiten Mal bei $u = \tau_{\text{crit}} + T > T > \tau$ überschritten.

C.2

Bei der kritischen Dauer hat sich der Kondensator gerade von U_r auf U_{th} aufgeladen:

$$U_{\text{th}} = U_{\infty, \text{off}} + (U_r - U_{\infty, \text{off}}) e^{-\tau_{\text{crit}}/\theta_{\text{off}}}.$$

Auflösen ergibt

$$\tau_{\text{crit}} = \theta_{\text{off}} \ln \left(\frac{U_{\infty, \text{off}} - U_r}{U_{\infty, \text{off}} - U_{\text{th}}} \right).$$

Ausgedrückt durch die Schaltungsparameter gilt

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{CRR_{\text{off}}}{R + R_{\text{off}}} \ln \left[\frac{(\mathcal{E} - \mathcal{E}')R_{\text{off}}}{\mathcal{E}R_{\text{off}} - (R + R_{\text{off}})U_{\text{th}}} \right].$$

Mit Zahlenwerten ergibt sich

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{30}{13} \mu\text{s} \ln \left(\frac{150/13 - 120/13}{150/13 - 10} \right) = \frac{30}{13} \ln \frac{3}{2} \mu\text{s}.$$

Damit ist

$$\tau_{\text{crit}} = 0.936 \mu\text{s}.$$

C.3

Der vorgegebene Impuls erfüllt

$$\tau = 1.00 \mu\text{s} > \tau_{\text{crit}} = 0.936 \mu\text{s}, \quad \tau < T.$$

Er löst daher den Wechsel auf den oberen Zweig aus. Die Schaltung durchläuft eine große Stromauslenkung und kehrt anschließend bei einer Quellenspannung von 12.0 V in ihren ursprünglichen stationären Zustand zurück.

Ja, die Schaltung verhält sich wie ein Neuristor.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Large Hadron Collider

Bitte lesen Sie die allgemeinen Anweisungen im separaten Umschlag, bevor Sie mit dieser Aufgabe beginnen.

In dieser Aufgabe wird die Physik des Teilchenbeschleunigers LHC (Large Hadron Collider) am CERN behandelt. CERN ist das weltweit größte Labor für Teilchenphysik. Sein Hauptziel ist es, Einblicke in die grundlegenden Naturgesetze zu gewinnen. Zwei Teilchenstrahlen werden auf hohe Energien beschleunigt, durch ein starkes Magnetfeld auf der Kreisbahn des Beschleunigers geführt und anschließend miteinander zur Kollision gebracht. Die Protonen sind nicht gleichmäßig über den Umfang des Beschleunigers verteilt, sondern in sogenannten Teilchenpaketen gebündelt. Die bei den Kollisionen entstehenden Teilchen werden mit großen Detektoren beobachtet. Einige Parameter des LHC sind in Tabelle 1 aufgeführt.

LHC-Ring	
Umfang des Rings	26659 m
Anzahl der Teilchenpakete pro Protonenstrahl	2808
Anzahl der Protonen pro Teilchenpaket	1.15×10^{11}
Protonenstrahlen	
Energie der Protonen	7.00 TeV
Schwerpunktenergie	14.0 TeV

Tabelle 1: Typische Zahlenwerte relevanter LHC-Parameter.

Teilchenphysiker verwenden zweckmäßige Einheiten für Energie, Impuls und Masse: Die Energie wird in Elektronenvolt [eV] gemessen. Definitionsgemäß ist 1 eV die Energiemenge, die ein Teilchen mit der Elementarladung e beim Durchlaufen einer Potentialdifferenz von einem Volt gewinnt ($1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$).

Der Impuls wird in Einheiten von eV/c und die Masse in Einheiten von eV/c^2 gemessen, wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Da 1 eV eine sehr kleine Energiemenge ist, verwenden Teilchenphysiker häufig MeV ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$), GeV ($1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$) oder TeV ($1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$).

Teil A behandelt die Beschleunigung von Protonen oder Elektronen. Teil B befasst sich mit der Identifizierung von Teilchen, die bei den Kollisionen am CERN entstehen.

Teil A. LHC-Beschleuniger (6 Punkte)

Beschleunigung:

Nehmen Sie an, dass die Protonen durch eine Spannung V so beschleunigt wurden, dass ihre Geschwindigkeit sehr nahe an der Lichtgeschwindigkeit liegt, und vernachlässigen Sie jeglichen Energieverlust durch Strahlung oder Kollisionen mit anderen Teilchen.

A.1 — 0.7 Punkte

Bestimmen Sie den exakten Ausdruck für die Endgeschwindigkeit v der Protonen als Funktion der Beschleunigungsspannung V und physikalischer Konstanten.

Ein Entwurf für ein zukünftiges Experiment am CERN sieht vor, die Protonen aus dem LHC zu verwenden und sie mit Elektronen mit einer Energie von 60.0 GeV kollidieren zu lassen.

A.2 — 0.8 Punkte

Für Teilchen mit hoher Energie und geringer Masse ist die relative Abweichung $\Delta = (c - v)/c$ der Endgeschwindigkeit v von der Lichtgeschwindigkeit sehr klein. Bestimmen Sie eine Näherung erster Ordnung für Δ und berechnen Sie Δ für Elektronen mit einer Energie von 60.0 GeV mithilfe der Beschleunigungsspannung V und physikalischer Konstanten.

Wir kehren nun zu den Protonen im LHC zurück. Nehmen Sie an, dass das Strahlrohr kreisförmig ist.

A.3 — 1.0 Punkte

Leiten Sie einen Ausdruck für die homogene magnetische Flussdichte B her, die erforderlich ist, um den Protonenstrahl auf einer Kreisbahn zu halten. Der Ausdruck soll nur die Energie der Protonen E , den Umfang L , fundamentale Konstanten und Zahlen enthalten. Sie dürfen geeignete Näherungen verwenden, sofern deren Einfluss kleiner ist als die durch die geringste Anzahl signifikanter Stellen vorgegebene Genauigkeit.

Berechnen Sie die magnetische Flussdichte B für eine Protonenenergie von $E = 7.00 \text{ TeV}$ unter Vernachlässigung der Wechselwirkungen zwischen den Protonen.

Abgestrahlte Leistung:

Ein beschleunigtes geladenes Teilchen strahlt Energie in Form elektromagnetischer Wellen ab. Die abgestrahlte Leistung P_{rad} eines geladenen Teilchens, das mit konstanter Winkelgeschwindigkeit umläuft, hängt nur von seiner Beschleunigung a , seiner Ladung q , der Lichtgeschwindigkeit c und

der Permittivität des Vakuums ε_0 ab.

A.4 — 1.0 Punkte

Bestimmen Sie mithilfe einer Dimensionsanalyse einen Ausdruck für die abgestrahlte Leistung P_{rad} .

Die tatsächliche Formel für die abgestrahlte Leistung enthält einen Faktor $1/(6\pi)$; außerdem ergibt eine vollständig relativistische Herleitung einen zusätzlichen multiplikativen Faktor γ^4 mit $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

A.5 — 1.0 Punkte

Berechnen Sie P_{tot} , die insgesamt abgestrahlte Leistung des LHC, für eine Protonenenergie von $E = 7.00 \text{ TeV}$ (beachten Sie Tabelle 1). Sie dürfen geeignete Näherungen verwenden.

Lineare Beschleunigung:

Am CERN werden anfangs ruhende Protonen in einem Linearbeschleuniger der Länge $d = 30.0 \text{ m}$ durch eine Potentialdifferenz von $V = 500 \text{ MV}$ beschleunigt. Nehmen Sie an, dass das elektrische Feld homogen ist. Ein Linearbeschleuniger besteht aus zwei Platten, wie in Abbildung 1 skizziert.

A.6 — 1.5 Punkte

Bestimmen Sie die Zeit T , die die Protonen benötigen, um dieses Feld zu durchlaufen.

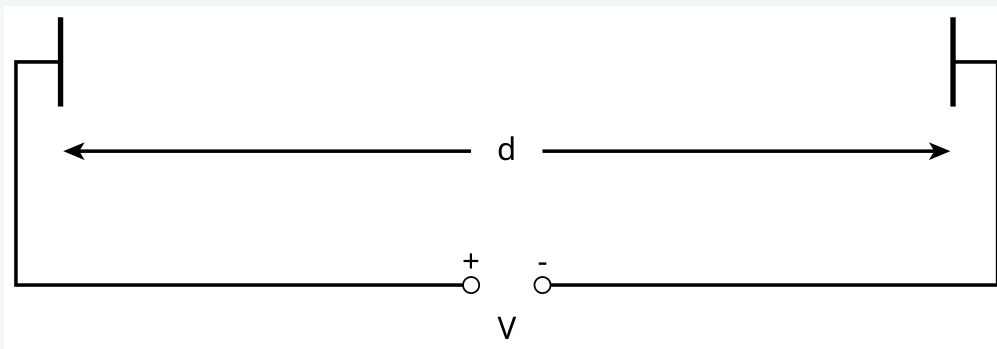


Abbildung 1: Skizze eines Beschleunigermoduls.

Teil B. Teilchenidentifizierung (4 Punkte)

Flugzeit:

Um den Wechselwirkungsprozess zu interpretieren, ist es wichtig, die bei der Kollision erzeugten hochenergetischen Teilchen zu identifizieren. Eine einfache Methode besteht darin, die Zeit (t) zu messen, die ein Teilchen mit bekanntem Impuls benötigt, um eine Strecke l in einem sogenannten Flugzeitdetektor (Time-of-Flight, ToF) zurückzulegen. Typische Teilchen, die im Detektor identifiziert werden, sind zusammen mit ihren Massen in Tabelle 2 aufgeführt.

Teilchen	Masse [MeV/c^2]
Deuteron	1876
Proton	938
geladenes Kaon	494
geladenes Pion	140

Teilchen	Masse [MeV/c ²]
Elektron	0.511

Tabelle 2: Teilchen und ihre Massen.

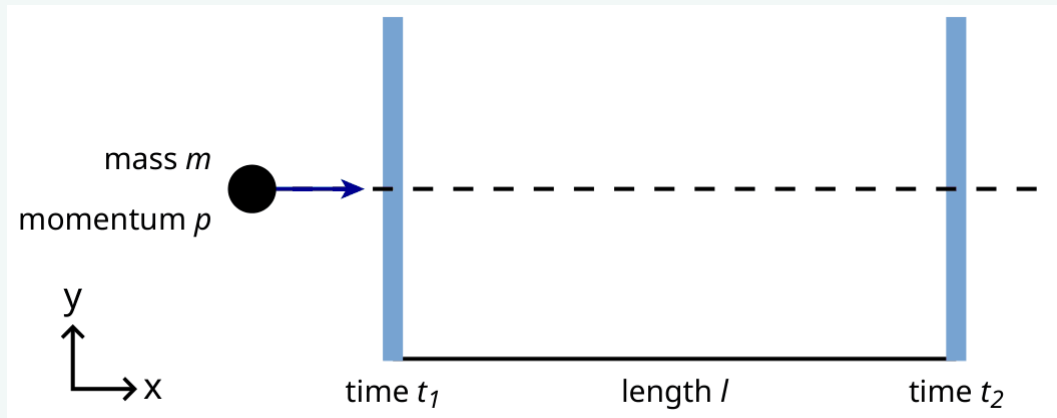


Abbildung 2: Schematische Darstellung eines Flugzeitdetektors.

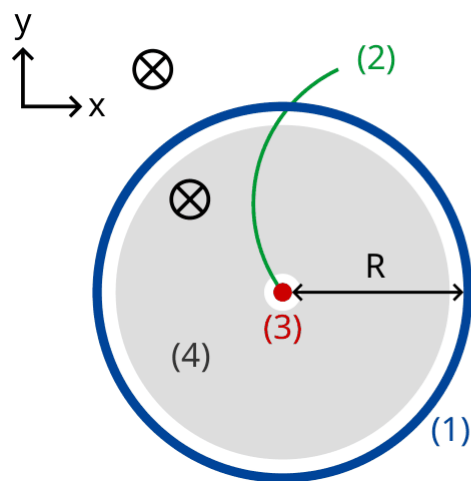
B.1 — 0.8 Punkte

Drücken Sie die Teilchenmasse m durch den Impuls p , die Flugstrecke l und die Flugzeit t aus. Nehmen Sie dabei an, dass die Teilchen die Elementarladung e tragen, sich mit einer Geschwindigkeit nahe c auf geraden Bahnen im ToF-Detektor bewegen und senkrecht zu den beiden Nachweisebenen fliegen (siehe Abbildung 2).

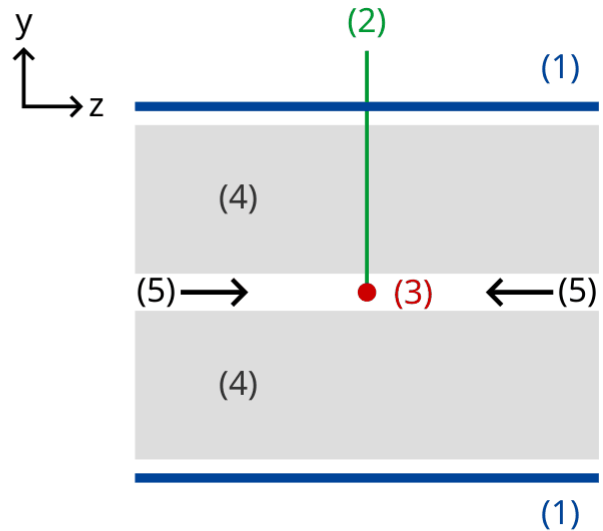
B.2 — 0.7 Punkte

Berechnen Sie die minimale Länge l eines ToF-Detektors, mit dem sich ein geladenes Kaon sicher von einem geladenen Pion unterscheiden lässt, wenn für beide ein Impuls von $1.00 \text{ GeV}/c$ gemessen wird. Für eine gute Trennung muss die Differenz der Flugzeiten größer als das Dreifache der Zeitauflösung des Detektors sein. Die typische Auflösung eines ToF-Detektors beträgt 150 ps ($1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$).

Im Folgenden werden Teilchen, die in einem typischen LHC-Detektor erzeugt werden, in einem zweistufigen Detektor identifiziert, der aus einem Spurdetektor und einem ToF-Detektor besteht. Abbildung 3 zeigt den Aufbau in der Ebene quer und längs zu den Protonenstrahlen. Beide Detektoren sind Röhren, die den Wechselwirkungsbereich umgeben, wobei der Strahl durch die Mitte der Röhren verläuft. Der Spurdetektor misst die Bahn eines geladenen Teilchens, das ein Magnetfeld durchläuft, dessen Richtung parallel zu den Protonenstrahlen ist. Aus dem Radius r der Bahn lässt sich der Transversalimpuls p_T des Teilchens bestimmen. Da der Kollisionszeitpunkt bekannt ist, benötigt der ToF-Detektor nur eine Röhre, um die Flugzeit zu messen (die Zeit zwischen der Kollision und dem Nachweis in der ToF-Röhre). Diese ToF-Röhre befindet sich unmittelbar außerhalb der Spurkammer. Für diese Aufgabe dürfen Sie annehmen, dass sich alle bei der Kollision erzeugten Teilchen senkrecht zu den Protonenstrahlen bewegen, also keinen Impuls entlang der Richtung der Protonenstrahlen besitzen.



transverse plane



cross section of the longitudinal view at the center of the tube along the beamline

- (1) - ToF tube
- (2) - track
- (3) - collision point
- (4) - tracking tube
- (5) - proton beams
- ⊗ - magnetic field

Abbildung 3: Versuchsaufbau zur Teilchenidentifizierung mit einer Spurkammer und einem ToF-Detektor. Beide Detektoren sind Röhren, die den Kollisionspunkt in der Mitte umgeben. Links: Querschnitt senkrecht zur Strahlachse. Rechts: Längsschnitt parallel zur Strahlachse. Das Teilchen bewegt sich senkrecht zur Strahlachse.

B.3 — 1.7 Punkte

Drücken Sie die Teilchenmasse durch die magnetische Flussdichte B , den Radius R der ToF-Röhre, fundamentale Konstanten und die gemessenen Größen aus: den Radius r der Bahn und die Flugzeit t .

Wir haben vier Teilchen nachgewiesen und möchten sie identifizieren. Die magnetische Flussdichte im Spurdetektor betrug $B = 0.500 \text{ T}$. Der Radius R der ToF-Röhre betrug 3.70 m . Hier sind die Messwerte ($1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$):

Teilchen	Radius der Bahn r [m]	Flugzeit t [ns]
A	5.10	20
B	2.94	14
C	6.06	18
D	2.31	25

B.4 — 0.8 Punkte

Identifizieren Sie die vier Teilchen, indem Sie ihre Massen berechnen.

Allgemeines Datenblatt

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$= 299\,792\,458\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Permeabilität des Vakuums (magnetische Feldkonstante)	μ_0	$= 4\pi \times 10^{-7}\,\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Permittivität des Vakuums (elektrische Feldkonstante)	ε_0	$= 8.854\,187\,817 \times 10^{-12}\,\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Elementarladung	e	$= 1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19}\,\text{A} \cdot \text{s}$
Masse des Elektrons	m_e	$= 9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31}\,\text{kg}$
		$= 0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Masse des Protons	m_p	$= 1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27}\,\text{kg}$
		$= 938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Masse des Neutrons	m_n	$= 1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27}\,\text{kg}$
		$= 939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Vereinheitlichte atomare Masseneinheit	u	$= 1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27}\,\text{kg}$
Rydberg-Konstante	R_∞	$= 10\,973\,731.568\,508(65)\,\text{m}^{-1}$
Universelle Gravitationskonstante	G	$= 6.674\,08(31) \times 10^{-11}\,\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Fallbeschleunigung (in Zürich)	g	$= 9.81\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Plancksches Wirkungsquantum	h	$= 6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Avogadro-Konstante	N_A	$= 6.022\,140\,857(74) \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$
Molare Gaskonstante	R	$= 8.314\,4598(48)\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Molare Massenkostante	M_u	$= 1 \times 10^{-3}\,\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Boltzmann-Konstante	k_B	$= 1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	$= 5.670\,367(13) \times 10^{-8}\,\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **A.1:** Für eine Beschleunigung aus der Ruhe gilt

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{m_p c^2}\right)^{-2}}$$

- **A.2:**

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2} \simeq \frac{m^2 c^4}{2e^2 V^2}$$

Für die Elektronen mit 60.0 GeV gilt

$$\Delta = 3.63 \times 10^{-11}$$

- **A.3:**

$$B = \frac{2\pi}{ecL} \sqrt{E^2 - m_p^2 c^4} \simeq \frac{2\pi E}{ecL} = 5.50 \text{ T.}$$

- **A.4:**

$$P_{\text{rad}} = C \frac{q^2 a^2}{\varepsilon_0 c^3},$$

wobei die dimensionslose Konstante C durch eine Dimensionsanalyse nicht bestimmt werden kann.

- **A.5:** Unter Berücksichtigung beider Protonenstrahlen gilt

$$P_{\text{tot}} = 5.12 \text{ kW.}$$

- **A.6:**

$$T = \frac{d}{c} \sqrt{1 + \frac{2m_p c^2}{eV}} = 2.18 \times 10^{-7} \text{ s} = 0.218 \mu\text{s.}$$

- **B.1:**

$$m = \frac{p}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{l}\right)^2 - 1.}$$

- **B.2:** Der Schwellenwert für die Länge ist

$$l_{\text{crit}} = 1.27739 \dots \text{ m.}$$

Das angegebene strikte Trennkriterium erfordert $l > l_{\text{crit}}$, sodass sich eine praktisch erforderliche Mindestlänge von etwa **1.28 m** ergibt.

- **B.3:**

$$m = \frac{eBr}{c} \sqrt{\left[\frac{ct}{2r \arcsin(R/(2r))}\right]^2 - 1.}$$

- **B.4:** A: Proton, $m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$; B: geladenes Pion, $m \approx 0.14 \text{ GeV}/c^2$; C: Proton, $m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$; D: geladenes Kaon, $m \approx 0.50 \text{ GeV}/c^2$.

Lösung

A.1

Für ein aus der Ruhe beschleunigtes Proton ergibt die Energieerhaltung

$$eV = K = (\gamma - 1)m_p c^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Damit gilt

$$\gamma = 1 + \frac{eV}{m_p c^2}.$$

Auflösen nach v ergibt

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{m_p c^2}\right)^{-2}}.$$

Dieser Ausdruck ist unter der Annahme einer Beschleunigung aus der Ruhe ohne Energieverluste exakt.

A.2

Für ein Teilchen der Masse m gilt

$$\Delta = 1 - \frac{v}{c} = 1 - \sqrt{1 - \gamma^{-2}}.$$

Bei hoher Energie gilt $\gamma^{-2} \ll 1$. Mit der Entwicklung erster Ordnung

$$\sqrt{1 - x} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2),$$

erhalten wir

$$\Delta = \frac{1}{2\gamma^2} + O(\gamma^{-4}).$$

Ausgedrückt durch die Beschleunigungsspannung gilt

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2}.$$

Für $eV \gg mc^2$ vereinfacht sich dies weiter zu

$$\Delta \simeq \frac{m^2 c^4}{2e^2 V^2}.$$

Gleichwertig lässt sich mit der Gesamtenergie $E = \gamma mc^2$ schreiben:

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2.$$

Für die Elektronen gilt

$$m_e c^2 = 0.5109989461 \text{ MeV}, \quad E = 60.0 \text{ GeV} = 6.00 \times 10^4 \text{ MeV},$$

also

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{0.5109989461}{6.00 \times 10^4}\right)^2 = \boxed{3.63 \times 10^{-11}}.$$

A.3

Der Radius der Kreisbahn sei

$$\rho = \frac{L}{2\pi}.$$

Die magnetische Kraft ändert die Richtung des relativistischen Impulses, während sein Betrag konstant bleibt. Für eine gleichförmige Kreisbewegung gilt

$$\left| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right| = \frac{pv}{\rho}.$$

Gleichsetzen mit der magnetischen Kraft,

$$evB = \frac{pv}{\rho},$$

ergibt

$$B = \frac{p}{e\rho}.$$

Die relativistische Energie-Impuls-Beziehung lautet

$$E^2 = p^2 c^2 + m_p^2 c^4,$$

wobei E die Gesamtenergie des Protons ist. Daher gilt

$$B = \frac{2\pi}{ecL} \sqrt{E^2 - m_p^2 c^4}.$$

Bei $E = 7.00 \text{ TeV}$ gilt

$$\frac{m_p c^2}{E} = \frac{938.2720813 \text{ MeV}}{7.00 \times 10^6 \text{ MeV}} \approx 1.34 \times 10^{-4}.$$

Das Ersetzen von pc durch E bewirkt eine relative Korrektur von nur

$$\frac{1}{2} \left(\frac{m_p c^2}{E} \right)^2 \approx 8.98 \times 10^{-9},$$

die weit unterhalb der Genauigkeit der angegebenen Energie liegt. Somit gilt

$$B \simeq \frac{2\pi E}{ecL}.$$

Mit $E = 7.00 \times 10^{12} e \text{ J}$ ergibt sich

$$B \simeq \frac{2\pi(7.00 \times 10^{12})}{(299792458)(26659)} \text{ T} = \boxed{5.50 \text{ T}}.$$

A.4

Wir setzen an:

$$P_{\text{rad}} = C q^\alpha a^\beta c^\delta \varepsilon_0^\eta,$$

wobei C dimensionslos ist. Mit Masse, Länge, Zeit und Ladung als Basisdimensionen gilt

$$[P] = ML^2 T^{-3}, \quad [q] = Q, \quad [a] = LT^{-2}, \quad [c] = LT^{-1},$$

und

$$[\varepsilon_0] = Q^2 T^2 M^{-1} L^{-3}.$$

Der Vergleich der Exponenten ergibt

$$\begin{aligned} -\eta &= 1, & \alpha + 2\eta &= 0, \\ \beta + \delta - 3\eta &= 2, & -2\beta - \delta + 2\eta &= -3. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\eta = -1, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \delta = -3.$$

Folglich ergibt sich

$$P_{\text{rad}} = C \frac{q^2 a^2}{\varepsilon_0 c^3}.$$

Die Dimensionsanalyse bestimmt die Abhängigkeit von den physikalischen Größen, kann aber C nicht bestimmen.

A.5

Unter Berücksichtigung des in der Aufgabe angegebenen Zahlenfaktors und der relativistischen Korrektur strahlt ein Proton die Leistung

$$P_1 = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi \varepsilon_0 c^3}$$

ab. Für eine Kreisbewegung gilt

$$a = \frac{v^2}{\rho} \simeq \frac{c^2}{\rho}, \quad \rho = \frac{L}{2\pi}, \quad \gamma = \frac{E}{m_p c^2}.$$

Somit gilt

$$P_1 \simeq \frac{e^2 c}{6\pi \varepsilon_0 \rho^2} \left(\frac{E}{m_p c^2} \right)^4.$$

Numerisch ergibt sich

$$\rho = \frac{26659}{2\pi} \text{ m} = 4242.91 \text{ m}, \quad \gamma = \frac{7.00 \times 10^6}{938.2720813} = 7460.52.$$

Einsetzen liefert

$$P_1 \simeq 7.93 \times 10^{-12} \text{ W}.$$

Es gibt zwei Strahlen mit jeweils 2808 Teilchenpaketen und 1.15×10^{11} Protonen pro Teilchenpaket. Die Gesamtzahl der Protonen beträgt somit

$$N = 2(2808)(1.15 \times 10^{11}) = 6.4584 \times 10^{14}.$$

Die Addition der einzeln abgestrahlten Leistungen ergibt

$$P_{\text{tot}} = NP_1 \simeq 5.12467 \times 10^3 \text{ W}.$$

Daher gilt

$$P_{\text{tot}} = 5.12 \text{ kW}.$$

A.6

Das homogene elektrische Feld hat den Betrag V/d , sodass die Kraft auf ein Proton konstant ist:

$$F = \frac{eV}{d}.$$

Die relativistische Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{dp}{dt} = F.$$

Da das Proton aus der Ruhe startet, gilt

$$p_f = FT, \quad T = \frac{p_f}{F}.$$

Die beim Durchlaufen des Beschleunigers verrichtete Arbeit beträgt eV , sodass die Gesamtenergie am Ende

$$E_f = m_p c^2 + eV$$

beträgt. Daher gilt

$$p_f c = \sqrt{E_f^2 - m_p^2 c^4} = \sqrt{(eV)^2 + 2eV m_p c^2}.$$

Die Kombination dieser Ausdrücke ergibt

$$T = \frac{d}{eVc} \sqrt{(eV)^2 + 2eV m_p c^2},$$

oder

$$T = \frac{d}{c} \sqrt{1 + \frac{2m_p c^2}{eV}}.$$

Hier gilt $eV = 500 \text{ MeV}$. Somit ergibt sich

$$T = \frac{30.0}{299792458} \sqrt{1 + \frac{2(938.2720813)}{500}} \text{ s} = \boxed{2.18 \times 10^{-7} \text{ s}}.$$

Die Verwendung einer konstanten Kraft anstelle einer konstanten Beschleunigung berücksichtigt die relativistische Geschwindigkeitsänderung.

B.1

Für die geradlinige Bahn gilt

$$v = \frac{l}{t}.$$

Für den relativistischen Impuls gilt

$$p = \gamma m v = \frac{m v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Auflösen nach m ergibt

$$m = \frac{p}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = p \sqrt{\frac{t^2}{l^2} - \frac{1}{c^2}}.$$

Daher gilt

$$m = \frac{p}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{l}\right)^2 - 1}.$$

Dieser Ausdruck ist exakt; eine Entwicklung um $v = c$ ist nicht erforderlich.

B.2

Auflösen des Ergebnisses aus B.1 nach der Flugzeit ergibt

$$t(m) = \frac{l}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2}.$$

Bei gleichem Impuls kommt das schwerere Kaon später an. Die Zeitdifferenz beträgt

$$t_K - t_\pi = \frac{l}{c} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{m_K c}{p} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{m_\pi c}{p} \right)^2} \right].$$

Die erforderliche zeitliche Trennung ist

$$t_K - t_\pi > 3(150 \text{ ps}) = 450 \text{ ps}.$$

Der Schwellenwert für die Länge beträgt daher

$$l_{\text{crit}} = \frac{3\sigma_t c}{\sqrt{1 + (m_K c/p)^2} - \sqrt{1 + (m_\pi c/p)^2}}, \quad \sigma_t = 150 \text{ ps}.$$

Mit $p = 1000 \text{ MeV}/c$ ergibt sich

$$l_{\text{crit}} = \frac{(450 \times 10^{-12})(299792458)}{\sqrt{1 + (494/1000)^2} - \sqrt{1 + (140/1000)^2}} \text{ m}.$$

Der dimensionslose Nenner beträgt 0.10561117, woraus folgt:

$$l_{\text{crit}} = 1.27739 \dots \text{ m}.$$

Somit muss l diesen Schwellenwert überschreiten; erforderlich sind etwa $\boxed{1.28 \text{ m}}$. Der exakte relativistische Ausdruck wird verwendet, weil die Masse des Kaons gegenüber p/c nicht vernachlässigbar ist.

B.3

Da das Teilchen keinen Impuls parallel zur Strahlachse besitzt, steht sein gesamter Impuls senkrecht zum Magnetfeld. Wie in A.3 gilt

$$p = eBr.$$

Das Magnetfeld verrichtet keine Arbeit, sodass der Geschwindigkeitsbetrag entlang der Kreisbahn konstant bleibt.

Sei θ der Winkel, den das Teilchen um den Mittelpunkt seiner Bahn überstreicht, bevor es die ToF-Röhre zum ersten Mal erreicht. Der Kollisionspunkt und der Nachweispunkt haben einen Abstand, der dem Röhrenradius R entspricht. Zugleich sind sie die Endpunkte einer Sehne des Bahnkreises mit Radius r . Daher gilt

$$R = 2r \sin \frac{\theta}{2}.$$

Für das erste Erreichen der Röhre gilt

$$\theta = 2 \arcsin \frac{R}{2r},$$

und die Länge der Flugstrecke beträgt

$$s = r\theta = 2r \arcsin \frac{R}{2r}.$$

Dies setzt $r \geq R/2$ voraus; eine kleinere Kreisbahn erreicht die Röhre niemals.

Die Geschwindigkeit beträgt

$$v = \frac{s}{t}.$$

Mit der Massenformel aus B.1 für die tatsächliche Weglänge s und mit $p = eBr$ ergibt sich

$$m = \frac{eBr}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{s}\right)^2 - 1}.$$

Folglich gilt

$$m = \frac{eBr}{c} \sqrt{\left[\frac{ct}{2r \arcsin(R/(2r))}\right]^2 - 1}.$$

Der Arkussinus wird im Bogenmaß ausgewertet.

B.4

Für jedes Teilchen verwenden wir

$$s = 2r \arcsin \frac{3.70 \text{ m}}{2r}, \quad p = e(0.500 \text{ T})r,$$

und

$$m = \frac{p}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{s}\right)^2 - 1}.$$

Die Umrechnung des Impulses folgt unmittelbar aus $p = eBr$:

$$p [\text{GeV}/c] = 0.299792458 B [\text{T}] r [\text{m}].$$

Wenn für den Vergleich der berechneten Massen mit Tabelle 2 zusätzliche Rechenstellen beibehalten werden, ergibt sich:

Teilchen	Weglänge s [m]	Impuls p [MeV/c]	Berechnete Masse [MeV/c ²]	Identifizierung
A	3.7864	764.47	938.65	Proton
B	4.0019	440.69	139.32	Geladenes Pion
C	3.7600	908.37	935.10	Proton
D	4.2908	346.26	495.90	Geladenes Kaon

Die kleinen Abweichungen von den tabellierten Massen sind mit den gerundeten Messwerten vereinbar. Mit einer sinnvollen Genauigkeit gilt

$A :$	$m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$	Proton,
$B :$	$m \approx 0.14 \text{ GeV}/c^2$	geladenes Pion,
$C :$	$m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$	Proton,
$D :$	$m \approx 0.50 \text{ GeV}/c^2$	geladenes Kaon.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.