

IPhO 2015

理论题与解答 · 印度孟买 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/2015/

题目 1: 来自太阳的粒子

来自太阳表面的光子和来自太阳核心的中微子能够告诉我们太阳的温度，还能证实太阳发光是核反应的结果。

在本题中，取太阳质量为 $M_{\odot} = 2.00 \times 10^{30} \text{ kg}$ ，半径为 $R_{\odot} = 7.00 \times 10^8 \text{ m}$ ，光度（单位时间内辐射的能量）为 $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{26} \text{ W}$ ，日地距离为 $d_{\odot} = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$ 。

提示：

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \int x e^{ax} dx &= \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} + \text{常数} \\ \text{(ii)} \quad \int x^2 e^{ax} dx &= \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax} + \text{常数} \\ \text{(iii)} \quad \int x^3 e^{ax} dx &= \left(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4} \right) e^{ax} + \text{常数} \end{aligned}$$

A 太阳辐射：

部分	问题	分值
A1	假设太阳像理想黑体一样辐射。利用这一点计算太阳表面的温度 T_s 。	0.3

太阳辐射的光谱可以用维恩分布定律很好地近似。因此，单位时间、单位频率间隔内入射到地球上任意表面的太阳能 $u(\nu)$ 为

$$u(\nu) = A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi h}{c^2} \nu^3 \exp(-h\nu/k_B T_s),$$

其中， ν 为频率， A 为垂直于入射辐射方向的表面面积。

现在考虑一个太阳能电池，它由面积为 A 的半导体薄圆片构成，放置方向垂直于太阳光线。

部分	问题	分值
A2	利用维恩近似，用 A 、 $R_{\odot}$ 、 $d_{\odot}$ 、 T_s 以及基本常数 c 、 h 、 k_B 表示入射到太阳能电池表面的太阳辐射总功率 P_{in} 。	0.3
A3	用 A 、 $R_{\odot}$ 、 $d_{\odot}$ 、 T_s 、 ν 以及基本常数 c 、 h 、 k_B 表示单位时间、单位频率间隔内入射到太阳能电池表面的光子数 $n_{\gamma}(\nu)$ 。	0.2

太阳能电池的半导体材料具有能量宽度为 E_g 的“禁带”。我们采用以下模型：每个能量为 $E \geq E_g$ 的光子都会激发一个电子，使其跨越禁带。这个电子贡献的有用输出能量为 E_g ，多余的能量则以热的形式耗散（不转化为有用能量）。

部分	问题	分值
A4	定义 $x_g = h\nu_g/k_B T_s$, 其中 $E_g = h\nu_g$ 。用 x_g 、 A 、 $R_\odot$ 、 $d_\odot$ 、 T_s 以及基本常数 c 、 h 、 k_B 表示电池的有用输出功率 P_{out} 。	1.0
A5	用 x_g 表示该太阳能电池的效率 η 。	0.2
A6	定性画出 η 随 x_g 变化的示意图。应清楚标出 $x_g = 0$ 和 $x_g \rightarrow \infty$ 时的值。 $\eta(x_g)$ 在 $x_g = 0$ 和 $x_g \rightarrow \infty$ 时的斜率是多少？	1.0
A7	设 x_0 为使 η 达到最大值的 x_g 值。求出确定 x_0 的三次方程。估算 x_0 的值，精度要求为 ± 0.25 。由此计算 $\eta(x_0)$ 。	1.0
A8	纯硅的禁带宽度为 $E_g = 1.11 \text{ eV}$ 。利用此值计算硅太阳能电池的效率 η_{Si} 。	0.2

¹ 本题的主要命题人为 Amol Dighe (TIFR)、Anwesh Mazumdar (HBCSE-TIFR) 和 Vijay A. Singh (前科学奥林匹克竞赛全国协调员)。谨向学术委员会、学术发展小组和国际委员会的贡献致谢。

十九世纪末，开尔文和亥姆霍兹 (KH) 提出了一个解释太阳如何发光的假说。他们假定，太阳最初是一个质量为 $M_\odot$ 、密度可忽略不计的巨大物质云，此后一直不断收缩。于是，太阳发光便可归因于这种缓慢收缩所释放的引力势能。

部分	问题	分值
A9	假设太阳内部的物质密度均匀。用 G 、 $M_\odot$ 和 $R_\odot$ 求出太阳目前的总引力势能 Ω 。	0.3
A10	根据 KH 假说，估算太阳可能已经发光的最长时间 τ_{KH} (以年为单位)。假设在此期间太阳的光度始终不变。	0.5

上面算出的 τ_{KH} 与通过陨石研究估算的太阳系年龄不符。这表明太阳的能量来源不可能仅仅是引力。

B 来自太阳的中微子：

1938 年，汉斯·贝特提出，太阳核心中氢聚变为氦的核反应是太阳的能量来源。净核反应为：



此反应产生的“电子中微子” ν_e 可视为无质量粒子。它们逃离太阳，在地球上探测到它们便证实了太阳内部发生核反应。本题中可忽略中微子带走的能量。

部分	问题	分值
B1	计算到达地球的中微子数通量密度 Φ_ν ，单位为 $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$ 。上述反应释放的能量为 $\Delta E = 4.0 \times 10^{-12} \text{ J}$ 。假设太阳辐射的能量完全来自这一反应。	0.6

从太阳核心传播到地球的过程中，一部分电子中微子 ν_e 转化为其他类型的中微子 ν_x 。探测器对 ν_x 的探测效率是对 ν_e 的探测效率的 $1/6$ 。如果没有中微子转化，我们预期每年平均探测到 N_1 个中微子。然而，由于发生转化，实际每年平均探测到的中微子数为 N_2 (包括 ν_e 和 ν_x)。

部分	问题	分值
B2	用 N_1 和 N_2 计算 ν_e 转化为 ν_x 的比例 f 。	0.4

为了探测中微子，人们建造了装满水的大型探测器。虽然中微子与物质的相互作用极为罕见，但它们偶尔会从探测器内的水分子中击出电子。这些高能电子在水中高速运动，并在此过程中发射电磁辐射。只要这种电子的速度大于水中光速（水的折射率为 n ），就会以锥形发射这种称为切伦科夫辐射的辐射。

部分	问题	分值
B3	假设被中微子击出的电子在水中运动时，以每单位时间 α 的恒定速率损失能量。如果该电子发射切伦科夫辐射的时间为 Δt ，用 α 、 Δt 、 n 、 m_e 和 c 确定中微子传递给该电子的能量（ E_{imparted} ）。（假设电子在与中微子相互作用之前处于静止状态。）	2.0

太阳内部 H 聚变为 He 的过程分为若干步骤。其中一个中间步骤会产生 ${}^7\text{Be}$ 原子核（静质量为 m_{Be} ）。随后，它可以吸收一个电子，生成一个 ${}^7\text{Li}$ 原子核（静质量为 $m_{\text{Li}} < m_{\text{Be}}$ ），并发射一个 ν_e 。相应的核反应为：



当一个 Be 原子核（ $m_{\text{Be}} = 11.65 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ）处于静止状态，并吸收一个同样处于静止状态的电子时，所发射中微子的能量为 $E_\nu = 1.44 \times 10^{-13} \text{ J}$ 。然而，由于太阳核心的温度为 T_c ，Be 原子核处于无规则热运动中，因而成为运动的中微子源。由此，发射出的中微子能量会发生涨落，其涨落的均方根（rms）值为 ΔE_{rms} 。

部分	问题	分值
B4	若 $\Delta E_{\text{rms}} = 5.54 \times 10^{-17} \text{ J}$ ，计算 Be 原子核的方均根速率 V_{Be} ，并由此估算 T_c 。（提示： ΔE_{rms} 取决于沿视线方向的速度分量的均方根值。）	2.0

题目译自官方英文原文。

答案

- A1

$$T_s = \left(\frac{L_\odot}{4\pi R_\odot^2 \sigma} \right)^{1/4} \simeq 5.76 \times 10^3 \text{ K}.$$

- A2

$$P_{\text{in}} = \frac{12\pi A R_\odot^2 (k_B T_s)^4}{d_\odot^2 c^2 h^3}.$$

- A3

$$n_\gamma(\nu) = \frac{2\pi A R_\odot^2}{d_\odot^2 c^2} \nu^2 e^{-h\nu/(k_B T_s)}.$$

- A4

$$P_{\text{out}} = \frac{2\pi A R_\odot^2 (k_B T_s)^4}{d_\odot^2 c^2 h^3} x_g (x_g^2 + 2x_g + 2) e^{-x_g}.$$

• A5

$$\eta(x_g) = \frac{x_g(x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g}}{6}.$$

• A6 曲线从原点出发，初始斜率为 $1/3$ ，在 $(2.27, 0.457)$ 附近达到唯一的最大值，随后从上方趋近横轴：

$$\eta(0) = 0, \quad \lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta = 0, \quad \eta'(0) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta' = 0 \quad \text{从负值一侧趋近.}$$

• A7

$$x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0, \quad x_0 \simeq 2.27, \quad \eta(x_0) \simeq 0.457 = 45.7\%.$$

• A8

$$x_{g,\text{Si}} \simeq 2.24, \quad \eta_{\text{Si}} \simeq 0.457 = 45.7\%.$$

• A9

$$\Omega = -\frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}} \simeq -2.29 \times 10^{41} \text{ J}.$$

• A10

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}L_{\odot}} \simeq 1.88 \times 10^7 \text{ years}.$$

• B1

$$\Phi_{\nu} = \frac{2L_{\odot}}{4\pi d_{\odot}^2 \Delta E} \simeq 6.8 \times 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

• B2

$$f = \frac{6}{5} \left(1 - \frac{N_2}{N_1} \right).$$

• B3

$$E_{\text{imparted}} = \alpha \Delta t + m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}} - 1 \right).$$

• B4

$$V_{\text{Be}} = \sqrt{3} c \frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}} \simeq 2.00 \times 10^5 \text{ m s}^{-1},$$

$$T_c = \frac{m_{\text{Be}} c^2}{k_B} \left(\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}} \right)^2 \simeq 1.12 \times 10^7 \text{ K}.$$

解答

数值计算采用以下标准常数

$$\begin{aligned}\sigma &= 5.6704 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}, \\ G &= 6.6743 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \\ k_B &= 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}, \\ c &= 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1},\end{aligned}$$

以及 $1 \text{ eV} = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J}$ 和 $1 \text{ year} = 3.15576 \times 10^7 \text{ s}$ 。

A1

根据斯特藩-玻尔兹曼定律，黑体单位表面积的辐射功率为 σT^4 。太阳的辐射面积为 $4\pi R_\odot^2$ ，因此

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_s^4.$$

所以，

$$T_s = \left[\frac{3.85 \times 10^{26}}{4\pi(7.00 \times 10^8)^2(5.6704 \times 10^{-8})} \right]^{1/4} = \boxed{5.76 \times 10^3 \text{ K}}.$$

A2

总入射功率由对所有频率积分得到：

$$P_{\text{in}} = A \frac{R_\odot^2}{d_\odot^2} \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \nu^3 e^{-h\nu/(k_B T_s)} d\nu.$$

令

$$x = \frac{h\nu}{k_B T_s}, \quad d\nu = \frac{k_B T_s}{h} dx.$$

则

$$P_{\text{in}} = \frac{2\pi A R_\odot^2 (k_B T_s)^4}{d_\odot^2 c^2 h^3} \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx.$$

由题目给出的积分公式可得

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = [-e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)]_0^\infty = 6.$$

因此

$$\boxed{P_{\text{in}} = \frac{12\pi A R_\odot^2 (k_B T_s)^4}{d_\odot^2 c^2 h^3}}.$$

下文的所有效率均使用这一维恩近似下的输入功率。

A3

每个频率为 ν 的光子携带的能量为 $h\nu$ 。将光谱功率除此能量，即得单位频率间隔内的光子到达率：

$$n_\gamma(\nu) = \frac{u(\nu)}{h\nu}.$$

所以

$$\boxed{n_\gamma(\nu) = \frac{2\pi A R_\odot^2}{d_\odot^2 c^2} \nu^2 e^{-h\nu/(k_B T_s)}}.$$

其单位为每秒每赫兹的光子数。

A4

只有 $\nu \geq \nu_g$ 的光子才有贡献，每个光子贡献的有用能量为 E_g 。因此，

$$P_{\text{out}} = E_g \int_{\nu_g}^{\infty} n_{\gamma}(\nu) d\nu.$$

利用 $E_g = x_g k_B T_s$ 及 A2 中的变量代换，

$$P_{\text{out}} = \frac{2\pi A R_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3} x_g \int_{x_g}^{\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

又有

$$\int_{x_g}^{\infty} x^2 e^{-x} dx = [-(x^2 + 2x + 2)e^{-x}]_{x_g}^{\infty} = (x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g}.$$

所以，

$$P_{\text{out}} = \frac{2\pi A R_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3} x_g (x_g^2 + 2x_g + 2) e^{-x_g}.$$

A5

效率等于有用输出功率与入射功率之比：

$$\eta = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}.$$

约去共同的有量纲因子和几何因子，得到

$$\eta(x_g) = \frac{x_g(x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g}}{6}, \quad x_g \geq 0.$$

A6

当禁带宽度为零时，

$$\eta(0) = 0.$$

此时光子虽然能够激发电子，但每个电子提供的有用能量为零。

当 x_g 很大时，

$$\eta(x_g) \sim \frac{x_g^3 e^{-x_g}}{6},$$

因此

$$\lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta(x_g) = 0.$$

能量超过禁带宽度的光子数按指数规律变得极小，使有用输出趋于零。

求导得

$$\eta'(x_g) = \frac{e^{-x_g}}{6} (-x_g^3 + x_g^2 + 2x_g + 2).$$

因此

$$\eta'(0) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta'(x_g) = 0 \text{ 从负值一侧趋近}.$$

示意曲线从原点出发，初始切线为 $\eta = x_g/3$ ，上升至 $x_g = 2.27$ 附近的唯一最大值，随后下降，趋向水平渐近线 $\eta = 0$ ，且始终为正。为了进一步确定曲线形状，求得

$$\eta''(x_g) = \frac{e^{-x_g}}{6} x_g^2 (x_g - 4),$$

因此，曲线在 $0 < x_g < 4$ 时向下凹，在 $x_g > 4$ 时向上凹。

一些代表性点如下：

x_g	$\eta(x_g)$
0	0
1	0.307
2	0.451
2.27	0.457
4	0.317
6	0.124
10	0.00923
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow 0$

A7

在最大值处， $\eta'(x_0) = 0$ 。由于指数因子始终不为零，

$$-x_0^3 + x_0^2 + 2x_0 + 2 = 0,$$

即

$$x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0.$$

对于 $x_0 > 0$ ，此式等价于

$$x_0 = 1 + \frac{2}{x_0} + \frac{2}{x_0^2}.$$

左端随 x_0 严格递增，右端则严格递减。因此，正半轴上只有一个驻点。结合 A6 中的端点行为，可知该点对应全局最大值。

令 $F(x) = x^3 - x^2 - 2x - 2$ 。则

$$F(2) = -2, \quad F(2.5) = 2.375.$$

因此 $2 < x_0 < 2.5$ ，这已给出 $x_0 = 2.25 \pm 0.25$ 。进一步细化可得

$$x_0 \simeq 2.27.$$

代入效率表达式，

$$\eta(x_0) = \frac{x_0(x_0^2 + 2x_0 + 2)e^{-x_0}}{6} \simeq 0.45703.$$

所以

$$\eta_{\max} \simeq 45.7\%.$$

A8

在 A1 求得的表面温度下,

$$k_B T_s \simeq 0.4966 \text{ eV}.$$

对于硅,

$$x_{g,\text{Si}} = \frac{E_g}{k_B T_s} = \frac{1.11}{0.4966} \simeq 2.235.$$

所以,

$$\eta_{\text{Si}} = \frac{2.235 (2.235^2 + 2(2.235) + 2) e^{-2.235}}{6} \simeq 0.45694.$$

因此

$$\boxed{\eta_{\text{Si}} \simeq 45.7\%}.$$

这一数值非常接近最大效率, 因为硅的禁带宽度接近最优禁带宽度 $x_0 k_B T_s \simeq 1.13 \text{ eV}$ 。

A9

将薄球壳从无穷远处逐层移来, 构成均匀球体。在半径为 r 处, 已经聚集的质量为

$$M(r) = M_{\odot} \frac{r^3}{R_{\odot}^3},$$

球壳的质量为

$$dM = \frac{3M_{\odot} r^2}{R_{\odot}^3} dr.$$

根据球壳定理, 增加的势能为

$$d\Omega = -\frac{GM(r) dM}{r}.$$

所以,

$$\Omega = -\frac{3GM_{\odot}^2}{R_{\odot}^6} \int_0^{R_{\odot}} r^4 dr = -\frac{3GM_{\odot}^2}{R_{\odot}^6} \frac{R_{\odot}^5}{5}.$$

于是

$$\boxed{\Omega = -\frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}}} \simeq -2.29 \times 10^{41} \text{ J}.$$

负号对应于将各部分相距无穷远时的势能取为零。

A10

最初极为弥散的物质云, 其引力势能近似为零。因此, 它收缩时释放的能量至多为

$$E_{\text{available}} = -\Omega = \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}}.$$

若假设释放的能量全部以辐射形式发出, 即可得到最长的可能发光时间。在光度恒定时,

$$L_{\odot} \tau_{\text{KH}} = \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}},$$

因此

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}L_{\odot}}.$$

数值上,

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{2.288 \times 10^{41}}{3.85 \times 10^{26}} \simeq 5.94 \times 10^{14} \text{ s} = \boxed{1.88 \times 10^7 \text{ years}}.$$

释放的能量中, 任何以内能形式保留下来的部分都会缩短引力收缩能够维持发光的时间, 因此这是一个上限。

B1

忽略中微子带走的能量, 每秒发生的聚变反应数为

$$\dot{N}_{\text{reaction}} = \frac{L_{\odot}}{\Delta E}.$$

每次反应产生两个中微子:

$$\dot{N}_{\nu} = \frac{2L_{\odot}}{\Delta E}.$$

对于球对称发射, 这些中微子在地球所在距离处穿过面积为 $4\pi d_{\odot}^2$ 的球面。因此

$$\Phi_{\nu} = \frac{2L_{\odot}}{4\pi d_{\odot}^2 \Delta E}.$$

代入可得

$$\Phi_{\nu} = \frac{2(3.85 \times 10^{26})}{4\pi(1.50 \times 10^{11})^2(4.0 \times 10^{-12})} = \boxed{6.8 \times 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}}.$$

B2

转化之后, 比例为 $1 - f$ 的部分仍为电子中微子, 每年贡献 $(1 - f)N_1$ 次探测计数。发生转化的部分贡献 $fN_1/6$ 次计数, 因为其探测效率仅为原来的六分之一。

因此,

$$N_2 = (1 - f)N_1 + \frac{fN_1}{6} = N_1 \left(1 - \frac{5f}{6}\right).$$

解得

$$f = \frac{6}{5} \left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right).$$

物理上允许的范围 $0 \leq f \leq 1$ 对应于 $N_1/6 \leq N_2 \leq N_1$ 。

B3

当电子减速至水中光速时, 切伦科夫辐射停止:

$$v_{\text{th}} = \frac{c}{n}.$$

此时电子的动能需用相对论表达式计算:

$$K_{\text{th}} = (\gamma_{\text{th}} - 1)m_e c^2, \quad \gamma_{\text{th}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\text{th}}^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}}.$$

在发射辐射的时间 Δt 内，电子损失的能量为 $\alpha\Delta t$ 。因此，电子刚与中微子相互作用后的初始动能为

$$K_i = K_{\text{th}} + \alpha\Delta t.$$

由于电子在相互作用之前处于静止状态，中微子传递给它的能量等于 K_i 。所以

$$E_{\text{imparted}} = \alpha\Delta t + m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}} - 1 \right).$$

第二项不可缺少：切伦科夫辐射停止时，电子仍具有动能。

B4

采用题目给定的模型，即能量展宽源于作为中微子源的 Be 原子核的热运动。设 $v_{\parallel}$ 为源朝向地球的速度分量。

对于无质量中微子，在源的静止参考系中，其动量为 $p_{\nu} = E_{\nu}/c$ 。对非相对论的源速度保留至一阶，能量的洛伦兹变换给出

$$E_{\text{obs}} \simeq E_{\nu} + v_{\parallel} \frac{E_{\nu}}{c}.$$

因此，多普勒能量偏移为

$$\delta E \simeq E_{\nu} \frac{v_{\parallel}}{c}.$$

热运动是各向同性的，因此

$$\langle v_{\parallel} \rangle = 0, \quad \langle v_{\parallel}^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3} = \frac{V_{\text{Be}}^2}{3}.$$

取能量偏移的均方根，得到

$$\Delta E_{\text{rms}} = \frac{E_{\nu}}{c} \sqrt{\langle v_{\parallel}^2 \rangle} = \frac{E_{\nu} V_{\text{Be}}}{\sqrt{3} c}.$$

所以，

$$V_{\text{Be}} = \sqrt{3} c \frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}}.$$

数值上，

$$\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}} = \frac{5.54 \times 10^{-17}}{1.44 \times 10^{-13}} = 3.847 \times 10^{-4},$$

由此可得

$$V_{\text{Be}} \simeq 2.00 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}.$$

比值 $V_{\text{Be}}/c \simeq 6.66 \times 10^{-4}$ 证实了非相对论近似的有效性。

根据三个平动自由度的能量均分定理，

$$\frac{1}{2} m_{\text{Be}} V_{\text{Be}}^2 = \frac{3}{2} k_B T_c.$$

因此

$$T_c = \frac{m_{\text{Be}} V_{\text{Be}}^2}{3k_B} = \frac{m_{\text{Be}} c^2}{k_B} \left(\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_\nu} \right)^2.$$

代入数据,

$$T_c = \frac{(11.65 \times 10^{-27})(2.9979 \times 10^8)^2}{1.380649 \times 10^{-23}} \left(\frac{5.54 \times 10^{-17}}{1.44 \times 10^{-13}} \right)^2,$$

得到

$$T_c \simeq 1.12 \times 10^7 \text{ K}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 2：极值原理

A 力学中的极值原理

考虑图 1 所示的水平无摩擦 $x - y$ 平面。满足方程 $x = x_1$ 的直线 AB 将其分为 I 和 II 两个区域。质量为 m 的质点在区域 I 中的势能为 $V = 0$ ，在区域 II 中的势能为 $V = V_0$ 。质点从原点 O 出发，以速率 v_1 沿与 x 轴成 θ_1 角的直线运动。它到达区域 II 中的 P 点时，以速率 v_2 沿与 x 轴成 θ_2 角的直线运动。在整个 T-2 题（所有部分）中，忽略重力和相对论效应。

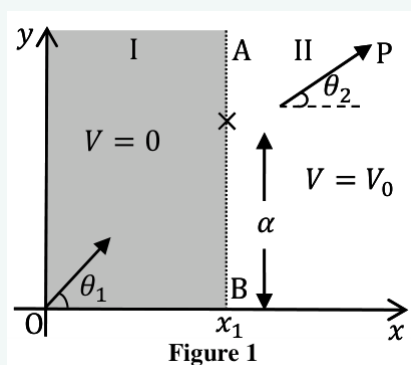


图 1

A1	用 m 、 v_1 和 V_0 表示 v_2 。	0.2
A2	用 v_1 、 θ_1 和 θ_2 表示 v_2 。	0.3

我们定义一个称为作用量的物理量 $A = m \int v(s) ds$ ，其中， ds 是沿质量为 m 、以速率 $v(s)$ 运动的质点轨迹的无穷小长度。积分沿路径进行。例如，对于以恒定速率 v 沿半径为 R 的圆周运动的质点，转动一周的作用量 A 为 $2\pi m R v$ 。对于能量 E 保持不变的质点，可以证明，在连接两个固定点的所有可能轨迹中，实际轨迹使上述定义的 A 取极值（极小值或极大值）。这一原理在历史上被称为最小作用量原理（PLA）。

A3	根据 PLA，在势能恒定的区域中，质点在两个固定点之间运动的轨迹是一条直线。设图 1 中两个固定点 O 和 P 的坐标分别为 $(0,0)$ 和 (x_0, y_0) ，质点从区域 I 进入区域 II 时经过的边界点坐标为 (x_1, α) 。注意， x_1 固定，作用量仅取决于坐标 α 。写出作用量 $A(\alpha)$ 的表达式。利用 PLA 求出 v_1/v_2 与这些坐标之间的关系。	1.0
----	--	-----

B 光学中的极值原理

一条光线从介质 I 进入介质 II，两种介质的折射率分别为 n_1 和 n_2 。两种介质由一条平行于 x 轴的直线分隔。光线在介质 I 中与 y 轴成 i_1 角，在介质 II 中与 y 轴成 i_2 角（见图 2）。为求出光线的轨迹，我们采用另一种极值（极小值或极大值）原理，即费马最短时间原理。

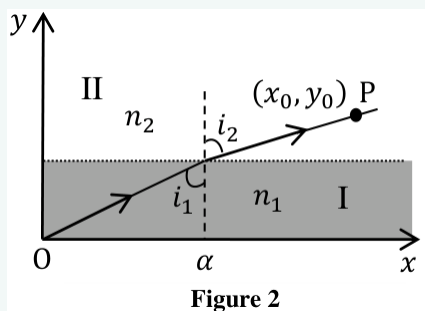


图 2

B1	该原理指出，光线在两个固定点之间沿着使传播时间取极值的路径传播。根据费马原理，推导 $\sin i_1$ 与 $\sin i_2$ 之间的关系。	0.5
----	--	-----

图 3 示意了一束水平入射到糖溶液中的激光的传播路径，其中糖的浓度随高度增加而减小。因此，溶液的折射率也随高度增加而减小。

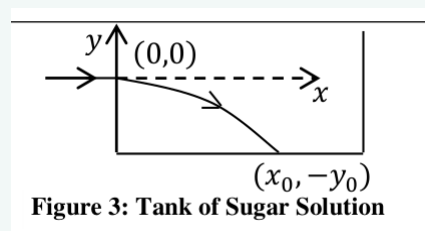


图 3：糖溶液槽

B2	假设折射率 $n(y)$ 仅取决于 y 。利用 B1 中得到的方程，用 $y = 0$ 处的折射率 n_0 和 $n(y)$ 表示光束路径的斜率 dy/dx 。	1.5
B3	如图 3 所示，激光束从原点 $(0, 0)$ 沿水平方向射入糖溶液，入射点距槽底的高度为 y_0 。取 $n(y) = n_0 - ky$ ，其中 n_0 和 k 为正常量。对于激光束的实际轨迹，求出用 y 和相关物理量表示 x 的表达式。	1.2

¹ Manoj Harbola (IIT-Kanpur) 和 Vijay A. Singh (前科学奥林匹克竞赛全国协调员) 是本题的主要命题人。谨向学术委员会、学术发展小组和国际委员会所作的贡献表示感谢。

	可以使用： $\int \sec \theta d\theta = \ln(\sec \theta + \tan \theta) + \text{常数}$ ，其中 $\sec \theta = 1/\cos \theta$ ，或 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \text{常数}$	
B4	求光束与槽底相交处的 x_0 值。取 $y_0 = 10.0 \text{ cm}$ 、 $n_0 = 1.50$ 、 $k = 0.050 \text{ cm}^{-1}$ ($1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$)。	0.8

C 极值原理与物质的波动性

现在，我们探究 PLA 与运动粒子的波动性之间的联系。为此，假设粒子从 O 到 P 可以经过所有可能的轨迹，并依据德布罗意波的相长干涉来寻找一条轨迹。

C1	当粒子沿轨迹移动无穷小距离 Δs 时，写出其德布罗意波的相位变化 $\Delta\varphi$ 与作用量变化 ΔA 及普朗克常量之间的关系。	0.6
C2	回顾 A 部分中粒子从 O 运动到 P 的问题（见图 4）。在两个区域的边界 AB 处放置一块不透明隔板。AB 上有一个宽度为 d 的小孔 CD，满足 $d \ll (x_0 - x_1)$ 且 $d \ll x_1$ 。 考虑两条位于小孔两端的路径 OCP 和 ODP，其中 OCP 位于 A 部分讨论的经典轨迹上。求两条路径之间的相位差 $\Delta\varphi_{CD}$ ，保留至一阶。	1.2

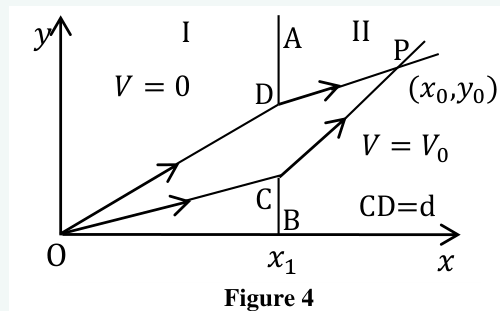


图 4

D 物质波干涉

考虑位于 O 点的电子枪，它将一束准直电子束射向位于 $x = x_1$ 处的不透明隔板 A_1B_1 上 F 点处的窄缝，且 OFP 为一条直线。P 是位于 $x = x_0$ 处的屏幕上的一点（见图 5）。区域 I 中的速率为 $v_1 = 2.0000 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$ ，且 $\theta = 10.0000^\circ$ 。区域 II 中的电势使电子的速率为 $v_2 = 1.9900 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$ 。距离 $x_0 - x_1$ 为 250.00 mm ($1\text{mm} = 10^{-3}\text{m}$)。忽略电子之间的相互作用。

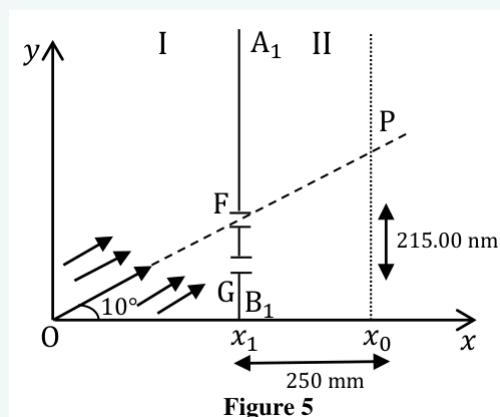


图 5

D1	若 O 点处的电子是从静止开始加速的，计算加速电压 U_1 。	0.3
D2	在隔板 A_1B_1 上，在窄缝 F 下方 215.00 nm ($1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$) 处开出另一条相同的窄缝 G（图 5）。若通过窄缝 F 和 G 到达 P 点的德布罗意波之间的相位差为 $2\pi\beta$ ，计算 β 。	0.8
D3	屏幕上预计探测不到电子（探测概率为零）的位置与 P 点之间的最小距离 Δy 是多少？[注意：近似式 $\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \sin\theta + \Delta\theta \cos\theta$ 可能有用。]	1.2
D4	电子束具有 $500\text{nm} \times 500\text{nm}$ 的正方形横截面，装置长 2 m。若要使装置内在任意时刻平均至少有一个电子，最小通量密度 $I_{\min}$ （单位时间内通过垂直于束流方向的单位面积的电子数）应为多少？	0.4

答案

- **A1:** $v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2V_0}{m}}$ 。
- **A2:** $v_2 = v_1 \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$ 。
- **A3:**

$$A(\alpha) = mv_1 \sqrt{x_1^2 + \alpha^2} + mv_2 \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2},$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(y_0 - \alpha) \sqrt{x_1^2 + \alpha^2}}{\alpha \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}}.$$

- **B1:** $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ 。
- **B2:** $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{n(y)^2}{n_0^2} - 1}$ 。
- **B3:**

$$x(y) = \frac{n_0}{k} \ln \left[\frac{n_0 - ky + \sqrt{(n_0 - ky)^2 - n_0^2}}{n_0} \right].$$

等价地, $y(x) = \frac{n_0}{k} \left[1 - \cosh \left(\frac{kx}{n_0} \right) \right]$ 。

- **B4:** $x_0 = 23.86 \dots \text{ cm} \approx 24 \text{ cm}$ 。
- **C1:** $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{h} \Delta A = \frac{\Delta A}{\hbar}$ 。
- **C2:** 保留至 d 的一阶时, $\Delta\varphi_{CD} = 0$; 最低阶修正为二次项。
- **D1:** $U_1 \approx 1.14 \times 10^3 \text{ V}$ 。
- **D2:** $\beta = \frac{m_e d(v_1 - v_2) \sin \theta}{h} \approx 5.13$ 。
- **D3:** $\Delta y \approx 1.6 \times 10^{-5} \text{ m} = 16 \text{ } \mu\text{m}$, 位于 **P** 下方。
- **D4:** $I_{\min} \approx 4 \times 10^{19} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ 。

解答

在有关电子的数值计算中, 使用

$m_e = 9.1093837 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$, $h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J s}$,
其中 e 为电子电荷量的大小。

A1

势能不随时间变化, 因此机械能守恒:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + V_0.$$

因此,

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2V_0}{m}}.$$

题目假设粒子能够透射进入区域 II。

A2

势能仅取决于 x , 因此力没有 y 分量。所以, 平行于边界的动量分量守恒:

$$mv_1 \sin \theta_1 = mv_2 \sin \theta_2.$$

于是,

$$v_2 = v_1 \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}.$$

A3

设穿过边界的点为 $Q = (x_1, \alpha)$ 。两段直线的长度为

$$L_1 = \sqrt{x_1^2 + \alpha^2}, \quad L_2 = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}.$$

总能量固定时, 两个区域中的速率各自固定。因此

$$A(\alpha) = m(v_1 L_1 + v_2 L_2).$$

实际轨迹满足

$$\frac{dA}{d\alpha} = m \left[v_1 \frac{\alpha}{L_1} - v_2 \frac{y_0 - \alpha}{L_2} \right] = 0.$$

因此,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(y_0 - \alpha)L_1}{\alpha L_2} = \frac{(y_0 - \alpha)\sqrt{x_1^2 + \alpha^2}}{\alpha\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}}.$$

由于 $\alpha/L_1 = \sin \theta_1$ 且 $(y_0 - \alpha)/L_2 = \sin \theta_2$, 这就再次得到了 A2 的结果。此外,

$$\frac{d^2 A}{d\alpha^2} = m \left[\frac{v_1 x_1^2}{L_1^3} + \frac{v_2 (x_0 - x_1)^2}{L_2^3} \right] > 0,$$

因此, 这一驻定作用量是极小值。

B1

将水平界面写为 $y = b$, 设光线在 (α, b) 处穿过界面。光在介质 j 中的速率为 c/n_j 。因此, 从 O 到 P 的传播时间为

$$T(\alpha) = \frac{n_1}{c} \sqrt{\alpha^2 + b^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - b)^2}.$$

费马原理要求 $dT/d\alpha = 0$:

$$n_1 \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} = n_2 \frac{x_0 - \alpha}{\sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - b)^2}}.$$

由于角度是相对于界面法线测量的, 这两个几何比值分别为 $\sin i_1$ 和 $\sin i_2$ 。于是

$$\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}, \quad \boxed{\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1}}.$$

B2

将液体视为一系列水平薄层。在相邻薄层之间应用 B1 的结果可得

$$n(y) \sin i(y) = \text{常数}.$$

初始光线沿水平方向，因此 $i(0) = 90^\circ$ ，从而

$$n(y) \sin i(y) = n_0.$$

对于沿 x 增大方向传播的光线，

$$\sin i = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}.$$

因此，

$$\frac{n(y)}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} = n_0,$$

进而

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n(y)^2}{n_0^2} - 1.$$

光线向折射率较大的方向弯曲，即向下弯曲。选取负斜率，得到

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{n(y)^2}{n_0^2} - 1}}.$$

B3

代入 $n(y) = n_0 - ky$:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{n_0}{\sqrt{(n_0 - ky)^2 - n_0^2}}.$$

从入射点 $(0, 0)$ 开始积分，

$$x = -n_0 \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{(n_0 - k\eta)^2 - n_0^2}}.$$

令 $u = (n_0 - k\eta)/n_0$ ，则上式变为

$$x = \frac{n_0}{k} \int_1^{(n_0 - ky)/n_0} \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}.$$

利用题目给出的积分公式，

$$\boxed{x(y) = \frac{n_0}{k} \ln \left[\frac{n_0 - ky + \sqrt{(n_0 - ky)^2 - n_0^2}}{n_0} \right]}.$$

这是满足 $x \geq 0$ 且 $-y_0 \leq y \leq 0$ 的分支。

等价地,

$$\frac{kx}{n_0} = \operatorname{arcosh}\left(1 - \frac{ky}{n_0}\right),$$

所以

$$y(x) = \frac{n_0}{k} \left[1 - \cosh\left(\frac{kx}{n_0}\right) \right].$$

该曲线经过原点, 在原点处的切线水平, 并且向下弯曲的程度逐渐增大。

B4

在槽底, $y = -y_0$ 。因此,

$$x_0 = \frac{n_0}{k} \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{ky_0}{n_0}\right).$$

统一使用厘米为长度单位,

$$\frac{n_0}{k} = 30.0 \text{ cm}, \quad 1 + \frac{ky_0}{n_0} = 1 + \frac{0.050(10.0)}{1.50} = \frac{4}{3}.$$

于是

$$x_0 = 30.0 \ln\left(\frac{4 + \sqrt{7}}{3}\right) \text{ cm} = 23.86096 \dots \text{ cm}.$$

因此

$$x_0 \approx 24 \text{ cm} = 0.24 \text{ m}.$$

C1

德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}.$$

经过无穷小距离所积累的空间相位为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = \frac{2\pi}{h} mv \Delta s.$$

由于 $\Delta A = mv \Delta s$,

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{h} \Delta A = \frac{\Delta A}{\hbar}.$$

对于能量相同的定态波, 在同一观测时刻比较不同路径时, 共同的时间相位相互抵消。

C2

设 C 的坐标为 (x_1, α) , 则 D 的坐标为 $(x_1, \alpha + d)$ 。保留至一阶,

$$OD - OC = d \sin \theta_1 + O(d^2),$$

而

$$DP - CP = -d \sin \theta_2 + O(d^2).$$

因此,

$$A_{ODP} - A_{OCP} = md(v_1 \sin \theta_1 - v_2 \sin \theta_2) + O(d^2).$$

由于 OCP 是经典轨迹, 由 A2 得

$$v_1 \sin \theta_1 = v_2 \sin \theta_2.$$

利用 C1,

$$\Delta\varphi_{CD} = \frac{2\pi md}{h}(v_1 \sin \theta_1 - v_2 \sin \theta_2) + O(d^2).$$

于是

$$\Delta\varphi_{CD} = 0 \quad \text{取一阶近似, 展开变量为 } d.$$

相位差的二阶项一般不为零。作用量的驻定性使相邻路径在一阶近似下具有相同的相位。

D1

电子从静止开始经过大小为 U_1 的电势差加速, 满足

$$eU_1 = \frac{1}{2}m_e v_1^2.$$

因此

$$U_1 = \frac{m_e v_1^2}{2e} = 1137.126 \dots \text{ V},$$

即

$$U_1 \approx 1.14 \times 10^3 \text{ V}.$$

D2

令

$$d = 215.00 \times 10^{-9} \text{ m}, \quad L = x_0 - x_1 = 0.25000 \text{ m}.$$

将入射准直电子束视为相干平面波, 并使用远场路径长度差, 保留至缝间距的一阶。

由于 F 位于 G 上方, 入射相位差为

$$\varphi_F^{\text{in}} - \varphi_G^{\text{in}} = \frac{m_e v_1}{\hbar} d \sin \theta.$$

在位于 OF 直线延长线上的 P 点,

$$FP - GP \simeq -d \sin \theta.$$

因此, 在区域 II 中的传播对相位差的贡献为

$$-\frac{m_e v_2}{\hbar} d \sin \theta.$$

取总相位差为经 F 的相位减去经 G 的相位,

$$2\pi\beta = \frac{m_e d}{\hbar}(v_1 - v_2) \sin \theta.$$

于是

$$\beta = \frac{m_e d(v_1 - v_2) \sin \theta}{h}.$$

数值上,

$$\beta = 5.132650 \dots, \quad \boxed{\beta \approx 5.13}.$$

这是以周期为单位、未经取模的相位差；对一个周期取模后为 $0.132650 \dots$ 。

D3

对于振幅相等的相同双缝，当相位差为 π 的奇数倍，即半整数个周期时，发生相消干涉。

设朝向屏幕上邻近点的出射方向为 $\theta + \delta\theta$ 。入射相位差保持不变，而传播相位发生变化。以周期为单位的相位差变为

$$b(\delta\theta) = \frac{m_e d}{h} [v_1 \sin \theta - v_2 \sin(\theta + \delta\theta)].$$

利用给定的小角度展开式，

$$b(\delta\theta) \simeq \beta - \frac{m_e v_2 d}{h} \cos \theta \delta\theta.$$

相邻的半整数为 4.5 和 5.5。它们与 β 的距离为

$$\beta - 4.5 = 0.632650 \dots, \quad 5.5 - \beta = 0.367350 \dots$$

因此，最近的极小值对应于 $b = 5.5$ ，从而

$$\delta\theta = -\frac{h(5.5 - \beta)}{m_e v_2 d \cos \theta}.$$

负号表示该极小值位于 P 下方。

在竖直屏幕上的有符号位移为

$$\delta y = L [\tan(\theta + \delta\theta) - \tan \theta] \simeq \frac{L}{\cos^2 \theta} \delta\theta.$$

因此，其大小为

$$\boxed{\Delta y = \frac{hL(5.5 - \beta)}{m_e v_2 d \cos^3 \theta}}.$$

数值上，

$$\frac{hL}{m_e v_2 d \cos^3 \theta} = 44.5001 \dots \mu\text{m},$$

因此，最低阶结果为

$$\Delta y = (44.5001 \dots)(0.3673499 \dots) \mu\text{m} = 16.3471 \dots \mu\text{m}.$$

因此，

$$\boxed{\Delta y \approx 16 \mu\text{m}, \quad \text{位于 P 下方}}.$$

小角度近似和远场近似在此处适用： $|\delta\theta| \simeq 6.34 \times 10^{-5} \text{ rad}$ ，且 $d/L = 8.60 \times 10^{-7}$ 。上述结果忽略了路径长度的高阶修正。

D4

垂直于电子束方向的横截面积为

$$S = (500 \times 10^{-9})^2 = 2.50 \times 10^{-13} \text{ m}^2.$$

对于 2 m 的飞行距离，取 $v \simeq 2.0 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$ ，通过装置所需的时间为

$$\tau \simeq \frac{2}{2.0 \times 10^7} = 1.0 \times 10^{-7} \text{ s.}$$

若通量密度为 I ，则单位时间内进入的电子数为 IS 。在稳定运行状态下，装置内的平均电子数为

$$\bar{N} = IS\tau.$$

最小通量对应于 $\bar{N} = 1$:

$$I_{\min} = \frac{1}{S\tau}.$$

因此,

$$I_{\min} \simeq \frac{1}{(2.50 \times 10^{-13})(1.0 \times 10^{-7})} = 4 \times 10^{19} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

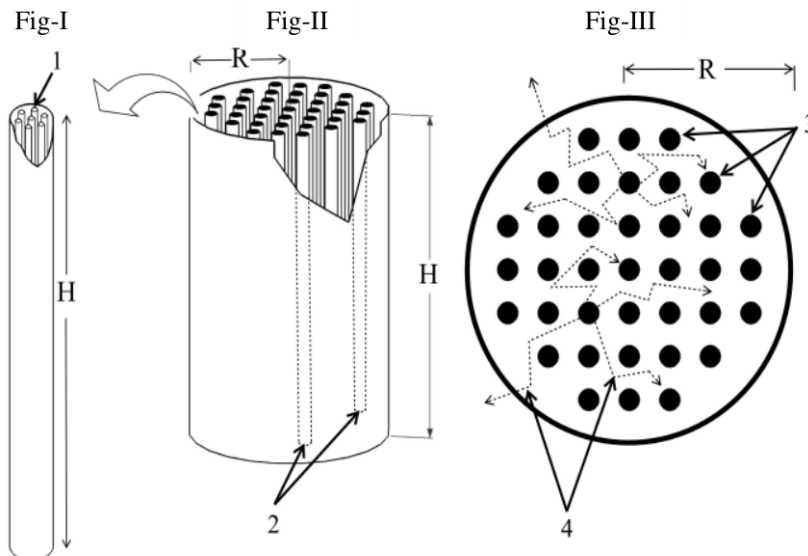
更精确地， $\tau = \ell_1/v_1 + \ell_2/v_2$ ，其中 $\ell_1 + \ell_2$ 为飞行距离。两个速率仅相差 0.5%，因此用同一个近似速率替代它们，不会影响所给结果的精度。

解答已与官方解答核对。

题目 3：核反应堆的设计

铀在自然界中以 UO_2 的形式存在，其中只有 0.720% 的铀原子是 ^{235}U 。 ^{235}U 很容易发生中子诱发的裂变，并释放出 2-3 个具有高动能的裂变中子。如果诱发裂变的中子动能较低，裂变概率就会增大。因此，降低裂变中子的动能，就可以在其他 ^{235}U 原子核中引发链式裂变反应。这构成了发电用核反应堆 (NR) 的基础。

典型的 NR 由一个高为 H 、半径为 R 的圆柱形容器组成，容器内充满称为慢化剂的材料。称为燃料通道的圆柱形管沿轴向放置，并排列成正方形点阵；每根管内都装有一束由天然固态 UO_2 制成、高为 H 的圆柱形燃料棒。从一个燃料通道向外运动的裂变中子与慢化剂碰撞，损失能量，到达周围的燃料通道时，其能量已足够低，能够引发裂变 (图 I-III)。燃料棒中裂变产生的热量传递给沿棒长方向流动的冷却剂。本题将研究以下各部分所涉及的一些物理原理：(A) 燃料棒、(B) 慢化剂和 (C) 圆柱形 NR。



Schematic sketch of the Nuclear Reactor (NR)

Fig-I: Enlarged view of a fuel channel (1-Fuel Pins)

Fig-II: A view of the NR (2-Fuel Channels)

Fig-III: Top view of NR (3-Square Arrangement of Fuel Channels and 4-Typical Neutron Paths).

Only components relevant to the problem are shown (e.g. control rods and coolant are not shown).

A 燃料棒

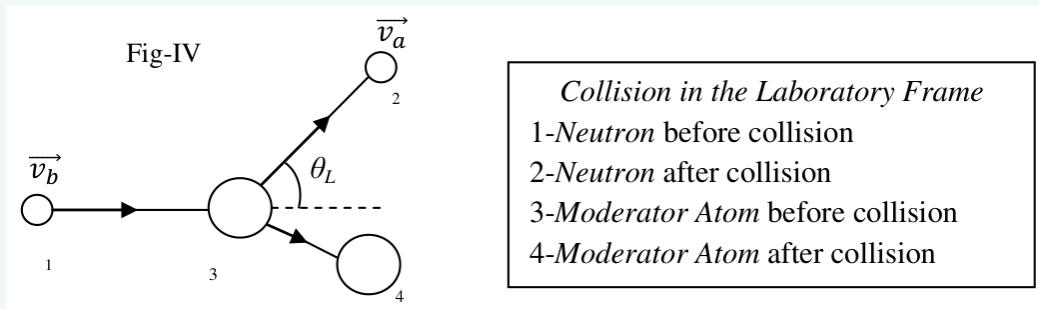
UO ₂ 的数据	1. 摩尔质量 $M_w = 0.270 \text{ kg mol}^{-1}$	2. 密度 $\rho = 1.060 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
	3. 熔点 $T_m = 3.138 \times 10^3 \text{ K}$	4. 热导率 $\lambda = 3.280 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$

A1	考虑一个静止的 ^{235}U 原子核吸收一个动能可忽略的中子后发生的下列裂变反应。 $^{235}\text{U} + {}^1_0\text{n} \longrightarrow {}^{94}\text{Zr} + {}^{140}\text{Ce} + 2 {}^1_0\text{n} + \Delta E$ 估算裂变释放的总能量 ΔE (以 MeV 为单位)。各原子核的质量为: $m(^{235}\text{U}) = 235.044 \text{ u}$; $m(^{94}\text{Zr}) = 93.9063 \text{ u}$; $m(^{140}\text{Ce}) = 139.905 \text{ u}$; $m({}^1_0\text{n}) = 1.00867 \text{ u}$, 且 $1 \text{ u} = 931.502 \text{ MeV } c^{-2}$ 。忽略电荷不平衡。	0.8
A2	估算天然 UO ₂ 中单位体积内 ^{235}U 原子的数目 N 。	0.5
A3	假设燃料上的中子通量密度均匀, 为 $\varphi = 2.000 \times 10^{18} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$ 。 ^{235}U 原子核的裂变截面(靶核的有效面积)为 $\sigma_f = 5.400 \times 10^{-26} \text{ m}^2$ 。若裂变能的 80.00% 转化为热量, 估算燃料棒单位体积的产热功率 Q (以 W m^{-3} 为单位)。 $1 \text{ MeV} = 1.602 \times 10^{-13} \text{ J}$	1.2
A4	稳态下, 燃料棒中心 (T_c) 与表面 (T_s) 之间的温差可表示为 $T_c - T_s = k F(Q, a, \lambda)$, 其中 $k = 1/4$ 是无量纲常数, a 是燃料棒的半径。利用量纲分析求出 $F(Q, a, \lambda)$ 。注意, λ 是 UO ₂ 的热导率。	0.5
A5	冷却剂的预期温度为 $5.770 \times 10^2 \text{ K}$ 。估算燃料棒半径 a 的上限 a_u 。	1.0

B 慢化剂

考虑质量为 1 u 的中子与质量为 $A \text{ u}$ 的慢化剂原子之间的二维弹性碰撞。碰撞前, 所有慢化剂原子在实验室参考系 (LF) 中均视为静止。设 $\vec{v}_b$ 和 $\vec{v}_a$ 分别为中子在 LF 中碰撞前、后的速度。设 $\vec{v}_m$ 为质心参考系 (CM) 相对于 LF 的速度, θ 为中子在 CM 系中的散射角。所有参与碰撞的粒子均以非相对论速率运动。

B1	图中示意了 LF 中的碰撞, 其中 θ_L 为散射角 (图 IV)。画出 CM 系中的碰撞示意图。用 $\vec{v}_b$ 、 $\vec{v}_a$ 和 $\vec{v}_m$ 标出粒子 1、2 和 3 的速度, 并标出散射角 θ 。	1.0
----	---	-----



B2	用 A 和 v_b 表示碰撞后中子和慢化剂原子在 CM 系中的速率 v 和 V 。	1.0
B3	推导 $G(\alpha, \theta) = E_a/E_b$ 的表达式, 其中 E_b 和 E_a 分别为中子在 LF 中碰撞前、后的动能, 且 $\alpha \equiv [(A-1)/(A+1)]^2$ 。	1.0
B4	假设上述表达式适用于 D ₂ O 分子。对于 D ₂ O (20 u) 慢化剂, 计算中子可能损失的最大能量比例 $f_l \equiv (E_b - E_a)/E_b$ 。	0.5

C 核反应堆

要使 NR 在任意恒定的中子通量 ψ 下运行（稳态），就必须用反应堆中超额产生的中子来补偿中子的泄漏。对于圆柱形反应堆，泄漏率为 $k_1[(2.405/R)^2 + (\pi/H)^2]\psi$ ，超额产生率为 $k_2\psi$ 。常数 k_1 和 k_2 取决于 NR 的材料性质。

C1	考虑一个 $k_1 = 1.021 \times 10^{-2} \text{ m}$ 、 $k_2 = 8.787 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ 的 NR。注意，为了高效利用燃料，在体积固定时应使泄漏率最小，求该 NR 在稳态下的尺寸。	1.5
C2	燃料通道排列成正方形点阵（图 III），最近邻间距为 0.286 m。燃料通道的等效半径（假设其为实心）为 $3.617 \times 10^{-2} \text{ m}$ 。估算反应堆中的燃料通道数 F_n ，以及使 NR 在稳态下运行所需的 UO_2 质量 M 。	1.0

¹ Joseph Amal Nathan (BARC) 和 Vijay A. Singh (前科学奥林匹克竞赛国家协调员) 是本题的主要命题人。谨此感谢学术委员会、学术发展组和国际委员会的贡献。

题目译自官方英文原文。

答案

- A1: $\Delta E \simeq 208.7 \text{ MeV}$ 。
- A2: $N \simeq 1.70 \times 10^{26} \text{ m}^{-3}$ 。
- A3: $Q \simeq 4.92 \times 10^8 \text{ W m}^{-3}$ 。
- A4: $F(Q, a, \lambda) = \frac{Qa^2}{\lambda}$ ，因此 $T_c - T_s = \frac{Qa^2}{4\lambda}$ 。
- A5: $a_u \simeq 8.27 \times 10^{-3} \text{ m} = 8.27 \text{ mm}$ 。
- B1: CM 系中的速度标注：1: $\vec{v}_b - \vec{v}_m$ ，2: $\vec{v}_a - \vec{v}_m$ ，3: $-\vec{v}_m$ 。中子初速度与末速度之间的夹角为 θ ；两个出射粒子的运动方向相反。
- B2: $v = \frac{A}{A+1}v_b$ ， $V = \frac{1}{A+1}v_b$ 。
- B3: $G(\alpha, \theta) = \frac{1 + \alpha + (1 - \alpha) \cos \theta}{2}$ 。
- B4: $f_{l,\max} = \frac{80}{441} \simeq 0.1814 = 18.14\%$ 。
- C1: $R = 2.405 \sqrt{\frac{3k_1}{2k_2}} \simeq 3.175 \text{ m}$ ， $H = \pi \sqrt{\frac{3k_1}{k_2}} \simeq 5.865 \text{ m}$ 。
- C2: $F_n \simeq 387$ 个燃料通道； $M \simeq 9.89 \times 10^4 \text{ kg}$ ，即 98.9 吨 UO_2 。

解答

A1

由于初始动能可忽略，根据能量守恒，释放的能量等于总静能的减少量：

$$\Delta E = [m(^{235}\text{U}) + m(^1_0\text{n}) - m(^{94}\text{Zr}) - m(^{140}\text{Ce}) - 2m(^1_0\text{n})]c^2.$$

使用给定的质量，不作任何电荷修正，

$$\begin{aligned} \Delta m &= [235.044 + 1.00867 - (93.9063 + 139.905 + 2(1.00867))]u \\ &= 0.22403 \text{ u}. \end{aligned}$$

因此，

$$\Delta E = 0.22403(931.502) \text{ MeV} = 208.684 \dots \text{ MeV},$$

即

$$\boxed{\Delta E \simeq 208.7 \text{ MeV}}.$$

A2

每个 UO_2 化学式单位都含有一个铀原子。单位体积内的化学式单位数为

$$n_{\text{UO}_2} = \frac{\rho}{M_w} N_A,$$

其中，标准阿伏伽德罗常数为 $N_A \simeq 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ 。

铀原子中 ^{235}U 所占的比例为 0.00720。因此

$$\begin{aligned} N &= 0.00720 \frac{\rho N_A}{M_w} \\ &= 0.00720 \frac{1.060 \times 10^4}{0.270} (6.022 \times 10^{23}) \text{ m}^{-3} \\ &= 1.7022 \dots \times 10^{26} \text{ m}^{-3}. \end{aligned}$$

于是

$$\boxed{N \simeq 1.70 \times 10^{26} \text{ m}^{-3}}.$$

A3

在给定的均匀中子通量下，一个靶核的裂变率为 $\varphi\sigma_f$ 。因此，单位体积内的裂变率为

$$r_f = N\varphi\sigma_f.$$

代入数值得

$$\varphi\sigma_f = (2.000 \times 10^{18})(5.400 \times 10^{-26}) = 1.080 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1},$$

且

$$r_f = 1.8384 \dots \times 10^{19} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

每次裂变沉积的热量为

$$E_h = 0.8000 \Delta E = 0.8000(208.684 \dots)(1.602 \times 10^{-13}) \text{ J}.$$

因此，

$$\begin{aligned} Q &= N\varphi\sigma_f E_h \\ &= 4.9168 \dots \times 10^8 \text{ W m}^{-3}, \end{aligned}$$

得到

$$\boxed{Q \simeq 4.92 \times 10^8 \text{ W m}^{-3}}.$$

A4

设 F 的量纲形式为 $Q^x a^y \lambda^z$ 。用 P, L, Θ 分别表示功率、长度和温度的量纲，

$$[Q] = PL^{-3}, \quad [a] = L, \quad [\lambda] = PL^{-1}\Theta^{-1}.$$

于是

$$[F] = P^{x+z} L^{-3x+y-z} \Theta^{-z}.$$

要使 F 具有温度的量纲，必须有

$$x + z = 0, \quad -3x + y - z = 0, \quad -z = 1.$$

由这些方程可得

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = -1.$$

无量纲数值因子已给定为 k , 因此

$$\boxed{F(Q, a, \lambda) = \frac{Qa^2}{\lambda}}, \quad \boxed{T_c - T_s = \frac{Qa^2}{4\lambda}}.$$

A5

内部均匀产热时, 燃料棒中心的温度最高。为避免熔化, 必须满足

$$T_c \leq T_m.$$

热量必须从燃料棒表面传向冷却剂, 因此表面温度不能低于冷却剂温度:

$$T_s \geq T_{\text{cool}}.$$

由此可得

$$\frac{Qa^2}{4\lambda} = T_c - T_s \leq T_m - T_{\text{cool}}.$$

因此, 极限半径为

$$a_u = \sqrt{\frac{4\lambda(T_m - T_{\text{cool}})}{Q}}.$$

利用

$$T_m - T_{\text{cool}} = 3138 - 577.0 = 2561 \text{ K},$$

得到

$$a_u = \sqrt{\frac{4(3.280)(2561)}{4.9168 \times 10^8}} = 8.2667 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

于是

$$\boxed{a_u \simeq 8.27 \text{ mm}}.$$

这一上限对应于 $T_s = T_{\text{cool}}$ 的理想极限情况。若表面与冷却剂之间存在有限的温降, 允许的半径就会减小。

B1

设中子质量为 m , 则慢化剂原子质量为 Am 。碰撞前, 慢化剂原子在 LF 中静止。因此, 质心速度为

$$\vec{v}_m = \frac{m\vec{v}_b + Am\vec{0}}{(A+1)m} = \frac{\vec{v}_b}{A+1}.$$

通过伽利略变换转到 CM 系时, 需要从每个 LF 速度中减去 $\vec{v}_m$ 。因此, 所需的标注为

$$\boxed{\vec{u}_1 = \vec{v}_b - \vec{v}_m, \quad \vec{u}_2 = \vec{v}_a - \vec{v}_m, \quad \vec{u}_3 = -\vec{v}_m}.$$

示意图应具有以下特征:

- 碰撞前, 中子 1 从左侧接近碰撞点, 以速度 $\vec{v}_b - \vec{v}_m$ 水平向右运动。
- 慢化剂原子 3 从右侧接近碰撞点, 以速度 $-\vec{v}_m$ 水平向左运动。
- 碰撞后, 中子 2 以速度 $\vec{v}_a - \vec{v}_m$ 离开碰撞点。在这个箭头与中子原先向右的运动方向之间标出 θ 。

- 慢化剂原子 4 沿与中子 2 完全相反的方向离开，因为 CM 系中的总动量为零。其速度为

$$\vec{u}_4 = -\frac{\vec{u}_2}{A}.$$

例如，若出射中子的箭头指向右上方，则出射慢化剂原子的箭头指向左下方。

B2

CM 系中的初始速率为

$$u_{n,b} = v_b - v_m = \frac{A}{A+1}v_b, \quad u_{M,b} = v_m = \frac{1}{A+1}v_b.$$

CM 系中的动量守恒要求末态动量大小相等、方向相反。因此，其大小满足

$$mv = AmV, \quad \text{因此} \quad v = AV.$$

由于碰撞是弹性碰撞，动能守恒：

$$\frac{1}{2}mu_{n,b}^2 + \frac{1}{2}Amu_{M,b}^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}AmV^2.$$

约去 $m/2$ 后，

$$\frac{A}{A+1}v_b^2 = v^2 + AV^2.$$

代入 $v = AV$ ，得到

$$A(A+1)V^2 = \frac{A}{A+1}v_b^2.$$

因此

$$\boxed{V = \frac{v_b}{A+1}}, \quad \boxed{v = \frac{A}{A+1}v_b}.$$

碰撞改变了速度的方向，但每个粒子在 CM 系中的速率保持不变。

B3

中子在 LF 中的末速度为

$$\vec{v}_a = \vec{v}_m + \vec{u}_2.$$

矢量 $\vec{v}_m$ 沿中子的初始运动方向，而 $\vec{u}_2$ 与该方向的夹角为 θ 。因此，

$$v_a^2 = v_m^2 + v^2 + 2v_mv \cos \theta.$$

利用上述结果，

$$\frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{1 + A^2 + 2A \cos \theta}{(A+1)^2}.$$

由于这两个能量都指同一个中子在 LF 中的动能，

$$G(\alpha, \theta) = \frac{E_a}{E_b} = \frac{v_a^2}{v_b^2}.$$

由

$$\alpha = \frac{(A-1)^2}{(A+1)^2}$$

可得

$$\frac{1 + \alpha}{2} = \frac{A^2 + 1}{(A + 1)^2}, \quad \frac{1 - \alpha}{2} = \frac{2A}{(A + 1)^2}.$$

因此,

$$G(\alpha, \theta) = \frac{1 + \alpha + (1 - \alpha) \cos \theta}{2}.$$

一种等价形式为

$$G(\alpha, \theta) = 1 - (1 - \alpha) \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

特别地, 前向散射时 $G = 1$, 而在 CM 系中发生后向散射时 $G = \alpha$ 。

B4

能量损失比例为

$$f_l = 1 - G = (1 - \alpha) \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

在 CM 系中发生后向散射, 即 $\theta = \pi$ 时, 该比例最大。因此

$$f_{l,\max} = 1 - \alpha = 1 - \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right)^2 = \frac{4A}{(A + 1)^2}.$$

按照题目的近似, 将整个 D_2O 分子视为质量为 20 u 的靶粒子, 取 $A = 20$:

$$f_{l,\max} = \frac{4(20)}{21^2} = \frac{80}{441} \simeq 0.1814 = 18.14\%.$$

C1

对于非零的稳态中子通量, 产生率与泄漏率必须平衡:

$$k_1 \left[\frac{2.405^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} \right] \psi = k_2 \psi.$$

约去 ψ ,

$$\frac{2.405^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} = \frac{k_2}{k_1}. \quad (1)$$

先确定在体积固定时使泄漏率最小的形状。记

$$\mathcal{V} = \pi R^2 H, \quad b = 2.405,$$

则

$$H = \frac{\mathcal{V}}{\pi R^2}.$$

泄漏率中的几何因子变为

$$S(R) = \frac{b^2}{R^2} + \frac{\pi^4 R^4}{\mathcal{V}^2}.$$

其导数为零的条件是

$$-\frac{2b^2}{R^3} + \frac{4\pi^4 R^3}{\mathcal{V}^2} = 0.$$

整理并利用 $\mathcal{V} = \pi R^2 H$,

$$\boxed{\frac{b^2}{R^2} = 2 \frac{\pi^2}{H^2}}. \quad (2)$$

这个驻点是极小值点, 因为

$$S''(R) = \frac{6b^2}{R^4} + \frac{12\pi^4 R^2}{\mathcal{V}^2} > 0.$$

因此, 高度与半径的最佳比值为

$$\frac{H}{R} = \frac{\sqrt{2}\pi}{b} = 1.84735\dots$$

联立 (1) 和 (2),

$$3 \frac{\pi^2}{H^2} = \frac{k_2}{k_1},$$

得到

$$\boxed{H = \pi \sqrt{\frac{3k_1}{k_2}}}, \quad \boxed{R = b \sqrt{\frac{3k_1}{2k_2}}}.$$

代入数值得

$$H = \pi \sqrt{\frac{3(1.021 \times 10^{-2})}{8.787 \times 10^{-3}}} \simeq \boxed{5.865 \text{ m}},$$
$$R = 2.405 \sqrt{\frac{3(1.021 \times 10^{-2})}{2(8.787 \times 10^{-3})}} \simeq \boxed{3.175 \text{ m}}.$$

C2

设正方形点阵的间距为 $d = 0.286 \text{ m}$. 忽略边界修正, 每个燃料通道占据一个横截面积为 d^2 的正方形单元. 因此,

$$F_n \simeq \frac{\pi R^2}{d^2}.$$

代入可得

$$F_n \simeq \frac{\pi(3.17507\dots)^2}{(0.286)^2} = 387.19\dots$$

因此, 估算的数量为

$$\boxed{F_n \simeq 387 \text{ 个燃料通道}}.$$

实心燃料的等效半径为 $r_f = 3.617 \times 10^{-2} \text{ m}$, 一个通道内 UO_2 的体积为 $\pi r_f^2 H$. 因此, 其质量为 $\rho \pi r_f^2 H$, 燃料总质量为

$$M = F_n \rho \pi r_f^2 H.$$

使用未经舍入的面积估算结果,

$$M \simeq (387.19\dots)(1.060 \times 10^4)\pi(3.617 \times 10^{-2})^2(5.86547\dots) \text{ kg} \\ = 9.8942\dots \times 10^4 \text{ kg}.$$

于是

$$M \simeq 9.89 \times 10^4 \text{ kg} = 98.9 \text{ 吨 UO}_2.$$

解答已与官方解答核对。