

المسألة 1: مسألتان في الميكانيكا

يرجى قراءة التعليمات العامة الموجودة في الظرف المنفصل قبل البدء في هذه المسألة.

الجزء A. القرص المخفي (3.5 نقاط)

نعتبر أسطوانة خشبية مصمتة نصف قطرها r_1 وسماكتها h_1 . استبدل الخشب في موضع ما داخل الأسطوانة الخشبية بقرص معدني نصف قطره r_2 وسماكته h_2 . وُضع القرص المعدني بحيث يكون محور تناظره B موازياً لمحور تناظر الأسطوانة الخشبية S ، وعلى مسافتين متساويتين من وجهي الأسطوانة الخشبية العلوي والسفلي. نرمز إلى المسافة بين S و B بالرمز d . كثافة الخشب هي ρ_1 ، وكثافة المعدن هي $\rho_2 > \rho_1$. الكتلة الكلية للأسطوانة الخشبية والقرص المعدني الموجود داخلها هي M .

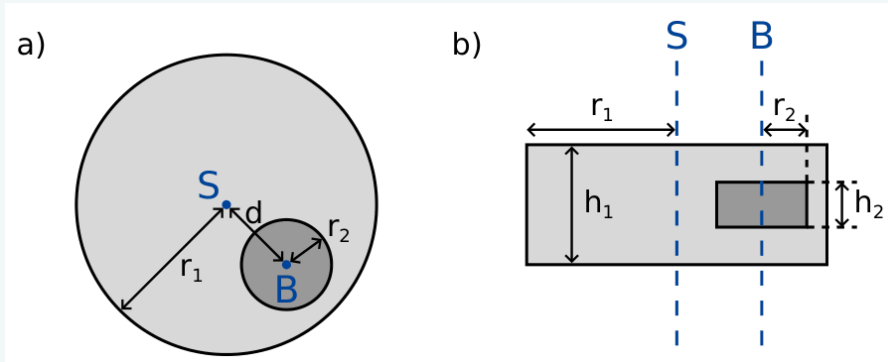
في هذه المهمة، نضع الأسطوانة الخشبية على الأرض بحيث يمكنها التدرج بحرية إلى اليسار واليمين. يبين الشكل 1 منظرًا جانبيًا ومنظرًا علويًا للترتيب التجريبي.

الهدف من هذه المهمة هو تحديد أبعاد القرص المعدني وموضعه.

فيما يلي، عندما يُطلب التعبير عن النتيجة بدلالة الكميات المعروفة، يمكنك دائماً افتراض أن الكميات الآتية معلومة:

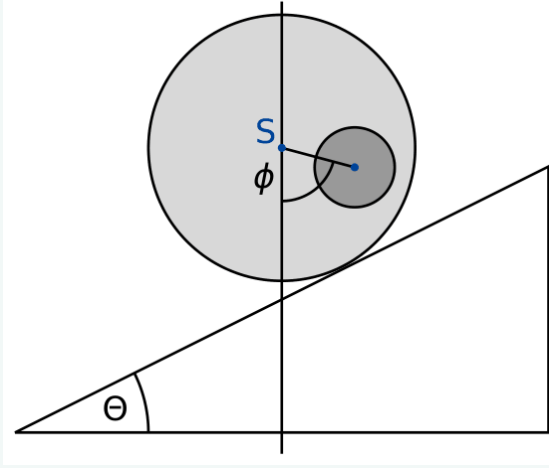
$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

الهدف هو تحديد r_2 و h_2 و d عن طريق قياسات غير مباشرة.



الشكل 1: (a) منظر جانبي (b) منظر من الأعلى

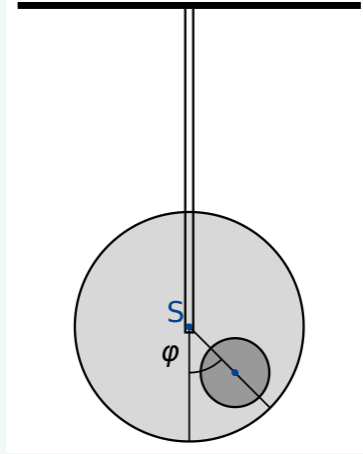
نرمز بالرمز b إلى المسافة بين مركز كتلة النظام بأكمله C ومحور تناظر الأسطوانة الخشبية S . لتحديد هذه المسافة، نصمم التجربة الآتية: نضع الأسطوانة الخشبية على قاعدة أفقية بحيث تكون في حالة اتزان مستقر. ثم نُميل القاعدة ببطء بزاوية Θ (انظر الشكل 2). يتيح الاحتكاك السكوني للأسطوانة الخشبية التدرج بحرية دون انزلاق. وستتدرج قليلاً إلى أسفل المستوى المائل، ثم تستقر في حالة اتزان مستقر بعد دورانها بزاوية ϕ نقيسها.



الشكل 2: أسطوانة على قاعدة مائلة.

0.8 — A.1 نقطة

أوجد تعبيراً لـ b بدلالة الكميات (1)، والزاوية ϕ ، وزاوية ميل القاعدة Θ .
من الآن فصاعداً، يمكننا افتراض أن قيمة b معلومة.



الشكل 3: النظام المعلق.

نريد بعد ذلك قياس عزم القصور الذاتي I_S للنظام حول محور التناظر S . لهذا الغرض، نعلق الأسطوانة الخشبية عند محور تناظرها بقضيب صلب. ثم نديرها بعيداً عن موضع اتزانها بزاوية صغيرة φ ، ونتركها. يبين الشكل 3 الترتيب التجريبي. نجد أن φ تصف حركة دورية زمنها الدوري T .

0.5 — A.2 نقطة

أوجد معادلة الحركة للزاوية φ . عبّر عن عزم القصور الذاتي I_S للنظام حول محور تناظره S بدلالة T و b والكميات المعلومة (1).
يمكنك افتراض أننا نُزيح النظام عن موضع اتزانه بمقدار صغير فقط، بحيث تبقى φ صغيرة جداً دائماً.

نريد الآن، انطلاقاً من القياسات في السؤالين A.1 و A.2، تحديد أبعاد القرص المعدني وموضعه داخل الأسطوانة الخشبية.

0.4 — A.3 نقطة

أوجد تعبيراً للمسافة d بدلالة b والكميات (1). يمكنك أيضاً تضمين r_2 و h_2 بوصفهما متغيرين في تعبيرك، إذ سيُحسبان في المهمة الفرعية A.5.

0.7 — A.4 نقطة

أوجد تعبيراً لعزم القصور الذاتي I_S بدلالة b والكميات المعلومة (1). يمكنك أيضاً تضمين r_2 و h_2 بوصفهما متغيرين في تعبيرك، إذ سيُحسبان في المهمة الفرعية A.5.

1.1 — A.5 نقطة

باستخدام جميع النتائج السابقة، اكتب تعبيراً لكل من h_2 و r_2 بدلالة b و T والكميات المعلومة (1). يمكنك التعبير عن h_2 بدلالة r_2 .

الجزء B. محطة فضائية دوّارة (6.5 نقاط)

أليس رائدة فضاء تعيش على متن محطة فضائية. المحطة الفضائية عجلة عملاقة نصف قطرها R ، تدور حول محورها، فتوفّر بذلك جاذبية اصطناعية لرواد الفضاء. يعيش رواد الفضاء على الجانب الداخلي لطوق العجلة. يمكن إهمال التجاذب الثقالي للمحطة الفضائية وانحناء الأرضية.

0.5 — B.1 نقطة

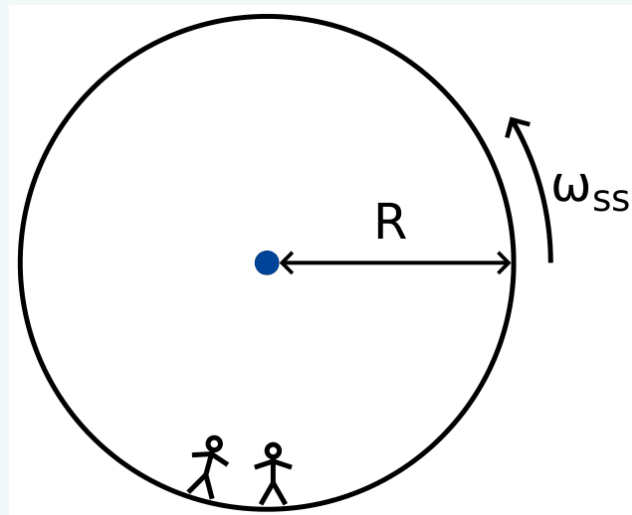
بأي تردد زاوي ω_{ss} تدور المحطة الفضائية لكي يشعر رواد الفضاء بالجاذبية نفسها g_E التي يشعرون بها على سطح الأرض؟ يدور جدال بين أليس وصديقها رائد الفضاء بوب. لا يصدّق بوب أنهما يعيشان بالفعل في محطة فضائية، ويدّعي أنهما على الأرض. تريد أليس أن تثبت لبوب، باستخدام الفيزياء، أنهما يعيشان في محطة فضائية دوّارة. لهذا الغرض، تربط كتلة m بنابض ثابت مرونته k ، وتتركها تتذبذب. تتذبذب الكتلة في الاتجاه الرأسي فقط، ولا يمكنها التحرك في الاتجاه الأفقي.

0.2 — B.2 نقطة

بافتراض أن الجاذبية على الأرض ثابتة وتسارعها g_E ، ما التردد الزاوي للتذبذب ω_E الذي سيقبسه شخص على الأرض؟

0.6 — B.3 نقطة

ما التردد الزاوي للتذبذب ω الذي تقيسه أليس على متن المحطة الفضائية؟ أليس مقتنعة بأن تجربتها تثبت أنهما على متن محطة فضائية دوّارة. لكن بوب لا يزال متشككاً. فهو يدّعي أنه عند أخذ تغيّر الجاذبية فوق سطح الأرض في الحسبان، نجد تأثيراً مشابهاً. في المهام التالية، نتحقق مما إذا كان بوب محقاً.



الشكل 4: المحطة الفضائية

0.8 — B.4 نقطة

اشتق تعبيراً لتسارع الجاذبية $g_E(h)$ عند ارتفاعات صغيرة h فوق سطح الأرض، واحسب تردد التذبذب $\tilde{\omega}_E$ للكتلة المتذبذبة (يكفي التقريب الخطي). رمز إلى نصف قطر الأرض بالرمز R_E . أهمل دوران الأرض. بالفعل، تجد أليس، لهذه المحطة الفضائية، أن النواس النابضي يتذبذب بالتردد الذي تتنبأ به بوب.

0.3 — B.5 نقطة

عند أي نصف قطر R للمحطة الفضائية يتطابق تردد التذبذب ω مع تردد التذبذب $\tilde{\omega}_E$ على الأرض؟ عبّر عن إجابتك بدلالة R_E . تضيق أليس ذرعاً بعناد بوب، فتبتكر تجربة لإثبات وجهة نظرها. لهذا الغرض، تصعد برجاً ارتفاعه H فوق أرضية المحطة الفضائية، وتُسقط كتلة. يمكن فهم هذه التجربة في الإطار المرجعي الدوّار وكذلك في إطار مرجعي عطالي.

في إطار مرجعي يدور بانتظام، يشعر رواد الفضاء بقوة وهمية $\vec{F}_C$ تُسمّى قوة كوريوليس. تُعطى القوة $\vec{F}_C$ المؤثرة في جسم كتلته m ، يتحرك بسرعة $\vec{v}$ في إطار دوّار ذي تردد زاوي ثابت $\vec{\omega}_{ss}$ ، بالعلاقة

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss}. \quad (2)$$

وبدلالة الكميات القياسية، يمكنك استخدام

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi, \quad (3)$$

حيث ϕ هي الزاوية بين السرعة ومحور الدوران. تكون القوة عمودية على كل من السرعة v ومحور الدوران. يمكن تحديد إشارة القوة باستخدام قاعدة اليد اليمنى، ولكن يمكنك فيما يلي اختيارها بحرية.

1.1 — B.6 نقطة

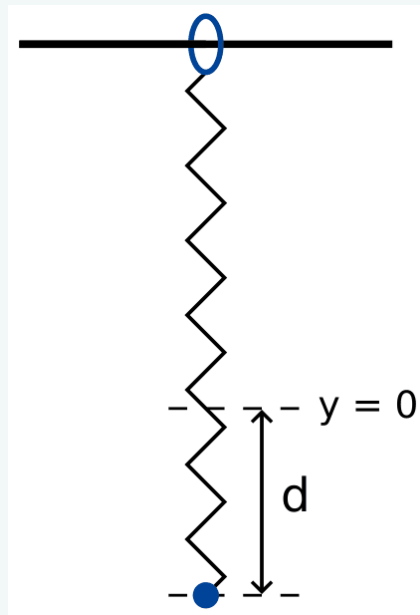
احسب السرعة الأفقية v_x والإزاحة الأفقية d_x (بالنسبة إلى قاعدة البرج، في الاتجاه العمودي على البرج) للكتلة لحظة اصطدامها بالأرضية. يمكنك افتراض أن ارتفاع البرج H صغير، بحيث يكون التسارع الذي يقيسه رواد الفضاء ثابتاً أثناء السقوط. ويمكنك أيضاً افتراض أن $d_x \ll H$.

للحصول على نتيجة جيدة، تقرّر أليس إجراء هذه التجربة من برج أعلى بكثير من السابق. ولدهشتها، تصطم الكتلة بالأرضية عند قاعدة البرج، بحيث يكون $d_x = 0$.

1.3 — B.7 نقطة

أوجد حداً أدنى لارتفاع البرج الذي يمكن عنده أن يتحقق $d_x = 0$.

أليس مستعدة لمحاولة أخيرة لإقناع بوب. وهي تريد استخدام مذبذبها النابضي لإظهار تأثير قوة كوريوليس. لهذا الغرض، تغيّر الترتيب الأصلي: تربط نابضها بحلقة يمكنها الانزلاق بحرية على قضيب أفقي في اتجاه x دون أي احتكاك. ويتذبذب النابض نفسه في اتجاه y . القضيب مواز للأرضية وعمودي على محور دوران المحطة الفضائية. ومن ثم فإن المستوى xy عمودي على محور الدوران، ويتجه الاتجاه y مباشرة نحو مركز دوران المحطة.



الشكل 5: الترتيب التجريبي.

1.7 — B.8 نقطة

تسحب أليس الكتلة مسافة d إلى أسفل من نقطة الاتزان $x = 0$ ، $y = 0$ ، ثم تتركها (انظر الشكل 5).

- أعط تعبيراً جبرياً لكل من $x(t)$ و $y(t)$. يمكنك افتراض أن $\omega_{ss}d$ صغيرة، وإهمال قوة كوريوليس للحركة على طول المحور y .
- ارسم رسماً تخطيطياً للمسار $(x(t), y(t))$ ، مع تحديد جميع السمات المهمة، مثل السعة.

تواصل أليس وبوب الجدل.

ورقة البيانات العامة

c	سرعة الضوء في الفراغ	$= 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
μ_0	نفاذية الفراغ (الثابت المغناطيسي)	$= 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
ϵ_0	سماحية الفراغ (الثابت الكهربائي)	$= 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
e	الشحنة الأولية	$= 1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
m_e	كتلة الإلكترون	$= 9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31} \text{ kg}$
		$= 0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
m_p	كتلة البروتون	$= 1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		$= 938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
m_n	كتلة النيوترون	$= 1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$
		$= 939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
u	وحدة الكتلة الذرية الموحدة	$= 1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27} \text{ kg}$
R_∞	ثابت ريديبرغ	$= 10\,973\,731.568\,508(65) \text{ m}^{-1}$
G	ثابت الجذب العام	$= 6.674\,08(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
g	تسارع الجاذبية (في زيورخ)	$= 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
h	ثابت بلانك	$= 6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
N_A	عدد أفوغادرو	$= 6.022\,140\,857(74) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
R	ثابت الغاز المولي	$= 8.314\,4598(48) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
M_u	ثابت الكتلة المولية	$= 1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
k_B	ثابت بولتزمان	$= 1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
σ	ثابت ستيفان-بولتزمان	$= 5.670\,367(13) \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

للجزء A، نعرف كتلة أسطوانة مصنوعة بالكامل من الخشب والكتلة الزائدة الناتجة عن إدخال المعدن:

$$m_0 = \pi \rho_1 r_1^2 h_1, \quad \Delta m = M - m_0 = \pi (\rho_2 - \rho_1) r_2^2 h_2.$$

للجزء B، نكتب $\Omega = \omega_{ss}$ ، ونختار $x + y$ في اتجاه دوران المحطة و $y + x$ نحو مركزها.

A.1 •

$$b = \frac{r_1 \sin \Theta}{\sin \phi}.$$

A.2 •

$$I_S \ddot{\varphi} = -Mgb \sin \varphi \simeq -Mgb\varphi, \quad I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2}.$$

A.3 •

$$d = \frac{Mb}{\Delta m} = \frac{Mb}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2 h_2}.$$

A.4 •

$$I_S = \frac{1}{2}m_0 r_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m r_2^2 + \frac{M^2 b^2}{\Delta m}.$$

A.5 •

$$r_2 = \sqrt{\frac{MgbT^2}{2\pi^2 \Delta m} - \frac{m_0 r_1^2}{\Delta m} - \frac{2M^2 b^2}{(\Delta m)^2}}, \quad h_2 = \frac{\Delta m}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2}.$$

B.1 •

$$\omega_{ss} = \sqrt{\frac{g_E}{R}}.$$

B.2 •

$$\omega_E = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

B.3 •

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g_E}{R}}.$$

B.4 •

$$g_E(h) = \frac{g_E}{(1 + h/R_E)^2} \simeq g_E \left(1 - \frac{2h}{R_E}\right), \quad \tilde{\omega}_E = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}}.$$

B.5 •

$$R = \frac{R_E}{2}.$$

B.6 •

$$v_x = -2\Omega H, \quad d_x = -\frac{2}{3}\Omega H \sqrt{\frac{2H}{g_E}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}H \sqrt{\frac{H}{R}}.$$

كلاهما في الاتجاه المعاكس لدوران المحطة.

• B.7 حد أدنى مثبت بدقة هو

$$H > R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2}} \right) \simeq 0.8428R.$$

تحدث أول عودة مطابقة تمامًا إلى قاعدة البرج عند

$$H_{\min} \simeq 0.8716R.$$

• B.8 مع $a = 2\Omega d/\omega$

$$x(t) = a[\omega t - \sin(\omega t)], \quad y(t) = -d \cos(\omega t).$$

يتكوّن المسار من أقواس سيكلويدية متتالية، ذات نقاط حادة عند $(2\pi na, -d)$ ، ونقاط انقلاب علوية عند $((2n+1)\pi a, d)$ ، وتبعد أفقي $2\pi a$. السعة الرأسية هي d .

الحل

A.1

لتكن P نقطة التلامس مع القاعدة المائلة. تؤثر كل من القوة العمودية وقوة الاحتكاك السكوني عند P ، ولذلك لا تولّدان عزمًا حول P . ومن ثم يتطلب الاتزان السكوني أن يمر الخط الرأسي المار بمركز الكتلة C بالنقطة P .

يقع مركز الكتلة على امتداد SB . باستخدام الزوايا المبيّنة في الشكل 2، تكون الإزاحتان الأفقيتان للنقطتين P و C بالنسبة إلى S ، على الترتيب،

$$x_P - x_S = r_1 \sin \Theta, \quad x_C - x_S = b \sin \phi.$$

وعليه،

$$Mg(b \sin \phi - r_1 \sin \Theta) = 0,$$

ومن ثم

$$b = \frac{r_1 \sin \Theta}{\sin \phi}.$$

الاتزان المستقر هو فرع الحل الذي يحقق $\cos \phi > 0$. وعلى وجه الخصوص، يجب أن يكون الميل صغيرًا بما يكفي بحيث يكون $r_1 \sin \Theta < b$ ؛ أما المساواة فتقابل الوضع الحدي الذي لا يولّد عزم إرجاع.

A.2

يثبّت التعليق المحور S . تؤثر الجاذبية عند C ، على مسافة b من هذا المحور، وتولّد عزم الإرجاع

$$\tau_S = -Mgb \sin \varphi.$$

ولذلك تكون معادلة الحركة الدورانية

$$I_S \ddot{\varphi} = -Mgb \sin \varphi.$$

عندما يكون $|\varphi| \ll 1$ ، نستخدم $\sin \varphi \simeq \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgb}{I_S} \varphi = 0.$$

وهذه حركة توافقية بسيطة تحقق

$$\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{Mgb}{I_S}.$$

إنّ

$$I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2},$$

حيث تسارع الجاذبية المعطى هو $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$.

A.3

نمثل توزيع الكثافة الفعلي بمجموع ما يلي:

1. أسطوانة خشبية كاملة كتلتها

$$m_0 = \pi \rho_1 r_1^2 h_1,$$

متمركزة حول S .

2. قرص إضافي كثافته $\rho_2 - \rho_1$ ، متمركز حول B ، وكتلته

$$\Delta m = \pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2 h_2 = M - m_0.$$

يأخذ هذا التمثيل في الحسبان الخشب الذي أزيل قبل إدخال المعدن.

بأخذ العزم الأول للكتلة حول S ،

$$Mb = m_0(0) + \Delta m d.$$

ينتج أن

$$d = \frac{Mb}{\Delta m} = \frac{Mb}{M - \pi \rho_1 r_1^2 h_1} = \frac{Mb}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2 h_2}.$$

A.4

تسهم الأسطوانة الخشبية الكاملة بمقدار

$$I_{\text{wood}} = \frac{1}{2} m_0 r_1^2.$$

للقرص الإضافي عزم قصور ذاتي $\frac{1}{2} \Delta m r_2^2$ حول محور تناظره الخاص. وبحسب مبرهنة المحاور المتوازية، تكون مساهمته حول S

$$I_{\text{additional}} = \frac{1}{2} \Delta m r_2^2 + \Delta m d^2.$$

لذلك

$$I_S = \frac{1}{2} m_0 r_1^2 + \frac{1}{2} \Delta m r_2^2 + \Delta m d^2.$$

بالتعويض عن $d = Mb/\Delta m$ نحصل على

$$I_S = \frac{1}{2} m_0 r_1^2 + \frac{1}{2} \Delta m r_2^2 + \frac{M^2 b^2}{\Delta m}.$$

A.5

بمساواة تعبير I_S من A.2 و A.4،

$$\frac{MgbT^2}{4\pi^2} = \frac{1}{2} m_0 r_1^2 + \frac{1}{2} \Delta m r_2^2 + \frac{M^2 b^2}{\Delta m}.$$

بحل المعادلة لإيجاد r_2^2 ،

$$r_2^2 = \frac{MgbT^2}{2\pi^2 \Delta m} - \frac{m_0 r_1^2}{\Delta m} - \frac{2M^2 b^2}{(\Delta m)^2}.$$

بأخذ الجذر الموجب،

$$r_2 = \sqrt{\frac{MgbT^2}{2\pi^2\Delta m} - \frac{m_0r_1^2}{\Delta m} - \frac{2M^2b^2}{(\Delta m)^2}}.$$

ثم تحدّد علاقة الكتلة السماكة:

$$h_2 = \frac{\Delta m}{\pi(\rho_2 - \rho_1)r_2^2}.$$

هنا $m_0 = \pi\rho_1r_1^2h_1$ و $\Delta m = M - m_0$ ، لذا فإن جميع الكميات في الطرف الأيمن معلومة أو مقيسة. يجب أن تعطي القياسات المتسقة فيزيائياً مقداراً موجباً تحت الجذر، وأن تحقق $d + r_2 \leq r_1$ و $h_2 \leq h_1$.

B.1

يتبع رائد الفضاء الساكن بالنسبة إلى الطوق مساراً دائرياً نصف قطره R . التسارع المركزي المطلوب هو

$$a_c = \omega_{ss}^2 R.$$

يشعر رائد الفضاء بالقوة العمودية التي توفر هذا التسارع بوصفها وزنه. وتتطلب مطابقة التسارع على الأرض أن يكون

$$\omega_{ss}^2 R = g_E.$$

إنّ

$$\omega_{ss} = \sqrt{\frac{g_E}{R}}.$$

نكتب فيما يلي $\Omega = \omega_{ss}$.

B.2

لتكن y الإزاحة إلى أعلى من موضع اتزان النابض. تغيّر الجاذبية الثابتة استتالة الاتزان، لكن قوتها الثابتة تُلغى عند كتابة المعادلة بالنسبة إلى موضع الاتزان:

$$m\ddot{y} = -ky.$$

ولذلك

$$\omega_E = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

B.3

نستخدم الإطار الدوّار، ونجعل y متجهاً شعاعياً إلى الداخل انطلاقاً من موضع الاتزان. إذا كان نصف قطر موضع الاتزان هو r_0 ، فإن نصف القطر اللحظي هو $r_0 - y$.

تؤثر القوة الطاردة المركزية إلى الخارج، ومقدارها

$$m\Omega^2(r_0 - y).$$

تنقص قوة النابض المتجهة إلى الداخل بمقدار ky عندما تتحرك الكتلة إلى الداخل بمقدار y . وعند الاتزان، تحقق قيمتها F_0 العلاقة

$$F_0 = m\Omega^2 r_0.$$

ولذلك تكون معادلة الحركة في الاتجاه نحو الداخل

$$m\ddot{y} = (F_0 - ky) - m\Omega^2(r_0 - y) = -(k - m\Omega^2)y.$$

يوازن القيد الأفقي قوة كوريوليس، لذا فهي لا تغيّر هذه المعادلة الشعاعية. ومن ثم

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g_E}{R}}.$$

يتطلب حدوث التذبذبات أن يكون $k/m > \Omega^2$.

B.4

لتكن M_E كتلة الأرض. يعطي قانون نيوتن للجذب العام

$$g_E(h) = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2}.$$

بما أن $g_E = GM_E/R_E^2$.

$$g_E(h) = g_E \left(1 + \frac{h}{R_E}\right)^{-2}.$$

عندما يكون $h \ll R_E$ يكون التوسع من الرتبة الأولى

$$g_E(h) \simeq g_E \left(1 - \frac{2h}{R_E}\right).$$

ليكن ارتفاع الاتزان h_0 ، ولتكن y الإزاحة إلى أعلى من موضع الاتزان. بعد طرح معادلة توازن القوى عند الاتزان،

$$m\ddot{y} = -ky - m[g_E(h_0 + y) - g_E(h_0)].$$

ضمن التقريب الخطي،

$$g_E(h_0 + y) - g_E(h_0) \simeq -\frac{2g_E}{R_E}y.$$

إذن

$$m\ddot{y} = -\left(k - \frac{2mg_E}{R_E}\right)y,$$

مما يعطي

$$\tilde{\omega}_E = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}}.$$

تنقص الجاذبية مع الارتفاع، لذا فإن الإزاحة إلى أعلى تقلل قوة الجاذبية المتجهة إلى أسفل. وهذا يضعف قوة الإرجاع المحصلة ويخفض التردد.

B.5

بمساواة مربعي التردد من B.3 و B.4،

$$\frac{k}{m} - \frac{g_E}{R} = \frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}.$$

ولذلك

$$R = \frac{R_E}{2}.$$

B.6

نختار x في اتجاه دوران المحطة و y إلى الداخل، نحو مركزها. وفق هذا الاصطلاح، تكون مركبتا تسارع كوريوليس

$$a_{C,x} = 2\Omega\dot{y}, \quad a_{C,y} = -2\Omega\dot{x}.$$

لبرج قصير، نقرب التسارع إلى أسفل بالثابت $g_E = \Omega^2 R$. ويتيح لنا الانحراف الأفقي الصغير إهمال تأثيره الراجع على السقوط الرأسي. عند ترك الكتلة من السكون،

$$y(t) = H - \frac{1}{2}g_E t^2, \quad \dot{y} = -g_E t.$$

زمن الاصطدام هو

$$t_f = \sqrt{\frac{2H}{g_E}}.$$

تصبح المعادلة الأفقية

$$\ddot{x} = 2\Omega\dot{y} = -2\Omega g_E t.$$

باستخدام $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ، يعطي التكامل

$$\dot{x} = -\Omega g_E t^2, \quad x = -\frac{1}{3}\Omega g_E t^3.$$

عند الاصطدام،

$$\boxed{v_x = -\Omega g_E t_f^2 = -2\Omega H},$$

و

$$\boxed{d_x = -\frac{1}{3}\Omega g_E t_f^3 = -\frac{2}{3}\Omega H \sqrt{\frac{2H}{g_E}}}.$$

باستخدام $\Omega^2 = g_E/R$ ،

$$\boxed{d_x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}H \sqrt{\frac{H}{R}}}.$$

تهبط الكتلة خلف البرج في الاتجاه المعاكس للدوران. شرط الاتساق هو

$$\frac{|d_x|}{H} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{H}{R}} \ll 1,$$

كما هو متوقع عندما يكون $H \ll R$.

B.7

لبرج مرتفع، نستخدم إطارًا عطاليًا والهندسة الدائرية الكاملة. لم يعد تقريب التسارع الثابت المستخدم في B.6 صالحًا. ليكن

$$r = R - H$$

المسافة بين نقطة الإفلات ومركز المحطة، حيث $0 < r < R$. نختار إحداثيات عطالية بحيث يحدث الإفلات عند $(r, 0)$ ، بسرعة مماسية $(0, \Omega r)$.

بعد الإفلات، لا تؤثر أي قوة حقيقية في الكتلة، لذا يكون مسارها خطأً مستقيمًا:

$$X(t) = r, \quad Y(t) = \Omega r t.$$

تصل الكتلة إلى الطوق للمرة الأولى عندما يكون

$$X^2 + Y^2 = R^2.$$

بكتابة $u = \Omega t_f$ ، نحصل على

$$r^2(1 + u^2) = R^2, \quad u = \sqrt{\frac{R^2}{r^2} - 1}.$$

عند الاصطدام، يكون الموضع الزاوي للكتلة

$$\alpha = \arctan u, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

بينما تكون قاعدة البرج قد دارت بزاوية u .

لكي تصطدم الكتلة بقاعدة البرج، يجب أن تتطابق زاويتاهما بترديد 2π :

$$u - \arctan u = 2\pi n.$$

عندما يكون $u > 0$ ، يكون $u > \arctan u$ ، ولذلك لا يمكن أن تعطي $n = 0$ ارتفاعاً غير صفري للبرج. ومن ثم $n \geq 1$ ، مما يستلزم

$$u = 2\pi n + \arctan u > 2\pi.$$

وعليه،

$$\frac{R^2}{r^2} - 1 > 4\pi^2, \quad r < \frac{R}{\sqrt{1 + 4\pi^2}}.$$

بما أن $H = R - r$

$$H > R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2}} \right) \simeq 0.8428R.$$

بالنسبة إلى المحطة المحددة في B.5، يصبح هذا الشرط $H > 0.4214R_E$.

يمكن أيضاً إيجاد أصغر ارتفاع تتحقق عنده العودة المطابقة تماماً. الدالة

$$f(u) = u - \arctan u$$

متزايدة تماماً عندما يكون $u > 0$ ، لأن

$$f'(u) = \frac{u^2}{1 + u^2} > 0.$$

لذلك تقابل أصغر قيمة للارتفاع الذي تتحقق عنده العودة الحالة $n = 1$. وبحل

$$u_1 - \arctan u_1 = 2\pi$$

نحصل على

$$u_1 \simeq 7.72525.$$

ولذلك

$$H_{\min} = R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + u_1^2}} \right) \simeq 0.871625R.$$

تتسق هذه القيمة الأدق مع الحد الأدنى المطلوب.

B.8

نواصل باختيار x في اتجاه الدوران و y إلى الداخل. لا توفر الدعامة التي تنزلق بحرية أي قوة إرجاع أفقية.

نستخدم تقريب الأرضية المستوية محلياً، ونهمل، وفق التعليمات، قوة كوريوليس في اتجاه y الناتجة عن الحركة الأفقية. تبقى المعادلة الرأسية

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} - \Omega^2.$$

الشروط الابتدائية هي

$$y(0) = -d, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

ومن ثم

$$y(t) = -d \cos(\omega t).$$

تنشأ الحركة الأفقية بفعل قوة كوريوليس المرتبطة بالسرعة الرأسية:

$$\ddot{x} = 2\Omega\dot{y}.$$

بالتكامل مرة واحدة،

$$\dot{x} = 2\Omega[y(t) - y(0)] = 2\Omega d[1 - \cos(\omega t)].$$

بالتكامل مرة أخرى،

$$x(t) = 2\Omega d \left[t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right].$$

لوصف الرسم التخطيطي، نعرّف

$$a = \frac{2\Omega d}{\omega}, \quad \tau = \omega t, \quad P = \frac{2\pi}{\omega}.$$

عندئذ

$$x = a(\tau - \sin \tau), \quad y = -d \cos \tau.$$

هذا منحنى سيكلويدي غير فيه مقياس كل من الإحداثيين الأفقي والرأسي بصورة مستقلة.

يحتوي القوس الكامل الواحد على النقاط الآتية:

الزمن	x/a	y/d	السمة
0	0	-1	النقطة الحادة الابتدائية: الكتلة ساكنة
$P/4$	$\pi/2 - 1$	0	عبور ارتفاع الاتزان صعوداً
$P/2$	π	1	أعلى نقطة: مماس أفقي
$3P/4$	$3\pi/2 + 1$	0	عبور ارتفاع الاتزان هبوطاً
P	2π	-1	النقطة الحادة التالية: الكتلة ساكنة لحظياً

يتكوّن الرسم التخطيطي الكامل من هذه الأقواس متكررة في اتجاه تزايد x :

- السعة الرأسية هي d ، وتتراوح y من $-d$ إلى $+d$.
- تقع النقاط الحادة عند $(2\pi na, -d)$ ، وتكون المماسات الحدية عندها رأسية.
- تقع نقاط الانقلاب العلوية عند $((2n + 1)\pi a, d)$ ، وتكون المماسات عندها أفقية.
- المسافة بين كل نقطتين حادتين متتاليتين هي

$$L = 2\pi a = \frac{4\pi\Omega d}{\omega}.$$

- بما أن

$$\dot{x} = 2\Omega d(1 - \cos \omega t) \geq 0,$$

- فإن المسار يتقدم باستمرار في اتجاه $+x$ ، دون حلقات.
- متوسط سرعة الانجراف الأفقي هو $2\Omega d$ ؛ وتبلغ سعة التذبذب الأفقي حول هذا الانجراف المنتظم a .
- تنطبق هذه التعبيرات ما دام إهمال قوة كوريوليس الرأسية المذكور وتقريب الأرضية المستوية محلياً صالحين.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: الديناميكا غير الخطية في الدارات الكهربائية

يرجى قراءة التعليمات العامة الموجودة في الظرف المنفصل قبل البدء بهذه المسألة.

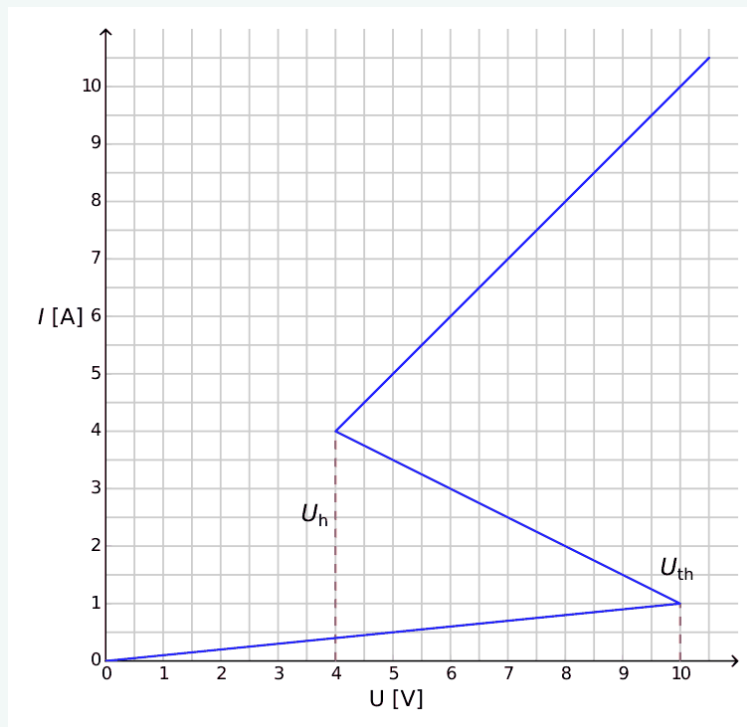
تُستخدم العناصر شبه الموصلة غير الخطية ثنائية الاستقرار (مثل الثايرستورات) على نطاق واسع في الإلكترونيات بوصفها مفاتيح ومولدات للاهتزازات الكهرومغناطيسية. ويتمثل المجال الرئيسي لتطبيقات الثايرستورات في التحكم بالتيارات المتناوبة في إلكترونيات القدرة، مثل تقويم التيار المتناوب إلى تيار مستمر عند مستوى الميغاواط. ويمكن أيضاً أن تُستخدم العناصر ثنائية الاستقرار أنظمة نموذجية لظواهر التنظيم الذاتي في الفيزياء (يُتناول هذا الموضوع في الجزء B من المسألة)، وعلم الأحياء (انظر الجزء C)، وغيرهما من مجالات علم الظواهر غير الخطية الحديث.

الأهداف

دراسة حالات عدم الاستقرار والديناميكا غير البسيطة للدارات التي تضم عناصر ذات خصائص $I - V$ غير خطية. واستكشاف التطبيقات الممكنة لهذه الدارات في الهندسة وفي نمذجة الأنظمة البيولوجية.

الجزء A. الحالات المستقرة زمنياً وعدم الاستقرار (3 نقاط)

يبين الشكل 1 خصائص $I - V$ لعنصر غير خطي X ، وهي الخصائص التي تُسمى ذات الشكل **S**. في مجال الجهد بين $U_h = 4.00 \text{ V}$ (جهد الإمساك) و $U_{th} = 10.0 \text{ V}$ (جهد العتبة)، تكون خصائص $I - V$ هذه متعددة القيم. وللتبسيط، اختبر المنحنى في الشكل 1 خطياً على أجزاء (كل فرع قطعة من خط مستقيم). وعلى وجه الخصوص، يمر مستقيم الفرع العلوي بنقطة الأصل إذا مُدِّد. ويعطي هذا التقريب وصفاً جيداً للثايرستورات الحقيقية.



الشكل 1: خصائص $I - V$ للعنصر غير الخطي X .

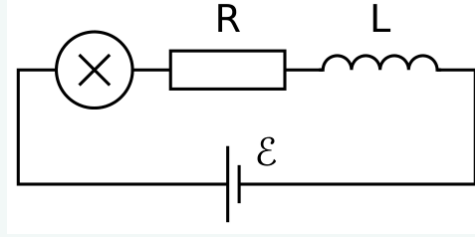
0.4 — A.1 نقطة

باستخدام المنحنى، حدد مقاومة العنصر X ، وهي R_{on} على الفرع العلوي من خصائص $I - V$ ، و R_{off} على الفرع السفلي، على الترتيب. يوصف الفرع الأوسط بالمعادلة

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{int}}. \quad (1)$$

أوجد قيمتي المعلمتين I_0 و R_{int} .

يُوصَل العنصر X على التوالي (انظر الشكل 2) بمقاوم R ، وملف حث L ، ومصدر جهد مثالي $\mathcal{E}$. نقول إن الدارة في حالة مستقرة زمنياً إذا كان التيار ثابتاً مع الزمن، $I(t) = \text{const}$.



الشكل 2: دائرة تضم العنصر X ، والمقاوم R ، وملف الحث L ، ومصدر الجهد $\mathcal{E}$.

1 — A.2 نقطة

ما الأعداد الممكنة للحالات المستقرة زمنياً التي يمكن أن توجد في دائرة الشكل 2 عند قيمة ثابتة لـ $\mathcal{E}$ ، وعندما تكون $R = 3.00 \Omega$ ؟ وكيف تتغير الإجابة عندما تكون $R = 1.00 \Omega$ ؟

0.6 — A.3 نقطة

لكن $R = 3.00 \Omega$ ، $L = 1.00 \mu\text{H}$ ، و $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ في الدائرة المبينة في الشكل 2. حدد قيمتي التيار $I_{\text{stationary}}$ والجهد $V_{\text{stationary}}$ على العنصر غير الخطي X في الحالة المستقرة زمنياً.

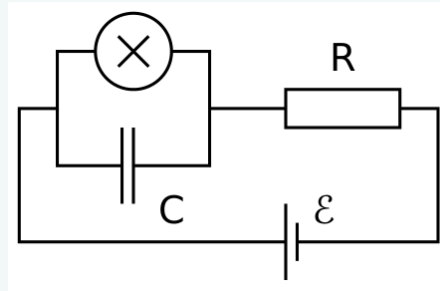
الدائرة في الشكل 2 في حالة مستقرة زمنياً يكون فيها $I(t) = I_{\text{stationary}}$. يُقال إن هذه الحالة مستقرة إزاء الاضطرابات إذا عاد التيار نحوها بعد انحراف صغير (زيادة التيار أو نقصانه). أما إذا استمر النظام في الابتعاد عنها، فيُقال إنها غير مستقرة.

1 — A.4 نقطة

استخدم القيم العددية الواردة في السؤال A.3، وادرس استقرار الحالة التي يكون فيها $I(t) = I_{\text{stationary}}$. هل هي مستقرة أم غير مستقرة؟

الجزء B. العناصر غير الخطية ثنائية الاستقرار في الفيزياء: مرسل راديوي (5 نقاط)

ندرس الآن ترتيباً جديداً للدائرة (انظر الشكل 3). هذه المرة، يُوصَل العنصر غير الخطي X على التوازي بمكثف سعته $C = 1.00 \mu\text{F}$. ثم تُوصَل هذه المجموعة على التوالي بمقاوم مقاومته $R = 3.00 \Omega$ ، ومصدر جهد ثابت مثالي جهده $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$. يتبين أن هذه الدائرة تشهد اهتزازات يقفز خلالها العنصر غير الخطي X من فرع من خصائص $I - V$ إلى آخر خلال دورة واحدة.



الشكل 3: دائرة تضم العنصر X ، والمكثف C ، والمقاوم R ، ومصدر الجهد $\mathcal{E}$.

1.8 — B.1 نقطة

ارسم دورة الاهتزاز على منحنى $I - V$ ، مع بيان اتجاهها (مع عقارب الساعة أو عكسها). علل إجابتك بالمعادلات والرسوم التخطيطية.

1.9 — B.2 نقطة

أوجد تعبيرين للزمنين t_1 و t_2 اللذين يقضيهما النظام على كل فرع من منحنى $I - V$ خلال دورة الاهتزاز. حدد قيمتيهما العدديتين. وأوجد القيمة العددية لدور الاهتزاز T ، بافتراض أن الزمن اللازم للقفزات بين فروع منحنى $I - V$ مهملاً.

0.7 — B.3 نقطة

قدّر القدرة المتوسطة P التي يبديها العنصر غير الخطي خلال اهتزازة واحدة. يكفي تحديد رتبة المقدار.

تُستخدم الدارة في الشكل 3 لبناء مرسل راديوي. ولهذا الغرض، يُوصَل العنصر X بأحد طرفي هوائي خطي (سلك مستقيم طويل) طوله s . ويكون الطرف الآخر للسلك حرًا. تتشكل في الهوائي موجة كهرومغناطيسية واقفة. وسرعة الموجات الكهرومغناطيسية على طول الهوائي هي نفسها سرعتها في الفراغ. يستخدم المرسل التوافقية الأساسية للنظام، التي دورها T الوارد في السؤال B.2.

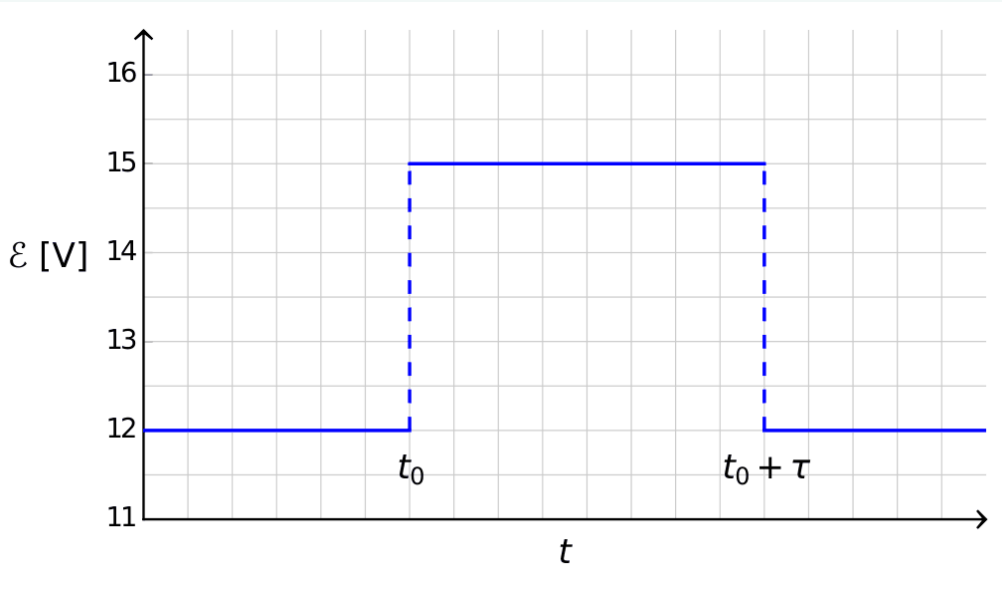
0.6 — B.4 نقطة

ما القيمة المثلى لـ s ، بافتراض أنها لا يمكن أن تتجاوز 1 km ؟

الجزء C. العناصر غير الخطية ثنائية الاستقرار في علم الأحياء: النيورستور (2 نقطة)

في هذا الجزء من المسألة، نتناول تطبيقًا للعناصر غير الخطية ثنائية الاستقرار في نمذجة العمليات البيولوجية. يتمتع العصبون في الدماغ البشري بالخاصية الآتية: عندما تثيره إشارة خارجية، يؤدي اهتزازة واحدة ثم يعود إلى حالته الابتدائية. تُسمى هذه السمة قابلية الاستثارة. وبفضل هذه الخاصية، يمكن للنبضات أن تنتشر في شبكة العصبونات المترابطة التي تشكل الأجهزة العصبية. وتُسمى شريحة شبه موصلة مصممة لمحاكاة قابلية الاستثارة وانتشار النبضات نيورستور (اسم مشتق من العصبون والترانزستور).

نحاول نمذجة نيورستور بسيط باستخدام دائرة تضم العنصر غير الخطي X الذي درسناه سابقًا. ولهذا الغرض، يُخفّض الجهد $\mathcal{E}$ في دائرة الشكل 3 إلى القيمة $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$. تتوقف الاهتزازات، ويصل النظام إلى حالته المستقرة زمنيًا. ثم يُرفع الجهد سريعًا مجددًا إلى القيمة $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ ، وبعد فترة زمنية τ (حيث $\tau < T$) يُعاد ضبطه على القيمة $\mathcal{E}'$ (انظر الشكل 4). يتبين أن هناك قيمة حرجة معينة τ_{crit} ، وأن النظام يُظهر سلوكًا مختلفًا نوعيًا في حالتي $\tau < \tau_{\text{crit}}$ و $\tau > \tau_{\text{crit}}$.



الشكل 4: جهد مصدر الجهد بدلالة الزمن.

1.2 — C.1 نقطة

ارسم تخطيطيًا منحنيي اعتماد التيار $I_X(t)$ المار في العنصر غير الخطي X على الزمن في حالتي $\tau < \tau_{\text{crit}}$ و $\tau > \tau_{\text{crit}}$.

0.6 — C.2 نقطة

أوجد التعبير والقيمة العددية للزمن الحرج τ_{crit} الذي يتبدل عنده نمط السلوك.

0.2 — C.3 نقطة

هل تكون الدارة التي فيها $\tau = 1.00 \times 10^{-6} \text{ s}$ نيورستورًا؟

جدول المعطيات العامة

$299\,792\,458\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	=	c	سرعة الضوء في الفراغ
$4\pi \times 10^{-7}\text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$	=	μ_0	نفاذية الفراغ (الثابت المغناطيسي)
$8.854\,187\,817 \times 10^{-12}\text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$	=	ε_0	سماحية الفراغ (الثابت الكهربائي)
$1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19}\text{ A} \cdot \text{s}$	=	e	الشحنة الأولية
$9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31}\text{ kg}$	=	m_e	كتلة الإلكترون
$0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$	=		
$1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27}\text{ kg}$	=	m_p	كتلة البروتون
$938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$	=		
$1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27}\text{ kg}$	=	m_n	كتلة النيوترون
$939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$	=		
$1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27}\text{ kg}$	=	u	وحدة الكتلة الذرية الموحدة
$10\,973\,731.568\,508(65)\text{ m}^{-1}$	=	R_∞	ثابت ريدبرغ
$6.674\,08(31) \times 10^{-11}\text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$	=	G	ثابت الجذب العام
$9.81\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	=	g	تسارع الجاذبية (في زيورخ)
$6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34}\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	=	h	ثابت بلانك
$6.022\,140\,857(74) \times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$	=	N_A	عدد أفوغادرو
$8.314\,4598(48)\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	=	R	ثابت الغاز المولي
$1 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$	=	M_u	ثابت الكتلة المولية
$1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23}\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$	=	k_B	ثابت بولتزمان
$5.670\,367(13) \times 10^{-8}\text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$	=	σ	ثابت ستيفان-بولتزمان

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- **A.1:** $R_{\text{int}} = 2.00\,\Omega$, $I_0 = 6.00\text{ A}$, $R_{\text{off}} = 10.0\,\Omega$, $R_{\text{on}} = 1.00\,\Omega$.
- **A.2:** عندما تكون $R = 3.00\,\Omega$, توجد حالة مستقرة زمنياً واحدة. وعندما تكون $R = 1.00\,\Omega$, توجد ثلاث حالات إذا كان $8.00\text{ V} < \mathcal{E} < 11.0\text{ V}$, وحالتان عند كل من طرفي المجال، وواحدة فيما عدا ذلك، وذلك لجهد المصدر غير السالب المبين.
- **A.3:** $V_{\text{stationary}} = 6.00\text{ V}$, $I_{\text{stationary}} = 3.00\text{ A}$.
- **A.4:** مستقرة؛ تضمل اضطرابات التيار الصغيرة أسياً بثابت زمني مقداره $1.00\,\mu\text{s}$.
- **B.1:** عكس عقارب الساعة. في الإحداثيات $(U/V, I_X/A)$ ، تكون الدورة $(4, 0.4) \rightarrow (10, 1) \rightarrow (10, 10) \rightarrow (4, 4) \rightarrow (4, 0.4)$.
- **B.2:** بتعريف t_1 على الفرع السفلي و t_2 على الفرع العلوي،

$$t_1 = \frac{30}{13} \ln \frac{49}{10} \mu\text{s} = 3.67 \mu\text{s}, \quad t_2 = \frac{3}{4} \ln 25 \mu\text{s} = 2.41 \mu\text{s},$$

$$T = 6.08 \mu\text{s}.$$

• **B.3:** P من رتبة 10^1 W . ويعطي التكامل ضمن النموذج المثالي $P = 17.3 \text{ W}$.

• **B.4:** $s = cT/4 = 456 \text{ m}$.

• **C.1:** عندما تكون $\tau < \tau_{\text{crit}}$ ، ينحرف التيار انحرافاً صغيراً ومتصلاً عن 0.923 A ، ويبقى دون 1.00 A ، ثم يعود إلى 0.923 A . وعندما تكون $\tau > \tau_{\text{crit}}$ ، يُنتج نبضة كبيرة واحدة: قفزة $10.0 \text{ A} \rightarrow 1.00 \text{ A}$ ، ثم اضمحلالاً إلى 4.00 A ، ثم قفزة إلى 0.400 A ، ثم عودة إلى 0.923 A .

• **C.2:**

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{30}{13} \ln \frac{3}{2} \mu\text{s} = 0.936 \mu\text{s}.$$

• **C.3:** نعم، بما أن $1.00 \mu\text{s} > \tau_{\text{crit}}$ ، فنُطلق النبضة انحرافاً كاملاً واحداً يعقبه الرجوع.

الحل

A.1

يمر الفرع العلوي عند تمديده بنقطة الأصل وبالنقطة $(U, I) = (4.00 \text{ V}, 4.00 \text{ A})$. ومن ثم

$$R_{\text{on}} = \frac{U}{I} = \frac{4.00}{4.00} \Omega = \boxed{1.00 \Omega}.$$

يمر الفرع السفلي بنقطة الأصل وبالنقطة $(10.0 \text{ V}, 1.00 \text{ A})$ ، مما يعطي

$$R_{\text{off}} = \boxed{10.0 \Omega}.$$

يصل الفرع الأوسط بين $(4.00 \text{ V}, 4.00 \text{ A})$ و $(10.0 \text{ V}, 1.00 \text{ A})$ ، ولذلك

$$-\frac{1}{R_{\text{int}}} = \frac{1.00 - 4.00}{10.0 - 4.00} \frac{\text{A}}{\text{V}} = -0.500 \Omega^{-1}.$$

إذن

$$\boxed{R_{\text{int}} = 2.00 \Omega}, \quad I_0 = 4.00 \text{ A} + \frac{4.00 \text{ V}}{2.00 \Omega} = \boxed{6.00 \text{ A}}.$$

هنا تكون R_{int} موجبة؛ أما المقاومة التفاضلية للفرع الأوسط فهي $-R_{\text{int}}$.

A.2

لنرمز بـ U إلى الجهد بين طرفي X . يعطي قانون كيرشوف للجهد

$$\mathcal{E} = RI + U + L \frac{dI}{dt}.$$

في الحالة المستقرة زمنياً،

$$\mathcal{E} = RI + U.$$

إذن الحالات المستقرة زمنياً هي نقاط تقاطع منحني الخصائص مع خط الحمل $I = (\mathcal{E} - U)/R$.

وبصورة مكافئة، باستخدام منحني الخصائص على الصورة $U(I)$ ،

$$\mathcal{E}(I) = \begin{cases} (R + 10.0 \Omega)I, & 0 \leq I \leq 1.00 \text{ A}, \\ 12.0 \text{ V} + (R - 2.00 \Omega)I, & 1.00 \text{ A} \leq I \leq 4.00 \text{ A}, \\ (R + 1.00 \Omega)I, & I \geq 4.00 \text{ A}. \end{cases}$$

عندما تكون $R = 3.00 \Omega$ ، تتزايد الأجزاء الثلاثة جميعها مع I . وتتصل اتصالاً مستمراً عند $\mathcal{E} = 13.0 \text{ V}$ و 16.0 V . وبالتالي، تقابل كل جهد مصدر غير سالب حالة مستقرة زمنياً واحدة بالضبط.

عندما تكون $R = 1.00 \Omega$ ، يتناقص الجزء الأوسط مع I . ويقع طرفاه عند

$$\mathcal{E}(1.00 \text{ A}) = 11.0 \text{ V}, \quad \mathcal{E}(4.00 \text{ A}) = 8.00 \text{ V}.$$

وعليه، يكون عدد الحالات المستقرة زمنياً المتميزة

جهد المصدر	عدد الحالات المستقرة زمنياً
$0 \leq \mathcal{E} < 8.00 \text{ V}$	1
$\mathcal{E} = 8.00 \text{ V}$	2
$8.00 \text{ V} < \mathcal{E} < 11.0 \text{ V}$	3
$\mathcal{E} = 11.0 \text{ V}$	2
$\mathcal{E} > 11.0 \text{ V}$	1

عند كل حد من الحدين، تتطابق نقطتا تقاطع مع فرعين عند زاوية من منحني الخصائص، وتُحسبان حالة واحدة.

A.3

عندما تكون $R = 3.00 \Omega$ و $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ ، تقع الحالة المستقرة زمنياً على الفرع الأوسط، لأن $13.0 < 15.0 < 16.0 \text{ V}$. ومن ثم

$$15.0 \text{ V} = 12.0 \text{ V} + (3.00 - 2.00) \Omega I_{\text{stationary}}.$$

إن

$$I_{\text{stationary}} = 3.00 \text{ A},$$

و

$$V_{\text{stationary}} = \mathcal{E} - RI_{\text{stationary}} = 6.00 \text{ V}.$$

A.4

نكتب $I = I_{\text{stationary}} + \delta I$. يبقى الاضطراب الصغير بما يكفي على الفرع الأوسط، حيث

$$U = R_{\text{int}}(I_0 - I).$$

بالتعويض في قانون كيرشوف وطرح معادلة الحالة المستقرة زمنياً، نحصل على

$$L \frac{d(\delta I)}{dt} = -(R - R_{\text{int}})\delta I.$$

ومن ثم

$$\delta I(t) = \delta I(0) \exp \left[-\frac{R - R_{\text{int}}}{L} t \right].$$

بما أن $R - R_{\text{int}} = 1.00 \Omega > 0$ ، فإن الاضطراب يضمحل. وعليه، تكون الحالة مستقرة إزاء الاضطرابات، وزمن استرخائها

$$\frac{L}{R - R_{\text{int}}} = \frac{1.00 \mu\text{H}}{1.00 \Omega} = 1.00 \mu\text{s}.$$

تتجاوز المقاومة التفاضلية الموجبة للمقاوم الخارجي مقدار المقاومة التفاضلية السالبة للعنصر.

B.1

للمكثف والعنصر X الجهد نفسه U . يعطي قانون كيرشوف للتيار

$$\frac{\mathcal{E} - U}{R} = I_X + C \frac{dU}{dt},$$

أو

$$C \frac{dU}{dt} = \frac{\mathcal{E} - U}{R} - I_X(U).$$

على فرع مقاومته r ، يكون $I_X = U/r$ ، ومن ثم

$$C \frac{dU}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) U.$$

على الفرع السفلي، يكون الجهد الذي كانت الدارة ستسترخي نحوه

$$U_{\infty, \text{off}} = \frac{\mathcal{E} R_{\text{off}}}{R + R_{\text{off}}} = \frac{150}{13} \text{ V} = 11.538 \dots \text{ V}.$$

وهذا يتجاوز $U_{\text{th}} = 10.0 \text{ V}$. وبالتالي، يكون $dU/dt > 0$ طوال جزء الدورة الواقع على الفرع السفلي: يُشحن المكثف من 4.00 إلى 10.0 V.

عند U_{th} ، ينتهي الفرع السفلي. لا يمكن لجهد المكثف أن يقفز، ولذلك ينتقل X رأسياً على مخطط $I - V$:

$$(U, I_X) = (10.0 \text{ V}, 1.00 \text{ A}) \longrightarrow (10.0 \text{ V}, 10.0 \text{ A}).$$

على الفرع العلوي، يكون الجهد الحدي المقابل

$$U_{\infty, \text{on}} = \frac{\mathcal{E} R_{\text{on}}}{R + R_{\text{on}}} = 3.75 \text{ V}.$$

وهذا أقل من $U_{\text{h}} = 4.00 \text{ V}$. إذن $dU/dt < 0$: يفرغ المكثف شحنته من 10.0 إلى 4.00 V. وعند جهد الإمساك، يقفز التيار من 4.00 إلى 0.400 A، مع ثبات الجهد مجدداً.

وعليه، يتكون الرسم التخطيطي المطلوب من المقاطع المتعاقبة الآتية:

المقطع	الحركة في مستوى $I - V$
الفرع السفلي	من (4.00 V, 0.400 A) نحو اليمين وإلى أعلى قليلاً حتى (10.0 V, 1.00 A)
الانتقال عند العتبة	رأسياً إلى أعلى حتى (10.0 V, 10.0 A)
الفرع العلوي	نحو اليسار وإلى أسفل حتى (4.00 V, 4.00 A)
الانتقال عند جهد الإمساك	رأسياً إلى أسفل حتى (4.00 V, 0.400 A)

الاتجاه هو عكس عقارب الساعة.

يكون الاتزان على الفرع الأوسط غير مستقر في دارة المكثف هذه. وبالفعل، بالقرب من $U = 6.00 \text{ V}$ ،

$$C \frac{d(\delta U)}{dt} = \left(\frac{1}{R_{\text{int}}} - \frac{1}{R} \right) \delta U = \frac{\delta U}{6.00 \Omega}.$$

تنمو اضطرابات الجهد، ولذلك لا يشكل الفرع الأوسط جزءاً مستداماً من دورة الاهتزاز.

B.2

لفرع مقاومته r ، نعرّف

$$\theta_r = C \frac{Rr}{R + r}, \quad U_{\infty, r} = \frac{\mathcal{E}r}{R + r}.$$

تصبح المعادلة التفاضلية الواردة في B.1

$$\frac{dU}{dt} = \frac{U_{\infty, r} - U}{\theta_r},$$

وحلها

$$U(t) = U_{\infty, r} + (U(0) - U_{\infty, r}) e^{-t/\theta_r}.$$

نعرّف t_1 بأنه الزمن على الفرع السفلي، و t_2 بأنه الزمن على الفرع العلوي.

للشحن من U_{th} إلى U_{h}

$$t_1 = \theta_{\text{off}} \ln \left(\frac{U_{\infty, \text{off}} - U_{\text{h}}}{U_{\infty, \text{off}} - U_{\text{th}}} \right).$$

هنا

$$\theta_{\text{off}} = \frac{30}{13} \mu\text{s},$$

ومن ثم

$$t_1 = \frac{30}{13} \mu\text{s} \ln \left(\frac{150/13 - 4}{150/13 - 10} \right) = \frac{30}{13} \ln \frac{49}{10} \mu\text{s} = \boxed{3.67 \mu\text{s}}.$$

لتفريغ الشحنة من U_{th} إلى U_{h} ،

$$t_2 = \theta_{\text{on}} \ln \left(\frac{U_{\text{th}} - U_{\infty, \text{on}}}{U_{\text{h}} - U_{\infty, \text{on}}} \right).$$

بما أن

$$\theta_{\text{on}} = 0.750 \mu\text{s},$$

نحصل على

$$t_2 = 0.750 \mu\text{s} \ln \left(\frac{10.0 - 3.75}{4.00 - 3.75} \right) = \frac{3}{4} \ln 25 \mu\text{s} = \boxed{2.41 \mu\text{s}}.$$

بإهمال مدد الانتقال،

$$\boxed{T = t_1 + t_2 = 6.08 \mu\text{s}}.$$

B.3

على أي من فرعي التوصيل، تكون القدرة اللحظية المبذورة في X

$$p_X = UI_X = \frac{U^2}{r}.$$

نهمل الطاقة المبذورة أثناء الانتقالات اللحظية المثالية. وباستخدام تطور الجهد المشتق أعلاه، تكون الطاقة المبذورة على كل فرع

$$W_{\text{off}} = \frac{\theta_{\text{off}}}{R_{\text{off}}} \int_{U_{\text{h}}}^{U_{\text{th}}} \frac{U^2}{U_{\infty, \text{off}} - U} dU = 23.2 \mu\text{J},$$

و

$$W_{\text{on}} = \frac{\theta_{\text{on}}}{R_{\text{on}}} \int_{U_{\text{h}}}^{U_{\text{th}}} \frac{U^2}{U - U_{\infty, \text{on}}} dU = 82.3 \mu\text{J}.$$

إذن

$$P = \frac{W_{\text{off}} + W_{\text{on}}}{T} = \frac{105.5 \mu\text{J}}{6.0816 \mu\text{s}} = \boxed{17.3 \text{ W}}.$$

وعليه، يكون تقدير رتبة المقدار المطلوب

$$\boxed{P \sim 10^1 \text{ W}}.$$

B.4

الطول الموجي للتوافقية الأساسية المنبعثة هو

$$\lambda = cT = (299\,792\,458 \text{ m s}^{-1})(6.08162 \times 10^{-6} \text{ s}) = 1.82322 \times 10^3 \text{ m}.$$

في نموذج الهوائي المثالي، يكون الطرف الحر عقدة للتيار، في حين تقتضي الإثارة الفعالة وجود بطن للتيار عند الطرف المغذي. وتكون المسافة الفاصلة بينهما مضاعفًا فرديًا لربع الطول الموجي:

$$s = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$s = \frac{\lambda}{4} = \frac{cT}{4} = 456 \text{ m}.$$

الاحتمال التالي هو $3\lambda/4 = 1.37 \text{ km}$ ، وهو يتجاوز الحد المسموح. ولذلك، فإن طول ربع الموجة هو الطول الأمثل المسموح به.

C.1

نوجد أولاً الحالة الابتدائية المستقرة زمنياً عند $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$. وهي تقع على الفرع السفلي:

$$I_r = \frac{\mathcal{E}'}{R + R_{\text{off}}} = \frac{12}{13} \text{ A} = \boxed{0.923 \text{ A}},$$

$$U_r = R_{\text{off}} I_r = \frac{120}{13} \text{ V} = \boxed{9.23 \text{ V}}.$$

لتكن $u = t - t_0$. قبل النبضة، يكون $I_X = I_r$. ما دام جهد المصدر عند 15.0 V والعنصر باقياً على الفرع السفلي،

$$I_X(u) = \frac{\mathcal{E}}{R + R_{\text{off}}} + \left(I_r - \frac{\mathcal{E}}{R + R_{\text{off}}} \right) e^{-u/\theta_{\text{off}}},$$

أو عديداً،

$$I_X(u) = \frac{15 - 3e^{-u/\theta_{\text{off}}}}{13} \text{ A}.$$

المدة الحرجة هي الزمن اللازم للوصول هذا التيار إلى 1.00 A ، وهو ما يقابل $U = U_{\text{th}}$.

عندما تكون $\tau < \tau_{\text{crit}}$ ، يكون المنحنى نتوءاً صغيراً متصلًا:

- قبل t_0 ، يكون التيار ثابتاً عند 0.923 A .
- أثناء النبضة، يرتفع أسياً بميل متناقص، لكنه يبقى دون 1.00 A .
- عند $t_0 + \tau$ ، يكون التيار متصلاً ويتغير ميله في الإشارة.
- بعد ذلك يضمحل أسياً عائداً إلى 0.923 A .

$$I_X(u) = I_r + [I_X(\tau) - I_r] e^{-(u-\tau)/\theta_{\text{off}}}, \quad u \geq \tau.$$

لا يحدث انتقال بين الفروع.

عندما تكون $\tau > \tau_{\text{crit}}$ ، يحتوي المنحنى على نبضة كبيرة واحدة:

1. يتبع التيار في البداية الارتفاع التدريجي نفسه من 0.923 إلى 1.00 A .
2. عند $t = t_0 + \tau_{\text{crit}}$ ، يقفز رأسياً من 1.00 إلى 10.0 A .
3. ثم يتناقص على الفرع العلوي. وما دام جهد المصدر باقياً عند 15.0 V ،

$$I_X(u) = 3.75 \text{ A} + 6.25 \text{ A} e^{-(u-\tau_{\text{crit}})/\theta_{\text{on}}}.$$

4. عند بلوغه 4.00 A ، يقفز رأسياً إلى 0.400 A .
5. يرتفع بعد ذلك على الفرع السفلي، ويقترب في النهاية من 0.923 A من الأسفل.

إذا عاد جهد المصدر إلى 12.0 V بينما لا يزال العنصر على الفرع العلوي، يبقى التيار متصلاً في تلك اللحظة، لكن اضمحلاله يصبح أسرع. ويكون تعبيره اللاحق

$$I_X(u) = 3.00 \text{ A} + [I_X(\tau) - 3.00 \text{ A}] e^{-(u-\tau)/\theta_{\text{on}}}.$$

تقع القيمة التقريبية 3.00 A دون تيار الإمساك، ولذلك يصل التيار بالضرورة إلى 4.00 A ، وينتقل العنصر إلى حالة الإيقاف. وإذا حدث ذلك عند $u = u_d$ ، فإن العودة اللاحقة توصف بالعلاقة

$$I_X(u) = I_r + (0.400 \text{ A} - I_r) e^{-(u-u_d)/\theta_{\text{off}}}.$$

بالنسبة إلى نبضة أطول، يمكن أن يحدث الانتقال من الفرع العلوي إلى السفلي قبل انتهاء النبضة. وإذا بقي جهد المصدر عند 15.0 V، يحدث ذلك الانتقال عند

$$u = \tau_{\text{crit}} + t_2 = 3.35 \mu\text{s}.$$

ثم يتعافى التيار على الفرع السفلي تحت تأثير مصدر الجهد 15.0 V حتى $u = \tau$ ، وبعد ذلك يقترب من حالة السكون الموافقة لـ 12.0 V. تُحدث تغيرات المصدر تغيرات في الميل، ولا تُحدث تغيرات لحظية في I_X .

لا يمكن أن تحدث نبضة ثانية خلال نبضة المصدر المحددة: فإذا استمر الجهد 15.0 V، لحدث العبور الثاني للعتبة عند $u = \tau_{\text{crit}} + T > T > \tau$.

C.2

عند المدة الحرجة، يكون المكثف قد أتم للتو الشحن من U_r إلى U_{th} :

$$U_{\text{th}} = U_{\infty, \text{off}} + (U_r - U_{\infty, \text{off}}) e^{-\tau_{\text{crit}}/\theta_{\text{off}}}.$$

بحل المعادلة،

$$\tau_{\text{crit}} = \theta_{\text{off}} \ln \left(\frac{U_{\infty, \text{off}} - U_r}{U_{\infty, \text{off}} - U_{\text{th}}} \right).$$

بدلالة معلمات الدارة،

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{C R R_{\text{off}}}{R + R_{\text{off}}} \ln \left[\frac{(\mathcal{E} - \mathcal{E}') R_{\text{off}}}{\mathcal{E} R_{\text{off}} - (R + R_{\text{off}}) U_{\text{th}}} \right].$$

عددياً،

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{30}{13} \mu\text{s} \ln \left(\frac{150/13 - 120/13}{150/13 - 10} \right) = \frac{30}{13} \ln \frac{3}{2} \mu\text{s}.$$

إنّ

$$\tau_{\text{crit}} = 0.936 \mu\text{s}.$$

C.3

تحقق النبضة المحددة

$$\tau = 1.00 \mu\text{s} > \tau_{\text{crit}} = 0.936 \mu\text{s}, \quad \tau < T.$$

ولذلك تُطلق الانتقال إلى الفرع العلوي. تُتم الدارة انحرافاً كبيراً واحداً للتيار يعقبه الرجوع، ثم تعود إلى حالتها الأصلية المستقرة زمنياً تحت تأثير مصدر الجهد 12.0 V.

نعم، تتصرف الدارة بوصفها نيورستوراً

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: مصادم الهادرونات الكبير

يرجى قراءة التعليمات العامة الموجودة في الظرف المنفصل قبل البدء في هذه المسألة.

تتناول هذه المسألة فيزياء مسرّع الجسيمات LHC (مصادم الهادرونات الكبير) في سيرن. ويُعدّ سيرن أكبر مختبر لفيزياء الجسيمات في العالم. وهدفه الرئيسي هو التعمّق في فهم القوانين الأساسية للطبيعة. تُسرّع حزمتان من الجسيمات إلى طاقات عالية، ويوجّههما مجال مغناطيسي قوي حول حلقة المسرّع، ثم تُجعلان تتصادمان. ولا تتوزّع البروتونات بانتظام على محيط المسرّع، بل تتجمّع فيما يُسمّى عناقيد. وتُرصّد الجسيمات الناتجة عن التصادمات باستخدام كواشف كبيرة. يرد بعض معلمات LHC في الجدول 1.

حلقة LHC	
محيط الحلقة	26659 m
عدد العناقيد في كل حزمة بروتونات	2808
عدد البروتونات في كل عنقود	1.15×10^{11}
حزمتا البروتونات	
طاقة البروتونات	7.00 TeV
الطاقة في إطار مركز الكتلة	14.0 TeV

الجدول 1: قيم عددية نموذجية لمعلمات LHC ذات الصلة.

يستخدم فيزيائيو الجسيمات وحدات ملائمة للطاقة والزخم والكتلة: تُقاس الطاقة بالإلكترون فولت [eV]. وبحسب التعريف، فإن 1 eV هو مقدار الطاقة الذي يكتسبه جسيم يحمل شحنة أولية، e ، عند انتقاله عبر فرق جهد مقداره فولت واحد ($1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$).

يُقاس الزخم بوحدة eV/c ، والكتلة بوحدة eV/c^2 ، حيث c هي سرعة الضوء في الفراغ. ولأن 1 eV مقدار صغير جداً من الطاقة، فكتيلاً ما يستخدم فيزيائيو الجسيمات MeV ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$) أو GeV ($1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$) أو TeV ($1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$).

يتناول الجزء A تسريع البروتونات أو الإلكترونات. ويتعلق الجزء B بالتعرف على الجسيمات الناتجة عن التصادمات في سيرن.

الجزء A. مسرّع LHC (6 نقاط)

التسريع:

افترض أن البروتونات سُرّعت بجهد V بحيث أصبحت سرعتها قريبة جداً من سرعة الضوء، وأهمل أي فقد للطاقة بسبب الإشعاع أو التصادمات مع جسيمات أخرى.

0.7 — A.1 نقطة

أوجد التعبير الدقيق للسرعة النهائية v للبروتونات بدلالة جهد التسريع V والثابت الفيزيائية.

يتضمن تصميم تجربة مستقبلية في سيرن استخدام البروتونات من LHC وتصادمها مع إلكترونات طاقتها 60.0 GeV.

0.8 — A.2 نقطة

بالنسبة إلى الجسيمات ذات الطاقة العالية والكتلة الصغيرة، يكون الانحراف النسبي $\Delta = (c - v)/c$ للسرعة النهائية v عن سرعة الضوء صغيراً جداً. أوجد تقريباً من الرتبة الأولى لـ Δ ، واحسب Δ لإلكترونات طاقتها 60.0 GeV باستخدام جهد التسريع V والثابت الفيزيائية.

نعود الآن إلى البروتونات في LHC. افترض أن أنبوب الحزمة ذو شكل دائري.

1.0 — A.3 نقطة

اشتق تعبيراً لكثافة الفيض المغناطيسي المنتظمة B اللازمة لإبقاء حزمة البروتونات على مسار دائري. ينبغي أن يقتصر التعبير على طاقة البروتونات E ، والمحيط L ، والثوابت الأساسية والأعداد. يمكنك استخدام تقريبات مناسبة إذا كان تأثيرها أصغر من الدقة التي يحددها أقل عدد من الأرقام المعنوية.

احسب كثافة الفيض المغناطيسي B عندما تكون طاقة البروتون $E = 7.00 \text{ TeV}$ ، مع إهمال التأثيرات بين البروتونات.

القدرة الإشعاعية:

يشعّ الجسيم المشحون المتسارع طاقة على هيئة موجات كهرومغناطيسية. وتعتمد القدرة الإشعاعية P_{rad} لجسيم مشحون يدور بسرعة زاوية ثابتة فقط على تسارعه a ، وشحنته q ، وسرعة الضوء c ، وسماحية الفراغ ϵ_0 .

1.0 — A.4 نقطة

استخدم التحليل البُعدي لإيجاد تعبير للقدرة الإشعاعية P_{rad} .

تحتوي الصيغة الفعلية للقدرة الإشعاعية على عامل $1/(6\pi)$: وعلاوة على ذلك، يعطي الاشتقاق النسبي الكامل عامل ضرب إضافيًا γ^4 ، حيث $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

1.0 — A.5 نقطة

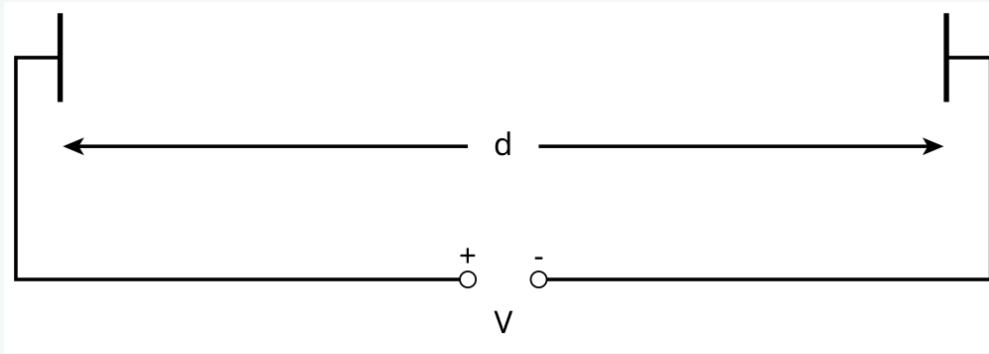
احسب P_{tot} ، القدرة الإشعاعية الكلية لـ LHC، عندما تكون طاقة البروتون $E = 7.00 \text{ TeV}$ (راجع الجدول 1). يمكنك استخدام تقريبات مناسبة.

التسريع الخطي:

في سيرن، تُسرَّع بروتونات ساكنة بواسطة مسرَّع خطي طوله $d = 30.0 \text{ m}$ عبر فرق جهد $V = 500 \text{ MV}$. افترض أن المجال الكهربائي متجانس. يتكون المسرَّع الخطي من لوحين كما هو موضح في الرسم التخطيطي في الشكل 1.

1.5 — A.6 نقطة

حدّد الزمن T الذي تستغرقه البروتونات لعبور هذا المجال.



الشكل 1: رسم تخطيطي لوحدة مسرَّع.

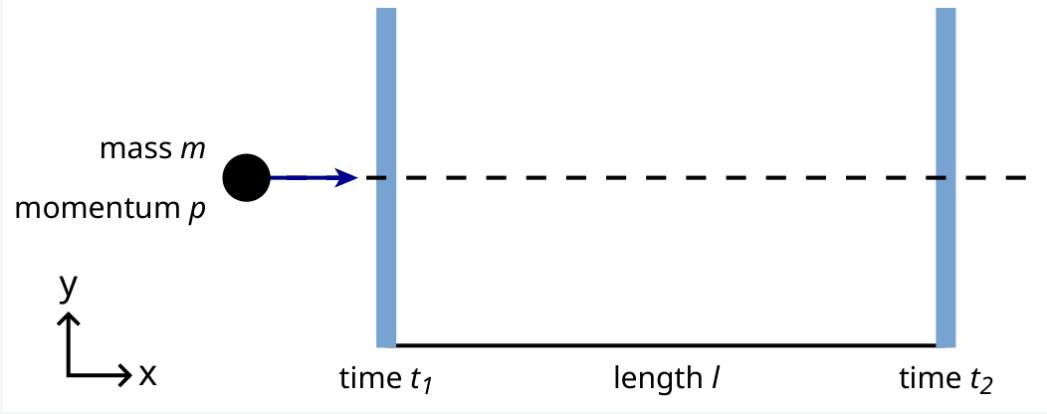
الجزء B. التعرّف على الجسيمات (4 نقاط)

زمن الطيران:

من المهم التعرّف على الجسيمات عالية الطاقة التي تتولّد في التصادم من أجل تفسير عملية التآثر. وتتمثل طريقة بسيطة في قياس الزمن (t) الذي يحتاج إليه جسيم معلوم الزخم لقطع طول l في كاشف يُسمّى كاشف زمن الطيران (ToF). يورد الجدول 2 جسيمات نموذجية يجري التعرّف عليها في الكاشف، مع كتلتها.

الجسيم	الكتلة $[\text{MeV}/c^2]$
الديوترون	1876
البروتون	938
الكاون المشحون	494
البليون المشحون	140
الإلكترون	0.511

الجدول 2: الجسيمات وكتلتها.



الشكل 2: منظر تخطيطي لكاشف زمن الطيران.

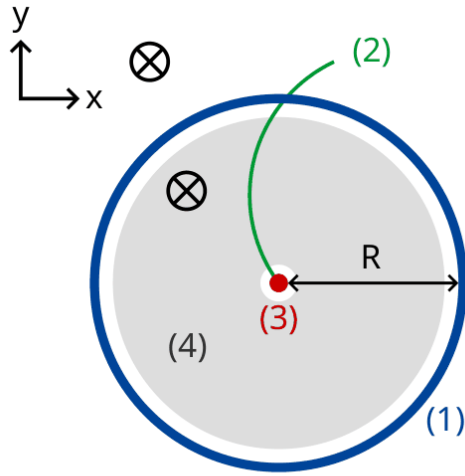
0.8 — B.1 نقطة

عبّر عن كتلة الجسيم m بدلالة الزخم p ، وطول مسار الطيران l ، وزمن الطيران t ، بافتراض أن الجسيمات تحمل الشحنة الأولية e ، وتتحرك بسرعة قريبة من c على مسارات مستقيمة في كاشف ToF، وأنها تتحرك عمودياً على مستويي الكشف (انظر الشكل 2).

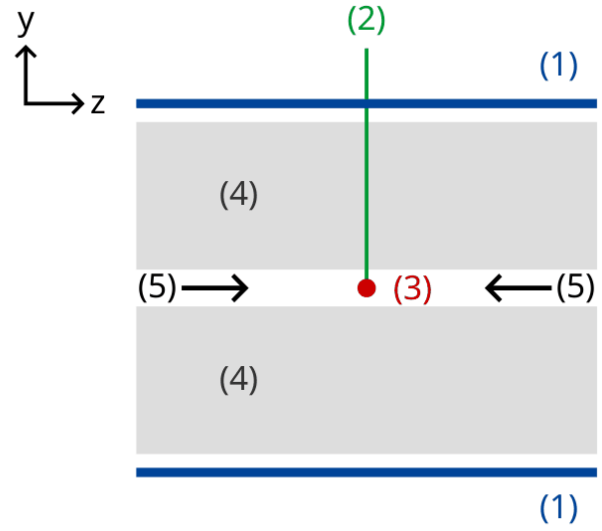
0.7 — B.2 نقطة

احسب أقل طول l لكاشف ToF يتيح التمييز بثقة بين كاون مشحون وبيون مشحون، علماً بأن الزخم المقاس لكل منهما هو $1.00 \text{ GeV}/c$. ولتحقيق فصل جيد، يُشترط أن يكون الفرق بين زمني الطيران أكبر من ثلاثة أمثال الاستبانة الزمنية للكاشف. تبلغ الاستبانة النموذجية لكاشف ToF مقدار 150 ps ($1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$).

فيما يلي، يجري التعرّف على الجسيمات الناتجة في كاشف نموذجي في LHC باستخدام كاشف ذي مرحلتين، يتكون من كاشف تتبع وكاشف ToF. يوضّح الشكل 3 ترتيب التجربة في المستويين المستعرض والطولي بالنسبة إلى حزمتي البروتونات. وكلا الكاشفين أنبوب يحيط بمنطقة التآثر، وتمر الحزمة في وسط الأنبوبين. يقيس كاشف التتبع مسار جسيم مشحون يمر عبر مجال مغناطيسي اتجاهه مواز لحزمتي البروتونات. ويتيح نصف قطر المسار r تحديد الزخم المستعرض p_T للجسيم. ولأن زمن التصادم معلوم، فلا يحتاج كاشف ToF إلا إلى أنبوب واحد لقياس زمن الطيران (الزمن بين التصادم والكشف في أنبوب ToF). يقع أنبوب ToF هذا مباشرةً خارج حجرة التتبع. في هذه المسألة، يمكنك افتراض أن جميع الجسيمات المتولّدة من التصادم تتحرك عمودياً على حزمتي البروتونات، أي إن الجسيمات المتولّدة ليس لها زخم على امتداد اتجاه حزمتي البروتونات.



transverse plane



cross section of the longitudinal view at the center of the tube along the beamline

- (1) - ToF tube
- (2) - track
- (3) - collision point
- (4) - tracking tube
- (5) - proton beams
- ⊗ - magnetic field

الشكل 3: ترتيب تجريبي للتعرف على الجسيمات باستخدام حجرة تتبع وكاشف ToF. وكلا الكاشفين أنبوب يحيط بنقطة التصادم في الوسط. يسارًا: منظر مستعرض عمودي على خط الحزمة. يمينًا: منظر طولي مواز لخط الحزمة. يتحرك الجسيم عموديًا على خط الحزمة.

1.7 — B.3 نقطة

عبر عن كتلة الجسيم بدلالة كثافة الفيض المغناطيسي B ، ونصف قطر أنبوب ToF وهو R ، والثوابت الأساسية، والكميات المقاسة: نصف قطر المسار r وزمن الطيران t .

رصدنا أربعة جسيمات ونريد التعرف عليها. كانت كثافة الفيض المغناطيسي في كاشف التتبع $B = 0.500 \text{ T}$. وكان نصف قطر أنبوب ToF وهو R يساوي 3.70 m . فيما يلي القياسات ($1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$):

الجسيم	نصف قطر المسار r [m]	زمن الطيران t [ns]
A	5.10	20
B	2.94	14
C	6.06	18
D	2.31	25

0.8 — B.4 نقطة

تعرف على الجسيمات الأربعة بحساب كتلتها.

ورقة المعطيات العامة

c	$= 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	سرعة الضوء في الفراغ
μ_0	$= 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$	نفاذية الفراغ (الثابت المغناطيسي)

$= 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$	ε_0	سماحية الفراغ (الثابت الكهربائي)
$= 1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$	e	الشحنة الأولية
$= 9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m_e	كتلة الإلكترون
$= 0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$		
$= 1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$	m_p	كتلة البروتون
$= 938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$		
$= 1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$	m_n	كتلة النيوترون
$= 939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$		
$= 1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27} \text{ kg}$	u	وحدة الكتلة الذرية الموحدة
$= 10\,973\,731.568\,508(65) \text{ m}^{-1}$	R_∞	ثابت ريدبرغ
$= 6.674\,08(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$	G	ثابت الجذب العام
$= 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	g	تسارع الجاذبية (في زيورخ)
$= 6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	h	ثابت بلانك
$= 6.022\,140\,857(74) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	N_A	عدد أفوغادرو
$= 8.314\,4598(48) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	R	ثابت الغاز المولي
$= 1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$	M_u	ثابت الكتلة المولية
$= 1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$	k_B	ثابت بولتزمان
$= 5.670\,367(13) \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$	σ	ثابت ستيفان-بولتزمان

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• **A.1:** للتسريع من السكون،

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{m_p c^2}\right)^{-2}}.$$

• **A.2:**

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{eV}{m c^2}\right)^{-2} \simeq \frac{m^2 c^4}{2e^2 V^2}.$$

للإلكترونات ذات الطاقة 60.0 GeV،

$$\Delta = 3.63 \times 10^{-11}.$$

• **A.3:**

$$B = \frac{2\pi}{ecL} \sqrt{E^2 - m_p^2 c^4} \simeq \frac{2\pi E}{ecL} = 5.50 \text{ T}.$$

• **A.4:**

$$P_{\text{rad}} = C \frac{q^2 a^2}{\varepsilon_0 c^3},$$

حيث لا يستطيع التحليل البُعدي تحديد الثابت اللا بُعدي C .

• **A.5:** باحتساب حزمَتَي البروتونات،

$$P_{\text{tot}} = 5.12 \text{ kW}.$$

• **A.6:**

$$T = \frac{d}{c} \sqrt{1 + \frac{2m_p c^2}{eV}} = 2.18 \times 10^{-7} \text{ s} = 0.218 \mu\text{s}.$$

• **B.1:**

$$m = \frac{p}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{l}\right)^2 - 1}.$$

• **B.2:** طول العتبة هو

$$l_{\text{crit}} = 1.27739 \dots \text{ m}.$$

يتطلب معيار الفصل المذكور، بصيغته الصارمة، أن يكون $l > l_{\text{crit}}$ ، مما يعطي أقل طول عملي يقارب $[1.28 \text{ m}]$.

• **B.3:**

$$m = \frac{eBr}{c} \sqrt{\left[\frac{ct}{2r \arcsin(R/(2r))}\right]^2 - 1}.$$

• **A.4:** بروتون، $m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$ ؛ B: بيون مشحون، $m \approx 0.14 \text{ GeV}/c^2$ ؛ C: بروتون، $m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$ ؛ D: كاون مشحون، $m \approx 0.50 \text{ GeV}/c^2$.

الحل

A.1

لبروتون يُسرَّع من السكون، يعطي انحفاظ الطاقة

$$eV = K = (\gamma - 1)m_p c^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

إذن

$$\gamma = 1 + \frac{eV}{m_p c^2}.$$

بحل المعادلة لإيجاد v ،

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{m_p c^2}\right)^{-2}}.$$

هذا التعبير دقيق بافتراض التسريع من السكون دون فقد للطاقة.

A.2

لجسيم كتلته m ،

$$\Delta = 1 - \frac{v}{c} = 1 - \sqrt{1 - \gamma^{-2}}.$$

عند الطاقات العالية، يكون $\gamma^{-2} \ll 1$. باستخدام التوسع من الرتبة الأولى

$$\sqrt{1 - x} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2),$$

نحصل على

$$\Delta = \frac{1}{2\gamma^2} + O(\gamma^{-4}).$$

وبدلالة جهد التسريع،

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{eV}{mc^2} \right)^{-2}.$$

عندما يكون $eV \gg mc^2$ ، يُختزل هذا التعبير أيضًا إلى

$$\Delta \simeq \frac{m^2 c^4}{2e^2 V^2}.$$

وبصورة مكافئة، باستخدام الطاقة الكلية $E = \gamma mc^2$ ،

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2.$$

بالنسبة إلى الإلكترونات،

$$m_e c^2 = 0.5109989461 \text{ MeV}, \quad E = 60.0 \text{ GeV} = 6.00 \times 10^4 \text{ MeV},$$

ومن ثم

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{0.5109989461}{6.00 \times 10^4} \right)^2 = \boxed{3.63 \times 10^{-11}}.$$

A.3

ليكن نصف قطر المدار الدائري

$$\rho = \frac{L}{2\pi}.$$

تغير القوة المغناطيسية اتجاه الزخم النسبي مع إبقاء مقداره ثابتًا. وللحركة الدائرية المنتظمة،

$$\left| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right| = \frac{pv}{\rho}.$$

بمساواة ذلك بالقوة المغناطيسية،

$$evB = \frac{pv}{\rho},$$

نحصل على

$$B = \frac{p}{e\rho}.$$

العلاقة النسبية بين الطاقة والزخم هي

$$E^2 = p^2 c^2 + m_p^2 c^4,$$

حيث E هي الطاقة الكلية للبروتون. لذلك،

$$B = \frac{2\pi}{ecL} \sqrt{E^2 - m_p^2 c^4}.$$

عند $E = 7.00 \text{ TeV}$ ،

$$\frac{m_p c^2}{E} = \frac{938.2720813 \text{ MeV}}{7.00 \times 10^6 \text{ MeV}} \approx 1.34 \times 10^{-4}.$$

إن استبدال pc بـ E لا يحدث إلا تصحيحاً نسبياً مقداره

$$\frac{1}{2} \left(\frac{m_p c^2}{E} \right)^2 \approx 8.98 \times 10^{-9},$$

وهو أدنى بكثير من دقة الطاقة المعطاة. ومن ثم

$$B \simeq \frac{2\pi E}{ecL}.$$

باستخدام $E = 7.00 \times 10^{12} \text{ eV}$ ،

$$B \simeq \frac{2\pi(7.00 \times 10^{12})}{(299792458)(26659)} \text{ T} = \boxed{5.50 \text{ T}}.$$

A.4

نكتب

$$P_{\text{rad}} = C q^\alpha a^\beta c^\delta \varepsilon_0^\eta,$$

حيث C ثابت لبعدي. باستخدام الكتلة والطول والزمن والشحنة أبعاداً أساسية،

$$[P] = ML^2T^{-3}, \quad [q] = Q, \quad [a] = LT^{-2}, \quad [c] = LT^{-1},$$

و

$$[\varepsilon_0] = Q^2 T^2 M^{-1} L^{-3}.$$

بمساواة الأسس نحصل على

$$\begin{aligned} -\eta &= 1, & \alpha + 2\eta &= 0, \\ \beta + \delta - 3\eta &= 2, & -2\beta - \delta + 2\eta &= -3. \end{aligned}$$

إن

$$\eta = -1, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \delta = -3.$$

وبالتالي،

$$P_{\text{rad}} = C \frac{q^2 a^2}{\varepsilon_0 c^3}.$$

يحدّد التحليل البُعدي كيفية الاعتماد على الكميات الفيزيائية، لكنه لا يستطيع تحديد C .

A.5

بإدراج العامل العددي والتصحيح النسبي المحدّدين في المسألة، يشعّ بروتون واحد قدرة مقدّرها

$$P_1 = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi \varepsilon_0 c^3}.$$

للحركة الدائرية،

$$a = \frac{v^2}{\rho} \simeq \frac{c^2}{\rho}, \quad \rho = \frac{L}{2\pi}, \quad \gamma = \frac{E}{m_p c^2}.$$

ومن ثم

$$P_1 \simeq \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0 \rho^2} \left(\frac{E}{m_p c^2} \right)^4.$$

عددياً،

$$\rho = \frac{26659}{2\pi} \text{ m} = 4242.91 \text{ m}, \quad \gamma = \frac{7.00 \times 10^6}{938.2720813} = 7460.52.$$

بالتعويض نحصل على

$$P_1 \simeq 7.93 \times 10^{-12} \text{ W}.$$

توجد حزمتان، تحتوي كل منهما على 2808 عناقيد، وفي كل عنقود 1.15×10^{11} بروتوناً. لذلك يكون العدد الكلي للبروتونات

$$N = 2(2808)(1.15 \times 10^{11}) = 6.4584 \times 10^{14}.$$

بجمع القدرات الإشعاعية الفردية،

$$P_{\text{tot}} = NP_1 \simeq 5.12467 \times 10^3 \text{ W}.$$

لذلك،

$$\boxed{P_{\text{tot}} = 5.12 \text{ kW}.}$$

A.6

مقدار المجال الكهربائي المتجانس هو V/d ، لذا تكون القوة المؤثرة في البروتون ثابتة:

$$F = \frac{eV}{d}.$$

في النسبية، معادلة الحركة هي

$$\frac{dp}{dt} = F.$$

بما أن البروتون يبدأ من السكون،

$$p_f = FT, \quad T = \frac{p_f}{F}.$$

الشغل المبذول على امتداد المسرع هو eV ، مما يعطي طاقة كلية نهائية

$$E_f = m_p c^2 + eV.$$

لذلك،

$$p_f c = \sqrt{E_f^2 - m_p^2 c^4} = \sqrt{(eV)^2 + 2eV m_p c^2}.$$

بدمج هذه التعابير،

$$T = \frac{d}{eVc} \sqrt{(eV)^2 + 2eV m_p c^2},$$

أو

$$\boxed{T = \frac{d}{c} \sqrt{1 + \frac{2m_p c^2}{eV}}}.$$

هنا $eV = 500 \text{ MeV}$. إذن

$$T = \frac{30.0}{299792458} \sqrt{1 + \frac{2(938.2720813)}{500}} \text{ s} = \boxed{2.18 \times 10^{-7} \text{ s}}.$$

إن استخدام قوة ثابتة، بدلاً من تسارع ثابت، يأخذ في الحسبان التغير النسبي في السرعة.

B.1

للمسار المستقيم،

$$v = \frac{l}{t}.$$

يحقق الزخم النسبي العلاقة

$$p = \gamma mv = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

بحل المعادلة لإيجاد m ،

$$m = \frac{p}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = p \sqrt{\frac{t^2}{l^2} - \frac{1}{c^2}}.$$

لذلك،

$$\boxed{m = \frac{p}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{l}\right)^2 - 1}}.$$

هذا التعبير دقيق؛ ولا حاجة إلى أي توسع حول $v = c$.

B.2

بحل نتيجة B.1 لإيجاد زمن الطيران نحصل على

$$t(m) = \frac{l}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2}.$$

عند تساوي الزخم، يصل الكاون الأثقل متأخرًا. ويكون الفرق بين زمنَي وصولهما

$$t_K - t_\pi = \frac{l}{c} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{m_K c}{p}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{m_\pi c}{p}\right)^2} \right].$$

الفصل المطلوب هو

$$t_K - t_\pi > 3(150 \text{ ps}) = 450 \text{ ps}.$$

لذلك يكون طول العتبة

$$l_{\text{crit}} = \frac{3\sigma_t c}{\sqrt{1 + (m_K c/p)^2} - \sqrt{1 + (m_\pi c/p)^2}}, \quad \sigma_t = 150 \text{ ps}.$$

باستخدام $p = 1000 \text{ MeV}/c$

$$l_{\text{crit}} = \frac{(450 \times 10^{-12})(299792458)}{\sqrt{1 + (494/1000)^2} - \sqrt{1 + (140/1000)^2}} \text{ m}.$$

المقام اللابُعدي هو 0.10561117، مما يعطي

$$\boxed{l_{\text{crit}} = 1.27739 \dots \text{ m}.$$

إن يجب أن يتجاوز l هذه العتبة؛ ويلزم طول يقارب $\boxed{1.28 \text{ m}}$. ويُستخدم التعبير النسبي الدقيق لأن كتلة الكاون ليست مهمة مقارنة بـ p/c .

B.3

بما أن الجسم ليس له زخم موازٍ لخط الحزمة، فإن زخمه كله يكون مستعرضًا بالنسبة إلى المجال المغناطيسي. وكما في A.3،

$$p = eBr.$$

لا يبذل المجال المغناطيسي شغلاً، لذا يكون مقدار السرعة ثابتاً على امتداد المسار الدائري.

لتكن θ الزاوية التي يمسيها الجسيم حول مركز مساره قبل أن يصل إلى أنبوب ToF للمرة الأولى. تفصل بين نقطة التصادم ونقطة الكشف مسافة تساوي نصف قطر الأنبوب R . وهاتان النقطتان أيضاً طرفا وتر في دائرة المسار، التي نصف قطرها r . لذلك،

$$R = 2r \sin \frac{\theta}{2}.$$

عند الوصول إلى الأنبوب للمرة الأولى،

$$\theta = 2 \arcsin \frac{R}{2r},$$

ويكون طول مسار الطيران

$$s = r\theta = 2r \arcsin \frac{R}{2r}.$$

يتطلب ذلك $r \geq R/2$ ؛ فالمدار الأصغر لا يصل إلى الأنبوب مطلقاً.

مقدار السرعة هو

$$v = \frac{s}{t}.$$

باستخدام صيغة الكتلة من B.1 مع طول المسار الفعلي s ، إلى جانب $p = eBr$ ،

$$m = \frac{eBr}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{s}\right)^2 - 1}.$$

وبالتالي،

$$m = \frac{eBr}{c} \sqrt{\left[\frac{ct}{2r \arcsin(R/(2r))}\right]^2 - 1}.$$

تُحسب دالة الجيب العكسية بالرايدين.

B.4

لكل جسيم، نستخدم

$$s = 2r \arcsin \frac{3.70 \text{ m}}{2r}, \quad p = e(0.500 \text{ T})r,$$

و

$$m = \frac{p}{c} \sqrt{\left(\frac{ct}{s}\right)^2 - 1}.$$

ينتج تحويل وحدات الزخم مباشرةً من $p = eBr$:

$$p [\text{GeV}/c] = 0.299792458 B [\text{T}] r [\text{m}].$$

بالاحتفاظ بأرقام إضافية لتجنب أخطاء التقريب عند مقارنة الكتل المحسوبة بالجدول 2، نحصل على:

الجسيم	طول المسار s [m]	الزخم p [c/MeV]	الكتلة المحسوبة [c ² /MeV]	هوية الجسيم
A	3.7864	764.47	938.65	بروتون
B	4.0019	440.69	139.32	بيون مشحون
C	3.7600	908.37	935.10	بروتون
D	4.2908	346.26	495.90	كاون مشحون

تتوافق الفروق الصغيرة عن الكتل الواردة في الجدول مع كون قيم القياسات مقربة. وبدقة مناسبة،

$A :$	$m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$	بروتون،
$B :$	$m \approx 0.14 \text{ GeV}/c^2$	بيون مشحون
$C :$	$m \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2$	بروتون،
$D :$	$m \approx 0.50 \text{ GeV}/c^2$	كاون مشحون.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.