

# IPhO 2015

Teorik sorular ve çözümler · Mumbai, Hindistan · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2015/

## Soru 1: Güneş'ten Gelen Parçacıklar

Güneş'in yüzeyinden gelen fotonlar ve çekirdeğinden gelen nötrinolar, Güneş'in sıcaklıkları hakkında bilgi verebilir ve Güneş'in nükleer tepkimeler sayesinde parladığını da doğrulayabilir.

Bu soru boyunca Güneş'in kütlesini  $M_{\odot} = 2.00 \times 10^{30}$  kg, yarıçapını  $R_{\odot} = 7.00 \times 10^8$  m, ışınım gücünü (birim zamanda yayılan ışınım enerjisini)  $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{26}$  W ve Dünya–Güneş uzaklığını  $d_{\odot} = 1.50 \times 10^{11}$  m alınız.

Not:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \int x e^{ax} dx &= \left( \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} + \text{sabit} \\ \text{(ii)} \quad \int x^2 e^{ax} dx &= \left( \frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax} + \text{sabit} \\ \text{(iii)} \quad \int x^3 e^{ax} dx &= \left( \frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4} \right) e^{ax} + \text{sabit} \end{aligned}$$

### A Güneş'ten gelen ışınım :

| Bölüm | Soru                                                                                                                                     | Puan |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| A1    | Güneş'in ideal bir kara cisim gibi ışınım yaptığını varsayınız. Bu bilgiyi kullanarak Güneş yüzeyinin sıcaklığını, $T_s$ , hesaplayınız. | 0.3  |

Güneş ışınımının spektrumu, Wien dağılım yasasıyla iyi bir yaklaşıklıkla ifade edilebilir. Buna göre, Dünya üzerindeki herhangi bir yüzeye birim zamanda ve birim frekans aralığında gelen Güneş enerjisi,  $u(\nu)$ ,

$$u(\nu) = A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi h}{c^2} \nu^3 \exp(-h\nu/k_B T_s),$$

ile verilir; burada  $\nu$  frekans,  $A$  ise gelen ışınımın doğrultusuna dik yüzeyin alanıdır.

Şimdi, Güneş ışınlarının doğrultusuna dik yerleştirilmiş, alanı  $A$  olan ince bir yarı iletken malzeme diskinden oluşan bir güneş pili ele alınız.

| Bölüm | Soru                                                                                                                                                                                                                   | Puan |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| A2    | Wien yaklaşımını kullanarak güneş pilinin yüzeyine gelen toplam Güneş ışınım gücünü, $P_{\text{in}}$ , $A$ , $R_{\odot}$ , $d_{\odot}$ , $T_s$ ve temel sabitler $c$ , $h$ , $k_B$ cinsinden ifade ediniz.             | 0.3  |
| A3    | Güneş pilinin yüzeyine birim zamanda ve birim frekans aralığında gelen foton sayısını, $n_{\gamma}(\nu)$ , $A$ , $R_{\odot}$ , $d_{\odot}$ , $T_s$ , $\nu$ ve temel sabitler $c$ , $h$ , $k_B$ cinsinden ifade ediniz. | 0.2  |

Güneş pilinin yarı iletken malzemesinin "bant aralığı" enerjisi  $E_g$ 'dir. Aşağıdaki modeli varsayıyoruz. Enerjisi  $E \geq E_g$  olan her foton, bir elektronu bant aralığını aşacak şekilde uyarır. Bu elektron, yararlı çıkış enerjisine  $E_g$  kadar enerji katkısında bulunur ve fazla enerji ısı olarak dağılır (yararlı enerjiye dönüşmez).

| Bölüm | Soru                                                                                                                                                                                                                           | Puan |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| A4    | $E_g = h\nu_g$ olmak üzere $x_g = h\nu_g/k_B T_s$ tanımını yapınız. Pilin yararlı çıkış gücünü, $P_{out}$ , $x_g$ , $A$ , $R_\odot$ , $d_\odot$ , $T_s$ ve temel sabitler $c$ , $h$ , $k_B$ cinsinden ifade ediniz.            | 1.0  |
| A5    | Bu güneş pilinin verimini, $\eta$ , $x_g$ cinsinden ifade ediniz.                                                                                                                                                              | 0.2  |
| A6    | $\eta$ 'nin $x_g$ 'ye bağlı değişimini gösteren nitel bir grafik çiziniz. $x_g = 0$ ve $x_g \rightarrow \infty$ için değerler açıkça gösterilmelidir. $x_g = 0$ ve $x_g \rightarrow \infty$ için $\eta(x_g)$ 'nin eğimi nedir? | 1.0  |
| A7    | $\eta$ 'nin maksimum olduğu $x_g$ değeri $x_0$ olsun. $x_0$ 'ı veren üçüncü dereceden denklemi elde ediniz. $x_0$ 'ın değerini $\pm 0.25$ doğrulukla tahmin ediniz. Buradan $\eta(x_0)$ 'ı hesaplayınız.                       | 1.0  |
| A8    | Saf silisyumun bant aralığı $E_g = 1.11$ eV'tur. Bu değeri kullanarak silisyumdan yapılmış bir güneş pilinin verimini, $\eta_{Si}$ , hesaplayınız.                                                                             | 0.2  |

<sup>1</sup> Bu sorunun başlıca yazarları Amol Dighe (TIFR), Anwesh Mazumdar (HBCSE-TIFR) ve Vijay A. Singh'dir (Bilim Olimpiyatları eski Ulusal Koordinatörü). Akademik Komite, Akademik Geliştirme Grubu ve Uluslararası Kurulun katkıları için teşekkür ederiz.

On dokuzuncu yüzyılın sonlarında Kelvin ve Helmholtz (KH), Güneş'in nasıl parladığını açıklamak için bir hipotez öne sürdüler. Güneş'in, kütlesi  $M_\odot$  olan ve yoğunluğu ihmal edilebilen çok büyük bir madde bulutu olarak başlayıp sürekli büzüldüğünü varsaydılar. Bu durumda Güneş'in parlaması, bu yavaş büzülme sırasında kütleçekimsel potansiyel enerjinin açığa çıkmasından kaynaklanacaktı.

| Bölüm | Soru                                                                                                                                                                                          | Puan |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| A9    | Güneş'in içindeki madde yoğunluğunun düzgün olduğunu varsayalım. Güneş'in bugünkü toplam kütleçekimsel potansiyel enerjisini, $\Omega$ , $G$ , $M_\odot$ ve $R_\odot$ cinsinden bulunuz.      | 0.3  |
| A10   | KH hipotezine göre Güneş'in parlıyor olabileceği mümkün olan en uzun süreyi, $\tau_{KH}$ , (yıl cinsinden) tahmin ediniz. Güneş'in ışıyım gücünün bu süre boyunca sabit kaldığını varsayınız. | 0.5  |

Yukarıda hesaplanan  $\tau_{KH}$ , göktaşları üzerindeki çalışmalardan tahmin edilen Güneş Sistemi'nin yaşıyla uyuşmaz. Bu, Güneş'in enerji kaynağının yalnızca kütleçekimi olamayacağını gösterir.

## B Güneş'ten gelen nötrinolar :

1938'de Hans Bethe, Güneş'in enerji kaynağının, çekirdeğinde hidrojenin nükleer füzyonla helyuma dönüşmesi olduğunu öne sürdü. Net nükleer tepkime şöyledir:



Bu tepkimede üretilen "elektron nötrinoları",  $\nu_e$ , kütesiz kabul edilebilir. Güneş'ten kaçarlar ve Dünya'da algılanmaları, Güneş'in içinde nükleer tepkimeler gerçekleştiğini doğrular. Bu soruda nötrinoların taşıyıp götürdüğü enerji ihmal edilebilir.

| Bölüm | Soru                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Puan |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| B1    | Dünya'ya ulaşan nötrinoların sayı akısı yoğunluğunu, $\Phi_\nu$ , $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$ biriminde hesaplayınız. Yukarıdaki tepkimede açığa çıkan enerji $\Delta E = 4.0 \times 10^{-12} \text{ J}$ 'dür. Güneş'in yaydığı enerjinin tamamen bu tepkimeden kaynaklandığını varsayınız. | 0.6  |

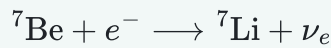
Güneş'in çekirdeğinden Dünya'ya yol alırken elektron nötrinolarının,  $\nu_e$ , bir kısmı başka tür nötrinolara,  $\nu_x$ , dönüşür. Dedektörün  $\nu_x$ 'i algılama verimi,  $\nu_e$ 'yi algılama veriminin 1/6'sıdır. Nötrino dönüşümü olmasaydı, bir yılda ortalama  $N_1$  nötrino algılamayı beklerdik. Ancak dönüşüm nedeniyle gerçekte yılda ortalama  $N_2$  nötrino ( $\nu_e$  ve  $\nu_x$  birlikte) algılanır.

| Bölüm | Soru                                                                                                           | Puan |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| B2    | $\nu_e$ 'lerin ne kadarının $\nu_x$ 'e dönüştüğünü gösteren $f$ oranını $N_1$ ve $N_2$ cinsinden hesaplayınız. | 0.4  |

Nötrinoları algılamak için suyla dolu büyük dedektörler inşa edilir. Nötrinoların maddeyle etkileşimleri çok seyrek olsa da zaman zaman dedektördeki su moleküllerinden elektron koparırlar. Bu yüksek enerjili elektronlar su içinde yüksek süratlerle hareket eder ve bu sırada elektromanyetik ışınım yayarlar. Böyle bir elektronun sürati, ışığın sudaki (kırılma indisi  $n$ ) süratinden büyük olduğu sürece, Çerenkov ışınımı adı verilen bu ışınım bir koni biçiminde yayılır.

| Bölüm | Soru                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Puan |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| B3    | Bir nötrinin kopardığı bir elektronun su içinde ilerlerken birim zamanda sabit $\alpha$ miktarında enerji kaybettiğini varsayınız. Bu elektron $\Delta t$ süresince Çerenkov ışınımı yayıyorsa, nötrinin bu elektrona aktardığı enerjiyi ( $E_{\text{imparted}}$ ) $\alpha$ , $\Delta t$ , $n$ , $m_e$ ve $c$ cinsinden belirleyiniz. (Elektronun nötrinoyla etkileşmeden önce durgun olduğunu varsayınız.) | 2.0  |

Güneş'in içinde H'nin füzyonla He'ye dönüşmesi birkaç adımda gerçekleşir. Bu ara adımlardan birinde bir  ${}^7\text{Be}$  çekirdeği (durgun kütlesi  $m_{\text{Be}}$ ) üretilir. Ardından bu çekirdek bir elektron soğurarak bir  ${}^7\text{Li}$  çekirdeği (durgun kütlesi  $m_{\text{Li}} < m_{\text{Be}}$ ) üretebilir ve bir  $\nu_e$  yayabilir. İlgili nükleer tepkime şöyledir:



Bir Be çekirdeği ( $m_{\text{Be}} = 11.65 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ) durgunken yine durgun olan bir elektronu soğurduğunda, yayılan nötrinin enerjisi  $E_\nu = 1.44 \times 10^{-13} \text{ J}$  olur. Ancak Be çekirdekleri, Güneş'in çekirdeğindeki  $T_c$  sıcaklığı nedeniyle rastgele ısıl hareket yapar ve hareketli nötrino kaynakları gibi davranır. Bunun sonucunda yayılan nötrinoların enerjisi, karekök ortalama kare (rms) değeri  $\Delta E_{\text{rms}}$  olan dalgalanmalar gösterir.

| Bölüm | Soru                                                                                                                                                                                                                                                               | Puan |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| B4    | $\Delta E_{\text{rms}} = 5.54 \times 10^{-17} \text{ J}$ ise Be çekirdeklerinin rms süratini, $V_{\text{Be}}$ , hesaplayınız ve buradan $T_c$ 'yi tahmin ediniz. (İpucu: $\Delta E_{\text{rms}}$ , hızın görüş doğrultusundaki bileşeninin rms değerine bağlıdır.) | 2.0  |

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

## Cevaplar

- A1

$$T_s = \left( \frac{L_\odot}{4\pi R_\odot^2 \sigma} \right)^{1/4} \simeq 5.76 \times 10^3 \text{ K}.$$

- A2

$$P_{\text{in}} = \frac{12\pi A R_\odot^2 (k_B T_s)^4}{d_\odot^2 c^2 h^3}.$$

- A3

$$n_\gamma(\nu) = \frac{2\pi A R_\odot^2}{d_\odot^2 c^2} \nu^2 e^{-h\nu/(k_B T_s)}.$$

- A4

$$P_{\text{out}} = \frac{2\pi A R_\odot^2 (k_B T_s)^4}{d_\odot^2 c^2 h^3} x_g (x_g^2 + 2x_g + 2) e^{-x_g}.$$

- A5

$$\eta(x_g) = \frac{x_g (x_g^2 + 2x_g + 2) e^{-x_g}}{6}.$$

- A6 Eğri, başlangıç noktasından  $1/3$  eğimle başlar,  $(2.27, 0.457)$  yakınında tek bir maksimuma ulaşır ve yatay eksene yukarıdan yaklaşır:

$$\eta(0) = 0, \quad \lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta = 0, \quad \eta'(0) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta' = 0 \quad \text{alttan yaklaşarak.}$$

- A7

$$x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0, \quad x_0 \simeq 2.27, \quad \eta(x_0) \simeq 0.457 = 45.7\%.$$

- A8

$$x_{g,\text{Si}} \simeq 2.24, \quad \eta_{\text{Si}} \simeq 0.457 = 45.7\%.$$

- A9

$$\Omega = -\frac{3GM_\odot^2}{5R_\odot} \simeq -2.29 \times 10^{41} \text{ J}.$$

- A10

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{3GM_\odot^2}{5R_\odot L_\odot} \simeq 1.88 \times 10^7 \text{ years}.$$

- B1

$$\Phi_\nu = \frac{2L_\odot}{4\pi d_\odot^2 \Delta E} \simeq 6.8 \times 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

• B2

$$f = \frac{6}{5} \left( 1 - \frac{N_2}{N_1} \right).$$

• B3

$$E_{\text{imparted}} = \alpha \Delta t + m_e c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}} - 1 \right).$$

• B4

$$V_{\text{Be}} = \sqrt{3} c \frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_\nu} \simeq 2.00 \times 10^5 \text{ m s}^{-1},$$
$$T_c = \frac{m_{\text{Be}} c^2}{k_B} \left( \frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_\nu} \right)^2 \simeq 1.12 \times 10^7 \text{ K}.$$

## Çözüm

Sayısal hesaplamalarda standart sabitleri

$$\sigma = 5.6704 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4},$$
$$G = 6.6743 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2},$$
$$k_B = 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1},$$
$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1},$$

ve  $1 \text{ eV} = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J}$  ile  $1 \text{ year} = 3.15576 \times 10^7 \text{ s}$  dönüşümlerini kullanınız.

**A1**

Stefan–Boltzmann yasasına göre bir kara cisim, birim yüzey alanı başına  $\sigma T^4$  gücünde ışıınım yayar. Güneş'in ışıınım yayan yüzeyinin alanı  $4\pi R_\odot^2$  olduğundan

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_s^4.$$

Dolayısıyla,

$$T_s = \left[ \frac{3.85 \times 10^{26}}{4\pi(7.00 \times 10^8)^2(5.6704 \times 10^{-8})} \right]^{1/4} = \boxed{5.76 \times 10^3 \text{ K}}.$$

**A2**

Gelen toplam güç, tüm frekanslar üzerinden alınan integraldir:

$$P_{\text{in}} = A \frac{R_\odot^2}{d_\odot^2} \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \nu^3 e^{-h\nu/(k_B T_s)} d\nu.$$

Şu değişken dönüşümünü yapalım:

$$x = \frac{h\nu}{k_B T_s}, \quad d\nu = \frac{k_B T_s}{h} dx.$$

Bu durumda

$$P_{\text{in}} = \frac{2\pi A R_\odot^2 (k_B T_s)^4}{d_\odot^2 c^2 h^3} \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx.$$

Verilen integral formülü şu sonucu verir:

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = [-e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)]_0^{\infty} = 6.$$

Böylece

$$P_{\text{in}} = \frac{12\pi AR_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3}.$$

Aşağıdaki tüm verim hesaplarında, Wien yaklaşımıyla bulunan bu aynı giriş gücü kullanılır.

### A3

Frekansı  $\nu$  olan her foton  $h\nu$  enerjisini taşır. Spektral gücü bu enerjiye bölmek, spektral foton geliş hızını verir:

$$n_{\gamma}(\nu) = \frac{u(\nu)}{h\nu}.$$

Buradan

$$n_{\gamma}(\nu) = \frac{2\pi AR_{\odot}^2}{d_{\odot}^2 c^2} \nu^2 e^{-h\nu/(k_B T_s)}.$$

Birimi, saniye ve hertz başına foton sayısıdır.

### A4

Yalnızca  $\nu \geq \nu_g$  koşulunu sağlayan fotonlar katkıda bulunur ve her biri  $E_g$  kadar yararlı enerji sağlar. Dolayısıyla,

$$P_{\text{out}} = E_g \int_{\nu_g}^{\infty} n_{\gamma}(\nu) d\nu.$$

$E_g = x_g k_B T_s$  bağıntısını ve A2'deki değişken dönüşümünü kullanarak

$$P_{\text{out}} = \frac{2\pi AR_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3} x_g \int_{x_g}^{\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

Şimdi

$$\int_{x_g}^{\infty} x^2 e^{-x} dx = [-(x^2 + 2x + 2)e^{-x}]_{x_g}^{\infty} = (x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g}.$$

Dolayısıyla,

$$P_{\text{out}} = \frac{2\pi AR_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3} x_g (x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g}.$$

### A5

Verim, yararlı çıkış gücünün gelen güce oranıdır:

$$\eta = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}.$$

Ortak boyutlu ve geometrik çarpanlar sadeleşir ve

$$\eta(x_g) = \frac{x_g(x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g}}{6}, \quad x_g \geq 0.$$

elde edilir.

#### A6

Bant aralığı sıfır olduğunda,

$$\eta(0) = 0.$$

Bu durumda fotonlar elektronları uyarabilse de elektron başına yararlı enerji sıfırdır.

Büyük  $x_g$  değerleri için,

$$\eta(x_g) \sim \frac{x_g^3 e^{-x_g}}{6},$$

dolayısıyla

$$\lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta(x_g) = 0.$$

Bant aralığının üzerindeki foton sayısının üstel olarak küçülmesi, yararlı çıkışın sıfıra gitmesine neden olur.

Türev alındığında,

$$\eta'(x_g) = \frac{e^{-x_g}}{6} (-x_g^3 + x_g^2 + 2x_g + 2).$$

Böylece

$$\eta'(0) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta'(x_g) = 0 \text{ alttan yaklaşarak}.$$

Grafik,  $\eta = x_g/3$  teğetiyle başlangıç noktasından başlar,  $x_g = 2.27$  yakınında tek bir maksimuma yükselir ve ardından pozitif kalarak  $\eta = 0$  yatay asimptotuna doğru azalır. Eğrinin biçimi hakkında ek bilgi için,

$$\eta''(x_g) = \frac{e^{-x_g}}{6} x_g^2 (x_g - 4),$$

olduğundan eğri  $0 < x_g < 4$  için aşağı doğru,  $x_g > 4$  için yukarı doğru içbükeydir.

Temsilî noktalar şunlardır:

| $x_g$                | $\eta(x_g)$     |
|----------------------|-----------------|
| 0                    | 0               |
| 1                    | 0.307           |
| 2                    | 0.451           |
| 2.27                 | 0.457           |
| 4                    | 0.317           |
| 6                    | 0.124           |
| 10                   | 0.00923         |
| $\rightarrow \infty$ | $\rightarrow 0$ |

**A7**

Maksimumda  $\eta'(x_0) = 0$  olur. Üstel çarpan hiçbir zaman sıfır olmadığından,

$$-x_0^3 + x_0^2 + 2x_0 + 2 = 0,$$

ya da

$$\boxed{x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0}.$$

$x_0 > 0$  için bu denklem

$$x_0 = 1 + \frac{2}{x_0} + \frac{2}{x_0^2}.$$

ile eşdeğerdir. Sol taraf  $x_0$  ile kesin olarak artarken sağ taraf kesin olarak azalır. Dolayısıyla yalnızca bir pozitif durağan nokta vardır. A6'daki uç nokta davranışıyla birlikte bu, söz konusu noktanın mutlak maksimum olduğunu gösterir.

$F(x) = x^3 - x^2 - 2x - 2$  olsun. Bu durumda

$$F(2) = -2, \quad F(2.5) = 2.375.$$

Böylece  $2 < x_0 < 2.5$  olur; bu da zaten  $x_0 = 2.25 \pm 0.25$  sonucunu verir. Daha hassas hesaplandığında

$$\boxed{x_0 \simeq 2.27}.$$

Verim ifadesinde yerine koyarak,

$$\eta(x_0) = \frac{x_0(x_0^2 + 2x_0 + 2)e^{-x_0}}{6} \simeq 0.45703.$$

Buradan

$$\boxed{\eta_{\max} \simeq 45.7\%}.$$

**A8**

A1'de bulunan yüzey sıcaklığında,

$$k_B T_s \simeq 0.4966 \text{ eV}.$$

Silisyum için,

$$x_{g,\text{Si}} = \frac{E_g}{k_B T_s} = \frac{1.11}{0.4966} \simeq 2.235.$$

Dolayısıyla,

$$\eta_{\text{Si}} = \frac{2.235 (2.235^2 + 2(2.235) + 2) e^{-2.235}}{6} \simeq 0.45694.$$

Böylece

$$\boxed{\eta_{\text{Si}} \simeq 45.7\%}.$$

Silisyumun bant aralığı, en uygun bant aralığı olan  $x_0 k_B T_s \simeq 1.13 \text{ eV}$  değerine yakın olduğu için bu sonuç maksimuma çok yakındır.

**A9**

Sonsuzdan art arda ince küresel kabuklar getirerek düzgün yoğunluklu küreyi oluşturalım.  $r$  yarıçapında, o ana kadar bir araya getirilmiş kütle

$$M(r) = M_{\odot} \frac{r^3}{R_{\odot}^3},$$

ve kabuğun kütlesi

$$dM = \frac{3M_{\odot} r^2}{R_{\odot}^3} dr.$$

Kabuk teoremine göre eklenen potansiyel enerji

$$d\Omega = - \frac{GM(r) dM}{r}.$$

Dolayısıyla,

$$\Omega = - \frac{3GM_{\odot}^2}{R_{\odot}^6} \int_0^{R_{\odot}} r^4 dr = - \frac{3GM_{\odot}^2}{R_{\odot}^6} \frac{R_{\odot}^5}{5}.$$

Buradan

$$\boxed{\Omega = - \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}}} \simeq -2.29 \times 10^{41} \text{ J}.$$

Eksi işareti, sonsuz uzaklıkta potansiyel enerjinin sıfır alınmasına karşılık gelir.

**A10**

Başlangıçtaki çok geniş bulutun kütleçekimsel potansiyel enerjisi yaklaşık sıfırdır. Dolayısıyla büzülmesi en fazla

$$E_{\text{available}} = -\Omega = \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}}.$$

kadar enerji açığa çıkarır. Mümkün olan en uzun parlama süresi, açığa çıkan bu enerjinin tümünün ışınlama ile yayıldığı kabul edilerek bulunur. Sabit ışınlama gücünde,

$$L_{\odot} \tau_{\text{KH}} = \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}},$$

dolayısıyla

$$\boxed{\tau_{\text{KH}} = \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot} L_{\odot}}}.$$

Sayısal olarak,

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{2.288 \times 10^{41}}{3.85 \times 10^{26}} \simeq 5.94 \times 10^{14} \text{ s} = \boxed{1.88 \times 10^7 \text{ years}}.$$

Açığa çıkan enerjinin bir kısmının iç enerji olarak tutulması, kütleçekimsel büzülmenin parlamayı sürdürebileceği süreyi kısaltır; dolayısıyla bu bir üst sınırdır.

**B1**

Nötrinoların taşıyıp götürdüğü enerji ihmal edildiğinde saniyede gerçekleşen füzyon tepkimesi sayısı

$$\dot{N}_{\text{reaction}} = \frac{L_{\odot}}{\Delta E}.$$

Her tepkime iki nötrino üretir:

$$\dot{N}_{\nu} = \frac{2L_{\odot}}{\Delta E}.$$

Küresel yayımda bu nötrinolar, Dünya'nın uzaklığında  $4\pi d_{\odot}^2$  büyüklüğünde bir alandan geçer. Böylece

$$\Phi_{\nu} = \frac{2L_{\odot}}{4\pi d_{\odot}^2 \Delta E}.$$

Değerler yerine konulduğunda

$$\Phi_{\nu} = \frac{2(3.85 \times 10^{26})}{4\pi(1.50 \times 10^{11})^2(4.0 \times 10^{-12})} = \boxed{6.8 \times 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}}.$$

**B2**

Dönüşümden sonra  $1 - f$  oranındaki kısım elektron nötrinosu olarak kalır ve yılda  $(1 - f)N_1$  algılamaya katkıda bulunur. Dönüşen kısmın algılanma verimi altıda bir olduğundan bu kısmın katkısı  $fN_1/6$  olur.

Dolayısıyla,

$$N_2 = (1 - f)N_1 + \frac{fN_1}{6} = N_1 \left(1 - \frac{5f}{6}\right).$$

Çözüldüğünde,

$$\boxed{f = \frac{6}{5} \left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right)}.$$

Fiziksel olarak mümkün olan  $0 \leq f \leq 1$  aralığı,  $N_1/6 \leq N_2 \leq N_1$  aralığına karşılık gelir.

**B3**

Elektron yavaşlayarak ışığın sudaki süratine ulaştığında Çerenkov ışıınımı sona erer:

$$v_{\text{th}} = \frac{c}{n}.$$

Elektronun o andaki kinetik enerjisi görelilik bağıntısıyla verilir:

$$K_{\text{th}} = (\gamma_{\text{th}} - 1)m_e c^2, \quad \gamma_{\text{th}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\text{th}}^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}}.$$

Elektron,  $\Delta t$  ışıınım yayma süresi boyunca  $\alpha \Delta t$  kadar enerji kaybeder. Dolayısıyla nötrino etkileşiminin hemen ardından sahip olduğu başlangıç kinetik enerjisi

$$K_i = K_{\text{th}} + \alpha \Delta t.$$

Elektron etkileşimden önce başlangıçta durgun olduğundan, nötrinonun aktardığı enerji  $K_i$ 'ye eşittir.

Buradan

$$E_{\text{imparted}} = \alpha \Delta t + m_e c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}} - 1 \right).$$

İkinci terim zorunludur: Çerenkov ışıını durduğunda elektronun hâlâ kinetik enerjisi vardır.

#### B4

Enerji dağılımındaki genişlemenin Be kaynaklarının ısı hareketinden kaynaklandığı, soruda belirtilen modeli kullanalım. Kaynağın hızının Dünya'ya doğru bileşeni  $v_{\parallel}$  olsun.

Kütlesiz bir nötrino için kaynağın durgunluk çerçevesindeki momentum  $p_{\nu} = E_{\nu}/c$ 'dir. Göreli olmayan kaynak hızının birinci mertebesine kadar, enerjinin Lorentz dönüşümü

$$E_{\text{obs}} \simeq E_{\nu} + v_{\parallel} \frac{E_{\nu}}{c}.$$

sonucunu verir. Böylece Doppler enerji kayması

$$\delta E \simeq E_{\nu} \frac{v_{\parallel}}{c}.$$

Isıl hareket izotropiktir, dolayısıyla

$$\langle v_{\parallel} \rangle = 0, \quad \langle v_{\parallel}^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3} = \frac{V_{\text{Be}}^2}{3}.$$

Enerji kaymasının rms değeri alındığında,

$$\Delta E_{\text{rms}} = \frac{E_{\nu}}{c} \sqrt{\langle v_{\parallel}^2 \rangle} = \frac{E_{\nu} V_{\text{Be}}}{\sqrt{3} c}.$$

Dolayısıyla,

$$V_{\text{Be}} = \sqrt{3} c \frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}}.$$

Sayısal olarak,

$$\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}} = \frac{5.54 \times 10^{-17}}{1.44 \times 10^{-13}} = 3.847 \times 10^{-4},$$

ve buradan

$$V_{\text{Be}} \simeq 2.00 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}.$$

$V_{\text{Be}}/c \simeq 6.66 \times 10^{-4}$  oranı, göreli olmayan yaklaşımın geçerliliğini doğrular.

Üç öteleme serbestlik derecesi için enerjinin eşit paylaşımı ilkesine göre,

$$\frac{1}{2} m_{\text{Be}} V_{\text{Be}}^2 = \frac{3}{2} k_B T_c.$$

Böylece

$$T_c = \frac{m_{\text{Be}} V_{\text{Be}}^2}{3 k_B} = \frac{m_{\text{Be}} c^2}{k_B} \left( \frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}} \right)^2.$$

Veriler yerine konulduğunda,

$$T_c = \frac{(11.65 \times 10^{-27})(2.9979 \times 10^8)^2}{1.380649 \times 10^{-23}} \left( \frac{5.54 \times 10^{-17}}{1.44 \times 10^{-13}} \right)^2,$$

buradan

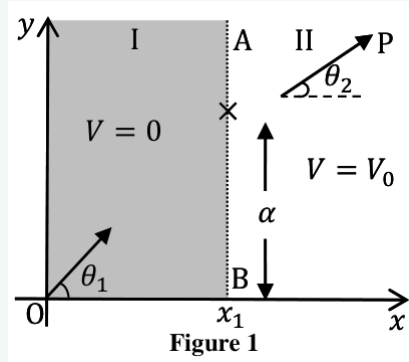
$$T_c \simeq 1.12 \times 10^7 \text{ K}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

## Soru 2: Ekstremum İlkesi

### A Mekanikte Ekstremum İlkesi

Şekil 1'de gösterilen yatay, sürtünmesiz bir  $x - y$  düzlemini ele alın. Bu düzlem,  $x = x_1$  denklemini sağlayan AB doğrusu ile I ve II olmak üzere iki bölgeye ayrılmıştır. Kütlesi  $m$  olan noktasal bir parçacığın potansiyel enerjisi I bölgesinde  $V = 0$ , II bölgesinde ise  $V = V_0$ 'dir. Parçacık, O başlangıç noktasından  $x$  eksenine  $\theta_1$  açısı yapan bir doğru boyunca  $v_1$  süratiyle gönderilir. II bölgesindeki P noktasına,  $x$  eksenine  $\theta_2$  açısı yapan bir doğru boyunca  $v_2$  süratiyle hareket ederek ulaşır. Bu T-2 sorusunun tamamında (tüm kısımlarında) kütleçekimini ve görelilik etkilerini ihmal edin.



Şekil 1

|    |                                                                  |     |
|----|------------------------------------------------------------------|-----|
| A1 | $v_2$ için $m$ , $v_1$ ve $V_0$ cinsinden bir ifade elde edin.   | 0.2 |
| A2 | $v_2$ 'yi $v_1$ , $\theta_1$ ve $\theta_2$ cinsinden ifade edin. | 0.3 |

Eylem adı verilen bir niceliği  $A = m \int v(s) ds$  olarak tanımlıyoruz; burada  $ds$ ,  $v(s)$  süratiyle hareket eden  $m$  kütleli bir parçacığın yörüngesi boyunca sonsuz küçük uzunluk elemanıdır. İntegral, izlenen yol boyunca alınır. Örneğin, yarıçapı  $R$  olan çembersel bir yörüngede sabit  $v$  süratiyle hareket eden bir parçacığın bir tam turdaki eylemi  $A$ ,  $2\pi m R v$  olur. Enerjisi sabit ve  $E$  olan bir parçacık için, iki sabit nokta arasındaki tüm olası yörüngeler arasında gerçek yörüngenin, yukarıda tanımlanan  $A$ 'nın bir ekstremum (minimum veya maksimum) olduğu yörünge olduğu gösterilebilir. Bu, tarihsel olarak En Küçük Eylem İlkesi (PLA) adıyla bilinir.

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |     |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| A3 | PLA, potansiyelin sabit olduğu bir bölgede iki sabit nokta arasında hareket eden bir parçacığın yörüngesinin düz bir doğru olacağını ifade eder. Şekil 1'deki iki sabit nokta O ve P'nin koordinatları sırasıyla $(0, 0)$ ve $(x_0, y_0)$ , parçacığın I bölgesinden II bölgesine geçtiği sınır noktasının koordinatları ise $(x_1, \alpha)$ olsun. $x_1$ 'in sabit olduğuna ve eylemin yalnızca $\alpha$ koordinatına bağlı olduğuna dikkat edin. Eylem $A(\alpha)$ için ifadeyi yazın. PLA'yı kullanarak $v_1/v_2$ ile bu koordinatlar arasındaki bağıntıyı elde edin. | 1.0 |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

## B Optikte Ekstremum İlkesi

Bir ışık ışını, kırılma indisleri sırasıyla  $n_1$  ve  $n_2$  olan I ortamından II ortamına geçer. İki ortam,  $x$  eksenine paralel bir doğru ile ayrılmıştır. Işık ışını,  $y$  eksenine I ortamında  $i_1$ , II ortamında ise  $i_2$  açısı yapar (bkz. Şekil 2). Işının yörüngesini elde etmek için, Fermat'ın en kısa süre ilkesi olarak bilinen başka bir ekstremum (minimum veya maksimum) ilkesinden yararlanılır.

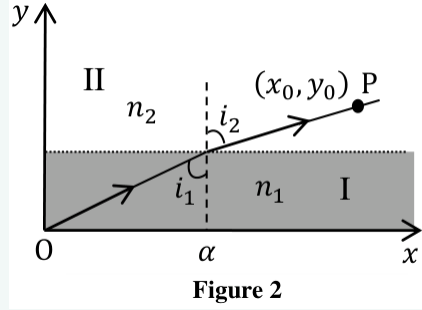


Figure 2

Şekil 2

|    |                                                                                                                                                                                                                          |     |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| B1 | Bu ilkeye göre bir ışık ışını, iki sabit nokta arasında, bu iki nokta arasındaki yolculuk süresinin bir ekstremum olduğu yolu izler. Fermat ilkesinden hareketle $\sin i_1$ ile $\sin i_2$ arasındaki bağıntıyı türetin. | 0.5 |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

Şekil 3'te, şeker derişiminin yükseklikle azaldığı bir şeker çözeltisine yatay olarak giren lazer demetinin izlediği yol şematik olarak gösterilmiştir. Bunun sonucunda çözeltinin kırılma indisi de yükseklikle azalır.

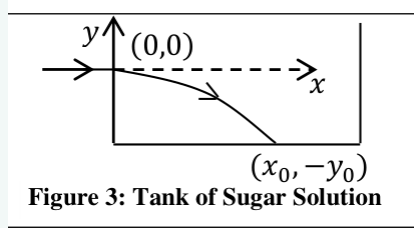


Figure 3: Tank of Sugar Solution

Şekil 3: Şeker Çözeltisi Tankı

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |     |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| B2 | Kırılma indisi $n(y)$ 'nin yalnızca $y$ 'ye bağlı olduğunu varsayın. B1'de elde edilen denklemi kullanarak demetin izlediği yolun eğimi $dy/dx$ için, $y = 0$ 'daki kırılma indisi $n_0$ ve $n(y)$ cinsinden bir ifade elde edin.                                                                                                           | 1.5 |
| B3 | Lazer demeti, Şekil 3'te gösterildiği gibi tankın tabanından $y_0$ yüksekliğindeki $(0, 0)$ başlangıç noktasından şeker çözeltisine yatay olarak yönlendirilir. $n_0$ ve $k$ pozitif sabitler olmak üzere $n(y) = n_0 - ky$ alın. Lazer demetinin gerçek yörüngesi için $x$ 'in $y$ ve ilgili nicelikler cinsinden bir ifadesini elde edin. | 1.2 |

<sup>1</sup> Bu sorunun başlıca yazarları Manoj Harbola (IIT-Kanpur) ve Vijay A. Singh'dir (eski Bilim Olimpiyatları Ulusal Koordinatörü). Akademik Komite, Akademik Geliştirme Grubu ve Uluslararası Kurulun katkılarına teşekkür ederiz.

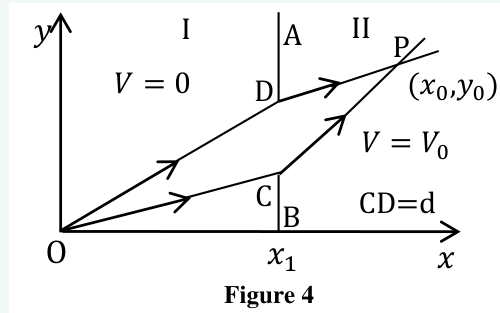
|                                                                                                                                                                                                                                       |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Şu integralleri kullanabilirsiniz: $\int \sec \theta d\theta = \ln(\sec \theta + \tan \theta) + \text{sabit}$ , burada $\sec \theta = 1/\cos \theta$ , veya $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \text{sabit}$ |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

|    |                                                                                                                                                                                   |     |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| B4 | Demetin tankın tabanına ulaştığı noktanın $x_0$ değerini bulun. $y_0 = 10.0 \text{ cm}$ , $n_0 = 1.50$ , $k = 0.050 \text{ cm}^{-1}$ ( $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$ ) alın. | 0.8 |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

### C Ekstremum İlkesi ve Maddenin Dalga Doğası

Şimdi PLA ile hareket eden bir parçacığın dalga doğası arasındaki bağlantıyı inceleyeceğiz. Bunun için O'dan P'ye hareket eden bir parçacığın olası tüm yörüngeleri izleyebileceğini varsayacak ve de Broglie dalgalarının yapıcı girişimine dayanan bir yörünge arayacağız.

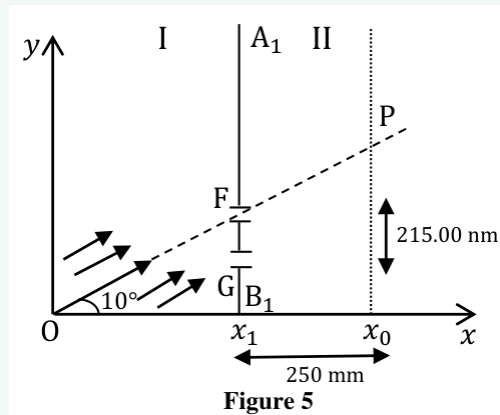
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |     |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| C1 | Parçacık yörüngesi boyunca sonsuz küçük bir $\Delta s$ mesafesi kadar ilerlerken, de Broglie dalgasının fazındaki $\Delta\varphi$ değişimini, eylemdeki $\Delta A$ değişimi ve Planck sabiti ile ilişkilendirin.                                                                                                                                                                                                                                                             | 0.6 |
| C2 | Parçacığın O'dan P'ye ilerlediği A kısmındaki soruyu hatırlayın (bkz. Şekil 4). İki bölge arasındaki AB sınırına geçirimsiz bir bölme yerleştirilsin. AB üzerinde, $d \ll (x_0 - x_1)$ ve $d \ll x_1$ koşullarını sağlayan $d$ genişliğinde küçük bir CD açıklığı vardır.<br><br>OCP, A kısmında ele alınan klasik yörünge üzerinde olacak şekilde, iki uç yol olan OCP ve ODP'yi ele alın. İki yol arasındaki $\Delta\varphi_{CD}$ faz farkını birinci mertebede elde edin. | 1.2 |



Şekil 4

### D Madde Dalgalarının Girişimi

O noktasında bulunan ve kolime edilmiş bir elektron demetini,  $x = x_1$ 'deki geçirimsiz  $A_1B_1$  bölmesinde F noktasında bulunan dar bir yarığa, OFP düz bir doğru oluşturacak şekilde yönlendiren bir elektron tabancasını ele alın. P,  $x = x_0$ 'daki ekran üzerinde bir noktadır (bkz. Şekil 5). I bölgesindeki sürat  $v_1 = 2.0000 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$  ve  $\theta = 10.0000^\circ$ 'dir. II bölgesindeki potansiyel, sürat  $v_2 = 1.9900 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$  olacak şekildedir.  $x_0 - x_1$  uzaklığı  $250.00 \text{ mm}$ 'dir ( $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ ). Elektron-elektron etkileşimini ihmal edin.



Şekil 5

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| D1 | O'daki elektronlar durgun hâlden hızlandırılmışsa, hızlandırıcı potansiyel $U_1$ 'i hesaplayın.                                                                                                                                                                                                                      | 0.3 |
| D2 | $A_1B_1$ bölmesinde, F yarığının 215.00 nm ( $1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$ ) aşağısında özdeş bir G yarığı daha açılır (Şekil 5). F ve G yarıklarından geçerek P'ye ulaşan de Broglie dalgaları arasındaki faz farkı $2\pi\beta$ ise $\beta$ 'yi hesaplayın.                                                        | 0.8 |
| D3 | Ekranda elektron algılanma olasılığının sıfır olması beklenen noktanın P'ye olan en küçük $\Delta y$ uzaklığı nedir? [Not: $\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \sin\theta + \Delta\theta \cos\theta$ yaklaşımını yararlı bulabilirsiniz.]                                                                           | 1.2 |
| D4 | Demet, $500\text{nm} \times 500\text{nm}$ boyutlarında kare bir kesite sahiptir ve düzenek 2 m uzunluğundadır. Herhangi bir anda düzenekte ortalama olarak en az bir elektron bulunması için gereken en küçük akı yoğunluğu $I_{\min}$ (birim dik kesit alanından birim zamanda geçen elektron sayısı) ne olmalıdır? | 0.4 |

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

## Cevaplar

- **A1:**  $v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2V_0}{m}}$ .
- **A2:**  $v_2 = v_1 \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$ .
- **A3:**

$$A(\alpha) = mv_1 \sqrt{x_1^2 + \alpha^2} + mv_2 \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2},$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(y_0 - \alpha) \sqrt{x_1^2 + \alpha^2}}{\alpha \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}}.$$

- **B1:**  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ .
- **B2:**  $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{n(y)^2}{n_0^2} - 1}$ .
- **B3:**

$$x(y) = \frac{n_0}{k} \ln \left[ \frac{n_0 - ky + \sqrt{(n_0 - ky)^2 - n_0^2}}{n_0} \right].$$

Eşdeğer olarak,  $y(x) = \frac{n_0}{k} \left[ 1 - \cosh\left(\frac{kx}{n_0}\right) \right]$ .

- **B4:**  $x_0 = 23.86 \dots \text{ cm} \approx 24 \text{ cm}$ .
- **C1:**  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{h} \Delta A = \frac{\Delta A}{\hbar}$ .
- **C2:**  $\Delta\varphi_{CD} = 0$ ,  $d$ 'ye göre birinci mertebede geçerlidir; ilk düzeltme ikinci derecedendir.
- **D1:**  $U_1 \approx 1.14 \times 10^3 \text{ V}$ .
- **D2:**  $\beta = \frac{m_e d(v_1 - v_2) \sin\theta}{h} \approx 5.13$ .
- **D3:**  $\Delta y \approx 1.6 \times 10^{-5} \text{ m} = 16 \text{ }\mu\text{m}$ , P'nin aşağısında.
- **D4:**  $I_{\min} \approx 4 \times 10^{19} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ .

## Çözüm

Elektronlarla ilgili sayısal hesaplamalarda

$m_e = 9.1093837 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$ ,  $h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J s}$ ,  
değerlerini kullanın; burada  $e$ , elektron yükünün büyüklüğüdür.

### A1

Potansiyel zamandan bağımsızdır; dolayısıyla mekanik enerji korunur:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + V_0.$$

Böylece,

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2V_0}{m}}.$$

Soruda parçacığın II bölgesine geçtiği varsayılmaktadır.

### A2

Potansiyel yalnızca  $x$ 'e bağlı olduğundan kuvvetin  $y$  bileşeni yoktur. Bu nedenle sınır yüzeyine paralel momentum korunur:

$$mv_1 \sin \theta_1 = mv_2 \sin \theta_2.$$

Dolayısıyla,

$$v_2 = v_1 \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}.$$

### A3

Sınırı geçiş noktası  $Q = (x_1, \alpha)$  olsun. İki doğru parçasının uzunlukları

$$L_1 = \sqrt{x_1^2 + \alpha^2}, \quad L_2 = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}.$$

şeklinde. Toplam enerji sabitken iki bölgedeki süratler de sabittir. Bu nedenle

$$A(\alpha) = m(v_1 L_1 + v_2 L_2).$$

Gerçek yörünge

$$\frac{dA}{d\alpha} = m \left[ v_1 \frac{\alpha}{L_1} - v_2 \frac{y_0 - \alpha}{L_2} \right] = 0.$$

koşulunu sağlar. Böylece,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(y_0 - \alpha)L_1}{\alpha L_2} = \frac{(y_0 - \alpha)\sqrt{x_1^2 + \alpha^2}}{\alpha \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}}.$$

$\alpha/L_1 = \sin \theta_1$  ve  $(y_0 - \alpha)/L_2 = \sin \theta_2$  olduğundan A2'deki sonuç yeniden elde edilir. Ayrıca,

$$\frac{d^2 A}{d\alpha^2} = m \left[ \frac{v_1 x_1^2}{L_1^3} + \frac{v_2 (x_0 - x_1)^2}{L_2^3} \right] > 0,$$

olduğundan eylemin bu durağan değeri bir minimumdur.

**B1**

Yatay ara yüzeyi  $y = b$  olarak yazalım ve ışının bu ara yüzeyi  $(\alpha, b)$  noktasında geçtiğini varsayalım. Işığın  $j$  ortamındaki sürati  $c/n_j$ 'dir. Dolayısıyla O'dan P'ye yolculuk süresi

$$T(\alpha) = \frac{n_1}{c} \sqrt{\alpha^2 + b^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - b)^2}.$$

olur.

Fermat ilkesi  $dT/d\alpha = 0$  olmasını gerektirir:

$$n_1 \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} = n_2 \frac{x_0 - \alpha}{\sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - b)^2}}.$$

Açılar ara yüzeyin normalinden ölçüldüğü için bu iki geometrik oran  $\sin i_1$  ve  $\sin i_2$ 'dir. Dolayısıyla

$$\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}, \quad \boxed{\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1}}.$$

**B2**

Sıvıyı art arda gelen ince yatay katmanlar olarak düşünelim. B1'in komşu katmanlar arasında uygulanması,

$$n(y) \sin i(y) = \text{sabit}.$$

olduğunu gösterir. Başlangıçtaki ışın yatay olduğundan  $i(0) = 90^\circ$ 'dir ve

$$n(y) \sin i(y) = n_0.$$

elde edilir.

Artan  $x$  yönünde ilerleyen bir ışın için,

$$\sin i = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}.$$

Bunun sonucunda,

$$\frac{n(y)}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} = n_0,$$

ve dolayısıyla

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{n(y)^2}{n_0^2} - 1.$$

Işın, kırılma indisinin daha büyük olduğu yöne, yani aşağıya doğru bükülür. Negatif eğimi seçersek,

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{n(y)^2}{n_0^2} - 1}}.$$

**B3**

$n(y) = n_0 - ky$  yerine konursa:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{n_0}{\sqrt{(n_0 - ky)^2 - n_0^2}}.$$

Giriş noktası  $(0, 0)$ 'dan itibaren integral alındığında,

$$x = -n_0 \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{(n_0 - k\eta)^2 - n_0^2}}.$$

$u = (n_0 - k\eta)/n_0$  dönüşümüyle bu ifade

$$x = \frac{n_0}{k} \int_1^{(n_0 - ky)/n_0} \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}.$$

hâline gelir. Verilen integral kullanılarak,

$$x(y) = \frac{n_0}{k} \ln \left[ \frac{n_0 - ky + \sqrt{(n_0 - ky)^2 - n_0^2}}{n_0} \right].$$

Bu,  $x \geq 0$  ve  $-y_0 \leq y \leq 0$  koşullarını sağlayan daldır.

Eşdeğer olarak,

$$\frac{kx}{n_0} = \operatorname{arcosh} \left( 1 - \frac{ky}{n_0} \right),$$

dolayısıyla

$$y(x) = \frac{n_0}{k} \left[ 1 - \cosh \left( \frac{kx}{n_0} \right) \right].$$

Bu eğri, başlangıç noktasından yatay bir teğetle geçer ve aşağıya doğru giderek daha fazla kıvrılır.

#### B4

Tabanda  $y = -y_0$ 'dır. Böylece,

$$x_0 = \frac{n_0}{k} \operatorname{arcosh} \left( 1 + \frac{ky_0}{n_0} \right).$$

Uzunluklar tutarlı biçimde santimetre cinsinden kullanılırsa,

$$\frac{n_0}{k} = 30.0 \text{ cm}, \quad 1 + \frac{ky_0}{n_0} = 1 + \frac{0.050(10.0)}{1.50} = \frac{4}{3}.$$

Dolayısıyla

$$x_0 = 30.0 \ln \left( \frac{4 + \sqrt{7}}{3} \right) \text{ cm} = 23.86096 \dots \text{ cm}.$$

Böylece

$$x_0 \approx 24 \text{ cm} = 0.24 \text{ m}.$$

#### C1

de Broglie dalga boyu

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}.$$

şeklinde. Sonsuz küçük bir mesafe boyunca biriken uzaysal faz

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = \frac{2\pi}{h} mv \Delta s.$$

olur.  $\Delta A = mv \Delta s$  olduğundan,

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{h} \Delta A = \frac{\Delta A}{\hbar}.$$

Aynı enerjiye sahip durağan dalgalar için, yollar aynı gözlem anında karşılaştırıldığında ortak zamansal faz birbirini götürür.

## C2

C'nin koordinatı  $(x_1, \alpha)$  olsun; bu durumda D'nin koordinatı  $(x_1, \alpha + d)$ 'dir. Birinci mertebede,

$$OD - OC = d \sin \theta_1 + O(d^2),$$

iken

$$DP - CP = -d \sin \theta_2 + O(d^2).$$

Böylece,

$$A_{ODP} - A_{OCP} = md(v_1 \sin \theta_1 - v_2 \sin \theta_2) + O(d^2).$$

OCP klasik yörünge olduğundan A2'ye göre

$$v_1 \sin \theta_1 = v_2 \sin \theta_2.$$

C1 kullanılarak,

$$\Delta\varphi_{CD} = \frac{2\pi md}{h}(v_1 \sin \theta_1 - v_2 \sin \theta_2) + O(d^2).$$

Dolayısıyla

$$\Delta\varphi_{CD} = 0 \quad \text{birinci mertebede; açılım değişkeni: } d.$$

Faz farkı ikinci mertebede genellikle sıfırdan farklıdır. Eylemin durağan olması, komşu yolların birinci mertebede aynı faza sahip olmasını sağlar.

## D1

Elektronların büyüklüğü  $U_1$  olan bir potansiyel farkıyla durgun hâlden hızlandırılması

$$eU_1 = \frac{1}{2} m_e v_1^2.$$

bağıntısını verir. Böylece

$$U_1 = \frac{m_e v_1^2}{2e} = 1137.126 \dots \text{ V},$$

veya

$$U_1 \approx 1.14 \times 10^3 \text{ V}.$$

## D2

Şu tanımları yapalım:

$$d = 215.00 \times 10^{-9} \text{ m}, \quad L = x_0 - x_1 = 0.25000 \text{ m}.$$

Gelen kolime edilmiş demeti eşevreli bir düzlem dalga olarak ele alır ve uzak alan yol uzunluğu farklarını, yarıklar arası uzaklığın birinci mertebesinde kullanınız.

F, G'nin yukarısında olduğundan, gelen dalganın faz farkı

$$\varphi_F^{\text{in}} - \varphi_G^{\text{in}} = \frac{m_e v_1}{\hbar} d \sin \theta.$$

olur. OF'nin doğrusal uzantısı üzerinde bulunan P'de,

$$FP - GP \simeq -d \sin \theta.$$

Dolayısıyla II bölgesindeki yayılımın katkısı

$$-\frac{m_e v_2}{\hbar} d \sin \theta.$$

olur.

Toplam faz farkını, F'den geçen dalganın fazından G'den geçen dalganın fazı çıkarılacak şekilde alırsak,

$$2\pi\beta = \frac{m_e d}{\hbar} (v_1 - v_2) \sin \theta.$$

Dolayısıyla

$$\boxed{\beta = \frac{m_e d (v_1 - v_2) \sin \theta}{h}}.$$

Sayısal olarak,

$$\beta = 5.132650 \dots, \quad \boxed{\beta \approx 5.13}.$$

Bu, çevrim cinsinden ifade edilen, indirgenmemiş faz farkıdır; bir çevrime göre modülü 0.132650 ... 'dır.

### D3

Genlikleri eşit olan özdeş yarıklar için yıkıcı girişim, faz farkı  $\pi$ 'nin tek katı, yani çevrim cinsinden bir yarım tam sayı olduğunda oluşur.

Ekrandaki yakın bir noktaya doğru çıkış yönü  $\theta + \delta\theta$  olsun. Gelen dalganın faz farkı sabit kalırken yayılım fazı değişir. Çevrim cinsinden faz farkı

$$b(\delta\theta) = \frac{m_e d}{h} [v_1 \sin \theta - v_2 \sin(\theta + \delta\theta)].$$

olur. Verilen küçük açı açılımını kullanırsak,

$$b(\delta\theta) \simeq \beta - \frac{m_e v_2 d}{h} \cos \theta \delta\theta.$$

Komşu yarım tam sayılar 4.5 ve 5.5'tir. Bunların  $\beta$ 'ya uzaklıkları

$$\beta - 4.5 = 0.632650 \dots, \quad 5.5 - \beta = 0.367350 \dots$$

şeklindedir. Dolayısıyla en yakın minimumda  $b = 5.5$  olur ve

$$\delta\theta = -\frac{h(5.5 - \beta)}{m_e v_2 d \cos \theta}.$$

elde edilir. Negatif işaret, minimumun P'nin aşağısında bulunduğunu gösterir.

Düşey ekrandaki işaretli yer değiştirme

$$\delta y = L [\tan(\theta + \delta\theta) - \tan \theta] \simeq \frac{L}{\cos^2 \theta} \delta\theta.$$

olur. Dolayısıyla bunun büyüklüğü

$$\Delta y = \frac{hL(5.5 - \beta)}{m_e v_2 d \cos^3 \theta}.$$

şeklindedir.

Sayısal olarak,

$$\frac{hL}{m_e v_2 d \cos^3 \theta} = 44.5001 \dots \mu\text{m},$$

olduğundan en düşük mertebedeki sonuç

$$\Delta y = (44.5001 \dots)(0.3673499 \dots) \mu\text{m} = 16.3471 \dots \mu\text{m}.$$

olur. Böylece,

$$\Delta y \approx 16 \mu\text{m}, \quad \text{P'nin aşağısında}.$$

Küçük açı ve uzak alan yaklaşımları burada uygundur:  $|\delta\theta| \simeq 6.34 \times 10^{-5} \text{ rad}$  ve  $d/L = 8.60 \times 10^{-7}$ . Verilen sonuçta yol uzunluğunun daha yüksek mertebeli düzeltmeleri ihmal edilmiştir.

#### D4

Demetin dik kesit alanı

$$S = (500 \times 10^{-9})^2 = 2.50 \times 10^{-13} \text{ m}^2.$$

olur. 2 m'lik bir uçuş mesafesi için,  $v \simeq 2.0 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$  kullanıldığında geçiş süresi

$$\tau \simeq \frac{2}{2.0 \times 10^7} = 1.0 \times 10^{-7} \text{ s}.$$

olur.

Akı yoğunluğu  $I$  ise birim zamanda giren elektron sayısı  $IS$ 'dir. Kararlı çalışma durumunda düzenepteki ortalama elektron sayısı

$$\overline{N} = IS\tau.$$

olur. En küçük akı,  $\overline{N} = 1$  durumuna karşılık gelir:

$$I_{\min} = \frac{1}{S\tau}.$$

Böylece,

$$I_{\min} \simeq \frac{1}{(2.50 \times 10^{-13})(1.0 \times 10^{-7})} = 4 \times 10^{19} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

Daha kesin olarak,  $\tau = \ell_1/v_1 + \ell_2/v_2$ 'dir; burada  $\ell_1 + \ell_2$  uçuş mesafesidir. İki sürat arasındaki fark yalnızca 0.5% olduğundan bunların yerine ortak bir yaklaşık sürat kullanılması, verilen sonucun hassasiyetini etkilemez.

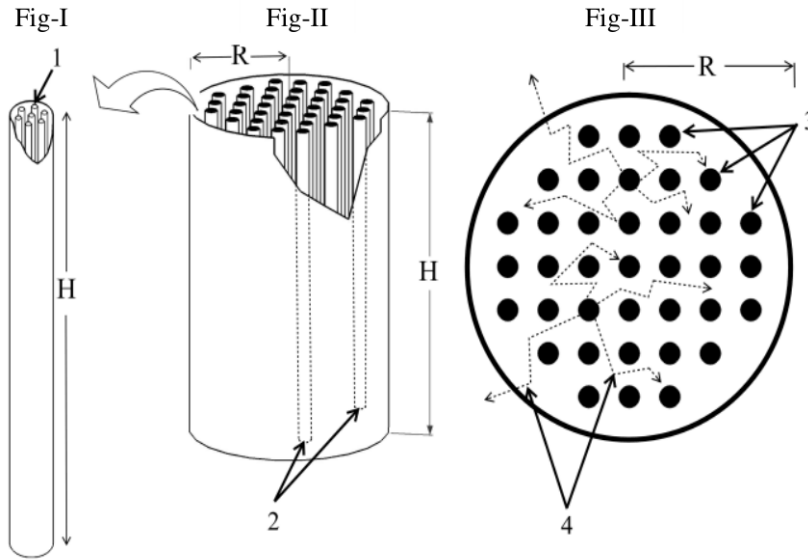
---

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

### Soru 3: Bir Nükleer Reaktörün Tasarımı

Uranyum doğada  $\text{UO}_2$  biçiminde bulunur ve uranyum atomlarının yalnızca %0.720'si  $^{235}\text{U}$  izotopudur.  $^{235}\text{U}$  çekirdeğinde nötronla indüklenen fisyon kolaylıkla gerçekleşir ve yüksek kinetik enerjili 2-3 fisyon nötronu yayılır. Fisyonu indükleyen nötronların kinetik enerjisi düşükse bu fisyon olasılığı artar. Dolayısıyla fisyon nötronlarının kinetik enerjisi azaltılarak diğer  $^{235}\text{U}$  çekirdeklerinde zincirleme fisyonlar indüklenebilir. Bu, güç üreten nükleer reaktörün (NR) temelini oluşturur.

Tipik bir NR, moderatör adı verilen bir malzemeye doldurulmuş, yüksekliği  $H$  ve yarıçapı  $R$  olan silindirik bir tanktan oluşur. Yakıt kanalları adı verilen silindirik tüpler, eksen doğrultusunda kare bir örgü oluşturacak şekilde yerleştirilir; her tüp, katı doğal  $\text{UO}_2$ 'den yapılmış, yüksekliği  $H$  olan silindirik yakıt çubuklarından oluşan bir demet içerir. Bir yakıt kanalından dışarı çıkan fisyon nötronları moderatörle çarpışarak enerji kaybeder ve çevredeki yakıt kanallarına fisyonu yol açacak kadar düşük enerjiyle ulaşır (Şekiller I-III). Çubukta fisyon sonucu üretilen ısı, çubuk boyunca akan bir soğutucu akışkana aktarılır. Bu soruda (A) Yakıt Çubuğu, (B) Moderatör ve (C) Silindirik Geometrilili NR'nin işleyişinin temelindeki bazı fiziksel ilkeleri inceleyeceğiz.



*Schematic sketch of the Nuclear Reactor (NR)*

Fig-I: Enlarged view of a fuel channel (1-Fuel Pins)

Fig-II: A view of the NR (2-Fuel Channels)

Fig-III: Top view of NR (3-Square Arrangement of Fuel Channels and 4-Typical Neutron Paths).

Only components relevant to the problem are shown (e.g. control rods and coolant are not shown).

#### A Yakıt Çubuğu

|                            |                                                       |                                                                    |
|----------------------------|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| $\text{UO}_2$ için veriler | 1. Molekül ağırlığı $M_w = 0.270 \text{ kg mol}^{-1}$ | 2. Yoğunluk $\rho = 1.060 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$           |
|                            | 3. Erime noktası $T_m = 3.138 \times 10^3 \text{ K}$  | 4. Isıl iletkenlik $\lambda = 3.280 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ |

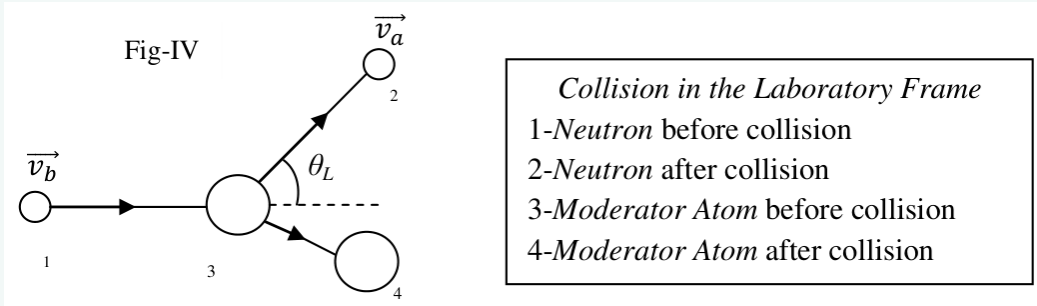
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |     |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| A1 | <p>Durgun bir <math>^{235}\text{U}</math> çekirdeğinin, kinetik enerjisi ihmal edilebilir bir nötronu soğurduktan sonra geçirdiği aşağıdaki fisyon tepkimesini ele alın.</p> $^{235}\text{U} + ^1_0\text{n} \longrightarrow ^{94}\text{Zr} + ^{140}\text{Ce} + 2^1_0\text{n} + \Delta E$ <p>Açığa çıkan toplam fisyon enerjisi <math>\Delta E</math>'yi (MeV cinsinden) tahmin edin. Çekirdek kütleleri şöyledir: <math>m(^{235}\text{U}) = 235.044 \text{ u}</math>; <math>m(^{94}\text{Zr}) = 93.9063 \text{ u}</math>; <math>m(^{140}\text{Ce}) = 139.905 \text{ u}</math>; <math>m(^1_0\text{n}) = 1.00867 \text{ u}</math> ve <math>1 \text{ u} = 931.502 \text{ MeV } c^{-2}</math>. Yük dengesizliğini göz ardı edin.</p> | 0.8 |
| A2 | Doğal $\text{UO}_2$ 'de birim hacim başına düşen $^{235}\text{U}$ atomu sayısı $N$ 'yi tahmin edin.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0.5 |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |     |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| A3 | Yakıt üzerindeki nötron akı yoğunluğunun, $\varphi = 2.000 \times 10^{18} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$ , düzgün olduğunu varsayın. Bir $^{235}\text{U}$ çekirdeğinin fisyon tesir kesiti (hedef çekirdeğin etkin alanı) $\sigma_f = 5.400 \times 10^{-26} \text{ m}^2$ 'dir. Fisyon enerjisinin %80.00'i ısı olarak kullanılabiliriyorsa çubukta birim hacim başına ısı üretim hızı $Q'$ 'yu ( $\text{W m}^{-3}$ cinsinden) tahmin edin. $1\text{MeV} = 1.602 \times 10^{-13} \text{ J}$ | 1.2 |
| A4 | Çubuğun merkezi ( $T_c$ ) ile yüzeyi ( $T_s$ ) arasındaki kararlı durum sıcaklık farkı $T_c - T_s = k F(Q, a, \lambda)$ olarak ifade edilebilir; burada $k = 1/4$ boyutsuz bir sabit, $a$ ise çubuğun yarıçapıdır. Boyut analizi yoluyla $F(Q, a, \lambda)$ 'yı elde edin. $\lambda$ 'nın $\text{UO}_2$ 'nin ısı iletkenliği olduğunu dikkate alın.                                                                                                                                      | 0.5 |
| A5 | Soğutucunun istenen sıcaklığı $5.770 \times 10^2 \text{ K}$ 'dir. Çubuğun $a$ yarıçapı için üst sınır $a_u$ 'yu tahmin edin.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 1.0 |

## B Moderatör

Kütlesi  $1 \text{ u}$  olan bir nötron ile kütlesi  $A \text{ u}$  olan bir moderatör atomu arasındaki iki boyutlu esnek çarpışmayı ele alın. Çarpışmadan önce tüm moderatör atomlarının laboratuvar referans sisteminde (LF) durgun olduğu kabul edilmektedir.  $\vec{v}_b$  ve  $\vec{v}_a$ , sırasıyla nötronun çarpışmadan önceki ve sonraki LF hızları olsun.  $\vec{v}_m$ , kütle merkezi (CM) referans sisteminin LF'ye göre hızı,  $\theta$  ise nötronun CM sistemindeki saçılma açısı olsun. Çarpışmalara katılan tüm parçacıklar göreceli olmayan süratlerle hareket etmektedir.

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| B1 | LF'deki çarpışma şematik olarak gösterilmiştir; burada $\theta_L$ saçılma açısıdır (Şekil-IV). Çarpışmayı CM sisteminde şematik olarak çizin. 1, 2 ve 3 için parçacık hızlarını $\vec{v}_b$ , $\vec{v}_a$ ve $\vec{v}_m$ cinsinden etiketleyin. Saçılma açısı $\theta$ 'yı belirtin. | 1.0 |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|



|    |                                                                                                                                                                                                                                            |     |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| B2 | Çarpışmadan sonra nötronun ve moderatör atomunun CM sistemindeki süratleri olan $v$ ve $V$ 'yi $A$ ve $v_b$ cinsinden elde edin.                                                                                                           | 1.0 |
| B3 | $G(\alpha, \theta) = E_a/E_b$ için bir ifade türetin; burada $E_b$ ve $E_a$ , sırasıyla nötronun çarpışmadan önceki ve sonraki LF kinetik enerjileridir ve $\alpha \equiv [(A - 1)/(A + 1)]^2$ 'dir.                                       | 1.0 |
| B4 | Yukarıdaki ifadenin $\text{D}_2\text{O}$ molekülü için geçerli olduğunu varsayın. $\text{D}_2\text{O}$ ( $20 \text{ u}$ ) moderatörü için nötronun mümkün olan en büyük kesirsel enerji kaybı $f_l \equiv (E_b - E_a)/E_b$ 'yi hesaplayın. | 0.5 |

## C Nükleer Reaktör

NR'yi herhangi bir sabit nötron akısı  $\psi$  ile (kararlı durumda) çalıştırabilmek için nötron kaçığının reaktördeki fazla nötron üretimiyle karşılanması gerekir. Silindirik geometrili bir reaktör için kaçık hızı  $k_1[(2.405/R)^2 + (\pi/H)^2]\psi$ , fazla üretim hızı ise  $k_2\psi$ 'dir.  $k_1$  ve  $k_2$  sabitleri NR'nin malzeme özelliklerine bağlıdır.

|    |                                                                                                                                                                                                                                |     |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| C1 | $k_1 = 1.021 \times 10^{-2} \text{ m}$ ve $k_2 = 8.787 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ olan bir NR'yi ele alın. Yakıtın verimli kullanılması için sabit bir hacimde kaçık hızının en aza indirilmesi gerektiğini dikkate alarak | 1.5 |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |     |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|    | NR'nin kararlı durumdaki boyutlarını elde edin.                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |     |
| C2 | Yakıt kanalları, en yakın komşu uzaklığı 0.286 m olan kare bir düzende yerleştirilmiştir (Şekil-III). Bir yakıt kanalının (içi tamamen katı yakıtla dolu olsaydı) etkin yarıçapı $3.617 \times 10^{-2}$ m 'dir. Reaktördeki yakıt kanalı sayısı $F_n$ 'yi ve NR'yi kararlı durumda çalıştırmak için gereken $\text{UO}_2$ kütlesi $M$ 'yi tahmin edin. | 1.0 |

<sup>1</sup> Bu sorunun başlıca yazarları Joseph Amal Nathan (BARC) ve Vijay A. Singh (Bilim Olimpiyatları eski Ulusal Koordinatörü) olmuştur. Akademik Komite, Akademik Gelişim Grubu ve Uluslararası Kurulun katkılarına teşekkür ederiz.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

## Cevaplar

- **A1:**  $\Delta E \simeq 208.7 \text{ MeV}$ .
- **A2:**  $N \simeq 1.70 \times 10^{26} \text{ m}^{-3}$ .
- **A3:**  $Q \simeq 4.92 \times 10^8 \text{ W m}^{-3}$ .
- **A4:**  $F(Q, a, \lambda) = \frac{Qa^2}{\lambda}$ , dolayısıyla  $T_c - T_s = \frac{Qa^2}{4\lambda}$ .
- **A5:**  $a_u \simeq 8.27 \times 10^{-3} \text{ m} = 8.27 \text{ mm}$ .
- **B1:** CM hız etiketleri: 1 :  $\vec{v}_b - \vec{v}_m$ , 2 :  $\vec{v}_a - \vec{v}_m$ , 3 :  $-\vec{v}_m$ . Nötronun ilk ve son hızları arasındaki açı  $\theta$ 'dir; çarpışmadan çıkan iki parçacık zıt yönlerde hareket eder.
- **B2:**  $v = \frac{A}{A+1} v_b$ ,  $V = \frac{1}{A+1} v_b$ .
- **B3:**  $G(\alpha, \theta) = \frac{1 + \alpha + (1 - \alpha) \cos \theta}{2}$ .
- **B4:**  $f_{l,\max} = \frac{80}{441} \simeq 0.1814 = 18.14\%$ .
- **C1:**  $R = 2.405 \sqrt{\frac{3k_1}{2k_2}} \simeq 3.175 \text{ m}$ ,  $H = \pi \sqrt{\frac{3k_1}{k_2}} \simeq 5.865 \text{ m}$ .
- **C2:**  $F_n \simeq 387$  yakıt kanalı;  $M \simeq 9.89 \times 10^4 \text{ kg}$ , yani 98.9 ton  $\text{UO}_2$ .

## Çözüm

### A1

İlk kinetik enerji ihmal edilebilir olduğundan, enerjinin korunumu açığı çıkan enerjiyi toplam durgunluk enerjisindeki azalma olarak verir:

$$\Delta E = [m(^{235}\text{U}) + m(^1\text{n}) - m(^{94}\text{Zr}) - m(^{140}\text{Ce}) - 2m(^1\text{n})] c^2.$$

Verilen kütleler herhangi bir yük düzeltmesi yapılmadan kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \Delta m &= [235.044 + 1.00867 - (93.9063 + 139.905 + 2(1.00867))] \text{u} \\ &= 0.22403 \text{ u}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$\Delta E = 0.22403(931.502) \text{ MeV} = 208.684 \dots \text{ MeV},$$

yani

$$\Delta E \simeq 208.7 \text{ MeV}.$$

**A2**

$\text{UO}_2$ 'nin her formül birimi bir uranyum atomu içerir. Birim hacim başına formül birimi sayısı

$$n_{\text{UO}_2} = \frac{\rho}{M_w} N_A,$$

olup burada standart Avogadro sabiti  $N_A \simeq 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ 'dir.

Uranyum atomlarının  $^{235}\text{U}$  olanlarının oranı 0.00720'dir. Buradan

$$\begin{aligned} N &= 0.00720 \frac{\rho N_A}{M_w} \\ &= 0.00720 \frac{1.060 \times 10^4}{0.270} (6.022 \times 10^{23}) \text{ m}^{-3} \\ &= 1.7022 \dots \times 10^{26} \text{ m}^{-3}. \end{aligned}$$

Böylece

$$N \simeq 1.70 \times 10^{26} \text{ m}^{-3}.$$

**A3**

Verilen düzgün nötron akısında bir hedef çekirdeğin fisyon hızı  $\varphi\sigma_f$ 'dir. Dolayısıyla birim hacim başına fisyon hızı

$$r_f = N\varphi\sigma_f.$$

Sayısal olarak,

$$\varphi\sigma_f = (2.000 \times 10^{18})(5.400 \times 10^{-26}) = 1.080 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1},$$

ve

$$r_f = 1.8384 \dots \times 10^{19} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

Fisyon başına ısı olarak aktarılan enerji

$$E_h = 0.8000 \Delta E = 0.8000(208.684 \dots)(1.602 \times 10^{-13}) \text{ J}.$$

Bunun sonucunda,

$$\begin{aligned} Q &= N\varphi\sigma_f E_h \\ &= 4.9168 \dots \times 10^8 \text{ W m}^{-3}, \end{aligned}$$

ve buradan

$$Q \simeq 4.92 \times 10^8 \text{ W m}^{-3}.$$

**A4**

$F$ 'nin boyutsal biçimi  $Q^x a^y \lambda^z$  olsun. Güç, uzunluk ve sıcaklık boyutlarını  $P, L, \Theta$  ile gösterirsek,

$$[Q] = PL^{-3}, \quad [a] = L, \quad [\lambda] = PL^{-1}\Theta^{-1}.$$

Böylece

$$[F] = P^{x+z} L^{-3x+y-z} \Theta^{-z}.$$

$F$ 'nin sıcaklık boyutuna sahip olması için,

$$x + z = 0, \quad -3x + y - z = 0, \quad -z = 1.$$

Bu denklemlerden

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = -1.$$

Boyutsuz sayısal çarpan zaten  $k$  olarak verildiğinden,

$$\boxed{F(Q, a, \lambda) = \frac{Qa^2}{\lambda}}, \quad \boxed{T_c - T_s = \frac{Qa^2}{4\lambda}}.$$

**A5**

İçeride düzgün ısı üretimi olduğunda çubuğun en sıcak kısmı merkezidir. Erimenin önlenmesi için

$$T_c \leq T_m.$$

Isının çubuk yüzeyinden soğutucuya akması gerektiğinden, yüzey sıcaklığı soğutucu sıcaklığının altında olamaz:

$$T_s \geq T_{\text{cool}}.$$

Buradan

$$\frac{Qa^2}{4\lambda} = T_c - T_s \leq T_m - T_{\text{cool}}.$$

Dolayısıyla sınır yarıçapı

$$a_u = \sqrt{\frac{4\lambda(T_m - T_{\text{cool}})}{Q}}.$$

Şu değeri kullanarak

$$T_m - T_{\text{cool}} = 3138 - 577.0 = 2561 \text{ K},$$

şunu elde ederiz:

$$a_u = \sqrt{\frac{4(3.280)(2561)}{4.9168 \dots \times 10^8}} = 8.2667 \dots \times 10^{-3} \text{ m}.$$

Böylece

$$\boxed{a_u \simeq 8.27 \text{ mm}}.$$

Bu üst sınır, ideal sınır durumu olan  $T_s = T_{\text{cool}}$ 'a karşılık gelir. Yüzey ile soğutucu arasında sonlu bir sıcaklık düşüşü olması, izin verilebilir yarıçapı azaltır.

**B1**

Nötronun kütlesi  $m$  olsun; bu durumda moderatörün kütlesi  $Am$ 'dir. Çarpışmadan önce moderatör LF'de durumdur. Dolayısıyla CM hızı

$$\vec{v}_m = \frac{m\vec{v}_b + Am\vec{0}}{(A+1)m} = \frac{\vec{v}_b}{A+1}.$$

CM sistemine yapılan bir Galile dönüşümü, her LF hızından  $\vec{v}_m$ 'yi çıkarır. Böylece istenen etiketler

$$\boxed{\vec{u}_1 = \vec{v}_b - \vec{v}_m, \quad \vec{u}_2 = \vec{v}_a - \vec{v}_m, \quad \vec{u}_3 = -\vec{v}_m}.$$

Çizim şu özellikleri taşımalıdır:

- Çarpışmadan önce nötron **1**,  $\vec{v}_b - \vec{v}_m$  hızıyla yatay olarak sağa hareket ederek soldan yaklaşır.

- Moderatör **3**,  $-\vec{v}_m$  hızıyla yatay olarak sola hareket ederek sağdan yaklaşır.
- Çarpışmadan sonra nötron **2**, çarpışma noktasından  $\vec{v}_a - \vec{v}_m$  hızıyla ayrılır. Bu ok ile nötronun başlangıçtaki sağa doğru yönü arasına  $\theta$ 'yı işaretleyin.
- Moderatör **4**, CM sistemindeki toplam momentum sıfır olduğundan, nötron **2**'nin tam zıt yönünde ayrılır. Hızı

$$\vec{u}_4 = -\frac{\vec{u}_2}{A}.$$

Örneğin, çıkan nötronun oku yukarı ve sağa yönelmişse, çıkan moderatörün oku aşağı ve sola yönelir.

## B2

Başlangıçtaki CM süratleri

$$u_{n,b} = v_b - v_m = \frac{A}{A+1}v_b, \quad u_{M,b} = v_m = \frac{1}{A+1}v_b.$$

CM sisteminde momentumun korunumu, son momentumların eşit büyüklükte ve zıt yönde olmasını gerektirir. Bu nedenle büyüklükleri şu bağıntıyı sağlar:

$$mv = AmV, \quad \text{dolayısıyla} \quad v = AV.$$

Çarpışma esnek olduğundan kinetik enerji korunur:

$$\frac{1}{2}mu_{n,b}^2 + \frac{1}{2}Amu_{M,b}^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}AmV^2.$$

$m/2$  sadeleştirildikten sonra,

$$\frac{A}{A+1}v_b^2 = v^2 + AV^2.$$

$v = AV$  yerine konulduğunda

$$A(A+1)V^2 = \frac{A}{A+1}v_b^2.$$

Buradan

$$\boxed{V = \frac{v_b}{A+1}}, \quad \boxed{v = \frac{A}{A+1}v_b}.$$

Çarpışma hızların yönlerini değiştirir, ancak her parçacığın CM sistemindeki sürati değişmeden kalır.

## B3

Nötronun son LF hızı

$$\vec{v}_a = \vec{v}_m + \vec{u}_2.$$

$\vec{v}_m$  vektörü nötronun başlangıçtaki yönü boyunca uzanırken,  $\vec{u}_2$  bu yönle  $\theta$  açısı yapar. Dolayısıyla,

$$v_a^2 = v_m^2 + v^2 + 2v_mv \cos \theta.$$

Yukarıdaki sonuçlar kullanılarak,

$$\frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{1 + A^2 + 2A \cos \theta}{(A+1)^2}.$$

Her iki enerji de LF'deki aynı nötrona ait olduğundan,

$$G(\alpha, \theta) = \frac{E_a}{E_b} = \frac{v_a^2}{v_b^2}.$$

Şimdi

$$\alpha = \frac{(A-1)^2}{(A+1)^2}$$

bağıntısından

$$\frac{1+\alpha}{2} = \frac{A^2+1}{(A+1)^2}, \quad \frac{1-\alpha}{2} = \frac{2A}{(A+1)^2}.$$

Dolayısıyla,

$$G(\alpha, \theta) = \frac{1+\alpha+(1-\alpha)\cos\theta}{2}.$$

Eşdeğer bir biçim

$$G(\alpha, \theta) = 1 - (1-\alpha)\sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Özellikle, ileri saçılma  $G = 1$  verirken, CM sistemindeki geri saçılma  $G = \alpha$  verir.

#### B4

Kesirsel enerji kaybı

$$f_l = 1 - G = (1-\alpha)\sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Bu kayıp, CM sisteminde geri saçılma, yani  $\theta = \pi$  için en büyüktür. Böylece

$$f_{l,\max} = 1 - \alpha = 1 - \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 = \frac{4A}{(A+1)^2}.$$

Soruda kullanılan,  $D_2O$  molekülünün tamamının 20 u kütleli bir hedef olduğu yaklaşımına uyarak  $A = 20$  alalım:

$$f_{l,\max} = \frac{4(20)}{21^2} = \frac{80}{441} \simeq 0.1814 = 18.14\%.$$

#### C1

Sıfırdan farklı bir kararlı nötron akısı için üretim ve kaçak dengelenmelidir:

$$k_1 \left[ \frac{2.405^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} \right] \psi = k_2 \psi.$$

$\psi$  sadeleştirildiğinde,

$$\frac{2.405^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} = \frac{k_2}{k_1}. \quad (1)$$

Önce sabit hacimde kaçığı en aza indiren şekli belirleyelim. Şöyle yazalım:

$$\mathcal{V} = \pi R^2 H, \quad b = 2.405,$$

böylece

$$H = \frac{\mathcal{V}}{\pi R^2}.$$

Kaçak hızındaki geometrik çarpan şu hâli alır:

$$S(R) = \frac{b^2}{R^2} + \frac{\pi^4 R^4}{\mathcal{V}^2}.$$

Türevi şu koşul sağlandığında sıfır olur:

$$-\frac{2b^2}{R^3} + \frac{4\pi^4 R^3}{\mathcal{V}^2} = 0.$$

Yeniden düzenleyip  $\mathcal{V} = \pi R^2 H$  bağıntısını kullanarak,

$$\boxed{\frac{b^2}{R^2} = 2 \frac{\pi^2}{H^2}}. \quad (2)$$

Bu durağan nokta bir minimumdur, çünkü

$$S''(R) = \frac{6b^2}{R^4} + \frac{12\pi^4 R^2}{\mathcal{V}^2} > 0.$$

Dolayısıyla en uygun boyut oranı

$$\frac{H}{R} = \frac{\sqrt{2}\pi}{b} = 1.84735 \dots$$

(1) ve (2) birleştirildiğinde,

$$3 \frac{\pi^2}{H^2} = \frac{k_2}{k_1},$$

buradan

$$\boxed{H = \pi \sqrt{\frac{3k_1}{k_2}}}, \quad \boxed{R = b \sqrt{\frac{3k_1}{2k_2}}}.$$

Sayısal olarak,

$$H = \pi \sqrt{\frac{3(1.021 \times 10^{-2})}{8.787 \times 10^{-3}}} \simeq \boxed{5.865 \text{ m}},$$

$$R = 2.405 \sqrt{\frac{3(1.021 \times 10^{-2})}{2(8.787 \times 10^{-3})}} \simeq \boxed{3.175 \text{ m}}.$$

## C2

Kare örgünün aralığı  $d = 0.286 \text{ m}$  olsun. Sınır düzeltmeleri ihmal edildiğinde, her yakıt kanalı kesit alanı  $d^2$  olan bir kare hücre kaplar. Dolayısıyla,

$$F_n \simeq \frac{\pi R^2}{d^2}.$$

Değerler yerine konulduğunda

$$F_n \simeq \frac{\pi(3.17507 \dots)^2}{(0.286)^2} = 387.19 \dots$$

Buradan tahmini sayı

$$F_n \simeq 387 \text{ yakıt kanalı}.$$

Etkin katı yakıt yarıçapı  $r_f = 3.617 \times 10^{-2}$  m olduğunda, bir kanaldaki  $\text{UO}_2$  hacmi  $\pi r_f^2 H$ 'dir. Dolayısıyla kütlesi  $\rho \pi r_f^2 H$ , toplam yakıt kütlesi ise

$$M = F_n \rho \pi r_f^2 H.$$

Yuvarlanmamış alan tahmini kullanılarak,

$$\begin{aligned} M &\simeq (387.19 \dots)(1.060 \times 10^4) \pi (3.617 \times 10^{-2})^2 (5.86547 \dots) \text{ kg} \\ &= 9.8942 \dots \times 10^4 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Böylece

$$M \simeq 9.89 \times 10^4 \text{ kg} = 98.9 \text{ ton } \text{UO}_2.$$

---

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.