

IPhO 2015

Теоретические задачи и решения · Мумбаи, Индия · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/2015/

Задача 1: Частицы от Солнца

Фотоны с поверхности Солнца и нейтрино из его ядра могут рассказать нам о температурах Солнца, а также подтвердить, что Солнце светит благодаря ядерным реакциям.

Во всей задаче считайте массу Солнца равной $M_{\odot} = 2.00 \times 10^{30}$ kg, его радиус — $R_{\odot} = 7.00 \times 10^8$ m, его светимость (энергию излучения, испускаемую за единицу времени) — $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{26}$ W, а расстояние от Земли до Солнца — $d_{\odot} = 1.50 \times 10^{11}$ m.

Примечание:

$$(i) \quad \int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} + \text{постоянная}$$

$$(ii) \quad \int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax} + \text{постоянная}$$

$$(iii) \quad \int x^3 e^{ax} dx = \left(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4} \right) e^{ax} + \text{постоянная}$$

А Излучение Солнца :

Часть	Вопрос	Баллы
A1	Предположите, что Солнце излучает как абсолютно чёрное тело. Используя это предположение, вычислите температуру T_s поверхности Солнца.	0.3

Спектр солнечного излучения хорошо описывается законом распределения Вина. Согласно этому закону, энергия солнечного излучения, падающая на некоторую поверхность на Земле за единицу времени в единичном интервале частот, $u(\nu)$, задаётся выражением

$$u(\nu) = A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi h}{c^2} \nu^3 \exp(-h\nu/k_B T_s),$$

где ν — частота, а A — площадь поверхности, перпендикулярной направлению падающего излучения.

Теперь рассмотрим солнечный элемент, представляющий собой тонкий диск из полупроводникового материала площадью A , расположенный перпендикулярно направлению солнечных лучей.

Часть	Вопрос	Баллы
A2	Используя приближение Вина, выразите полную мощность солнечного излучения P_{in} , падающего на поверхность солнечного элемента, через A , $R_{\odot}$,	0.3

Часть	Вопрос	Баллы
	$d_{\odot}$, T_s и фундаментальные постоянные c , h , k_B .	
A3	Выразите число фотонов $n_{\gamma}(\nu)$, падающих на поверхность солнечного элемента за единицу времени в единичном интервале частот, через A , $R_{\odot}$, $d_{\odot}$, T_s , ν и фундаментальные постоянные c , h , k_B .	0.2

Полупроводниковый материал солнечного элемента имеет запрещённую зону шириной E_g . Примем следующую модель. Каждый фотон с энергией $E \geq E_g$ возбуждает электрон, переводя его через запрещённую зону. Этот электрон даёт полезную выходную энергию E_g , а вся избыточная энергия рассеивается в виде тепла (не преобразуется в полезную энергию).

Часть	Вопрос	Баллы
A4	Введём $x_g = h\nu_g/k_B T_s$, где $E_g = h\nu_g$. Выразите полезную выходную мощность элемента P_{out} через x_g , A , $R_{\odot}$, $d_{\odot}$, T_s и фундаментальные постоянные c , h , k_B .	1.0
A5	Выразите КПД η этого солнечного элемента через x_g .	0.2
A6	Изобразите качественный график зависимости η от x_g . Значения при $x_g = 0$ и $x_g \rightarrow \infty$ должны быть ясно указаны. Каков наклон графика $\eta(x_g)$ при $x_g = 0$ и $x_g \rightarrow \infty$?	1.0
A7	Пусть x_0 — значение x_g , при котором η максимален. Получите кубическое уравнение, определяющее x_0 . Оцените значение x_0 с точностью ± 0.25 . Затем вычислите $\eta(x_0)$.	1.0
A8	Ширина запрещённой зоны чистого кремния равна $E_g = 1.11$ эВ. Используя это значение, вычислите КПД η_{Si} кремниевое солнечного элемента.	0.2

¹ Основными авторами этой задачи были Амол Диге (TIFR), Анвеш Мазумдар (HBCSE-TIFR) и Виджай А. Сингх (бывший национальный координатор научных олимпиад). Авторы с благодарностью отмечают вклад академического комитета, группы академического развития и международного совета.

В конце XIX века Кельвин и Гельмгольц (КН) предложили гипотезу, объясняющую, почему Солнце светит. Они предположили, что Солнце, первоначально представлявшее собой очень большое облако вещества массой $M_{\odot}$ и пренебрежимо малой плотности, непрерывно сжималось. Тогда свечение Солнца было бы обусловлено высвобождением гравитационной потенциальной энергии при этом медленном сжатии.

Часть	Вопрос	Баллы
A9	Предположим, что плотность вещества внутри Солнца однородна. Найдите полную гравитационную потенциальную энергию Ω Солнца в настоящее время через G , $M_{\odot}$ и $R_{\odot}$.	0.3
A10	Оцените максимально возможное время $\tau_{\text{КН}}$ (в годах), в течение которого Солнце могло светить согласно гипотезе КН. Считайте, что светимость Солнца оставалась постоянной на протяжении всего этого времени.	0.5

Вычисленное выше значение $\tau_{\text{КН}}$ не соответствует возрасту Солнечной системы, оценённому по исследованиям метеоритов. Это показывает, что источник энергии Солнца не может быть исключительно гравитационным.

В Нейтрино от Солнца :

В 1938 году Ганс Бете предположил, что источником энергии Солнца является ядерный синтез гелия из водорода в его ядре. Суммарная ядерная реакция имеет вид:



«Электронные нейтрино» ν_e , образующиеся в этой реакции, можно считать безмассовыми. Они покидают Солнце, и их регистрация на Земле подтверждает протекание ядерных реакций внутри Солнца. В этой задаче энергией, уносимой нейтрино, можно пренебречь.

Часть	Вопрос	Баллы
B1	Вычислите плотность потока числа нейтрино Φ_ν , достигающих Земли, в единицах $\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$. Энергия, выделяющаяся в приведённой выше реакции, равна $\Delta E = 4.0 \times 10^{-12}\text{ J}$. Считайте, что вся энергия, излучаемая Солнцем, обусловлена этой реакцией.	0.6

На пути от ядра Солнца к Земле часть электронных нейтрино ν_e превращается в нейтрино других типов ν_x . Эффективность регистрации ν_x детектором составляет 1/6 от его эффективности регистрации ν_e . При отсутствии превращений нейтрино мы ожидали бы регистрировать в среднем N_1 нейтрино за год. Однако из-за превращений фактически за год регистрируется в среднем N_2 нейтрино (суммарно ν_e и ν_x).

Часть	Вопрос	Баллы
B2	Вычислите через N_1 и N_2 , какая доля f нейтрино ν_e превращается в ν_x .	0.4

Для регистрации нейтрино сооружают большие детекторы, заполненные водой. Хотя взаимодействия нейтрино с веществом происходят крайне редко, иногда они выбивают электроны из молекул воды в детекторе. Эти электроны с высокой энергией движутся в воде с большими скоростями, испуская при этом электромагнитное излучение. Пока скорость такого электрона превышает скорость света в воде (показатель преломления n), это излучение, называемое излучением Черенкова, испускается в виде конуса.

Часть	Вопрос	Баллы
B3	Предположите, что электрон, выбитый нейтрино, при движении в воде теряет энергию с постоянной скоростью α за единицу времени. Если этот электрон испускает излучение Черенкова в течение времени Δt , определите энергию (E_{imparted}), переданную ему нейтрино, через α , Δt , n , m_e и c . (Считайте, что до взаимодействия с нейтрино электрон покоился.)	2.0

Синтез He из H внутри Солнца происходит в несколько этапов. На одном из этих промежуточных этапов образуется ядро ${}^7\text{Be}$ (масса покоя m_{Be}). Впоследствии оно может захватить электрон, образуя ядро ${}^7\text{Li}$ (масса покоя $m_{\text{Li}} < m_{\text{Be}}$) и испуская ν_e .

Соответствующая ядерная реакция имеет вид:



Когда покоящееся ядро Be ($m_{\text{Be}} = 11.65 \times 10^{-27}\text{ kg}$) захватывает также покоящийся электрон, испущенное нейтрино имеет энергию $E_\nu = 1.44 \times 10^{-13}\text{ J}$. Однако из-за температуры T_c в ядре Солнца ядра Be совершают хаотическое тепловое движение и служат движущимися источниками нейтрино. В результате энергия испускаемых нейтрино флуктуирует со среднеквадратичным отклонением ΔE_{rms} .

Часть	Вопрос	Баллы
B4	Если $\Delta E_{\text{rms}} = 5.54 \times 10^{-17} \text{ J}$, вычислите среднеквадратичную скорость ядер Ве V_{Be} и затем оцените T_c . (Подсказка: ΔE_{rms} зависит от среднеквадратичного значения компоненты скорости вдоль луча зрения.)	2.0

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- A1

$$T_s = \left(\frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2 \sigma} \right)^{1/4} \simeq 5.76 \times 10^3 \text{ K}.$$

- A2

$$P_{\text{in}} = \frac{12\pi A R_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3}.$$

- A3

$$n_{\gamma}(\nu) = \frac{2\pi A R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2 c^2} \nu^2 e^{-h\nu/(k_B T_s)}.$$

- A4

$$P_{\text{out}} = \frac{2\pi A R_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3} x_g (x_g^2 + 2x_g + 2) e^{-x_g}.$$

- A5

$$\eta(x_g) = \frac{x_g (x_g^2 + 2x_g + 2) e^{-x_g}}{6}.$$

- A6 Кривая начинается в начале координат с наклоном $1/3$, достигает единственного максимума вблизи $(2.27, 0.457)$ и приближается к горизонтальной оси сверху:

$$\eta(0) = 0, \quad \lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta = 0, \quad \eta'(0) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta' = 0 \quad \text{снизу.}$$

- A7

$$x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0, \quad x_0 \simeq 2.27, \quad \eta(x_0) \simeq 0.457 = 45.7\%.$$

- A8

$$x_{g,\text{Si}} \simeq 2.24, \quad \eta_{\text{Si}} \simeq 0.457 = 45.7\%.$$

- A9

$$\Omega = -\frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}} \simeq -2.29 \times 10^{41} \text{ J}.$$

- A10

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot} L_{\odot}} \simeq 1.88 \times 10^7 \text{ years}.$$

• B1

$$\Phi_\nu = \frac{2L_\odot}{4\pi d_\odot^2 \Delta E} \simeq 6.8 \times 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

• B2

$$f = \frac{6}{5} \left(1 - \frac{N_2}{N_1} \right).$$

• B3

$$E_{\text{imparted}} = \alpha \Delta t + m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}} - 1 \right).$$

• B4

$$V_{\text{Be}} = \sqrt{3} c \frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_\nu} \simeq 2.00 \times 10^5 \text{ m s}^{-1},$$

$$T_c = \frac{m_{\text{Be}} c^2}{k_B} \left(\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_\nu} \right)^2 \simeq 1.12 \times 10^7 \text{ K}.$$

Решение

Для численных расчётов используем стандартные постоянные

$$\begin{aligned} \sigma &= 5.6704 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}, \\ G &= 6.6743 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \\ k_B &= 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}, \\ c &= 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}, \end{aligned}$$

а также $1 \text{ eV} = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J}$ и $1 \text{ year} = 3.15576 \times 10^7 \text{ s}$.

A1

По закону Стефана — Больцмана абсолютно чёрное тело излучает мощность σT^4 с единицы площади поверхности. Площадь излучающей поверхности Солнца равна $4\pi R_\odot^2$, поэтому

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_s^4.$$

Следовательно,

$$T_s = \left[\frac{3.85 \times 10^{26}}{4\pi(7.00 \times 10^8)^2(5.6704 \times 10^{-8})} \right]^{1/4} = \boxed{5.76 \times 10^3 \text{ K}}.$$

A2

Полная падающая мощность равна интегралу по всем частотам:

$$P_{\text{in}} = A \frac{R_\odot^2}{d_\odot^2} \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \nu^3 e^{-h\nu/(k_B T_s)} d\nu.$$

Положим

$$x = \frac{h\nu}{k_B T_s}, \quad d\nu = \frac{k_B T_s}{h} dx.$$

Тогда

$$P_{\text{in}} = \frac{2\pi AR_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3} \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx.$$

Приведённая в условии формула интегрирования даёт

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = [-e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)]_0^{\infty} = 6.$$

Таким образом,

$$P_{\text{in}} = \frac{12\pi AR_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3}.$$

Во всех приведённых ниже расчётах КПД используется эта же входная мощность, полученная в приближении Вина.

A3

Каждый фотон частоты ν несёт энергию $h\nu$. Разделив спектральную мощность на эту энергию, получим число приходящих фотонов за единицу времени в единичном интервале частот:

$$n_{\gamma}(\nu) = \frac{u(\nu)}{h\nu}.$$

Отсюда

$$n_{\gamma}(\nu) = \frac{2\pi AR_{\odot}^2}{d_{\odot}^2 c^2} \nu^2 e^{-h\nu/(k_B T_s)}.$$

Эта величина измеряется в фотонах в секунду на герц.

A4

Вклад дают только фотоны с $\nu \geq \nu_g$, причём каждый из них даёт полезную энергию E_g . Следовательно,

$$P_{\text{out}} = E_g \int_{\nu_g}^{\infty} n_{\gamma}(\nu) d\nu.$$

Используя $E_g = x_g k_B T_s$ и замену переменной из A2, получаем

$$P_{\text{out}} = \frac{2\pi AR_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3} x_g \int_{x_g}^{\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

При этом

$$\int_{x_g}^{\infty} x^2 e^{-x} dx = [-(x^2 + 2x + 2)e^{-x}]_{x_g}^{\infty} = (x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g}.$$

Следовательно,

$$P_{\text{out}} = \frac{2\pi AR_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3} x_g (x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g}.$$

A5

КПД равен отношению полезной выходной мощности к падающей мощности:

$$\eta = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}.$$

Общие размерные и геометрические множители сокращаются, и получаем

$$\eta(x_g) = \frac{x_g(x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g}}{6}, \quad x_g \geq 0.$$

A6

При нулевой ширине запрещённой зоны

$$\eta(0) = 0.$$

Хотя фотоны в этом случае могут возбуждать электроны, полезная энергия на один электрон равна нулю.

При больших x_g

$$\eta(x_g) \sim \frac{x_g^3 e^{-x_g}}{6},$$

поэтому

$$\lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta(x_g) = 0.$$

Экспоненциально малое число фотонов с энергией выше ширины запрещённой зоны приводит к исчезновению полезной выходной мощности.

Дифференцируя, получаем

$$\eta'(x_g) = \frac{e^{-x_g}}{6} (-x_g^3 + x_g^2 + 2x_g + 2).$$

Таким образом,

$$\eta'(0) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta'(x_g) = 0 \text{ снизу}.$$

График начинается в начале координат с касательной $\eta = x_g/3$, возрастает до единственного максимума вблизи $x_g = 2.27$, а затем убывает к горизонтальной асимптоте $\eta = 0$, оставаясь положительным. Дополнительную информацию о форме кривой даёт

$$\eta''(x_g) = \frac{e^{-x_g}}{6} x_g^2 (x_g - 4),$$

поэтому кривая выпукла вверх при $0 < x_g < 4$ и выпукла вниз при $x_g > 4$.

Характерные точки:

x_g	$\eta(x_g)$
0	0
1	0.307
2	0.451
2.27	0.457
4	0.317

x_g	$\eta(x_g)$
6	0.124
10	0.00923
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow 0$

A7

В точке максимума $\eta'(x_0) = 0$. Поскольку экспоненциальный множитель нигде не обращается в нуль,

$$-x_0^3 + x_0^2 + 2x_0 + 2 = 0,$$

или

$$x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0.$$

При $x_0 > 0$ это равносильно уравнению

$$x_0 = 1 + \frac{2}{x_0} + \frac{2}{x_0^2}.$$

Левая часть строго возрастает с x_0 , а правая — строго убывает. Следовательно, существует только одна положительная стационарная точка. Вместе с поведением на границах области, установленным в A6, это доказывает, что она является точкой глобального максимума.

Пусть $F(x) = x^3 - x^2 - 2x - 2$. Тогда

$$F(2) = -2, \quad F(2.5) = 2.375.$$

Таким образом, $2 < x_0 < 2.5$, что уже даёт $x_0 = 2.25 \pm 0.25$. Уточнение даёт

$$x_0 \simeq 2.27.$$

Подставляя в выражение для КПД, получаем

$$\eta(x_0) = \frac{x_0(x_0^2 + 2x_0 + 2)e^{-x_0}}{6} \simeq 0.45703.$$

Следовательно,

$$\eta_{\max} \simeq 45.7\%.$$

A8

При температуре поверхности, найденной в A1,

$$k_B T_s \simeq 0.4966 \text{ eV}.$$

Для кремния

$$x_{g,\text{Si}} = \frac{E_g}{k_B T_s} = \frac{1.11}{0.4966} \simeq 2.235.$$

Следовательно,

$$\eta_{\text{Si}} = \frac{2.235 (2.235^2 + 2(2.235) + 2) e^{-2.235}}{6} \simeq 0.45694.$$

Таким образом,

$$\eta_{\text{Si}} \simeq 45.7\%.$$

Это значение очень близко к максимальному, поскольку ширина запрещённой зоны кремния близка к оптимальной ширине $x_0 k_B T_s \simeq 1.13 \text{ eV}$.

A9

Соберём однородный шар, последовательно принося из бесконечности тонкие сферические оболочки. При радиусе r уже собранная масса равна

$$M(r) = M_\odot \frac{r^3}{R_\odot^3},$$

а масса оболочки равна

$$dM = \frac{3M_\odot r^2}{R_\odot^3} dr.$$

По теореме о сферической оболочке добавляемая потенциальная энергия равна

$$d\Omega = -\frac{GM(r) dM}{r}.$$

Следовательно,

$$\Omega = -\frac{3GM_\odot^2}{R_\odot^6} \int_0^{R_\odot} r^4 dr = -\frac{3GM_\odot^2}{R_\odot^6} \frac{R_\odot^5}{5}.$$

Отсюда

$$\boxed{\Omega = -\frac{3GM_\odot^2}{5R_\odot}} \simeq -2.29 \times 10^{41} \text{ J}.$$

Отрицательный знак соответствует выбору нулевой потенциальной энергии при бесконечном удалении частей системы друг от друга.

A10

Изначальное очень протяжённое облако имеет приблизительно нулевую гравитационную потенциальную энергию. Поэтому при его сжатии высвобождается не более

$$E_{\text{available}} = -\Omega = \frac{3GM_\odot^2}{5R_\odot}.$$

Максимально возможное время свечения получается в предположении, что вся эта высвободившаяся энергия была излучена. При постоянной светимости

$$L_\odot \tau_{\text{KH}} = \frac{3GM_\odot^2}{5R_\odot},$$

поэтому

$$\boxed{\tau_{\text{KH}} = \frac{3GM_\odot^2}{5R_\odot L_\odot}}.$$

Численно

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{2.288 \times 10^{41}}{3.85 \times 10^{26}} \simeq 5.94 \times 10^{14} \text{ s} = \boxed{1.88 \times 10^7 \text{ years}}.$$

Любая часть высвободившейся энергии, сохраняющаяся в виде внутренней энергии, уменьшила бы продолжительность свечения, обеспечиваемого гравитационным сжатием, поэтому это верхняя оценка.

B1

Пренебрегая энергией, уносимой нейтрино, получаем число реакций синтеза в секунду:

$$\dot{N}_{\text{reaction}} = \frac{L_{\odot}}{\Delta E}.$$

В каждой реакции образуются два нейтрино:

$$\dot{N}_{\nu} = \frac{2L_{\odot}}{\Delta E}.$$

При сферически симметричном испускании эти нейтрино пересекают поверхность площадью $4\pi d_{\odot}^2$ на расстоянии Земли от Солнца. Таким образом,

$$\Phi_{\nu} = \frac{2L_{\odot}}{4\pi d_{\odot}^2 \Delta E}.$$

Подстановка даёт

$$\Phi_{\nu} = \frac{2(3.85 \times 10^{26})}{4\pi(1.50 \times 10^{11})^2(4.0 \times 10^{-12})} = 6.8 \times 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

B2

После превращений доля $1 - f$ остаётся электронными нейтрино и даёт $(1 - f)N_1$ регистраций за год. Превратившаяся доля даёт $fN_1/6$, поскольку эффективность её регистрации в шесть раз меньше.

Следовательно,

$$N_2 = (1 - f)N_1 + \frac{fN_1}{6} = N_1 \left(1 - \frac{5f}{6}\right).$$

Решая уравнение, получаем

$$f = \frac{6}{5} \left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right).$$

Физически допустимому диапазону $0 \leq f \leq 1$ соответствует $N_1/6 \leq N_2 \leq N_1$.

B3

Излучение Черенкова прекращается, когда электрон замедляется до скорости света в воде:

$$v_{\text{th}} = \frac{c}{n}.$$

Кинетическая энергия электрона в этот момент определяется релятивистским выражением:

$$K_{\text{th}} = (\gamma_{\text{th}} - 1)m_e c^2, \quad \gamma_{\text{th}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\text{th}}^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}}.$$

За время испускания Δt электрон теряет энергию $\alpha \Delta t$. Поэтому его начальная кинетическая энергия сразу после взаимодействия с нейтрино равна

$$K_i = K_{\text{th}} + \alpha \Delta t.$$

Поскольку до взаимодействия электрон первоначально покоился, энергия, переданная нейтрину, равна K_i . Следовательно,

$$E_{\text{imparted}} = \alpha \Delta t + m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}} - 1 \right).$$

Второе слагаемое существенно: при прекращении черенковского излучения электрон всё ещё обладает кинетической энергией.

B4

Используем указанную модель, в которой разброс энергии обусловлен тепловым движением источников Be. Пусть $v_{\parallel}$ — компонента скорости источника в направлении Земли.

Для безмассового нейтрино импульс в системе покоя источника равен $p_{\nu} = E_{\nu}/c$. В первом порядке по нерелятивистской скорости источника преобразование Лоренца для энергии даёт

$$E_{\text{obs}} \simeq E_{\nu} + v_{\parallel} \frac{E_{\nu}}{c}.$$

Таким образом, доплеровский сдвиг энергии равен

$$\delta E \simeq E_{\nu} \frac{v_{\parallel}}{c}.$$

Тепловое движение изотропно, поэтому

$$\langle v_{\parallel} \rangle = 0, \quad \langle v_{\parallel}^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3} = \frac{V_{\text{Be}}^2}{3}.$$

Вычисляя среднеквадратичное значение сдвига энергии, получаем

$$\Delta E_{\text{rms}} = \frac{E_{\nu}}{c} \sqrt{\langle v_{\parallel}^2 \rangle} = \frac{E_{\nu} V_{\text{Be}}}{\sqrt{3} c}.$$

Следовательно,

$$V_{\text{Be}} = \sqrt{3} c \frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}}.$$

Численно

$$\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}} = \frac{5.54 \times 10^{-17}}{1.44 \times 10^{-13}} = 3.847 \times 10^{-4},$$

и, следовательно,

$$V_{\text{Be}} \simeq 2.00 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}.$$

Отношение $V_{\text{Be}}/c \simeq 6.66 \times 10^{-4}$ подтверждает применимость нерелятивистского приближения.

По теореме о равномерном распределении энергии для трёх поступательных степеней свободы

$$\frac{1}{2} m_{\text{Be}} V_{\text{Be}}^2 = \frac{3}{2} k_B T_c.$$

Таким образом,

$$T_c = \frac{m_{\text{Be}} V_{\text{Be}}^2}{3k_B} = \frac{m_{\text{Be}} c^2}{k_B} \left(\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_\nu} \right)^2.$$

Подставляя данные, получаем

$$T_c = \frac{(11.65 \times 10^{-27})(2.9979 \times 10^8)^2}{1.380649 \times 10^{-23}} \left(\frac{5.54 \times 10^{-17}}{1.44 \times 10^{-13}} \right)^2,$$

откуда

$$T_c \simeq 1.12 \times 10^7 \text{ K}.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Принцип экстремума

А Принцип экстремума в механике

Рассмотрим горизонтальную плоскость $x - y$ без трения, показанную на рис. 1. Прямая АВ, заданная уравнением $x = x_1$, делит её на две области: I и II. Потенциальная энергия материальной точки массой m в области I равна $V = 0$, а в области II — $V = V_0$. Частица вылетает из начала координат О со скоростью v_1 вдоль прямой, составляющей угол θ_1 с осью x . Она достигает точки Р в области II, двигаясь со скоростью v_2 вдоль прямой, составляющей угол θ_2 с осью x . Во всей задаче Т-2 (во всех частях) пренебрегайте силой тяжести и релятивистскими эффектами.

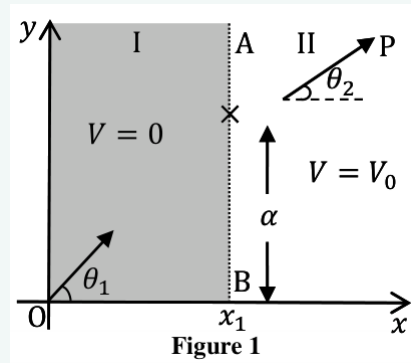


Рисунок 1

A1	Получите выражение для v_2 через m , v_1 и V_0 .	0.2
A2	Выразите v_2 через v_1 , θ_1 и θ_2 .	0.3

Определим величину, называемую действием, $A = m \int v(s) ds$, где ds — бесконечно малый элемент длины траектории частицы массой m , движущейся со скоростью $v(s)$. Интеграл берётся вдоль траектории. Например, для частицы, движущейся с постоянной скоростью v по окружности радиуса R , действие A за один оборот равно $2\pi m R v$. Можно показать, что для частицы с постоянной энергией E из всех возможных траекторий между двумя фиксированными точками действительной является та, на которой определённое выше действие A имеет экстремум (минимум или максимум). Исторически это утверждение известно как принцип наименьшего действия (PLA).

A3	Из PLA следует, что траектория частицы, движущейся между двумя фиксированными точками в области постоянной потенциальной энергии, является прямой линией. Пусть две фиксированные точки O и P на рис. 1 имеют координаты $(0, 0)$ и (x_0, y_0) соответственно, а точка на границе, в которой частица переходит из области I в область II, имеет координаты (x_1, α) . Обратите внимание, что x_1 фиксировано и действие зависит только от координаты α . Запишите выражение для действия $A(\alpha)$. Используя PLA, получите связь между v_1/v_2 и этими координатами.	1.0
----	--	-----

В Принцип экстремума в оптике

Световой луч переходит из среды I в среду II с показателями преломления n_1 и n_2 соответственно. Эти две среды разделены прямой, параллельной оси x . Световой луч составляет угол i_1 с осью y в среде I и угол i_2 в среде II (см. рис. 2). Чтобы найти траекторию луча, воспользуемся другим принципом экстремума (минимума или максимума), известным как принцип наименьшего времени Ферма.

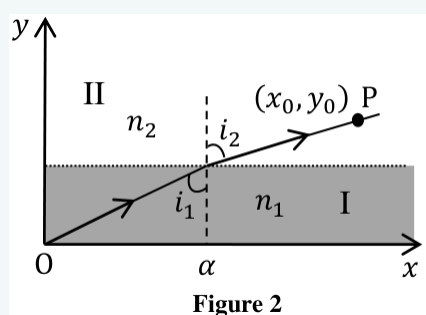


Рисунок 2

B1	Этот принцип гласит, что между двумя фиксированными точками световой луч распространяется по такому пути, для которого время прохождения между этими точками имеет экстремум. На основе принципа Ферма выведите соотношение между $\sin i_1$ и $\sin i_2$.	0.5
----	---	-----

На рис. 3 схематически показана траектория лазерного луча, горизонтально падающего на раствор сахара, в котором концентрация сахара уменьшается с высотой. Вследствие этого показатель преломления раствора также уменьшается с высотой.

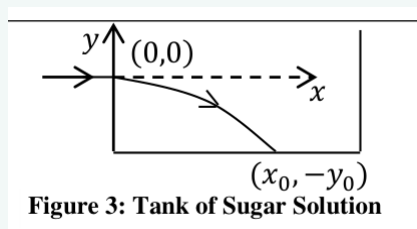


Рисунок 3: Сосуд с раствором сахара

B2	Предположим, что показатель преломления $n(y)$ зависит только от y . Используя уравнение, полученное в B1, найдите выражение для наклона dy/dx траектории луча через показатель преломления n_0 при $y = 0$ и $n(y)$.	1.5
B3	Лазерный луч направлен горизонтально из начала координат $(0, 0)$ в раствор сахара на высоте y_0 от дна сосуда, как показано на рисунке 3. Примите $n(y) = n_0 - ky$, где n_0 и k — положительные постоянные. Получите выражение для x через y и соответствующие величины для действительной траектории лазерного луча.	1.2

¹ Основными авторами этой задачи были Манодж Харбола (Индийский технологический институт в Канпуре) и Виджай А. Сингх (бывший национальный координатор научных олимпиад). Авторы с благодарностью отмечают вклад Академического комитета, Группы академического развития и Международного совета.

	Вы можете использовать: $\int \sec \theta d\theta = \ln(\sec \theta + \tan \theta) + \text{постоянная}$, где $\sec \theta = 1/\cos \theta$, или $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \text{постоянная}$	
B4	Найдите значение x_0 — координаты точки, в которой луч достигает дна сосуда. Примите $y_0 = 10.0 \text{ cm}$, $n_0 = 1.50$, $k = 0.050 \text{ cm}^{-1}$ ($1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$).	0.8

С Принцип экстремума и волновая природа материи

Теперь исследуем связь между PLA и волновой природой движущейся частицы. Для этого предположим, что частица, движущаяся из О в Р, может проходить по всем возможным траекториям, и будем искать траекторию, определяемую конструктивной интерференцией волн де Бройля.

C1	При перемещении частицы вдоль её траектории на бесконечно малое расстояние Δs установите связь между изменением $\Delta\varphi$ фазы её волны де Бройля, изменением ΔA действия и постоянной Планка.	0.6
C2	Вернёмся к задаче из части А, в которой частица движется из О в Р (см. рис. 4). Пусть на границе АВ между двумя областями установлена непрозрачная перегородка. В АВ имеется небольшое отверстие CD шириной d , причём $d \ll (x_0 - x_1)$ и $d \ll x_1$. Рассмотрим два крайних пути ОСР и ОDP, причём ОСР совпадает с классической траекторией, рассмотренной в части А. Найдите разность фаз $\Delta\varphi_{CD}$ между этими двумя путями в первом порядке.	1.2

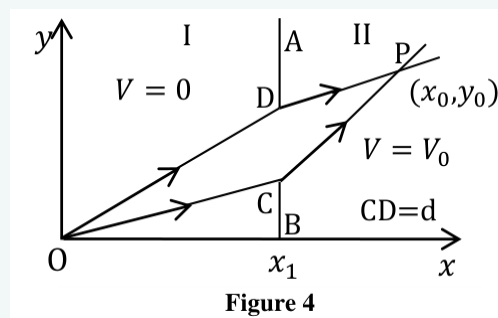


Рисунок 4

D Интерференция волн материи

Рассмотрим электронную пушку в точке О, направляющую коллимированный пучок электронов на узкую щель в точке F непрозрачной перегородки A_1B_1 , расположенной при $x = x_1$, так что OFP — прямая линия. Р — точка на экране, расположенном при $x = x_0$ (см. рис. 5). Скорость в области I равна $v_1 = 2.0000 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$, а $\theta = 10.0000^\circ$. Потенциал в области II таков, что скорость равна $v_2 = 1.9900 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$. Расстояние $x_0 - x_1$ равно 250.00 mm ($1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$). Пренебрегайте взаимодействием электронов друг с другом.

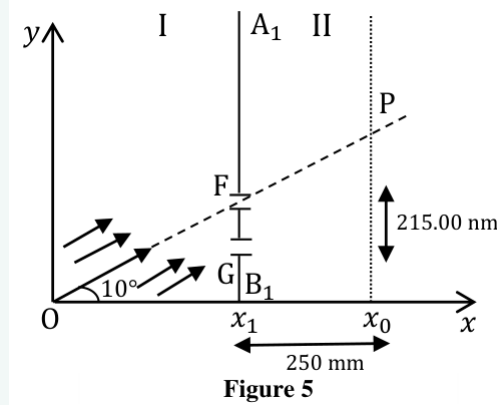


Рисунок 5

D1	Если электроны в точке O были ускорены из состояния покоя, вычислите ускоряющее напряжение U_1 .	0.3
D2	В перегородке A_1B_1 сделана ещё одна такая же щель G на расстоянии 215.00 nm ($1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$) ниже щели F (рис. 5). Если разность фаз волн де Бройля, приходящих в точку P через щели F и G, равна $2\pi\beta$, вычислите β .	0.8
D3	На каком наименьшем расстоянии Δy от P на экране можно ожидать нулевую вероятность регистрации электронов? [Примечание: вам может пригодиться приближение $\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \sin\theta + \Delta\theta \cos\theta$]	1.2
D4	Пучок имеет квадратное поперечное сечение $500\text{nm} \times 500\text{nm}$, а длина установки равна 2 m. Какова должна быть минимальная плотность потока $I_{\min}$ (число электронов на единицу площади, перпендикулярной пучку, в единицу времени), чтобы в данный момент времени в установке находился в среднем хотя бы один электрон?	0.4

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **A1:** $v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2V_0}{m}}$.

- **A2:** $v_2 = v_1 \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$.

- **A3:**

$$A(\alpha) = mv_1 \sqrt{x_1^2 + \alpha^2} + mv_2 \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2},$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(y_0 - \alpha) \sqrt{x_1^2 + \alpha^2}}{\alpha \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}}.$$

- **B1:** $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

- **B2:** $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{n(y)^2}{n_0^2} - 1}$.

• **B3:**

$$x(y) = \frac{n_0}{k} \ln \left[\frac{n_0 - ky + \sqrt{(n_0 - ky)^2 - n_0^2}}{n_0} \right].$$

Эквивалентная запись: $y(x) = \frac{n_0}{k} \left[1 - \cosh \left(\frac{kx}{n_0} \right) \right].$

- **B4:** $x_0 = 23.86 \dots \text{ cm} \approx 24 \text{ cm}.$
- **C1:** $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{h} \Delta A = \frac{\Delta A}{\hbar}.$
- **C2:** $\Delta\varphi_{CD} = 0$ в первом порядке по d ; главная поправка квадратична.
- **D1:** $U_1 \approx 1.14 \times 10^3 \text{ V}.$
- **D2:** $\beta = \frac{m_e d (v_1 - v_2) \sin \theta}{h} \approx 5.13.$
- **D3:** $\Delta y \approx 1.6 \times 10^{-5} \text{ m} = 16 \text{ }\mu\text{m},$ **ниже Р.**
- **D4:** $I_{\min} \approx 4 \times 10^{19} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$

Решение

Для численных расчётов, связанных с электронами, используем

$$m_e = 9.1093837 \times 10^{-31} \text{ kg}, \quad e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ Js},$$

где e — модуль заряда электрона.

A1

Потенциальная энергия не зависит от времени, поэтому механическая энергия сохраняется:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + V_0.$$

Следовательно,

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2V_0}{m}}.$$

В задаче предполагается, что частица проходит в область II.

A2

Потенциальная энергия зависит только от x , поэтому у силы нет составляющей вдоль y .

Следовательно, составляющая импульса, параллельная границе, сохраняется:

$$m v_1 \sin \theta_1 = m v_2 \sin \theta_2.$$

Таким образом,

$$v_2 = v_1 \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}.$$

A3

Обозначим точку пересечения границы через $Q = (x_1, \alpha)$. Длины двух прямолинейных отрезков равны

$$L_1 = \sqrt{x_1^2 + \alpha^2}, \quad L_2 = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}.$$

При фиксированной полной энергии скорости в обеих областях фиксированы. Поэтому

$$A(\alpha) = m(v_1 L_1 + v_2 L_2).$$

Действительная траектория удовлетворяет условию

$$\frac{dA}{d\alpha} = m \left[v_1 \frac{\alpha}{L_1} - v_2 \frac{y_0 - \alpha}{L_2} \right] = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(y_0 - \alpha)L_1}{\alpha L_2} = \frac{(y_0 - \alpha)\sqrt{x_1^2 + \alpha^2}}{\alpha \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}}.$$

Поскольку $\alpha/L_1 = \sin \theta_1$ и $(y_0 - \alpha)/L_2 = \sin \theta_2$, это воспроизводит результат A2. Кроме того,

$$\frac{d^2 A}{d\alpha^2} = m \left[\frac{v_1 x_1^2}{L_1^3} + \frac{v_2 (x_0 - x_1)^2}{L_2^3} \right] > 0,$$

так что это стационарное значение действия является минимумом.

B1

Запишем уравнение горизонтальной границы раздела как $y = b$ и предположим, что луч пересекает её в точке (α, b) . Скорость света в среде j равна c/n_j . Поэтому время его прохождения из O в P равно

$$T(\alpha) = \frac{n_1}{c} \sqrt{\alpha^2 + b^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - b)^2}.$$

Принцип Ферма требует выполнения условия $dT/d\alpha = 0$:

$$n_1 \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} = n_2 \frac{x_0 - \alpha}{\sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - b)^2}}.$$

Поскольку углы отсчитываются от нормали к границе раздела, эти два геометрических отношения равны $\sin i_1$ и $\sin i_2$. Таким образом,

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2, \quad \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

B2

Представим жидкость как последовательность тонких горизонтальных слоёв. Применение B1 к соседним слоям показывает, что

$$n(y) \sin i(y) = \text{постоянная}.$$

Первоначально луч горизонтален, поэтому $i(0) = 90^\circ$, откуда

$$n(y) \sin i(y) = n_0.$$

Для луча, распространяющегося в сторону увеличения x ,

$$\sin i = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{n(y)}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} = n_0,$$

откуда

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n(y)^2}{n_0^2} - 1.$$

Луч изгибается в сторону большего показателя преломления, то есть вниз. Выбирая отрицательный наклон, получаем

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{n(y)^2}{n_0^2} - 1}.$$

В3

Подставим $n(y) = n_0 - ky$:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{n_0}{\sqrt{(n_0 - ky)^2 - n_0^2}}.$$

Интегрируя от точки входа $(0, 0)$, получаем

$$x = -n_0 \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{(n_0 - k\eta)^2 - n_0^2}}.$$

При замене $u = (n_0 - k\eta)/n_0$ это выражение принимает вид

$$x = \frac{n_0}{k} \int_1^{(n_0 - ky)/n_0} \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}.$$

Используя приведённый в условии интеграл, получаем

$$x(y) = \frac{n_0}{k} \ln \left[\frac{n_0 - ky + \sqrt{(n_0 - ky)^2 - n_0^2}}{n_0} \right].$$

Это ветвь, для которой $x \geq 0$ и $-y_0 \leq y \leq 0$.

Эквивалентная запись:

$$\frac{kx}{n_0} = \operatorname{arcosh} \left(1 - \frac{ky}{n_0} \right),$$

так что

$$y(x) = \frac{n_0}{k} \left[1 - \cosh \left(\frac{kx}{n_0} \right) \right].$$

Траектория проходит через начало координат с горизонтальной касательной и всё сильнее изгибается вниз.

B4

На дне $y = -y_0$. Следовательно,

$$x_0 = \frac{n_0}{k} \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{ky_0}{n_0} \right).$$

Выражая все длины в сантиметрах, получаем

$$\frac{n_0}{k} = 30.0 \text{ cm}, \quad 1 + \frac{ky_0}{n_0} = 1 + \frac{0.050(10.0)}{1.50} = \frac{4}{3}.$$

Таким образом,

$$x_0 = 30.0 \ln \left(\frac{4 + \sqrt{7}}{3} \right) \text{ cm} = 23.86096 \dots \text{ cm}.$$

Отсюда

$$\boxed{x_0 \approx 24 \text{ cm} = 0.24 \text{ m}}.$$

C1

Длина волны де Бройля равна

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}.$$

Набег пространственной фазы на бесконечно малом расстоянии равен

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = \frac{2\pi}{h} mv \Delta s.$$

Поскольку $\Delta A = mv \Delta s$,

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{h} \Delta A = \frac{\Delta A}{\hbar}}.$$

Для стационарных волн с одинаковой энергией общая временная фаза сокращается при сравнении путей в один и тот же момент наблюдения.

C2

Пусть C имеет координаты (x_1, α) , тогда D имеет координаты $(x_1, \alpha + d)$. В первом порядке

$$OD - OC = d \sin \theta_1 + O(d^2),$$

а

$$DP - CP = -d \sin \theta_2 + O(d^2).$$

Следовательно,

$$A_{ODP} - A_{OCP} = md(v_1 \sin \theta_1 - v_2 \sin \theta_2) + O(d^2).$$

Поскольку OCP — классическая траектория, из A2 следует

$$v_1 \sin \theta_1 = v_2 \sin \theta_2.$$

Используя C1, получаем

$$\Delta\varphi_{CD} = \frac{2\pi md}{h} (v_1 \sin \theta_1 - v_2 \sin \theta_2) + O(d^2).$$

Таким образом,

$$\Delta\varphi_{CD} = 0 \quad \text{в первом порядке по } d.$$

Во втором порядке разность фаз в общем случае ненулевая. Стационарность действия обеспечивает совпадение фаз для соседних путей в первом порядке.

D1

При ускорении из состояния покоя разностью потенциалов с модулем U_1 получаем

$$eU_1 = \frac{1}{2}m_e v_1^2.$$

Отсюда

$$U_1 = \frac{m_e v_1^2}{2e} = 1137.126 \dots \text{ V},$$

или

$$U_1 \approx 1.14 \times 10^3 \text{ V}.$$

D2

Пусть

$$d = 215.00 \times 10^{-9} \text{ m}, \quad L = x_0 - x_1 = 0.25000 \text{ m}.$$

Будем рассматривать падающий коллимированный пучок как когерентную плоскую волну и использовать разности длин путей в дальней зоне в первом порядке по расстоянию между щелями.

Поскольку F находится выше G, разность фаз падающей волны равна

$$\varphi_F^{\text{in}} - \varphi_G^{\text{in}} = \frac{m_e v_1}{\hbar} d \sin \theta.$$

В точке P, лежащей на прямолинейном продолжении OF,

$$FP - GP \simeq -d \sin \theta.$$

Поэтому распространение в области II даёт вклад

$$-\frac{m_e v_2}{\hbar} d \sin \theta.$$

Определяя полную разность фаз как фазу волны, прошедшей через F, минус фазу волны, прошедшей через G, получаем

$$2\pi\beta = \frac{m_e d}{\hbar} (v_1 - v_2) \sin \theta.$$

Таким образом,

$$\beta = \frac{m_e d (v_1 - v_2) \sin \theta}{h}.$$

Численно

$$\beta = 5.132650 \dots, \quad \beta \approx 5.13.$$

Это полная разность фаз, выраженная в числе периодов; по модулю одного периода она равна 0.132650 ...

D3

Для одинаковых щелей с равными амплитудами деструктивная интерференция возникает, когда разность фаз равна нечётному кратному π , то есть полуцелому числу периодов.

Пусть направление выходящей волны к соседней точке экрана задаётся углом $\theta + \delta\theta$. Разность фаз падающей волны остаётся неизменной, а фаза, набегаемая при распространении, изменяется. Разность фаз в числе периодов становится равной

$$b(\delta\theta) = \frac{m_e d}{h} [v_1 \sin \theta - v_2 \sin(\theta + \delta\theta)].$$

Используя данное в условии разложение для малого угла, получаем

$$b(\delta\theta) \simeq \beta - \frac{m_e v_2 d}{h} \cos \theta \delta\theta.$$

Соседние полуцелые числа — 4.5 и 5.5. Их расстояния от β равны

$$\beta - 4.5 = 0.632650 \dots, \quad 5.5 - \beta = 0.367350 \dots$$

Поэтому ближайшему минимуму соответствует $b = 5.5$, откуда

$$\delta\theta = -\frac{h(5.5 - \beta)}{m_e v_2 d \cos \theta}.$$

Отрицательный знак означает, что минимум находится ниже Р.

Смещение на вертикальном экране с учётом знака равно

$$\delta y = L [\tan(\theta + \delta\theta) - \tan \theta] \simeq \frac{L}{\cos^2 \theta} \delta\theta.$$

Таким образом, его модуль равен

$$\Delta y = \frac{hL(5.5 - \beta)}{m_e v_2 d \cos^3 \theta}.$$

Численно

$$\frac{hL}{m_e v_2 d \cos^3 \theta} = 44.5001 \dots \mu\text{m},$$

поэтому результат в главном порядке имеет вид

$$\Delta y = (44.5001 \dots)(0.3673499 \dots) \mu\text{m} = 16.3471 \dots \mu\text{m}.$$

Следовательно,

$$\Delta y \approx 16 \mu\text{m}, \quad \text{ниже Р.}$$

Приближения малого угла и дальней зоны здесь применимы: $|\delta\theta| \simeq 6.34 \times 10^{-5} \text{ rad}$, а $d/L = 8.60 \times 10^{-7}$. В приведённом результате не учитываются поправки высших порядков к длинам путей.

D4

Площадь поперечного сечения пучка, перпендикулярного его направлению, равна

$$S = (500 \times 10^{-9})^2 = 2.50 \times 10^{-13} \text{ m}^2.$$

Для длины пролёта 2 м, используя $v \simeq 2.0 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$, получаем время пролёта

$$\tau \simeq \frac{2}{2.0 \times 10^7} = 1.0 \times 10^{-7} \text{ s}.$$

Если плотность потока равна I , то число электронов, входящих в установку в единицу времени, равно IS . В стационарном режиме среднее число электронов в установке равно

$$\overline{N} = IS\tau.$$

Минимальный поток соответствует $\overline{N} = 1$:

$$I_{\min} = \frac{1}{S\tau}.$$

Следовательно,

$$I_{\min} \simeq \frac{1}{(2.50 \times 10^{-13})(1.0 \times 10^{-7})} = 4 \times 10^{19} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

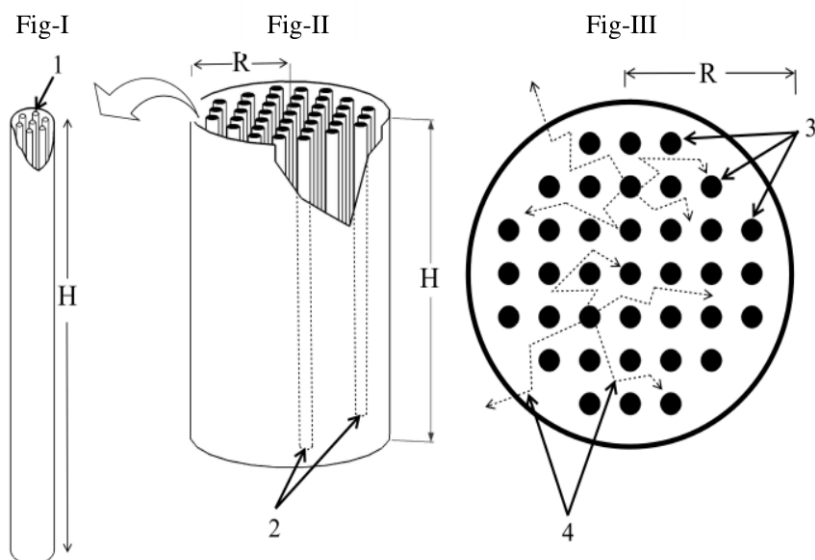
Более точно, $\tau = \ell_1/v_1 + \ell_2/v_2$, где $\ell_1 + \ell_2$ — длина пролёта. Две скорости отличаются всего на 0.5%, поэтому замена их общим приближённым значением скорости не влияет на указанную точность.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Проектирование ядерного реактора

Уран встречается в природе в виде UO_2 , причём лишь 0.720% атомов урана составляют атомы ^{235}U . Под действием нейтронов ядра ^{235}U легко делятся с испусканием 2–3 нейтронов деления, обладающих высокой кинетической энергией. Вероятность такого деления возрастает, если вызывающие его нейтроны имеют низкую кинетическую энергию. Поэтому, уменьшая кинетическую энергию нейтронов деления, можно вызвать цепную реакцию деления других ядер ^{235}U . На этом основана работа энергетического ядерного реактора (ЯР).

Типичный ЯР состоит из цилиндрического бака высотой H и радиусом R , заполненного веществом, называемым замедлителем. Цилиндрические трубы, называемые топливными каналами, расположены параллельно оси бака в узлах квадратной решётки; каждая из них содержит пучок цилиндрических топливных стержней высотой H , изготовленных из твёрдого природного UO_2 . Нейтроны деления, выходящие из топливного канала, сталкиваются с частицами замедлителя, теряют энергию и достигают окружающих топливных каналов с достаточно низкой энергией, чтобы вызвать деление (рис. I–III). Теплота, выделяющаяся при делении в стержне, передаётся жидкому теплоносителю, протекающему вдоль него. В этой задаче мы рассмотрим некоторые физические аспекты работы (А) топливного стержня, (В) замедлителя и (С) ЯР цилиндрической формы.



Schematic sketch of the Nuclear Reactor (NR)

Fig-I: Enlarged view of a fuel channel (1-Fuel Pins)

Fig-II: A view of the NR (2-Fuel Channels)

Fig-III: Top view of NR (3-Square Arrangement of Fuel Channels and 4-Typical Neutron Paths).

Only components relevant to the problem are shown (e.g. control rods and coolant are not shown).

А Топливный стержень

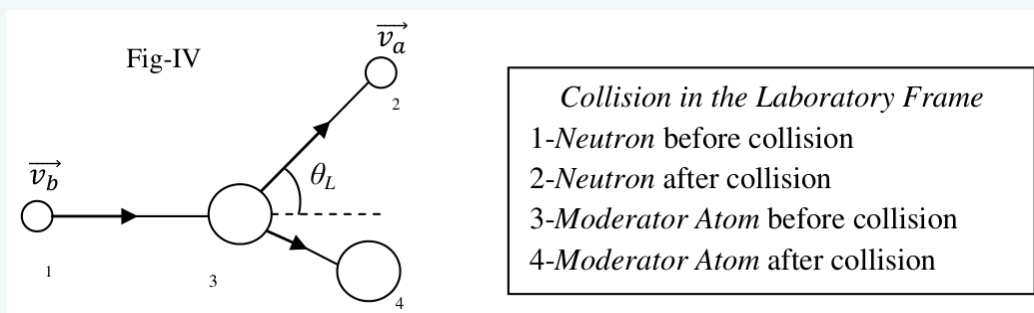
Данные для UO_2	1. Молярная масса $M_w = 0.270 \text{ kg mol}^{-1}$	2. Плотность $\rho = 1.060 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
	3. Температура плавления $T_m = 3.138 \times 10^3 \text{ K}$	4. Коэффициент теплопроводности $\lambda = 3.280 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$

A1	Рассмотрите следующую реакцию деления неподвижного ядра ^{235}U после поглощения нейтрона с пренебрежимо малой кинетической энергией. $^{235}\text{U} + {}^1_0\text{n} \longrightarrow {}^{94}\text{Zr} + {}^{140}\text{Ce} + 2 {}^1_0\text{n} + \Delta E$ Оцените ΔE (в МэВ) — полную энергию, выделяющуюся при делении. Массы ядер: $m(^{235}\text{U}) = 235.044 \text{ u}$; $m(^{94}\text{Zr}) = 93.9063 \text{ u}$; $m(^{140}\text{Ce}) = 139.905 \text{ u}$; $m(^1_0\text{n}) = 1.00867 \text{ u}$, причём $1 \text{ u} = 931.502 \text{ MeV } c^{-2}$. Несбалансированностью зарядов пренебрегите.	0.8
A2	Оцените N — число атомов ^{235}U в единице объёма природного UO_2 .	0.5
A3	Предположим, что плотность потока нейтронов, падающих на топливо, $\varphi = 2.000 \times 10^{18} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$, однородна. Сечение деления (эффективная площадь ядра-мишени) ядра ^{235}U равно $\sigma_f = 5.400 \times 10^{-26} \text{ m}^2$. Если 80.00% энергии деления превращается в теплоту, оцените Q (в W m^{-3}) — мощность тепловыделения в единице объёма стержня. $1 \text{ MeV} = 1.602 \times 10^{-13} \text{ J}$	1.2
A4	В стационарном состоянии разность температур между центром (T_c) и поверхностью (T_s) стержня можно выразить как $T_c - T_s = k F(Q, a, \lambda)$, где $k = 1/4$ — безразмерная постоянная, а a — радиус стержня. Найдите $F(Q, a, \lambda)$ методом анализа размерностей. Напомним, что λ — коэффициент теплопроводности UO_2.	0.5
A5	Требуемая температура теплоносителя равна $5.770 \times 10^2 \text{ K}$. Оцените верхний предел a_u радиуса a стержня.	1.0

В Замедлитель

Рассмотрим упругое столкновение в плоскости между нейтроном массой 1 у и атомом замедлителя массой A у. До столкновения все атомы замедлителя считаются покоящимися в лабораторной системе отсчёта (ЛС). Пусть $\vec{v}_b$ и $\vec{v}_a$ — скорости нейтрона до и после столкновения соответственно в ЛС. Пусть $\vec{v}_m$ — скорость системы центра масс (СЦМ) относительно ЛС, а θ — угол рассеяния нейтрона в СЦМ. Все частицы, участвующие в столкновениях, движутся с нерелятивистскими скоростями.

B1	Столкновение в ЛС показано схематически, где θ_L — угол рассеяния (рис. IV). Изобразите схематически столкновение в СЦМ. Обозначьте скорости частиц 1, 2 и 3 через $\vec{v}_b$, $\vec{v}_a$ и $\vec{v}_m$. Укажите угол рассеяния θ .	1.0
----	---	-----



B2	Найдите v и V — модули скоростей нейтрона и атома замедлителя в СЦМ после столкновения — через A и v_b .	1.0
B3	Выведите выражение для $G(\alpha, \theta) = E_a/E_b$, где E_b и E_a — кинетические энергии нейтрона в ЛС до и после столкновения соответственно, а $\alpha \equiv [(A-1)/(A+1)]^2$.	1.0
B4	Предположим, что полученное выше выражение справедливо для молекулы D_2O . Вычислите максимально возможную относительную потерю энергии $f_l \equiv (E_b - E_a)/E_b$ нейтрона для замедлителя D_2O (20 у).	0.5

С Ядерный реактор

Чтобы ЯР работал при любом постоянном потоке нейтронов ψ (в стационарном режиме), утечка нейтронов должна компенсироваться их избыточным образованием в реакторе. Для реактора цилиндрической формы скорость утечки равна $k_1[(2.405/R)^2 + (\pi/H)^2]\psi$, а скорость избыточного образования — $k_2\psi$. Постоянные k_1 и k_2 зависят от свойств материалов ЯР.

C1	Рассмотрите ЯР с $k_1 = 1.021 \times 10^{-2} \text{ м}$ и $k_2 = 8.787 \times 10^{-3} \text{ м}^{-1}$. Учитывая, что для эффективного использования топлива при фиксированном объёме скорость утечки должна быть минимальной, найдите размеры ЯР, работающего в стационарном режиме.	1.5
C2	Топливные каналы расположены в узлах квадратной решётки (рис. III), расстояние между ближайшими соседями равно 0.286 м. Эффективный радиус топливного канала (если бы он был сплошным) равен $3.617 \times 10^{-2} \text{ м}$. Оцените число топливных каналов F_n в реакторе и массу M вещества UO_2 , необходимую для работы ЯР в стационарном режиме.	1.0

¹ Основными авторами этой задачи были Джозеф Амал Натан (BARC) и Виджай А. Сингх (бывший национальный координатор научных олимпиад). Авторы с благодарностью отмечают вклад Академического комитета, Группы академического развития и Международного совета.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **A1:** $\Delta E \simeq 208.7 \text{ MeV}$.
- **A2:** $N \simeq 1.70 \times 10^{26} \text{ m}^{-3}$.
- **A3:** $Q \simeq 4.92 \times 10^8 \text{ W m}^{-3}$.
- **A4:** $F(Q, a, \lambda) = \frac{Qa^2}{\lambda}$, поэтому $T_c - T_s = \frac{Qa^2}{4\lambda}$.
- **A5:** $a_u \simeq 8.27 \times 10^{-3} \text{ m} = 8.27 \text{ mm}$.
- **B1:** Обозначения скоростей в СЦМ: 1 : $\vec{v}_b - \vec{v}_m$, 2 : $\vec{v}_a - \vec{v}_m$, 3 : $-\vec{v}_m$. Угол между начальной и конечной скоростями нейтрона равен θ ; две частицы после столкновения движутся в противоположных направлениях.
- **B2:** $v = \frac{A}{A+1} v_b$, $V = \frac{1}{A+1} v_b$.
- **B3:** $G(\alpha, \theta) = \frac{1 + \alpha + (1 - \alpha) \cos \theta}{2}$.
- **B4:** $f_{l, \max} = \frac{80}{441} \simeq 0.1814 = 18.14\%$.
- **C1:** $R = 2.405 \sqrt{\frac{3k_1}{2k_2}} \simeq 3.175 \text{ m}$, $H = \pi \sqrt{\frac{3k_1}{k_2}} \simeq 5.865 \text{ m}$.
- **C2:** $F_n \simeq 387$ топливных каналов; $M \simeq 9.89 \times 10^4 \text{ kg}$, или 98.9 тонны UO_2 .

Решение

A1

Поскольку начальная кинетическая энергия пренебрежимо мала, по закону сохранения энергии выделившаяся энергия равна уменьшению полной энергии покоя:

$$\Delta E = [m(^{235}\text{U}) + m(^1_0\text{n}) - m(^{94}\text{Zr}) - m(^{140}\text{Ce}) - 2m(^1_0\text{n})]c^2.$$

Используя заданные массы без каких-либо поправок на заряд, получаем

$$\begin{aligned} \Delta m &= [235.044 + 1.00867 - (93.9063 + 139.905 + 2(1.00867))] \text{ u} \\ &= 0.22403 \text{ u}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta E = 0.22403(931.502) \text{ MeV} = 208.684 \dots \text{ MeV},$$

или

$$\boxed{\Delta E \simeq 208.7 \text{ MeV}}.$$

A2

Каждая формульная единица UO_2 содержит один атом урана. Число формульных единиц в единице объёма равно

$$n_{\text{UO}_2} = \frac{\rho}{M_w} N_A,$$

где стандартное значение постоянной Авогадро равно $N_A \simeq 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Доля атомов урана, являющихся атомами ^{235}U , равна 0.00720. Поэтому

$$\begin{aligned} N &= 0.00720 \frac{\rho N_A}{M_w} \\ &= 0.00720 \frac{1.060 \times 10^4}{0.270} (6.022 \times 10^{23}) \text{ m}^{-3} \\ &= 1.7022 \dots \times 10^{26} \text{ m}^{-3}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\boxed{N \simeq 1.70 \times 10^{26} \text{ m}^{-3}}.$$

A3

Частота деления одного ядра-мишени в заданном однородном потоке нейтронов равна $\varphi\sigma_f$. Следовательно, число делений в единицу времени в единице объёма равно

$$r_f = N\varphi\sigma_f.$$

Численно получаем

$$\varphi\sigma_f = (2.000 \times 10^{18})(5.400 \times 10^{-26}) = 1.080 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1},$$

и

$$r_f = 1.8384 \dots \times 10^{19} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

Количество теплоты, выделяющееся при одном делении, равно

$$E_h = 0.8000 \Delta E = 0.8000(208.684 \dots)(1.602 \times 10^{-13}) \text{ J}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Q &= N\varphi\sigma_f E_h \\ &= 4.9168 \dots \times 10^8 \text{ W m}^{-3}, \end{aligned}$$

откуда

$$\boxed{Q \simeq 4.92 \times 10^8 \text{ W m}^{-3}}.$$

A4

Пусть зависимость F имеет вид $Q^x a^y \lambda^z$. Обозначая размерности мощности, длины и температуры через P, L, Θ , получаем

$$[Q] = PL^{-3}, \quad [a] = L, \quad [\lambda] = PL^{-1}\Theta^{-1}.$$

Тогда

$$[F] = P^{x+z} L^{-3x+y-z} \Theta^{-z}.$$

Чтобы F имела размерность температуры, необходимо

$$x + z = 0, \quad -3x + y - z = 0, \quad -z = 1.$$

Из этих уравнений следует

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = -1.$$

Безразмерный числовой множитель уже задан как k , поэтому

$$\boxed{F(Q, a, \lambda) = \frac{Qa^2}{\lambda}}, \quad \boxed{T_c - T_s = \frac{Qa^2}{4\lambda}}.$$

A5

При равномерном объёмном тепловыделении центр стержня имеет наибольшую температуру. Чтобы избежать плавления, необходимо

$$T_c \leq T_m.$$

Теплота должна передаваться от поверхности стержня к теплоносителю, поэтому температура поверхности не может быть ниже температуры теплоносителя:

$$T_s \geq T_{\text{cool}}.$$

Отсюда следует

$$\frac{Qa^2}{4\lambda} = T_c - T_s \leq T_m - T_{\text{cool}}.$$

Следовательно, предельный радиус равен

$$a_u = \sqrt{\frac{4\lambda(T_m - T_{\text{cool}})}{Q}}.$$

Используя

$$T_m - T_{\text{cool}} = 3138 - 577.0 = 2561 \text{ K},$$

получаем

$$a_u = \sqrt{\frac{4(3.280)(2561)}{4.9168 \dots \times 10^8}} = 8.2667 \dots \times 10^{-3} \text{ m}.$$

Таким образом,

$$\boxed{a_u \simeq 8.27 \text{ mm}}.$$

Этот верхний предел соответствует идеальному предельному случаю $T_s = T_{\text{cool}}$. Ненулевой перепад температуры между поверхностью и теплоносителем уменьшил бы допустимый радиус.

B1

Пусть масса нейтрона равна m , тогда масса атома замедлителя равна Am . До столкновения атом замедлителя покоится в ЛС. Поэтому скорость центра масс равна

$$\vec{v}_m = \frac{m\vec{v}_b + Am\vec{0}}{(A+1)m} = \frac{\vec{v}_b}{A+1}.$$

При преобразовании Галилея из каждой скорости в ЛС вычитается $\vec{v}_m$, что даёт скорость в СЦМ. Таким образом, требуемые обозначения имеют вид

$$\boxed{\vec{u}_1 = \vec{v}_b - \vec{v}_m, \quad \vec{u}_2 = \vec{v}_a - \vec{v}_m, \quad \vec{u}_3 = -\vec{v}_m}.$$

Схема должна отражать следующее:

- До столкновения нейтрон **1** приближается слева, двигаясь горизонтально вправо со скоростью $\vec{v}_b - \vec{v}_m$.
- Атом замедлителя **3** приближается справа, двигаясь горизонтально влево со скоростью $-\vec{v}_m$.
- После столкновения нейтрон **2** удаляется от точки столкновения со скоростью $\vec{v}_a - \vec{v}_m$. Отметьте угол θ между этой стрелкой и исходным направлением движения нейтрона вправо.
- Атом замедлителя **4** удаляется в направлении, строго противоположном направлению движения нейтрона **2**, поскольку полный импульс в СЦМ равен нулю. Его скорость равна

$$\vec{u}_4 = -\frac{\vec{u}_2}{A}.$$

Например, если стрелка скорости нейтрона после столкновения направлена вверх и вправо, то стрелка скорости атома замедлителя после столкновения направлена вниз и влево.

B2

Начальные модули скоростей в СЦМ равны

$$u_{n,b} = v_b - v_m = \frac{A}{A+1}v_b, \quad u_{M,b} = v_m = \frac{1}{A+1}v_b.$$

Согласно закону сохранения импульса в СЦМ, конечные импульсы должны быть равны по модулю и противоположны по направлению. Поэтому их модули удовлетворяют соотношению

$$mv = AmV, \quad \text{откуда} \quad v = AV.$$

Поскольку столкновение упругое, кинетическая энергия сохраняется:

$$\frac{1}{2}mu_{n,b}^2 + \frac{1}{2}Amu_{M,b}^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}AmV^2.$$

После сокращения на $m/2$ получаем

$$\frac{A}{A+1}v_b^2 = v^2 + AV^2.$$

Подстановка $v = AV$ даёт

$$A(A+1)V^2 = \frac{A}{A+1}v_b^2.$$

Следовательно,

$$\boxed{V = \frac{v_b}{A+1}}, \quad \boxed{v = \frac{A}{A+1}v_b}.$$

Столкновение изменяет направления скоростей, но модуль скорости каждой частицы в СЦМ остаётся неизменным.

B3

Конечная скорость нейтрона в ЛС равна

$$\vec{v}_a = \vec{v}_m + \vec{u}_2.$$

Вектор $\vec{v}_m$ направлен вдоль начального направления движения нейтрона, а $\vec{u}_2$ образует с этим направлением угол θ . Следовательно,

$$v_a^2 = v_m^2 + v^2 + 2v_m v \cos \theta.$$

Используя полученные выше результаты, находим

$$\frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{1 + A^2 + 2A \cos \theta}{(A + 1)^2}.$$

Поскольку обе энергии относятся к одному и тому же нейтрону в ЛС,

$$G(\alpha, \theta) = \frac{E_a}{E_b} = \frac{v_a^2}{v_b^2}.$$

Из равенства

$$\alpha = \frac{(A - 1)^2}{(A + 1)^2}$$

следует

$$\frac{1 + \alpha}{2} = \frac{A^2 + 1}{(A + 1)^2}, \quad \frac{1 - \alpha}{2} = \frac{2A}{(A + 1)^2}.$$

Поэтому

$$G(\alpha, \theta) = \frac{1 + \alpha + (1 - \alpha) \cos \theta}{2}.$$

Эквивалентная форма записи:

$$G(\alpha, \theta) = 1 - (1 - \alpha) \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

В частности, при рассеянии вперёд $G = 1$, а при рассеянии назад в СЦМ $G = \alpha$.

B4

Относительная потеря энергии равна

$$f_l = 1 - G = (1 - \alpha) \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Она максимальна при рассеянии назад в СЦМ, $\theta = \pi$. Таким образом,

$$f_{l,\max} = 1 - \alpha = 1 - \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right)^2 = \frac{4A}{(A + 1)^2}.$$

Следуя принятому в условии приближению, согласно которому вся молекула D_2O является мишенью массой 20 у, положим $A = 20$:

$$f_{l,\max} = \frac{4(20)}{21^2} = \frac{80}{441} \simeq 0.1814 = 18.14\%.$$

C1

При ненулевом стационарном потоке нейтронов их образование и утечка должны уравновешивать друг друга:

$$k_1 \left[\frac{2.405^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} \right] \psi = k_2 \psi.$$

Сокращая на ψ , получаем

$$\frac{2.405^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} = \frac{k_2}{k_1}. \quad (1)$$

Сначала определим форму, при которой утечка минимальна при фиксированном объёме. Запишем

$$\mathcal{V} = \pi R^2 H, \quad b = 2.405,$$

так что

$$H = \frac{\mathcal{V}}{\pi R^2}.$$

Геометрический множитель в выражении для скорости утечки принимает вид

$$S(R) = \frac{b^2}{R^2} + \frac{\pi^4 R^4}{\mathcal{V}^2}.$$

Его производная обращается в нуль при

$$-\frac{2b^2}{R^3} + \frac{4\pi^4 R^3}{\mathcal{V}^2} = 0.$$

Преобразуя это равенство и используя $\mathcal{V} = \pi R^2 H$, получаем

$$\boxed{\frac{b^2}{R^2} = 2 \frac{\pi^2}{H^2}}. \quad (2)$$

Эта стационарная точка является минимумом, поскольку

$$S''(R) = \frac{6b^2}{R^4} + \frac{12\pi^4 R^2}{\mathcal{V}^2} > 0.$$

Следовательно, оптимальное отношение высоты к радиусу равно

$$\frac{H}{R} = \frac{\sqrt{2}\pi}{b} = 1.84735 \dots$$

Объединяя (1) и (2), получаем

$$3 \frac{\pi^2}{H^2} = \frac{k_2}{k_1},$$

откуда

$$\boxed{H = \pi \sqrt{\frac{3k_1}{k_2}}}, \quad \boxed{R = b \sqrt{\frac{3k_1}{2k_2}}}.$$

Численно получаем

$$H = \pi \sqrt{\frac{3(1.021 \times 10^{-2})}{8.787 \times 10^{-3}}} \simeq \boxed{5.865 \text{ m}},$$

$$R = 2.405 \sqrt{\frac{3(1.021 \times 10^{-2})}{2(8.787 \times 10^{-3})}} \simeq \boxed{3.175 \text{ m}}.$$

C2

Пусть шаг квадратной решётки равен $d = 0.286$ m. Если пренебречь краевыми поправками, каждому топливному каналу соответствует одна квадратная ячейка с площадью поперечного сечения d^2 . Поэтому

$$F_n \simeq \frac{\pi R^2}{d^2}.$$

Подстановка даёт

$$F_n \simeq \frac{\pi(3.17507\dots)^2}{(0.286)^2} = 387.19\dots$$

Следовательно, оценка числа каналов равна

$$\boxed{F_n \simeq 387 \text{ топливных каналов}}.$$

При эффективном радиусе сплошного топлива $r_f = 3.617 \times 10^{-2}$ m объём UO_2 в одном канале равен $\pi r_f^2 H$. Поэтому его масса равна $\rho \pi r_f^2 H$, а полная масса топлива составляет

$$M = F_n \rho \pi r_f^2 H.$$

Используя неокруглённую оценку числа каналов по площади, получаем

$$\begin{aligned} M &\simeq (387.19\dots)(1.060 \times 10^4)\pi(3.617 \times 10^{-2})^2(5.86547\dots) \text{ kg} \\ &= 9.8942\dots \times 10^4 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\boxed{M \simeq 9.89 \times 10^4 \text{ kg} = 98.9 \text{ тонны } \text{UO}_2}.$$

Решение проверено по официальному решению.