

IPhO 2015

Problemas teóricos y soluciones · Bombay, India · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/2015/

Problema 1: Partículas procedentes del Sol

Los fotones procedentes de la superficie del Sol y los neutrinos procedentes de su núcleo pueden proporcionarnos información sobre las temperaturas solares y también confirmar que el Sol brilla gracias a las reacciones nucleares.

En todo este problema, tome la masa del Sol como $M_{\odot} = 2.00 \times 10^{30}$ kg, su radio como $R_{\odot} = 7.00 \times 10^8$ m, su luminosidad (energía emitida en forma de radiación por unidad de tiempo) como $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{26}$ W y la distancia Tierra-Sol como $d_{\odot} = 1.50 \times 10^{11}$ m.

Nota:

$$(i) \quad \int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} + \text{constante}$$

$$(ii) \quad \int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax} + \text{constante}$$

$$(iii) \quad \int x^3 e^{ax} dx = \left(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4} \right) e^{ax} + \text{constante}$$

A Radiación procedente del Sol :

Parte	Pregunta	Puntos
A1	Suponga que el Sol emite radiación como un cuerpo negro perfecto. Utilice este hecho para calcular la temperatura, T_s , de la superficie solar.	0.3

El espectro de la radiación solar puede aproximarse bien mediante la ley de distribución de Wien. Según esta ley, la energía solar que incide sobre cualquier superficie de la Tierra por unidad de tiempo y por unidad de intervalo de frecuencia, $u(\nu)$, viene dada por

$$u(\nu) = A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi h}{c^2} \nu^3 \exp(-h\nu/k_B T_s),$$

donde ν es la frecuencia y A es el área de la superficie perpendicular a la dirección de la radiación incidente.

Considere ahora una célula solar que consiste en un disco delgado de material semiconductor de área A , colocado perpendicularmente a la dirección de los rayos solares.

Parte	Pregunta	Puntos
A2	Utilizando la aproximación de Wien, exprese la potencia total de la radiación solar, P_{in} , que incide sobre la superficie de la célula solar, en función de A , $R_{\odot}$, $d_{\odot}$, T_s y las constantes fundamentales c , h , k_B .	0.3

Parte	Pregunta	Puntos
A3	Expresa el número de fotones, $n_\gamma(\nu)$, que inciden sobre la superficie de la célula solar por unidad de tiempo y por unidad de intervalo de frecuencia, en función de A , $R_\odot$, $d_\odot$, T_s , ν y las constantes fundamentales c , h , k_B .	0.2

El material semiconductor de la célula solar tiene una «banda prohibida» de energía E_g . Suponemos el siguiente modelo. Cada fotón de energía $E \geq E_g$ excita un electrón, haciéndolo atravesar la banda prohibida. Este electrón aporta una energía E_g como energía útil de salida, y cualquier energía adicional se disipa en forma de calor (no se convierte en energía útil).

Parte	Pregunta	Puntos
A4	Defina $x_g = h\nu_g/k_B T_s$, donde $E_g = h\nu_g$. Expresa la potencia útil de salida de la célula, P_{out} , en función de x_g , A , $R_\odot$, $d_\odot$, T_s y las constantes fundamentales c , h , k_B .	1.0
A5	Expresa la eficiencia, η , de esta célula solar en función de x_g .	0.2
A6	Dibuje una gráfica cualitativa de η en función de x_g . Deben mostrarse claramente los valores en $x_g = 0$ y cuando $x_g \rightarrow \infty$. ¿Cuál es la pendiente de $\eta(x_g)$ en $x_g = 0$ y cuando $x_g \rightarrow \infty$?	1.0
A7	Sea x_0 el valor de x_g para el cual η es máxima. Obtenga la ecuación cúbica que determina x_0 . Estime el valor de x_0 con una precisión de ± 0.25 . A partir de él, calcule $\eta(x_0)$.	1.0
A8	La energía de la banda prohibida del silicio puro es $E_g = 1.11$ eV. Calcule la eficiencia, η_{Si} , de una célula solar de silicio utilizando este valor.	0.2

¹ Amol Dighe (TIFR), Anwesh Mazumdar (HBCSE-TIFR) y Vijay A. Singh (excoordinador nacional de las Olimpiadas de Ciencias) fueron los autores principales de este problema. Se agradecen las contribuciones del Comité Académico, el Grupo de Desarrollo Académico y la Junta Internacional.

A finales del siglo XIX, Kelvin y Helmholtz (KH) propusieron una hipótesis para explicar por qué brilla el Sol. Postularon que el Sol, que inicialmente era una nube de materia muy extensa de masa $M_\odot$ y densidad despreciable, se ha ido contrayendo continuamente. El brillo del Sol se debería entonces a la liberación de energía potencial gravitatoria mediante esta lenta contracción.

Parte	Pregunta	Puntos
A9	Supongamos que la densidad de materia es uniforme en el interior del Sol. Halle la energía potencial gravitatoria total, Ω , del Sol en la actualidad, en función de G , $M_\odot$ y $R_\odot$.	0.3
A10	Estime el tiempo máximo posible, τ_{KH} (en años), durante el cual el Sol podría haber estado brillando, según la hipótesis KH. Suponga que la luminosidad del Sol ha sido constante durante todo este periodo.	0.5

El valor de τ_{KH} calculado anteriormente no coincide con la edad del sistema solar estimada a partir de estudios de meteoritos. Esto demuestra que la fuente de energía del Sol no puede ser puramente gravitatoria.

B Neutrinos procedentes del Sol :

En 1938, Hans Bethe propuso que la fusión nuclear del hidrógeno en helio en el núcleo del Sol es la fuente de su energía. La reacción nuclear neta es:



Los «neutrinos electrónicos», ν_e , producidos en esta reacción pueden considerarse de masa nula. Escapan del Sol y su detección en la Tierra confirma que se producen reacciones nucleares en el interior del Sol. En este problema puede despreciarse la energía que se llevan los neutrinos.

Parte	Pregunta	Puntos
B1	Calcule la densidad de flujo del número de neutrinos que llegan a la Tierra, Φ_ν , en unidades de $\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$. La energía liberada en la reacción anterior es $\Delta E = 4.0 \times 10^{-12}$ J. Suponga que la energía radiada por el Sol se debe íntegramente a esta reacción.	0.6

Durante su viaje desde el núcleo del Sol hasta la Tierra, algunos de los neutrinos electrónicos, ν_e , se convierten en otros tipos de neutrinos, ν_x . La eficiencia del detector para detectar ν_x es 1/6 de su eficiencia para detectar ν_e . Si no hubiera conversión de neutrinos, esperaríamos detectar una media de N_1 neutrinos en un año. Sin embargo, debido a la conversión, se detecta realmente una media de N_2 neutrinos (ν_e y ν_x conjuntamente) al año.

Parte	Pregunta	Puntos
B2	En función de N_1 y N_2 , calcule qué fracción, f , de los ν_e se convierte en ν_x .	0.4

Para detectar neutrinos, se construyen grandes detectores llenos de agua. Aunque las interacciones de los neutrinos con la materia son muy poco frecuentes, en ocasiones arrancan electrones de las moléculas de agua del detector. Estos electrones energéticos se desplazan por el agua a gran velocidad y emiten radiación electromagnética durante el proceso. Mientras la rapidez de uno de estos electrones sea mayor que la velocidad de la luz en el agua (índice de refracción n), esta radiación, llamada radiación de Cherenkov, se emite en forma de cono.

Parte	Pregunta	Puntos
B3	Suponga que un electrón arrancado por un neutrino pierde energía a un ritmo constante de α por unidad de tiempo mientras se desplaza por el agua. Si este electrón emite radiación de Cherenkov durante un tiempo Δt , determine la energía transferida a este electrón (E_{imparted}) por el neutrino, en función de α , Δt , n , m_e y c . (Suponga que el electrón estaba en reposo antes de su interacción con el neutrino.)	2.0

La fusión de H en He en el interior del Sol tiene lugar en varias etapas. En una de estas etapas intermedias se produce un núcleo de ^7Be (masa en reposo m_{Be}). Posteriormente, este puede absorber un electrón, produciendo un núcleo de ^7Li (masa en reposo $m_{\text{Li}} < m_{\text{Be}}$) y emitiendo un ν_e . La reacción nuclear correspondiente es:



Cuando un núcleo de Be ($m_{\text{Be}} = 11.65 \times 10^{-27}$ kg) está en reposo y absorbe un electrón que también está en reposo, el neutrino emitido tiene una energía $E_\nu = 1.44 \times 10^{-13}$ J. Sin embargo, los núcleos de Be presentan un movimiento térmico aleatorio debido a la temperatura T_c en el núcleo del Sol, y actúan como fuentes de neutrinos en movimiento. Como resultado, la energía de los neutrinos emitidos fluctúa con un valor cuadrático medio (rms) ΔE_{rms} .

Parte	Pregunta	Puntos
B4	Si $\Delta E_{\text{rms}} = 5.54 \times 10^{-17}$ J, calcule la rapidez cuadrática media de los núcleos de Be, V_{Be} , y, a partir de ella, estime T_c . (Sugerencia: ΔE_{rms} depende del valor	2.0

Parte	Pregunta	Puntos
	cuadrático medio de la componente de la velocidad a lo largo de la línea de visión).	

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- A1

$$T_s = \left(\frac{L_\odot}{4\pi R_\odot^2 \sigma} \right)^{1/4} \simeq 5.76 \times 10^3 \text{ K}.$$

- A2

$$P_{\text{in}} = \frac{12\pi A R_\odot^2 (k_B T_s)^4}{d_\odot^2 c^2 h^3}.$$

- A3

$$n_\gamma(\nu) = \frac{2\pi A R_\odot^2}{d_\odot^2 c^2} \nu^2 e^{-h\nu/(k_B T_s)}.$$

- A4

$$P_{\text{out}} = \frac{2\pi A R_\odot^2 (k_B T_s)^4}{d_\odot^2 c^2 h^3} x_g (x_g^2 + 2x_g + 2) e^{-x_g}.$$

- A5

$$\eta(x_g) = \frac{x_g (x_g^2 + 2x_g + 2) e^{-x_g}}{6}.$$

- A6 La curva parte del origen con pendiente 1/3, alcanza un único máximo cerca de (2.27, 0.457) y se aproxima al eje horizontal por arriba:

$$\eta(0) = 0, \quad \lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta = 0, \quad \eta'(0) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta' = 0 \quad \text{por debajo.}$$

- A7

$$x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0, \quad x_0 \simeq 2.27, \quad \eta(x_0) \simeq 0.457 = 45.7\%.$$

- A8

$$x_{g,\text{Si}} \simeq 2.24, \quad \eta_{\text{Si}} \simeq 0.457 = 45.7\%.$$

- A9

$$\Omega = -\frac{3GM_\odot^2}{5R_\odot} \simeq -2.29 \times 10^{41} \text{ J}.$$

- A10

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{3GM_\odot^2}{5R_\odot L_\odot} \simeq 1.88 \times 10^7 \text{ years}.$$

• B1

$$\Phi_\nu = \frac{2L_\odot}{4\pi d_\odot^2 \Delta E} \simeq 6.8 \times 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

• B2

$$f = \frac{6}{5} \left(1 - \frac{N_2}{N_1} \right).$$

• B3

$$E_{\text{imparted}} = \alpha \Delta t + m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}} - 1 \right).$$

• B4

$$V_{\text{Be}} = \sqrt{3} c \frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_\nu} \simeq 2.00 \times 10^5 \text{ m s}^{-1},$$

$$T_c = \frac{m_{\text{Be}} c^2}{k_B} \left(\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_\nu} \right)^2 \simeq 1.12 \times 10^7 \text{ K}.$$

Solución

Para los cálculos numéricos, utilice las constantes estándar

$$\begin{aligned}\sigma &= 5.6704 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}, \\ G &= 6.6743 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \\ k_B &= 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}, \\ c &= 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1},\end{aligned}$$

con $1 \text{ eV} = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J}$ y $1 \text{ year} = 3.15576 \times 10^7 \text{ s}$.

A1

Según la ley de Stefan–Boltzmann, un cuerpo negro emite una potencia σT^4 por unidad de superficie. El área emisora del Sol es $4\pi R_\odot^2$, por lo que

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_s^4.$$

Por tanto,

$$T_s = \left[\frac{3.85 \times 10^{26}}{4\pi(7.00 \times 10^8)^2(5.6704 \times 10^{-8})} \right]^{1/4} = \boxed{5.76 \times 10^3 \text{ K}}.$$

A2

La potencia incidente total es la integral sobre todas las frecuencias:

$$P_{\text{in}} = A \frac{R_\odot^2}{d_\odot^2} \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \nu^3 e^{-h\nu/(k_B T_s)} d\nu.$$

Hacemos el cambio

$$x = \frac{h\nu}{k_B T_s}, \quad d\nu = \frac{k_B T_s}{h} dx.$$

Entonces

$$P_{\text{in}} = \frac{2\pi AR_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3} \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx.$$

La fórmula de integración proporcionada da

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = [-e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)]_0^{\infty} = 6.$$

Así,

$$P_{\text{in}} = \frac{12\pi AR_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3}.$$

Todas las eficiencias calculadas a continuación utilizan esta misma potencia de entrada obtenida mediante la aproximación de Wien.

A3

Cada fotón de frecuencia ν transporta una energía $h\nu$. Al dividir la potencia espectral entre esta energía se obtiene la tasa espectral de llegada de fotones:

$$n_{\gamma}(\nu) = \frac{u(\nu)}{h\nu}.$$

Por tanto,

$$n_{\gamma}(\nu) = \frac{2\pi AR_{\odot}^2}{d_{\odot}^2 c^2} \nu^2 e^{-h\nu/(k_B T_s)}.$$

Sus unidades son fotones por segundo y por hercio.

A4

Solo contribuyen los fotones con $\nu \geq \nu_g$, y cada uno aporta una energía útil E_g . En consecuencia,

$$P_{\text{out}} = E_g \int_{\nu_g}^{\infty} n_{\gamma}(\nu) d\nu.$$

Utilizando $E_g = x_g k_B T_s$ y el cambio de variable de A2,

$$P_{\text{out}} = \frac{2\pi AR_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3} x_g \int_{x_g}^{\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

Ahora,

$$\int_{x_g}^{\infty} x^2 e^{-x} dx = [-(x^2 + 2x + 2)e^{-x}]_{x_g}^{\infty} = (x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g}.$$

Por tanto,

$$P_{\text{out}} = \frac{2\pi AR_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3} x_g (x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g}.$$

A5

La eficiencia es la potencia útil de salida dividida entre la potencia incidente:

—

$$\eta = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}.$$

Los factores dimensionales y geométricos comunes se cancelan, lo que da

$$\eta(x_g) = \frac{x_g(x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g}}{6}, \quad x_g \geq 0.$$

A6

Cuando la energía de la banda prohibida es nula,

$$\eta(0) = 0.$$

Aunque en ese caso los fotones pueden excitar electrones, la energía útil por electrón es cero.

Para valores grandes de x_g ,

$$\eta(x_g) \sim \frac{x_g^3 e^{-x_g}}{6},$$

por lo que

$$\lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta(x_g) = 0.$$

El número exponencialmente pequeño de fotones con energía superior a la de la banda prohibida hace que la potencia útil de salida tienda a cero.

Derivando,

$$\eta'(x_g) = \frac{e^{-x_g}}{6} (-x_g^3 + x_g^2 + 2x_g + 2).$$

Así,

$$\eta'(0) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta'(x_g) = 0 \text{ por debajo}.$$

La gráfica parte del origen con tangente $\eta = x_g/3$, crece hasta un único máximo cerca de $x_g = 2.27$ y después decrece hacia la asíntota horizontal $\eta = 0$, manteniéndose positiva. Para obtener información adicional sobre su forma,

$$\eta''(x_g) = \frac{e^{-x_g}}{6} x_g^2 (x_g - 4),$$

por lo que la curva es cóncava hacia abajo para $0 < x_g < 4$ y cóncava hacia arriba para $x_g > 4$.

Algunos puntos representativos son:

x_g	$\eta(x_g)$
0	0
1	0.307
2	0.451
2.27	0.457
4	0.317
6	0.124

x_g	$\eta(x_g)$
10	0.00923
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow 0$

A7

En el máximo, $\eta'(x_0) = 0$. Como el factor exponencial nunca se anula,

$$-x_0^3 + x_0^2 + 2x_0 + 2 = 0,$$

o bien

$$x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0.$$

Para $x_0 > 0$, esto equivale a

$$x_0 = 1 + \frac{2}{x_0} + \frac{2}{x_0^2}.$$

El miembro izquierdo crece estrictamente con x_0 , mientras que el miembro derecho decrece estrictamente. Por tanto, solo existe un punto estacionario positivo. Junto con el comportamiento en los extremos descrito en A6, esto demuestra que se trata del máximo global.

Sea $F(x) = x^3 - x^2 - 2x - 2$. Entonces

$$F(2) = -2, \quad F(2.5) = 2.375.$$

Así, $2 < x_0 < 2.5$, lo que ya proporciona $x_0 = 2.25 \pm 0.25$. Al refinar el cálculo se obtiene

$$x_0 \simeq 2.27.$$

Sustituyendo en la expresión de la eficiencia,

$$\eta(x_0) = \frac{x_0(x_0^2 + 2x_0 + 2)e^{-x_0}}{6} \simeq 0.45703.$$

Por tanto,

$$\eta_{\max} \simeq 45.7\%.$$

A8

A la temperatura superficial hallada en A1,

$$k_B T_s \simeq 0.4966 \text{ eV}.$$

Para el silicio,

$$x_{g,\text{Si}} = \frac{E_g}{k_B T_s} = \frac{1.11}{0.4966} \simeq 2.235.$$

Por tanto,

$$\eta_{\text{Si}} = \frac{2.235 (2.235^2 + 2(2.235) + 2) e^{-2.235}}{6} \simeq 0.45694.$$

Así,

$$\eta_{\text{Si}} \simeq 45.7\%.$$

Este valor está muy cerca del máximo porque la energía de la banda prohibida del silicio está próxima a la energía óptima $x_0 k_B T_s \simeq 1.13 \text{ eV}$.

A9

Construimos la esfera uniforme trayendo sucesivas capas esféricas delgadas desde el infinito. A un radio r , la masa ya reunida es

$$M(r) = M_{\odot} \frac{r^3}{R_{\odot}^3},$$

y la masa de la capa es

$$dM = \frac{3M_{\odot} r^2}{R_{\odot}^3} dr.$$

Según el teorema de las capas esféricas, la energía potencial añadida es

$$d\Omega = -\frac{GM(r) dM}{r}.$$

Por tanto,

$$\Omega = -\frac{3GM_{\odot}^2}{R_{\odot}^6} \int_0^{R_{\odot}} r^4 dr = -\frac{3GM_{\odot}^2}{R_{\odot}^6} \frac{R_{\odot}^5}{5}.$$

De ahí,

$$\boxed{\Omega = -\frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}}} \simeq -2.29 \times 10^{41} \text{ J}.$$

El signo negativo corresponde a tomar la energía potencial igual a cero para una separación infinita.

A10

La nube inicial, muy extensa, tiene una energía potencial gravitatoria aproximadamente nula. Por tanto, su contracción libera como máximo

$$E_{\text{available}} = -\Omega = \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}}.$$

El tiempo máximo posible durante el cual el Sol puede brillar se obtiene suponiendo que toda esta energía liberada se ha radiado. A luminosidad constante,

$$L_{\odot} \tau_{\text{KH}} = \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}},$$

por lo que

$$\boxed{\tau_{\text{KH}} = \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot} L_{\odot}}}.$$

Numéricamente,

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{2.288 \times 10^{41}}{3.85 \times 10^{26}} \simeq 5.94 \times 10^{14} \text{ s} = \boxed{1.88 \times 10^7 \text{ years}}.$$

Cualquier energía liberada que se retuviera como energía interna reduciría la duración que puede sostener la contracción gravitatoria, de modo que este resultado es una cota superior.

B1

Despreciando la energía que se llevan los neutrinos, el número de reacciones de fusión por segundo es

$$\dot{N}_{\text{reaction}} = \frac{L_{\odot}}{\Delta E}.$$

Cada reacción produce dos neutrinos:

$$\dot{N}_{\nu} = \frac{2L_{\odot}}{\Delta E}.$$

Para una emisión esférica, estos neutrinos atraviesan un área $4\pi d_{\odot}^2$ a la distancia de la Tierra. Así,

$$\Phi_{\nu} = \frac{2L_{\odot}}{4\pi d_{\odot}^2 \Delta E}.$$

Al sustituir se obtiene

$$\Phi_{\nu} = \frac{2(3.85 \times 10^{26})}{4\pi(1.50 \times 10^{11})^2(4.0 \times 10^{-12})} = 6.8 \times 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

B2

Tras la conversión, la fracción $1 - f$ permanece como neutrinos electrónicos y aporta $(1 - f)N_1$ detecciones al año. La fracción convertida aporta $fN_1/6$, porque su eficiencia de detección es seis veces menor.

En consecuencia,

$$N_2 = (1 - f)N_1 + \frac{fN_1}{6} = N_1 \left(1 - \frac{5f}{6}\right).$$

Despejando,

$$f = \frac{6}{5} \left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right).$$

El intervalo físicamente admisible $0 \leq f \leq 1$ corresponde a $N_1/6 \leq N_2 \leq N_1$.

B3

La radiación de Cherenkov cesa cuando el electrón se frena hasta alcanzar la velocidad de la luz en el agua:

$$v_{\text{th}} = \frac{c}{n}.$$

La energía cinética del electrón en ese instante es relativista:

$$K_{\text{th}} = (\gamma_{\text{th}} - 1)m_e c^2, \quad \gamma_{\text{th}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\text{th}}^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}}.$$

Durante el tiempo de emisión Δt , el electrón pierde una energía $\alpha \Delta t$. Por tanto, su energía cinética inicial, inmediatamente después de la interacción con el neutrino, es

$$K_i = K_{\text{th}} + \alpha \Delta t.$$

Como el electrón estaba inicialmente en reposo antes de la interacción, la energía transferida por el neutrino es igual a K_i . Por tanto,

$$E_{\text{imparted}} = \alpha \Delta t + m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}} - 1 \right).$$

El segundo término es esencial: el electrón todavía tiene energía cinética cuando cesa la emisión de Cherenkov.

B4

Utilizamos el modelo indicado, en el que la dispersión de energía procede del movimiento térmico de las fuentes de Be. Sea $v_{\parallel}$ la componente de la velocidad de la fuente dirigida hacia la Tierra.

Para un neutrino de masa nula, el momento en el sistema de referencia en reposo de la fuente es $p_{\nu} = E_{\nu}/c$. A primer orden en la velocidad no relativista de la fuente, la transformación de Lorentz de la energía da

$$E_{\text{obs}} \simeq E_{\nu} + v_{\parallel} \frac{E_{\nu}}{c}.$$

Por tanto, el desplazamiento Doppler de la energía es

$$\delta E \simeq E_{\nu} \frac{v_{\parallel}}{c}.$$

El movimiento térmico es isótropo, por lo que

$$\langle v_{\parallel} \rangle = 0, \quad \langle v_{\parallel}^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3} = \frac{V_{\text{Be}}^2}{3}.$$

Tomando el valor cuadrático medio del desplazamiento de energía,

$$\Delta E_{\text{rms}} = \frac{E_{\nu}}{c} \sqrt{\langle v_{\parallel}^2 \rangle} = \frac{E_{\nu} V_{\text{Be}}}{\sqrt{3} c}.$$

Por tanto,

$$V_{\text{Be}} = \sqrt{3} c \frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}}.$$

Numéricamente,

$$\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}} = \frac{5.54 \times 10^{-17}}{1.44 \times 10^{-13}} = 3.847 \times 10^{-4},$$

y, por tanto,

$$V_{\text{Be}} \simeq 2.00 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}.$$

El cociente $V_{\text{Be}}/c \simeq 6.66 \times 10^{-4}$ justifica la aproximación no relativista.

Por el principio de equipartición aplicado a los tres grados de libertad de traslación,

$$\frac{1}{2} m_{\text{Be}} V_{\text{Be}}^2 = \frac{3}{2} k_B T_c.$$

Así,

$$T_c = \frac{m_{\text{Be}} V_{\text{Be}}^2}{3 k_B} = \frac{m_{\text{Be}} c^2}{k_B} \left(\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}} \right)^2.$$

Sustituyendo los datos,

$$T_c = \frac{(11.65 \times 10^{-27})(2.9979 \times 10^8)^2}{1.380649 \times 10^{-23}} \left(\frac{5.54 \times 10^{-17}}{1.44 \times 10^{-13}} \right)^2,$$

lo que da

$$T_c \simeq 1.12 \times 10^7 \text{ K}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: El principio de extremo

A El principio de extremo en mecánica

Considere el plano horizontal $x - y$ sin rozamiento que se muestra en la Fig. 1. Una recta AB de ecuación $x = x_1$ lo divide en dos regiones, I y II. La energía potencial de una partícula puntual de masa m en la región I es $V = 0$, mientras que en la región II es $V = V_0$. La partícula se lanza desde el origen O con rapidez v_1 siguiendo una recta que forma un ángulo θ_1 con el eje x . Llega al punto P de la región II con rapidez v_2 , siguiendo una recta que forma un ángulo θ_2 con el eje x . Desprecie la gravedad y los efectos relativistas en todo este problema T-2 (en todos sus apartados).

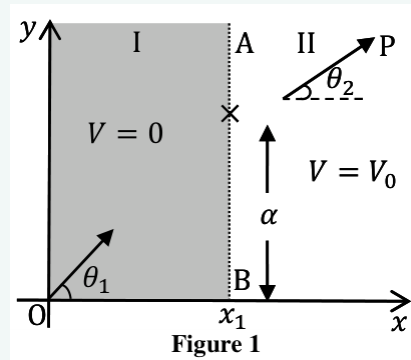


Figura 1

A1	Obtenga una expresión para v_2 en función de m , v_1 y V_0 .	0.2
A2	Expresa v_2 en función de v_1 , θ_1 y θ_2 .	0.3

Definimos una magnitud denominada acción $A = m \int v(s) ds$, donde ds es la longitud infinitesimal a lo largo de la trayectoria de una partícula de masa m que se mueve con rapidez $v(s)$. La integral se calcula a lo largo de la trayectoria. Por ejemplo, para una partícula que se mueve con rapidez constante v en una trayectoria circular de radio R , la acción A correspondiente a una vuelta será $2\pi m R v$. Para una partícula con energía constante E , puede demostrarse que, de todas las trayectorias posibles entre dos puntos fijos, la trayectoria real es aquella para la cual la A definida anteriormente es un extremo (mínimo o máximo). Históricamente, esto se conoce como el principio de mínima acción (PLA).

A3	El PLA implica que la trayectoria de una partícula que se mueve entre dos puntos fijos en una región de potencial constante será una línea recta. Sean $(0, 0)$ y (x_0, y_0) las coordenadas de los dos puntos fijos O y P de la Fig. 1, respectivamente, y (x_1, α) las coordenadas del punto de la frontera por el que la partícula pasa de la región I a la región II. Observe que x_1 es fijo y	1.0
----	--	-----

que la acción depende únicamente de la coordenada α . Escriba la expresión de la acción $A(\alpha)$. Utilice el PLA para obtener la relación entre v_1/v_2 y estas coordenadas.

B El principio de extremo en óptica

Un rayo de luz pasa del medio I al medio II, cuyos índices de refracción son n_1 y n_2 , respectivamente. Los dos medios están separados por una recta paralela al eje x . El rayo de luz forma un ángulo i_1 con el eje y en el medio I y un ángulo i_2 en el medio II (véase la Fig. 2). Para obtener la trayectoria del rayo, utilizamos otro principio de extremo (mínimo o máximo), conocido como el principio de tiempo mínimo de Fermat.

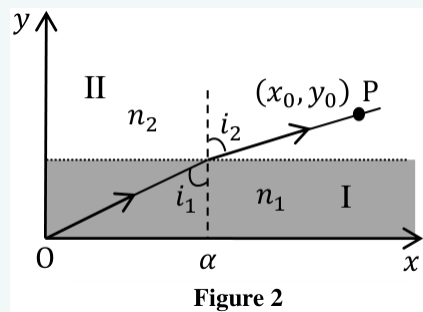


Figura 2

B1	El principio establece que, entre dos puntos fijos, un rayo de luz sigue una trayectoria tal que el tiempo empleado en recorrerla entre ambos puntos es un extremo. Deduzca la relación entre $\sin i_1$ y $\sin i_2$ a partir del principio de Fermat.	0.5
----	---	-----

La Fig. 3 muestra un esquema de la trayectoria de un haz láser que incide horizontalmente sobre una disolución de azúcar cuya concentración disminuye con la altura. En consecuencia, el índice de refracción de la disolución también disminuye con la altura.

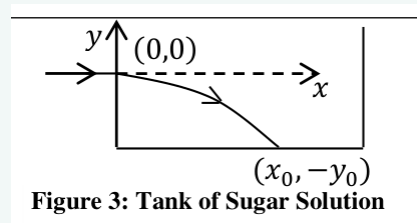


Figura 3: Depósito de disolución de azúcar

B2	Suponga que el índice de refracción $n(y)$ depende únicamente de y . Utilice la ecuación obtenida en B1 para obtener la expresión de la pendiente dy/dx de la trayectoria del haz en función del índice de refracción n_0 en $y = 0$ y de $n(y)$.	1.5
B3	El haz láser se dirige horizontalmente desde el origen $(0, 0)$ hacia el interior de la disolución de azúcar, a una altura y_0 sobre el fondo del depósito, como se muestra en la figura 3. Tome $n(y) = n_0 - ky$, donde n_0 y k son constantes positivas. Obtenga una expresión de x en función de y y de las magnitudes pertinentes para la trayectoria real del haz láser.	1.2

¹ Manoj Harbola (IIT-Kanpur) y Vijay A. Singh (excoordinador nacional de las Olimpiadas de Ciencias) fueron los autores principales de este problema. Se agradecen las contribuciones del Comité Académico, del Grupo de Desarrollo Académico y del Consejo Internacional.

	Puede utilizar: $\int \sec \theta d\theta = \ln(\sec \theta + \tan \theta) + \text{constante}$, donde $\sec \theta = 1/\cos \theta$ o $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \text{constante}$	
B4	Obtenga el valor de x_0 , el punto en el que el haz alcanza el fondo del depósito. Tome $y_0 = 10.0 \text{ cm}$, $n_0 = 1.50$, $k = 0.050 \text{ cm}^{-1}$ ($1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$).	0.8

C El principio de extremo y la naturaleza ondulatoria de la materia

A continuación exploramos la conexión entre el PLA y la naturaleza ondulatoria de una partícula en movimiento. Para ello suponemos que una partícula que se mueve de O a P puede seguir todas las trayectorias posibles y buscaremos una trayectoria que dependa de la interferencia constructiva de las ondas de de Broglie.

C1	Cuando la partícula recorre una distancia infinitesimal Δs a lo largo de su trayectoria, relacione el cambio $\Delta\varphi$ de la fase de su onda de de Broglie con el cambio ΔA de la acción y con la constante de Planck.	0.6
C2	Recuerde el problema de la parte A, en el que la partícula se desplaza de O a P (véase la Fig. 4). Se coloca una barrera opaca en la frontera AB entre las dos regiones. En AB hay una pequeña abertura CD de anchura d, tal que $d \ll (x_0 - x_1)$ y $d \ll x_1$. Considere las dos trayectorias extremas OCP y ODP, de modo que OCP coincida con la trayectoria clásica estudiada en la parte A. Obtenga la diferencia de fase $\Delta\varphi_{CD}$ entre ambas trayectorias a primer orden.	1.2

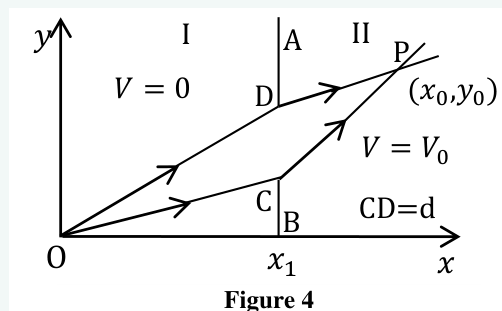


Figura 4

D Interferencia de ondas de materia

Considere un cañón de electrones situado en O que dirige un haz colimado de electrones hacia una rendija estrecha situada en F, en la barrera opaca A_1B_1 , en $x = x_1$, de modo que OFP sea una línea recta. P es un punto de la pantalla situada en $x = x_0$ (véase la Fig. 5). La rapidez en I es $v_1 = 2.0000 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$ y $\theta = 10.0000^\circ$. El potencial en II es tal que la rapidez es $v_2 = 1.9900 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$. La distancia $x_0 - x_1$ es 250.00 mm ($1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$). Desprecie la interacción entre electrones.

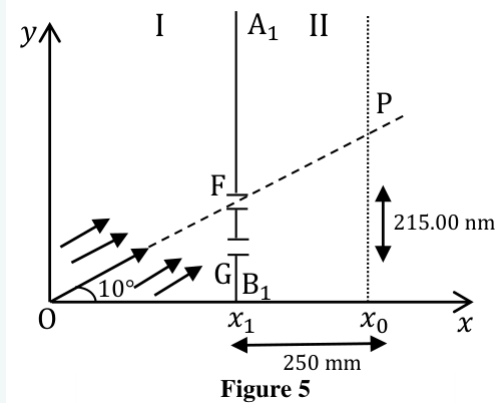


Figura 5

D1	Si los electrones en O se han acelerado desde el reposo, calcule el potencial acelerador U_1 .	0.3
D2	Se practica otra rendija idéntica G en la barrera A_1B_1 , a una distancia de 215.00 nm ($1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$) por debajo de la rendija F (Fig. 5). Si la diferencia de fase entre las ondas de de Broglie que llegan a P a través de las rendijas F y G es $2\pi\beta$, calcule β .	0.8
D3	¿Cuál es la distancia mínima Δy desde P a la que cabe esperar una detección nula (cero) de electrones en la pantalla? [Nota: puede resultar útil la aproximación $\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \sin\theta + \Delta\theta \cos\theta$]	1.2
D4	El haz tiene una sección transversal cuadrada de $500\text{nm} \times 500\text{nm}$ y el montaje tiene una longitud de 2 m. ¿Cuál debe ser la densidad de flujo mínima $I_{\min}$ (número de electrones por unidad de área normal y por unidad de tiempo) para que, en promedio, haya al menos un electrón en el montaje en un instante dado?	0.4

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **A1:** $v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2V_0}{m}}$.

- **A2:** $v_2 = v_1 \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$.

- **A3:**

$$A(\alpha) = mv_1 \sqrt{x_1^2 + \alpha^2} + mv_2 \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2},$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(y_0 - \alpha) \sqrt{x_1^2 + \alpha^2}}{\alpha \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}}.$$

- **B1:** $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

- **B2:** $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{n(y)^2}{n_0^2} - 1}$.

• **B3:**

$$x(y) = \frac{n_0}{k} \ln \left[\frac{n_0 - ky + \sqrt{(n_0 - ky)^2 - n_0^2}}{n_0} \right].$$

De forma equivalente, $y(x) = \frac{n_0}{k} \left[1 - \cosh \left(\frac{kx}{n_0} \right) \right]$.

- **B4:** $x_0 = 23.86 \dots \text{ cm} \approx 24 \text{ cm}$.
- **C1:** $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{h} \Delta A = \frac{\Delta A}{\hbar}$.
- **C2:** $\Delta\varphi_{CD} = 0$ a primer orden en d ; la corrección dominante es cuadrática.
- **D1:** $U_1 \approx 1.14 \times 10^3 \text{ V}$.
- **D2:** $\beta = \frac{m_e d (v_1 - v_2) \sin \theta}{h} \approx 5.13$.
- **D3:** $\Delta y \approx 1.6 \times 10^{-5} \text{ m} = 16 \text{ }\mu\text{m}$, **por debajo de P**.
- **D4:** $I_{\min} \approx 4 \times 10^{19} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

Solución

Para los cálculos numéricos relativos a los electrones, utilice

$$m_e = 9.1093837 \times 10^{-31} \text{ kg}, \quad e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J s},$$

donde e es el módulo de la carga del electrón.

A1

El potencial no depende del tiempo, por lo que se conserva la energía mecánica:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + V_0.$$

Por tanto,

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2V_0}{m}}.$$

El problema supone que la partícula se transmite a la región II.

A2

El potencial depende únicamente de x , por lo que la fuerza no tiene componente y . En consecuencia, se conserva la componente del momento lineal paralela a la frontera:

$$m v_1 \sin \theta_1 = m v_2 \sin \theta_2.$$

Así,

$$v_2 = v_1 \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}.$$

A3

Sea $Q = (x_1, \alpha)$ el punto de cruce de la frontera. Los dos segmentos rectos tienen longitudes

$$L_1 = \sqrt{x_1^2 + \alpha^2}, \quad L_2 = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}.$$

Para una energía total fija, las rapidezces en ambas regiones son fijas. Por consiguiente,

$$A(\alpha) = m(v_1 L_1 + v_2 L_2).$$

La trayectoria real satisface

$$\frac{dA}{d\alpha} = m \left[v_1 \frac{\alpha}{L_1} - v_2 \frac{y_0 - \alpha}{L_2} \right] = 0.$$

Por tanto,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(y_0 - \alpha)L_1}{\alpha L_2} = \frac{(y_0 - \alpha)\sqrt{x_1^2 + \alpha^2}}{\alpha\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}}.$$

Como $\alpha/L_1 = \sin \theta_1$ y $(y_0 - \alpha)/L_2 = \sin \theta_2$, se recupera el resultado de A2. Además,

$$\frac{d^2 A}{d\alpha^2} = m \left[\frac{v_1 x_1^2}{L_1^3} + \frac{v_2 (x_0 - x_1)^2}{L_2^3} \right] > 0,$$

por lo que esta acción estacionaria es un mínimo.

B1

Escribamos la interfaz horizontal como $y = b$ y supongamos que el rayo la cruza en (α, b) . La rapidez de la luz en el medio j es c/n_j . Por tanto, su tiempo de recorrido de O a P es

$$T(\alpha) = \frac{n_1}{c} \sqrt{\alpha^2 + b^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - b)^2}.$$

El principio de Fermat exige que $dT/d\alpha = 0$:

$$n_1 \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} = n_2 \frac{x_0 - \alpha}{\sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - b)^2}}.$$

Como los ángulos se miden respecto de la normal a la interfaz, los dos cocientes geométricos son $\sin i_1$ y $\sin i_2$. Así,

$$\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}, \quad \boxed{\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1}}.$$

B2

Considere el líquido como una sucesión de capas horizontales delgadas. Al aplicar B1 entre capas adyacentes se obtiene

$$n(y) \sin i(y) = \text{constante}.$$

El rayo inicial es horizontal, por lo que $i(0) = 90^\circ$, lo que da

$$n(y) \sin i(y) = n_0.$$

Para un rayo que se propaga en el sentido de x creciente,

$$\sin i = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}.$$

En consecuencia,

$$\frac{n(y)}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} = n_0,$$

y, por tanto,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n(y)^2}{n_0^2} - 1.$$

El rayo se curva hacia donde el índice de refracción es mayor, es decir, hacia abajo. Eligiendo la pendiente negativa,

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{n(y)^2}{n_0^2} - 1}}.$$

B3

Sustituimos $n(y) = n_0 - ky$:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{n_0}{\sqrt{(n_0 - ky)^2 - n_0^2}}.$$

Integrando desde el punto de entrada $(0, 0)$,

$$x = -n_0 \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{(n_0 - k\eta)^2 - n_0^2}}.$$

Con $u = (n_0 - k\eta)/n_0$, esto se convierte en

$$x = \frac{n_0}{k} \int_1^{(n_0 - ky)/n_0} \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}.$$

Utilizando la integral proporcionada,

$$\boxed{x(y) = \frac{n_0}{k} \ln \left[\frac{n_0 - ky + \sqrt{(n_0 - ky)^2 - n_0^2}}{n_0} \right]}.$$

Esta es la rama con $x \geq 0$ y $-y_0 \leq y \leq 0$.

De forma equivalente,

$$\frac{kx}{n_0} = \operatorname{arcosh} \left(1 - \frac{ky}{n_0} \right),$$

por lo que

$$\boxed{y(x) = \frac{n_0}{k} \left[1 - \cosh \left(\frac{kx}{n_0} \right) \right]}.$$

Pasa por el origen con tangente horizontal y se curva cada vez más hacia abajo.

B4

En el fondo, $y = -y_0$. Por tanto,

$$x_0 = \frac{n_0}{k} \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{ky_0}{n_0} \right).$$

Utilizando centímetros de forma coherente,

$$\frac{n_0}{k} = 30.0 \text{ cm}, \quad 1 + \frac{ky_0}{n_0} = 1 + \frac{0.050(10.0)}{1.50} = \frac{4}{3}.$$

Así,

$$x_0 = 30.0 \ln \left(\frac{4 + \sqrt{7}}{3} \right) \text{ cm} = 23.86096 \dots \text{ cm}.$$

Por consiguiente,

$$\boxed{x_0 \approx 24 \text{ cm} = 0.24 \text{ m}}.$$

C1

La longitud de onda de de Broglie es

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}.$$

La fase espacial acumulada a lo largo de una distancia infinitesimal es

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = \frac{2\pi}{h} mv \Delta s.$$

Como $\Delta A = mv \Delta s$,

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{h} \Delta A = \frac{\Delta A}{\hbar}}.$$

Para ondas estacionarias de la misma energía, la fase temporal común se cancela al comparar trayectorias en el mismo instante de observación.

C2

Sea (x_1, α) la coordenada de C, de modo que D tiene coordenada $(x_1, \alpha + d)$. A primer orden,

$$OD - OC = d \sin \theta_1 + O(d^2),$$

mientras que

$$DP - CP = -d \sin \theta_2 + O(d^2).$$

Por tanto,

$$A_{ODP} - A_{OCP} = md(v_1 \sin \theta_1 - v_2 \sin \theta_2) + O(d^2).$$

Como OCP es la trayectoria clásica, A2 da

$$v_1 \sin \theta_1 = v_2 \sin \theta_2.$$

Utilizando C1,

$$\Delta\varphi_{CD} = \frac{2\pi md}{h} (v_1 \sin \theta_1 - v_2 \sin \theta_2) + O(d^2).$$

Así,

$$\boxed{\Delta\varphi_{CD} = 0 \quad \text{a primer orden en } d}.$$

La diferencia de fase es, en general, distinta de cero a segundo orden. La acción estacionaria hace que las trayectorias vecinas tengan la misma fase a primer orden.

D1

La aceleración desde el reposo a través de una diferencia de potencial de módulo U_1 da

$$eU_1 = \frac{1}{2}m_e v_1^2.$$

Por consiguiente,

$$U_1 = \frac{m_e v_1^2}{2e} = 1137.126 \dots \text{ V},$$

o bien

$$\boxed{U_1 \approx 1.14 \times 10^3 \text{ V}}.$$

D2

Sean

$$d = 215.00 \times 10^{-9} \text{ m}, \quad L = x_0 - x_1 = 0.25000 \text{ m}.$$

Tratamos el haz colimado incidente como una onda plana coherente y utilizamos las diferencias de longitud de recorrido en campo lejano a primer orden en la separación entre rendijas.

Como F está por encima de G, la diferencia de fase incidente es

$$\varphi_F^{\text{in}} - \varphi_G^{\text{in}} = \frac{m_e v_1}{\hbar} d \sin \theta.$$

En P, que se encuentra en la prolongación rectilínea de OF,

$$FP - GP \simeq -d \sin \theta.$$

Por tanto, la propagación en la región II aporta

$$-\frac{m_e v_2}{\hbar} d \sin \theta.$$

Tomando como diferencia de fase total la fase a través de F menos la fase a través de G,

$$2\pi\beta = \frac{m_e d}{\hbar} (v_1 - v_2) \sin \theta.$$

Así,

$$\boxed{\beta = \frac{m_e d (v_1 - v_2) \sin \theta}{h}}.$$

Numéricamente,

$$\beta = 5.132650 \dots, \quad \boxed{\beta \approx 5.13}.$$

Esta es la diferencia de fase sin reducir, expresada en ciclos; módulo un ciclo es $0.132650 \dots$

D3

Para rendijas idénticas con amplitudes iguales, la interferencia destructiva se produce cuando la diferencia de fase es un múltiplo impar de π , o un número semientero de ciclos.

Sea $\theta + \delta\theta$ la dirección de salida hacia un punto cercano de la pantalla. La diferencia de fase incidente permanece fija, mientras que cambia la fase de propagación. La diferencia de fase en ciclos pasa a ser

$$b(\delta\theta) = \frac{m_e d}{h} [v_1 \sin \theta - v_2 \sin(\theta + \delta\theta)].$$

Utilizando el desarrollo para ángulos pequeños proporcionado,

$$b(\delta\theta) \simeq \beta - \frac{m_e v_2 d}{h} \cos \theta \delta\theta.$$

Los semienteros vecinos son 4.5 y 5.5. Sus distancias a β son

$$\beta - 4.5 = 0.632650 \dots, \quad 5.5 - \beta = 0.367350 \dots$$

Por tanto, el mínimo más cercano corresponde a $b = 5.5$, lo que da

$$\delta\theta = -\frac{h(5.5 - \beta)}{m_e v_2 d \cos \theta}.$$

El signo negativo significa que el mínimo está por debajo de P.

El desplazamiento con signo sobre la pantalla vertical es

$$\delta y = L [\tan(\theta + \delta\theta) - \tan \theta] \simeq \frac{L}{\cos^2 \theta} \delta\theta.$$

Así, su módulo es

$$\Delta y = \frac{hL(5.5 - \beta)}{m_e v_2 d \cos^3 \theta}.$$

Numéricamente,

$$\frac{hL}{m_e v_2 d \cos^3 \theta} = 44.5001 \dots \mu\text{m},$$

por lo que el resultado al orden dominante es

$$\Delta y = (44.5001 \dots)(0.3673499 \dots) \mu\text{m} = 16.3471 \dots \mu\text{m}.$$

Por tanto,

$$\Delta y \approx 16 \mu\text{m}, \quad \text{por debajo de P}.$$

Las aproximaciones de ángulos pequeños y de campo lejano son adecuadas aquí:

$|\delta\theta| \simeq 6.34 \times 10^{-5} \text{ rad}$, y $d/L = 8.60 \times 10^{-7}$. El resultado indicado desprecia las correcciones de orden superior en la longitud de recorrido.

D4

El área de la sección transversal normal del haz es

$$S = (500 \times 10^{-9})^2 = 2.50 \times 10^{-13} \text{ m}^2.$$

Para una distancia de vuelo de 2 m, utilizando $v \simeq 2.0 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$, el tiempo de tránsito es

$$\tau \simeq \frac{2}{2.0 \times 10^7} = 1.0 \times 10^{-7} \text{ s}.$$

Si la densidad de flujo es I , el número de electrones que entran por unidad de tiempo es IS . En régimen estacionario, el número medio de electrones en el aparato es

$$\overline{N} = IS\tau.$$

El flujo mínimo corresponde a $\overline{N} = 1$:

$$I_{\min} = \frac{1}{S\tau}.$$

Por tanto,

$$I_{\min} \simeq \frac{1}{(2.50 \times 10^{-13})(1.0 \times 10^{-7})} = 4 \times 10^{19} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

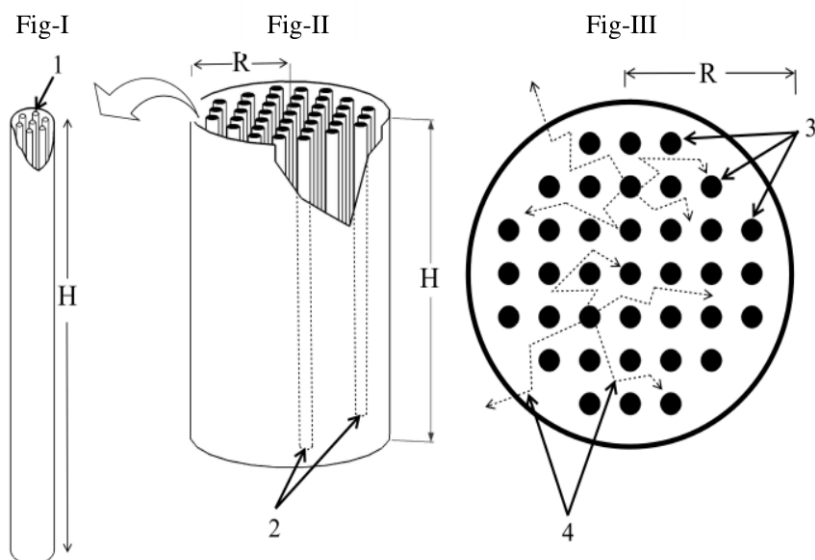
Más precisamente, $\tau = \ell_1/v_1 + \ell_2/v_2$, donde $\ell_1 + \ell_2$ es la distancia de vuelo. Las dos rapidezces difieren únicamente en un 0.5%, por lo que sustituirlas por la rapidez aproximada común no afecta a la precisión indicada.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: El diseño de un reactor nuclear

El uranio se encuentra en la naturaleza en forma de UO_2 , y solo el 0.720% de los átomos de uranio son ^{235}U . La fisión inducida por neutrones se produce fácilmente en el ^{235}U , con la emisión de 2-3 neutrones de fisión de elevada energía cinética. Esta probabilidad de fisión aumenta si los neutrones que inducen la fisión tienen una energía cinética baja. Por tanto, al reducir la energía cinética de los neutrones de fisión, se puede inducir una cadena de fisiones en otros núcleos de ^{235}U . Este es el fundamento del reactor nuclear (NR) generador de energía eléctrica.

Un NR típico consta de un depósito cilíndrico de altura H y radio R , lleno de un material llamado moderador. Unos tubos cilíndricos, llamados canales de combustible, cada uno de los cuales contiene un haz de varillas cilíndricas de combustible de UO_2 natural sólido de altura H , se disponen axialmente en una retícula cuadrada. Los neutrones de fisión que salen de un canal de combustible chocan con el moderador, pierden energía y llegan a los canales de combustible circundantes con una energía suficientemente baja como para provocar fisión (Figs. I-III). El calor generado por la fisión en la varilla se transmite a un fluido refrigerante que circula a lo largo de ella. En este problema estudiaremos algunos de los fundamentos físicos de (A) la varilla de combustible, (B) el moderador y (C) el NR de geometría cilíndrica.



Schematic sketch of the Nuclear Reactor (NR)

Fig-I: Enlarged view of a fuel channel (1-Fuel Pins)

Fig-II: A view of the NR (2-Fuel Channels)

Fig-III: Top view of NR (3-Square Arrangement of Fuel Channels and 4-Typical Neutron Paths).

Only components relevant to the problem are shown (e.g. control rods and coolant are not shown).

A Varilla de combustible

Datos del UO_2	1. Masa molar $M_w = 0.270 \text{ kg mol}^{-1}$	2. Densidad $\rho = 1.060 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
	3. Punto de fusión $T_m = 3.138 \times 10^3 \text{ K}$	4. Conductividad térmica $\lambda = 3.280 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$

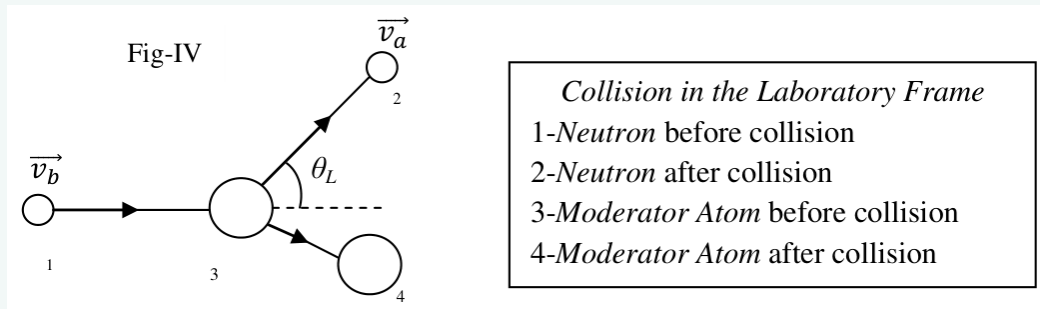
A1	Considere la siguiente reacción de fisión de un núcleo de ^{235}U en reposo después de absorber un neutrón de energía cinética despreciable. $^{235}\text{U} + ^1_0\text{n} \longrightarrow ^{94}\text{Zr} + ^{140}\text{Ce} + 2^1_0\text{n} + \Delta E$ Estime ΔE (en MeV), la energía total liberada en la fisión. Las masas nucleares son: $m(^{235}\text{U}) = 235.044 \text{ u}$; $m(^{94}\text{Zr}) = 93.9063 \text{ u}$; $m(^{140}\text{Ce}) = 139.905 \text{ u}$; $m(^1_0\text{n}) = 1.00867 \text{ u}$ y $1 \text{ u} = 931.502 \text{ MeV } c^{-2}$. Ignore el desequilibrio de carga.	0.8
A2	Estime N , el número de átomos de ^{235}U por unidad de volumen en el UO_2 natural.	0.5
A3	Suponga que la densidad de flujo de neutrones, $\varphi = 2.000 \times 10^{18} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$, sobre el combustible es uniforme. La sección eficaz de fisión (área efectiva del núcleo blanco) de un núcleo de ^{235}U es $\sigma_f = 5.400 \times 10^{-26} \text{ m}^2$. Si el 80.00% de la energía de fisión está disponible en forma de calor, estime Q (en W m^{-3}), la tasa de producción de calor en la varilla por unidad de volumen. $1\text{MeV} = 1.602 \times 10^{-13} \text{ J}$	1.2
A4	La diferencia de temperatura en régimen estacionario entre el centro (T_c) y la superficie (T_s) de la varilla puede expresarse como $T_c - T_s = k F(Q, a, \lambda)$, donde $k = 1/4$ es una constante adimensional y a es el radio de la varilla. Obtenga $F(Q, a, \lambda)$ mediante análisis dimensional. Tenga en cuenta que λ es la conductividad térmica del UO_2 .	0.5
A5	La temperatura deseada del refrigerante es $5.770 \times 10^2 \text{ K}$. Estime el límite superior a_u del radio a de la varilla.	1.0

B El moderador

Considere la colisión elástica bidimensional entre un neutrón de masa 1 u y un átomo del moderador de masa $A \text{ u}$. Antes de la colisión se considera que todos los átomos del moderador están en reposo en el sistema de referencia del laboratorio (LF). Sean $\vec{v}_b$ y $\vec{v}_a$ las velocidades del

neutrón antes y después de la colisión, respectivamente, en el LF. Sea $\vec{v}_m$ la velocidad del sistema de referencia del centro de masas (CM) respecto al LF, y sea θ el ángulo de dispersión del neutrón en el sistema CM. Todas las partículas que intervienen en las colisiones se mueven a velocidades no relativistas.

B1	La colisión en el LF se muestra esquemáticamente, donde θ_L es el ángulo de dispersión (Fig. IV). Dibuje un esquema de la colisión en el sistema CM. Indique las velocidades de las partículas 1, 2 y 3 en función de $\vec{v}_b$, $\vec{v}_a$ y $\vec{v}_m$. Indique el ángulo de dispersión θ .	1.0
----	---	-----



B2	Obtenga v y V , los módulos de las velocidades del neutrón y del átomo del moderador en el sistema CM después de la colisión, en función de A y v_b .	1.0
B3	Deduzca una expresión para $G(\alpha, \theta) = E_a/E_b$, donde E_b y E_a son las energías cinéticas del neutrón, en el LF, antes y después de la colisión, respectivamente, y $\alpha \equiv [(A-1)/(A+1)]^2$.	1.0
B4	Suponga que la expresión anterior es válida para la molécula de D_2O . Calcule la máxima pérdida fraccionaria posible de energía $f_l \equiv (E_b - E_a)/E_b$ del neutrón para el moderador de D_2O (20 u).	0.5

C El reactor nuclear

Para que el NR funcione con cualquier flujo de neutrones constante ψ (régimen estacionario), la fuga de neutrones debe compensarse con una producción excedente de neutrones en el reactor. Para un reactor de geometría cilíndrica, la tasa de fuga es $k_1[(2.405/R)^2 + (\pi/H)^2]\psi$ y la tasa de producción excedente es $k_2\psi$. Las constantes k_1 y k_2 dependen de las propiedades de los materiales del NR.

C1	Considere un NR con $k_1 = 1.021 \times 10^{-2} \text{ m}$ y $k_2 = 8.787 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$. Teniendo en cuenta que, para un volumen fijo, la tasa de fuga debe minimizarse para utilizar eficientemente el combustible, obtenga las dimensiones del NR en régimen estacionario.	1.5
C2	Los canales de combustible se disponen en una retícula cuadrada (Fig. III) con una distancia entre vecinos más próximos de 0.286 m. El radio efectivo de un canal de combustible (si fuera macizo) es $3.617 \times 10^{-2} \text{ m}$. Estime el número de canales de combustible F_n del reactor y la masa M de UO_2 necesaria para que el NR funcione en régimen estacionario.	1.0

¹ Joseph Amal Nathan (BARC) y Vijay A. Singh (excoordinador nacional de las Olimpiadas de Ciencias) fueron los autores principales de este problema. Se agradecen las contribuciones del Comité Académico, del Grupo de Desarrollo Académico y de la Junta Internacional.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **A1:** $\Delta E \simeq 208.7 \text{ MeV}$.
- **A2:** $N \simeq 1.70 \times 10^{26} \text{ m}^{-3}$.
- **A3:** $Q \simeq 4.92 \times 10^8 \text{ W m}^{-3}$.
- **A4:** $F(Q, a, \lambda) = \frac{Qa^2}{\lambda}$, por lo que $T_c - T_s = \frac{Qa^2}{4\lambda}$.
- **A5:** $a_u \simeq 8.27 \times 10^{-3} \text{ m} = 8.27 \text{ mm}$.
- **B1:** Indicaciones de las velocidades en el CM: 1 : $\vec{v}_b - \vec{v}_m$, 2 : $\vec{v}_a - \vec{v}_m$, 3 : $-\vec{v}_m$. El ángulo entre las velocidades inicial y final del neutrón es θ ; las dos partículas salientes se mueven en sentidos opuestos.
- **B2:** $v = \frac{A}{A+1} v_b$, $V = \frac{1}{A+1} v_b$.
- **B3:** $G(\alpha, \theta) = \frac{1 + \alpha + (1 - \alpha) \cos \theta}{2}$.
- **B4:** $f_{l,\max} = \frac{80}{441} \simeq 0.1814 = 18.14\%$.
- **C1:** $R = 2.405 \sqrt{\frac{3k_1}{2k_2}} \simeq 3.175 \text{ m}$, $H = \pi \sqrt{\frac{3k_1}{k_2}} \simeq 5.865 \text{ m}$.
- **C2:** $F_n \simeq 387$ canales de combustible; $M \simeq 9.89 \times 10^4 \text{ kg}$, o 98.9 toneladas de UO_2 .

Solución

A1

Como la energía cinética inicial es despreciable, la conservación de la energía permite expresar la energía liberada como la disminución de la energía total en reposo:

$$\Delta E = [m(^{235}\text{U}) + m(^1_0\text{n}) - m(^{94}\text{Zr}) - m(^{140}\text{Ce}) - 2m(^1_0\text{n})]c^2.$$

Utilizando las masas proporcionadas sin ninguna corrección de carga,

$$\begin{aligned}\Delta m &= [235.044 + 1.00867 - (93.9063 + 139.905 + 2(1.00867))] \text{u} \\ &= 0.22403 \text{ u}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\Delta E = 0.22403(931.502) \text{ MeV} = 208.684 \dots \text{ MeV},$$

o bien

$$\boxed{\Delta E \simeq 208.7 \text{ MeV}}.$$

A2

Cada unidad fórmula de UO_2 contiene un átomo de uranio. El número de unidades fórmula por unidad de volumen es

$$n_{\text{UO}_2} = \frac{\rho}{M_w} N_A,$$

donde la constante de Avogadro estándar es $N_A \simeq 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

La fracción de átomos de uranio que son ^{235}U es 0.00720. Por consiguiente,

--

$$\begin{aligned}
N &= 0.00720 \frac{\rho N_A}{M_w} \\
&= 0.00720 \frac{1.060 \times 10^4}{0.270} (6.022 \times 10^{23}) \text{ m}^{-3} \\
&= 1.7022 \dots \times 10^{26} \text{ m}^{-3}.
\end{aligned}$$

Así,

$$N \simeq 1.70 \times 10^{26} \text{ m}^{-3}.$$

A3

La tasa de fisión de un núcleo blanco en el flujo uniforme de neutrones especificado es $\varphi\sigma_f$. Por tanto, la tasa de fisión por unidad de volumen es

$$r_f = N\varphi\sigma_f.$$

Numéricamente,

$$\varphi\sigma_f = (2.000 \times 10^{18})(5.400 \times 10^{-26}) = 1.080 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1},$$

y

$$r_f = 1.8384 \dots \times 10^{19} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

El calor depositado por fisión es

$$E_h = 0.8000 \Delta E = 0.8000(208.684 \dots)(1.602 \times 10^{-13}) \text{ J}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
Q &= N\varphi\sigma_f E_h \\
&= 4.9168 \dots \times 10^8 \text{ W m}^{-3},
\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$Q \simeq 4.92 \times 10^8 \text{ W m}^{-3}.$$

A4

Supongamos que F tiene la forma dimensional $Q^x a^y \lambda^z$. Denotando las dimensiones de potencia, longitud y temperatura por P, L, Θ ,

$$[Q] = PL^{-3}, \quad [a] = L, \quad [\lambda] = PL^{-1}\Theta^{-1}.$$

Así,

$$[F] = P^{x+z} L^{-3x+y-z} \Theta^{-z}.$$

Para que F tenga dimensiones de temperatura,

$$x + z = 0, \quad -3x + y - z = 0, \quad -z = 1.$$

Estas ecuaciones dan

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = -1.$$

El factor numérico adimensional ya se proporciona como k , por lo que

$$F(Q, a, \lambda) = \frac{Qa^2}{\lambda}, \quad T_c - T_s = \frac{Qa^2}{4\lambda}.$$

A5

Con una producción interna de calor uniforme, el centro es la parte más caliente de la varilla. Para evitar la fusión se requiere

$$T_c \leq T_m.$$

El calor debe fluir desde la superficie de la varilla hacia el refrigerante, por lo que la temperatura superficial no puede ser inferior a la del refrigerante:

$$T_s \geq T_{\text{cool}}.$$

Se deduce que

$$\frac{Qa^2}{4\lambda} = T_c - T_s \leq T_m - T_{\text{cool}}.$$

Por tanto, el radio límite es

$$a_u = \sqrt{\frac{4\lambda(T_m - T_{\text{cool}})}{Q}}.$$

Utilizando

$$T_m - T_{\text{cool}} = 3138 - 577.0 = 2561 \text{ K},$$

obtenemos

$$a_u = \sqrt{\frac{4(3.280)(2561)}{4.9168 \times 10^8}} = 8.2667 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

Así,

$$a_u \simeq 8.27 \text{ mm}.$$

Este límite superior corresponde al caso límite ideal $T_s = T_{\text{cool}}$. Una caída de temperatura finita entre la superficie y el refrigerante reduciría el radio admisible.

B1

Sea m la masa del neutrón, de modo que la masa del moderador es Am . Antes de la colisión, el moderador está en reposo en el LF. Por tanto, la velocidad del CM es

$$\vec{v}_m = \frac{m\vec{v}_b + Am\vec{0}}{(A+1)m} = \frac{\vec{v}_b}{A+1}.$$

Una transformación de Galileo al sistema CM resta $\vec{v}_m$ a cada velocidad del LF. Así, las indicaciones requeridas son

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_b - \vec{v}_m, \quad \vec{u}_2 = \vec{v}_a - \vec{v}_m, \quad \vec{u}_3 = -\vec{v}_m.$$

El esquema debe presentar las siguientes características:

- Antes de la colisión, el neutrón **1** se aproxima desde la izquierda y se mueve horizontalmente hacia la derecha con velocidad $\vec{v}_b - \vec{v}_m$.
- El moderador **3** se aproxima desde la derecha y se mueve horizontalmente hacia la izquierda con velocidad $-\vec{v}_m$.
- Después de la colisión, el neutrón **2** sale del punto de colisión con velocidad $\vec{v}_a - \vec{v}_m$. Marque θ entre esta flecha y la dirección original del neutrón hacia la derecha.

- El moderador **4** sale en sentido exactamente opuesto al del neutrón **2**, porque la cantidad de movimiento total en el CM es cero. Su velocidad es

$$\vec{u}_4 = -\frac{\vec{u}_2}{A}.$$

Por ejemplo, si la flecha del neutrón saliente apunta hacia arriba y hacia la derecha, la flecha del moderador saliente apunta hacia abajo y hacia la izquierda.

B2

Los módulos de las velocidades iniciales en el CM son

$$u_{n,b} = v_b - v_m = \frac{A}{A+1}v_b, \quad u_{M,b} = v_m = \frac{1}{A+1}v_b.$$

La conservación de la cantidad de movimiento en el sistema CM exige que las cantidades de movimiento finales sean iguales en módulo y opuestas en sentido. Por tanto, sus módulos satisfacen

$$mv = AmV, \quad \text{por lo que} \quad v = AV.$$

Como la colisión es elástica, la energía cinética se conserva:

$$\frac{1}{2}mu_{n,b}^2 + \frac{1}{2}Amu_{M,b}^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}AmV^2.$$

Tras cancelar $m/2$,

$$\frac{A}{A+1}v_b^2 = v^2 + AV^2.$$

Sustituyendo $v = AV$ se obtiene

$$A(A+1)V^2 = \frac{A}{A+1}v_b^2.$$

Por consiguiente,

$$\boxed{V = \frac{v_b}{A+1}}, \quad \boxed{v = \frac{A}{A+1}v_b}.$$

La colisión cambia las direcciones de las velocidades, pero el módulo de la velocidad de cada partícula en el sistema CM permanece inalterado.

B3

La velocidad final del neutrón en el LF es

$$\vec{v}_a = \vec{v}_m + \vec{u}_2.$$

El vector $\vec{v}_m$ apunta en la dirección inicial del neutrón, mientras que $\vec{u}_2$ forma un ángulo θ con dicha dirección. En consecuencia,

$$v_a^2 = v_m^2 + v^2 + 2v_mv \cos \theta.$$

Utilizando los resultados anteriores,

$$\frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{1 + A^2 + 2A \cos \theta}{(A+1)^2}.$$

Como ambas energías corresponden al mismo neutrón en el LF,

$$G(\alpha, \theta) = \frac{E_a}{E_b} = \frac{v_a^2}{v_b^2}.$$

Ahora bien,

$$\alpha = \frac{(A-1)^2}{(A+1)^2}$$

implica

$$\frac{1+\alpha}{2} = \frac{A^2+1}{(A+1)^2}, \quad \frac{1-\alpha}{2} = \frac{2A}{(A+1)^2}.$$

Por tanto,

$$G(\alpha, \theta) = \frac{1+\alpha+(1-\alpha)\cos\theta}{2}.$$

Una forma equivalente es

$$G(\alpha, \theta) = 1 - (1-\alpha)\sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

En particular, la dispersión hacia delante da $G = 1$, mientras que la dispersión hacia atrás en el sistema CM da $G = \alpha$.

B4

La pérdida fraccionaria de energía es

$$f_l = 1 - G = (1-\alpha)\sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Es máxima para la retrodispersión en el CM, $\theta = \pi$. Así,

$$f_{l,\max} = 1 - \alpha = 1 - \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 = \frac{4A}{(A+1)^2}.$$

Siguiendo la aproximación del problema de que la molécula completa de D_2O es un blanco de masa 20 u, tomamos $A = 20$:

$$f_{l,\max} = \frac{4(20)}{21^2} = \frac{80}{441} \simeq 0.1814 = 18.14\%.$$

C1

Para un flujo estacionario de neutrones no nulo, la producción y la fuga deben equilibrarse:

$$k_1 \left[\frac{2.405^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} \right] \psi = k_2 \psi.$$

Cancelando ψ ,

$$\frac{2.405^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} = \frac{k_2}{k_1}. \quad (1)$$

Primero determinamos la forma que minimiza la fuga para un volumen fijo. Escribimos

$$\mathcal{V} = \pi R^2 H, \quad b = 2.405,$$

de modo que

$$H = \frac{\mathcal{V}}{\pi R^2}.$$

El factor geométrico de la tasa de fuga se convierte en

$$S(R) = \frac{b^2}{R^2} + \frac{\pi^4 R^4}{\mathcal{V}^2}.$$

Su derivada se anula cuando

$$-\frac{2b^2}{R^3} + \frac{4\pi^4 R^3}{\mathcal{V}^2} = 0.$$

Reordenando y utilizando $\mathcal{V} = \pi R^2 H$,

$$\boxed{\frac{b^2}{R^2} = 2 \frac{\pi^2}{H^2}}. \quad (2)$$

Este punto estacionario es un mínimo, ya que

$$S''(R) = \frac{6b^2}{R^4} + \frac{12\pi^4 R^2}{\mathcal{V}^2} > 0.$$

Por tanto, la relación de aspecto óptima es

$$\frac{H}{R} = \frac{\sqrt{2}\pi}{b} = 1.84735 \dots$$

Combinando (1) y (2),

$$3 \frac{\pi^2}{H^2} = \frac{k_2}{k_1},$$

lo que da

$$\boxed{H = \pi \sqrt{\frac{3k_1}{k_2}}}, \quad \boxed{R = b \sqrt{\frac{3k_1}{2k_2}}}.$$

Numéricamente,

$$H = \pi \sqrt{\frac{3(1.021 \times 10^{-2})}{8.787 \times 10^{-3}}} \simeq \boxed{5.865 \text{ m}},$$

$$R = 2.405 \sqrt{\frac{3(1.021 \times 10^{-2})}{2(8.787 \times 10^{-3})}} \simeq \boxed{3.175 \text{ m}}.$$

C2

Sea $d = 0.286 \text{ m}$ la separación de la retícula cuadrada. Despreciando las correcciones de borde, cada canal de combustible ocupa una celda cuadrada de área transversal d^2 . Por tanto,

$$F_n \simeq \frac{\pi R^2}{d^2}.$$

La sustitución da

$$F_n \simeq \frac{\pi(3.17507 \dots)^2}{(0.286)^2} = 387.19 \dots$$

Por consiguiente, el número estimado es

$$F_n \simeq 387 \text{ canales de combustible}.$$

Con un radio efectivo de combustible macizo $r_f = 3.617 \times 10^{-2} \text{ m}$, el volumen de UO_2 en un canal es $\pi r_f^2 H$. Su masa es, por tanto, $\rho \pi r_f^2 H$, y la masa total de combustible es

$$M = F_n \rho \pi r_f^2 H.$$

Utilizando la estimación basada en el área sin redondear,

$$\begin{aligned} M &\simeq (387.19 \dots)(1.060 \times 10^4) \pi (3.617 \times 10^{-2})^2 (5.86547 \dots) \text{ kg} \\ &= 9.8942 \dots \times 10^4 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Así,

$$M \simeq 9.89 \times 10^4 \text{ kg} = 98.9 \text{ toneladas de } \text{UO}_2.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.