

IPhO 2015

Theorieaufgaben und Lösungen · Mumbai, Indien · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/2015/

Aufgabe 1: Teilchen von der Sonne

Photonen von der Sonnenoberfläche und Neutrinos aus ihrem Kern können uns Aufschluss über die Temperaturen der Sonne geben und auch bestätigen, dass die Sonne aufgrund von Kernreaktionen leuchtet.

Nehmen Sie in dieser gesamten Aufgabe für die Masse der Sonne $M_{\odot} = 2.00 \times 10^{30} \text{ kg}$, für ihren Radius $R_{\odot} = 7.00 \times 10^8 \text{ m}$, für ihre Leuchtkraft (pro Zeiteinheit abgestrahlte Energie) $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{26} \text{ W}$ und für den Abstand zwischen Erde und Sonne $d_{\odot} = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$ an.

Hinweis:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} + \text{Konstante} \\ \text{(ii)} \quad & \int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax} + \text{Konstante} \\ \text{(iii)} \quad & \int x^3 e^{ax} dx = \left(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4} \right) e^{ax} + \text{Konstante} \end{aligned}$$

A Strahlung von der Sonne :

Teil	Frage	Punkte
A1	Nehmen Sie an, dass die Sonne wie ein idealer schwarzer Körper strahlt. Berechnen Sie damit die Temperatur T_s der Sonnenoberfläche.	0.3

Das Spektrum der Sonnenstrahlung lässt sich gut durch das Wiensche Strahlungsgesetz annähern. Demnach ist die pro Zeiteinheit und pro Frequenzintervall auf eine beliebige Fläche auf der Erde einfallende Sonnenenergie $u(\nu)$ gegeben durch

$$u(\nu) = A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi h}{c^2} \nu^3 \exp(-h\nu/k_B T_s),$$

wobei ν die Frequenz und A der Flächeninhalt der zur Richtung der einfallenden Strahlung senkrechten Fläche ist.

Betrachten Sie nun eine Solarzelle, die aus einer dünnen Scheibe aus Halbleitermaterial mit dem Flächeninhalt A besteht und senkrecht zur Richtung der Sonnenstrahlen angeordnet ist.

Teil	Frage	Punkte
A2	Drücken Sie unter Verwendung der Wien-Näherung die gesamte auf die Oberfläche der Solarzelle einfallende Sonnenstrahlungsleistung P_{in} durch A , $R_{\odot}$, $d_{\odot}$, T_s und die Naturkonstanten c , h , k_B aus.	0.3

Teil	Frage	Punkte
A3	Drücken Sie die Anzahl der pro Zeiteinheit und pro Frequenzintervall auf die Oberfläche der Solarzelle einfallenden Photonen $n_\gamma(\nu)$ durch A , $R_\odot$, $d_\odot$, T_s , ν und die Naturkonstanten c , h , k_B aus.	0.2

Das Halbleitermaterial der Solarzelle hat eine „Bandlücke“ mit der Energie E_g . Wir nehmen folgendes Modell an. Jedes Photon mit der Energie $E \geq E_g$ regt ein Elektron über die Bandlücke hinweg an. Dieses Elektron liefert die Energie E_g als nutzbare Ausgangsenergie; jede darüber hinausgehende Energie wird als Wärme abgegeben (und nicht in nutzbare Energie umgewandelt).

Teil	Frage	Punkte
A4	Definieren Sie $x_g = h\nu_g/k_B T_s$, wobei $E_g = h\nu_g$. Drücken Sie die nutzbare Ausgangsleistung der Zelle P_{out} durch x_g , A , $R_\odot$, $d_\odot$, T_s und die Naturkonstanten c , h , k_B aus.	1.0
A5	Drücken Sie den Wirkungsgrad η dieser Solarzelle durch x_g aus.	0.2
A6	Skizzieren Sie qualitativ η in Abhängigkeit von x_g . Die Werte bei $x_g = 0$ und für $x_g \rightarrow \infty$ sollen deutlich erkennbar sein. Wie groß ist die Steigung von $\eta(x_g)$ bei $x_g = 0$ und für $x_g \rightarrow \infty$?	1.0
A7	Es sei x_0 der Wert von x_g , für den η maximal ist. Leiten Sie die kubische Gleichung her, die x_0 bestimmt. Schätzen Sie den Wert von x_0 mit einer Genauigkeit von ± 0.25 ab. Berechnen Sie daraus $\eta(x_0)$.	1.0
A8	Die Bandlücke von reinem Silizium beträgt $E_g = 1.11$ eV. Berechnen Sie mit diesem Wert den Wirkungsgrad η_{Si} einer Siliziumsolarzelle.	0.2

¹ Amol Dighe (TIFR), Anwesh Mazumdar (HBCSE-TIFR) und Vijay A. Singh (ehemaliger nationaler Koordinator der Wissenschaftsolympiaden) waren die Hauptautoren dieser Aufgabe. Für die Beiträge des Akademischen Komitees, der Akademischen Entwicklungsgruppe und des Internationalen Gremiums wird herzlich gedankt.

Im späten neunzehnten Jahrhundert stellten Kelvin und Helmholtz (KH) eine Hypothese auf, um zu erklären, wie die Sonne leuchtet. Sie nahmen an, dass die Sonne ursprünglich eine sehr große Materiewolke mit der Masse $M_\odot$ und vernachlässigbarer Dichte war und seither kontinuierlich schrumpft. Das Leuchten der Sonne wäre dann auf die Freisetzung potenzieller Gravitationsenergie durch diese langsame Kontraktion zurückzuführen.

Teil	Frage	Punkte
A9	Nehmen wir an, dass die Materiedichte im Inneren der Sonne gleichmäßig ist. Bestimmen Sie die gesamte gegenwärtige potenzielle Gravitationsenergie Ω der Sonne in Abhängigkeit von G , $M_\odot$ und $R_\odot$.	0.3
A10	Schätzen Sie die maximal mögliche Zeit τ_{KH} (in Jahren) ab, während der die Sonne gemäß der KH-Hypothese geleuchtet haben könnte. Nehmen Sie an, dass die Leuchtkraft der Sonne während dieses gesamten Zeitraums konstant war.	0.5

Die oben berechnete Zeit τ_{KH} stimmt nicht mit dem aus Meteoritenuntersuchungen abgeschätzten Alter des Sonnensystems überein. Dies zeigt, dass die Energiequelle der Sonne nicht rein gravitativer Natur sein kann.

B Neutrinos von der Sonne :

Im Jahr 1938 schlug Hans Bethe vor, dass die Kernfusion von Wasserstoff zu Helium im Kern der Sonne ihre Energiequelle ist. Die Nettokernreaktion lautet:



Die bei dieser Reaktion erzeugten „Elektron-Neutrinos“ ν_e können als masselos betrachtet werden. Sie entweichen aus der Sonne, und ihr Nachweis auf der Erde bestätigt, dass im Inneren der Sonne Kernreaktionen stattfinden. Die von den Neutrinos abgeführte Energie kann in dieser Aufgabe vernachlässigt werden.

Teil	Frage	Punkte
B1	Berechnen Sie die Teilchenflussdichte Φ_ν der auf der Erde eintreffenden Neutrinos in Einheiten von $\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$. Die bei der obigen Reaktion freigesetzte Energie beträgt $\Delta E = 4.0 \times 10^{-12}\text{ J}$. Nehmen Sie an, dass die von der Sonne abgestrahlte Energie vollständig aus dieser Reaktion stammt.	0.6

Auf dem Weg vom Sonnenkern zur Erde wandelt sich ein Teil der Elektron-Neutrinos ν_e in andere Neutrinoarten ν_x um. Die Nachweiseffizienz des Detektors für ν_x beträgt $1/6$ seiner Nachweiseffizienz für ν_e . Ohne Neutrinoumwandlung erwarten wir, im Mittel N_1 Neutrinos pro Jahr nachzuweisen. Aufgrund der Umwandlung werden jedoch tatsächlich im Mittel N_2 Neutrinos (ν_e und ν_x zusammen) pro Jahr nachgewiesen.

Teil	Frage	Punkte
B2	Berechnen Sie in Abhängigkeit von N_1 und N_2 , welcher Anteil f der ν_e in ν_x umgewandelt wird.	0.4

Zum Nachweis von Neutrinos werden große, mit Wasser gefüllte Detektoren gebaut. Obwohl Wechselwirkungen von Neutrinos mit Materie sehr selten sind, schlagen sie gelegentlich Elektronen aus Wassermolekülen im Detektor heraus. Diese energiereichen Elektronen bewegen sich mit hohen Geschwindigkeiten durch das Wasser und senden dabei elektromagnetische Strahlung aus. Solange die Geschwindigkeit eines solchen Elektrons größer als die Lichtgeschwindigkeit im Wasser (Brechungsindex n) ist, wird diese als Tscherenkow-Strahlung bezeichnete Strahlung kegelförmig ausgesandt.

Teil	Frage	Punkte
B3	Nehmen Sie an, dass ein von einem Neutrino herausgeschlagenes Elektron beim Durchgang durch Wasser mit einer konstanten Rate von α pro Zeiteinheit Energie verliert. Wenn dieses Elektron während einer Zeit Δt Tscherenkow-Strahlung aussendet, bestimmen Sie die vom Neutrino auf dieses Elektron übertragene Energie (E_{imparted}) in Abhängigkeit von α , Δt , n , m_e und c . (Nehmen Sie an, dass das Elektron vor seiner Wechselwirkung mit dem Neutrino ruht.)	2.0

Die Fusion von H zu He im Inneren der Sonne erfolgt in mehreren Schritten. In einem dieser Zwischenschritte entsteht ein ${}^7\text{Be}$ -Kern (Ruhemasse m_{Be}). Anschließend kann er ein Elektron einfangen, wobei ein ${}^7\text{Li}$ -Kern (Ruhemasse $m_{\text{Li}} < m_{\text{Be}}$) entsteht und ein ν_e ausgesandt wird. Die entsprechende Kernreaktion lautet:



Wenn ein Be-Kern ($m_{\text{Be}} = 11.65 \times 10^{-27} \text{ kg}$) ruht und ein ebenfalls ruhendes Elektron einfängt, hat das ausgesandte Neutrino die Energie $E_\nu = 1.44 \times 10^{-13} \text{ J}$. Aufgrund der Temperatur T_c im Sonnenkern führen die Be-Kerne jedoch eine ungeordnete thermische Bewegung aus und wirken als bewegte Neutrinoquellen. Daher schwankt die Energie der ausgesandten Neutrinos mit einem Effektivwert (rms) der Abweichung von ΔE_{rms} .

Teil	Frage	Punkte
B4	Berechnen Sie für $\Delta E_{\text{rms}} = 5.54 \times 10^{-17} \text{ J}$ die mittlere quadratische Geschwindigkeit V_{Be} der Be-Kerne und schätzen Sie daraus T_c ab. (Hinweis: ΔE_{rms} hängt vom Effektivwert der Geschwindigkeitskomponente entlang der Sichtlinie ab.)	2.0

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- A1

$$T_s = \left(\frac{L_\odot}{4\pi R_\odot^2 \sigma} \right)^{1/4} \simeq 5.76 \times 10^3 \text{ K}.$$

- A2

$$P_{\text{in}} = \frac{12\pi A R_\odot^2 (k_B T_s)^4}{d_\odot^2 c^2 h^3}.$$

- A3

$$n_\gamma(\nu) = \frac{2\pi A R_\odot^2}{d_\odot^2 c^2} \nu^2 e^{-h\nu/(k_B T_s)}.$$

- A4

$$P_{\text{out}} = \frac{2\pi A R_\odot^2 (k_B T_s)^4}{d_\odot^2 c^2 h^3} x_g (x_g^2 + 2x_g + 2) e^{-x_g}.$$

- A5

$$\eta(x_g) = \frac{x_g (x_g^2 + 2x_g + 2) e^{-x_g}}{6}.$$

- A6 Die Kurve beginnt im Ursprung mit der Steigung $1/3$, erreicht ein einziges Maximum nahe $(2.27, 0.457)$ und nähert sich der horizontalen Achse von oben:

$$\eta(0) = 0, \quad \lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta = 0, \quad \eta'(0) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta' = 0 \quad \text{von unten.}$$

- A7

$$x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0, \quad x_0 \simeq 2.27, \quad \eta(x_0) \simeq 0.457 = 45.7\%.$$

- A8

$$x_{g,\text{Si}} \simeq 2.24, \quad \eta_{\text{Si}} \simeq 0.457 = 45.7\%.$$

• A9

$$\Omega = -\frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}} \simeq -2.29 \times 10^{41} \text{ J.}$$

• A10

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}L_{\odot}} \simeq 1.88 \times 10^7 \text{ years.}$$

• B1

$$\Phi_{\nu} = \frac{2L_{\odot}}{4\pi d_{\odot}^2 \Delta E} \simeq 6.8 \times 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

• B2

$$f = \frac{6}{5} \left(1 - \frac{N_2}{N_1} \right).$$

• B3

$$E_{\text{imparted}} = \alpha \Delta t + m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}} - 1 \right).$$

• B4

$$V_{\text{Be}} = \sqrt{3} c \frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}} \simeq 2.00 \times 10^5 \text{ m s}^{-1},$$

$$T_c = \frac{m_{\text{Be}} c^2}{k_B} \left(\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}} \right)^2 \simeq 1.12 \times 10^7 \text{ K.}$$

Lösung

Für die numerische Auswertung verwenden wir die Standardkonstanten

$$\begin{aligned} \sigma &= 5.6704 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}, \\ G &= 6.6743 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \\ k_B &= 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}, \\ c &= 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}, \end{aligned}$$

mit $1 \text{ eV} = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J}$ und $1 \text{ year} = 3.15576 \times 10^7 \text{ s}$.

A1

Nach dem Stefan–Boltzmann-Gesetz strahlt ein schwarzer Körper die Leistung σT^4 pro Flächeneinheit ab. Die abstrahlende Fläche der Sonne beträgt $4\pi R_{\odot}^2$, also gilt

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_s^4.$$

Daraus folgt

$$T_s = \left[\frac{3.85 \times 10^{26}}{4\pi(7.00 \times 10^8)^2(5.6704 \times 10^{-8})} \right]^{1/4} = \boxed{5.76 \times 10^3 \text{ K}}.$$

A2

Die gesamte einfallende Leistung ergibt sich durch Integration über alle Frequenzen:

$$P_{\text{in}} = A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^{\infty} \nu^3 e^{-h\nu/(k_B T_s)} d\nu.$$

Wir setzen

$$x = \frac{h\nu}{k_B T_s}, \quad d\nu = \frac{k_B T_s}{h} dx.$$

Dann gilt

$$P_{\text{in}} = \frac{2\pi A R_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3} \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx.$$

Die angegebene Integrationsformel liefert

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = [-e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)]_0^{\infty} = 6.$$

Somit ist

$$P_{\text{in}} = \frac{12\pi A R_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3}.$$

Für alle folgenden Wirkungsgrade wird dieselbe einfallende Leistung in der Wien-Näherung verwendet.

A3

Jedes Photon der Frequenz ν trägt die Energie $h\nu$. Division der spektralen Leistung durch diese Energie ergibt die spektrale Rate der eintreffenden Photonen:

$$n_{\gamma}(\nu) = \frac{u(\nu)}{h\nu}.$$

Damit folgt

$$n_{\gamma}(\nu) = \frac{2\pi A R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2 c^2} \nu^2 e^{-h\nu/(k_B T_s)}.$$

Die Einheit ist Photonen pro Sekunde und pro Hertz.

A4

Nur Photonen mit $\nu \geq \nu_g$ tragen bei, und jedes liefert die nutzbare Energie E_g . Folglich gilt

$$P_{\text{out}} = E_g \int_{\nu_g}^{\infty} n_{\gamma}(\nu) d\nu.$$

Mit $E_g = x_g k_B T_s$ und der Substitution aus A2 ergibt sich

$$P_{\text{out}} = \frac{2\pi A R_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3} x_g \int_{x_g}^{\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

Nun ist

$$\int_{x_g}^{\infty} x^2 e^{-x} dx = [-(x^2 + 2x + 2)e^{-x}]_{x_g}^{\infty} = (x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g}.$$

Daher folgt

$$P_{\text{out}} = \frac{2\pi A R_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3} x_g (x_g^2 + 2x_g + 2) e^{-x_g}.$$

A5

Der Wirkungsgrad ist die nutzbare Ausgangsleistung geteilt durch die einfallende Leistung:

$$\eta = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}.$$

Die gemeinsamen dimensionsbehafteten und geometrischen Faktoren kürzen sich heraus, sodass sich ergibt

$$\eta(x_g) = \frac{x_g(x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g}}{6}, \quad x_g \geq 0.$$

A6

Bei verschwindender Bandlücke gilt

$$\eta(0) = 0.$$

Obwohl Photonen dann Elektronen anregen können, ist die nutzbare Energie pro Elektron null.

Für große x_g gilt

$$\eta(x_g) \sim \frac{x_g^3 e^{-x_g}}{6},$$

also

$$\lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta(x_g) = 0.$$

Die exponentiell kleine Anzahl der Photonen mit Energien oberhalb der Bandlücke lässt die nutzbare Ausgangsleistung verschwinden.

Durch Ableiten erhalten wir

$$\eta'(x_g) = \frac{e^{-x_g}}{6} (-x_g^3 + x_g^2 + 2x_g + 2).$$

Damit gilt

$$\eta'(0) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta'(x_g) = 0 \text{ von unten}.$$

Die Skizze beginnt im Ursprung mit der Tangente $\eta = x_g/3$, steigt bis zu einem einzigen Maximum nahe $x_g = 2.27$ an und fällt anschließend gegen die horizontale Asymptote $\eta = 0$ ab, wobei sie positiv bleibt. Weitere Informationen über die Kurvenform liefert

$$\eta''(x_g) = \frac{e^{-x_g}}{6} x_g^2 (x_g - 4),$$

wonach die Kurve für $0 < x_g < 4$ nach unten und für $x_g > 4$ nach oben gekrümmt ist.

Repräsentative Punkte sind:

x_g	$\eta(x_g)$
0	0
1	0.307
2	0.451
2.27	0.457
4	0.317
6	0.124
10	0.00923
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow 0$

A7

Am Maximum gilt $\eta'(x_0) = 0$. Da der Exponentialfaktor nie verschwindet, gilt

$$-x_0^3 + x_0^2 + 2x_0 + 2 = 0,$$

oder

$$\boxed{x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0}.$$

Für $x_0 > 0$ ist dies äquivalent zu

$$x_0 = 1 + \frac{2}{x_0} + \frac{2}{x_0^2}.$$

Die linke Seite wächst streng monoton mit x_0 , während die rechte Seite streng monoton abnimmt. Daher gibt es nur eine positive stationäre Stelle. Zusammen mit dem Randverhalten aus A6 zeigt dies, dass dort das globale Maximum liegt.

Sei $F(x) = x^3 - x^2 - 2x - 2$. Dann gilt

$$F(2) = -2, \quad F(2.5) = 2.375.$$

Damit ist $2 < x_0 < 2.5$, was bereits $x_0 = 2.25 \pm 0.25$ ergibt. Eine genauere Bestimmung liefert

$$\boxed{x_0 \simeq 2.27}.$$

Einsetzen in den Wirkungsgrad ergibt

$$\eta(x_0) = \frac{x_0(x_0^2 + 2x_0 + 2)e^{-x_0}}{6} \simeq 0.45703.$$

Somit folgt

$$\boxed{\eta_{\max} \simeq 45.7\%}.$$

A8

Bei der in A1 bestimmten Oberflächentemperatur gilt

$$k_B T_s \simeq 0.4966 \text{ eV}.$$

Für Silizium ist

$$x_{g,\text{Si}} = \frac{E_g}{k_B T_s} = \frac{1.11}{0.4966} \simeq 2.235.$$

Daher ergibt sich

$$\eta_{\text{Si}} = \frac{2.235 (2.235^2 + 2(2.235) + 2) e^{-2.235}}{6} \simeq 0.45694.$$

Somit ist

$$\boxed{\eta_{\text{Si}} \simeq 45.7\%}.$$

Dies liegt sehr nahe am Maximum, weil die Bandlücke von Silizium nahe an der optimalen Bandlücke $x_0 k_B T_s \simeq 1.13 \text{ eV}$ liegt.

A9

Wir bauen die homogene Kugel auf, indem wir nacheinander dünne Kugelschalen aus dem Unendlichen heranbringen. Beim Radius r beträgt die bereits zusammengefügte Masse

$$M(r) = M_{\odot} \frac{r^3}{R_{\odot}^3},$$

und die Masse der Schale ist

$$dM = \frac{3M_{\odot} r^2}{R_{\odot}^3} dr.$$

Nach dem Schalentheorem beträgt die hinzugefügte potenzielle Energie

$$d\Omega = -\frac{GM(r) dM}{r}.$$

Daher gilt

$$\Omega = -\frac{3GM_{\odot}^2}{R_{\odot}^6} \int_0^{R_{\odot}} r^4 dr = -\frac{3GM_{\odot}^2}{R_{\odot}^6} \frac{R_{\odot}^5}{5}.$$

Damit folgt

$$\boxed{\Omega = -\frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}}} \simeq -2.29 \times 10^{41} \text{ J}.$$

Das negative Vorzeichen entspricht der Festlegung, dass die potenzielle Energie bei unendlichem Abstand null ist.

A10

Die anfängliche, sehr ausgedehnte Wolke hat näherungsweise die potenzielle Gravitationsenergie null. Ihre Kontraktion setzt daher höchstens folgende Energie frei:

$$E_{\text{available}} = -\Omega = \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}}.$$

Die maximal mögliche Leuchtdauer ergibt sich unter der Annahme, dass diese gesamte freigesetzte Energie abgestrahlt wurde. Bei konstanter Leuchtkraft gilt

$$L_{\odot} \tau_{\text{KH}} = \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}},$$

also

$$\boxed{\tau_{\text{KH}} = \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot} L_{\odot}}}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{2.288 \times 10^{41}}{3.85 \times 10^{26}} \simeq 5.94 \times 10^{14} \text{ s} = \boxed{1.88 \times 10^7 \text{ years}}.$$

Jeder Anteil der freigesetzten Energie, der als innere Energie erhalten bleibt, würde die durch Gravitationskontraktion ermöglichte Leuchtdauer verkürzen; dies ist also eine obere Grenze.

B1

Wenn die von Neutrinos abgeführte Energie vernachlässigt wird, beträgt die Anzahl der Fusionsreaktionen pro Sekunde

$$\dot{N}_{\text{reaction}} = \frac{L_{\odot}}{\Delta E}.$$

Jede Reaktion erzeugt zwei Neutrinos:

$$\dot{N}_{\nu} = \frac{2L_{\odot}}{\Delta E}.$$

Bei kugelsymmetrischer Emission durchqueren diese Neutrinos im Abstand der Erde eine Fläche von $4\pi d_{\odot}^2$. Daher gilt

$$\Phi_{\nu} = \frac{2L_{\odot}}{4\pi d_{\odot}^2 \Delta E}.$$

Einsetzen ergibt

$$\Phi_{\nu} = \frac{2(3.85 \times 10^{26})}{4\pi(1.50 \times 10^{11})^2(4.0 \times 10^{-12})} = \boxed{6.8 \times 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}}.$$

B2

Nach der Umwandlung verbleibt der Anteil $1 - f$ als Elektron-Neutrinos und trägt $(1 - f)N_1$ Nachweise pro Jahr bei. Der umgewandelte Anteil trägt $fN_1/6$ bei, da seine Nachweiseffizienz um den Faktor sechs kleiner ist.

Folglich gilt

$$N_2 = (1 - f)N_1 + \frac{fN_1}{6} = N_1 \left(1 - \frac{5f}{6}\right).$$

Auflösen ergibt

$$f = \frac{6}{5} \left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right).$$

Der physikalische Bereich $0 \leq f \leq 1$ entspricht $N_1/6 \leq N_2 \leq N_1$.

B3

Die Tscherenkow-Strahlung endet, wenn das Elektron auf die Lichtgeschwindigkeit im Wasser abgebremst ist:

$$v_{\text{th}} = \frac{c}{n}.$$

Die kinetische Energie des Elektrons zu diesem Zeitpunkt ist relativistisch:

$$K_{\text{th}} = (\gamma_{\text{th}} - 1)m_e c^2, \quad \gamma_{\text{th}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\text{th}}^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}}.$$

Während der Emissionsdauer Δt verliert das Elektron die Energie $\alpha \Delta t$. Seine anfängliche kinetische Energie unmittelbar nach der Wechselwirkung mit dem Neutrino beträgt daher

$$K_i = K_{\text{th}} + \alpha \Delta t.$$

Da das Elektron vor der Wechselwirkung zunächst ruhte, ist die vom Neutrino übertragene Energie gleich K_i . Damit folgt

$$E_{\text{imparted}} = \alpha \Delta t + m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}} - 1 \right).$$

Der zweite Term ist wesentlich: Das Elektron besitzt noch kinetische Energie, wenn die Tscherenkow-Emission endet.

B4

Wir verwenden das angegebene Modell, in dem die Energiestreuung durch die thermische Bewegung der Be-Quellen entsteht. Sei $v_{\parallel}$ die Geschwindigkeitskomponente der Quelle in Richtung Erde.

Für ein masseloses Neutrino beträgt der Impuls im Ruhesystem der Quelle $p_{\nu} = E_{\nu}/c$. In erster Ordnung in der nichtrelativistischen Quellengeschwindigkeit liefert die Lorentz-Transformation der Energie

$$E_{\text{obs}} \simeq E_{\nu} + v_{\parallel} \frac{E_{\nu}}{c}.$$

Somit beträgt die Doppler-Energieverschiebung

$$\delta E \simeq E_{\nu} \frac{v_{\parallel}}{c}.$$

Die thermische Bewegung ist isotrop, also gilt

$$\langle v_{\parallel} \rangle = 0, \quad \langle v_{\parallel}^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3} = \frac{V_{\text{Be}}^2}{3}.$$

Für den Effektivwert der Energieverschiebung ergibt sich

$$\Delta E_{\text{rms}} = \frac{E_{\nu}}{c} \sqrt{\langle v_{\parallel}^2 \rangle} = \frac{E_{\nu} V_{\text{Be}}}{\sqrt{3} c}.$$

Daher gilt

$$V_{\text{Be}} = \sqrt{3} c \frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}}.$$

Numerisch ist

$$\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}} = \frac{5.54 \times 10^{-17}}{1.44 \times 10^{-13}} = 3.847 \times 10^{-4},$$

und damit

$$V_{\text{Be}} \simeq 2.00 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}.$$

Das Verhältnis $V_{\text{Be}}/c \simeq 6.66 \times 10^{-4}$ bestätigt die Gültigkeit der nichtrelativistischen Näherung.

Nach dem Gleichverteilungssatz für die drei Translationsfreiheitsgrade gilt

$$\frac{1}{2} m_{\text{Be}} V_{\text{Be}}^2 = \frac{3}{2} k_B T_c.$$

Somit folgt

$$T_c = \frac{m_{\text{Be}} V_{\text{Be}}^2}{3k_B} = \frac{m_{\text{Be}} c^2}{k_B} \left(\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_\nu} \right)^2.$$

Einsetzen der Daten ergibt

$$T_c = \frac{(11.65 \times 10^{-27})(2.9979 \times 10^8)^2}{1.380649 \times 10^{-23}} \left(\frac{5.54 \times 10^{-17}}{1.44 \times 10^{-13}} \right)^2,$$

woraus folgt

$$T_c \simeq 1.12 \times 10^7 \text{ K}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Das Extremalprinzip

A Das Extremalprinzip in der Mechanik

Betrachten Sie die in Abb. 1 dargestellte horizontale, reibungsfreie $x - y$ -Ebene. Sie wird durch eine Gerade AB mit der Gleichung $x = x_1$ in zwei Bereiche I und II unterteilt. Die potenzielle Energie eines punktförmigen Teilchens der Masse m beträgt im Bereich I $V = 0$ und im Bereich II $V = V_0$. Das Teilchen wird vom Ursprung O mit der Geschwindigkeit v_1 entlang einer Geraden ausgesandt, die mit der x -Achse den Winkel θ_1 bildet. Es erreicht den Punkt P im Bereich II mit der Geschwindigkeit v_2 entlang einer Geraden, die mit der x -Achse den Winkel θ_2 bildet. Vernachlässigen Sie in der gesamten Aufgabe T-2 (in allen Teilen) die Gravitation und relativistische Effekte.

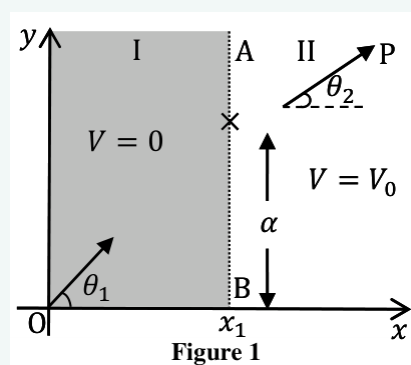


Abbildung 1

A1	Bestimmen Sie einen Ausdruck für v_2 in Abhängigkeit von m , v_1 und V_0 .	0.2
A2	Drücken Sie v_2 durch v_1 , θ_1 und θ_2 aus.	0.3

Wir definieren eine Größe namens Wirkung $A = m \int v(s) ds$, wobei ds die infinitesimale Länge entlang der Bahn eines Teilchens der Masse m ist, das sich mit der Geschwindigkeit $v(s)$ bewegt. Das Integral wird entlang der Bahn gebildet. Beispielsweise beträgt für ein Teilchen, das sich mit

konstanter Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit dem Radius R bewegt, die Wirkung A für einen Umlauf $2\pi m R v$. Für ein Teilchen mit konstanter Energie E lässt sich zeigen, dass von allen möglichen Bahnen zwischen zwei festen Punkten die tatsächliche Bahn diejenige ist, auf der das oben definierte A ein Extremum (Minimum oder Maximum) annimmt. Historisch ist dies als Prinzip der kleinsten Wirkung (PLA) bekannt.

A3	Aus dem PLA folgt, dass die Bahn eines Teilchens, das sich zwischen zwei festen Punkten in einem Bereich mit konstantem Potenzial bewegt, eine Gerade ist. Die beiden festen Punkte O und P in Abb. 1 sollen die Koordinaten $(0, 0)$ bzw. (x_0, y_0) haben, und der Grenzpunkt, an dem das Teilchen von Bereich I in Bereich II übertritt, soll die Koordinaten (x_1, α) haben. Beachten Sie, dass x_1 fest ist und die Wirkung nur von der Koordinate α abhängt. Geben Sie den Ausdruck für die Wirkung $A(\alpha)$ an. Leiten Sie mithilfe des PLA den Zusammenhang zwischen v_1/v_2 und diesen Koordinaten her.	1.0
----	---	-----

B Das Extremalprinzip in der Optik

Ein Lichtstrahl läuft von Medium I in Medium II mit den jeweiligen Brechungsindizes n_1 und n_2 . Die beiden Medien sind durch eine zur x -Achse parallele Gerade getrennt. Der Lichtstrahl bildet mit der y -Achse im Medium I den Winkel i_1 und im Medium II den Winkel i_2 (siehe Abb. 2). Um die Bahn des Strahls zu bestimmen, verwenden wir ein weiteres Extremalprinzip (Minimum oder Maximum), das als Fermatsches Prinzip der kürzesten Zeit bekannt ist.

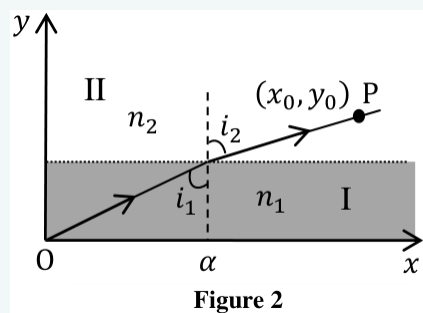


Abbildung 2

B1	Das Prinzip besagt, dass sich ein Lichtstrahl zwischen zwei festen Punkten auf einem Weg bewegt, für den die zwischen den beiden Punkten benötigte Zeit ein Extremum annimmt. Leiten Sie auf Grundlage des Fermatschen Prinzips den Zusammenhang zwischen $\sin i_1$ und $\sin i_2$ her.	0.5
----	--	-----

Abb. 3 zeigt eine schematische Skizze der Bahn eines Laserstrahls, der horizontal in eine Zuckerlösung einfällt, deren Zuckerkonzentration mit der Höhe abnimmt. Infolgedessen nimmt auch der Brechungsindex der Lösung mit der Höhe ab.

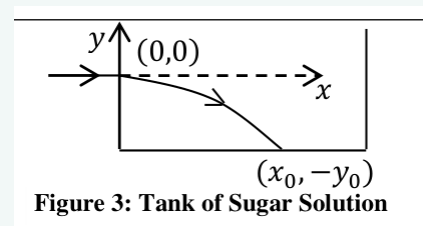


Abbildung 3: Behälter mit Zuckerlösung

B2	Nehmen Sie an, dass der Brechungsindex $n(y)$ nur von y abhängt. Leiten Sie mithilfe der in B1 erhaltenen Gleichung einen Ausdruck für die Steigung dy/dx der Strahlbahn in Abhängigkeit vom Brechungsindex n_0 bei $y = 0$ und von $n(y)$ her.	1.5
B3	Der Laserstrahl wird vom Ursprung $(0, 0)$ aus horizontal in die Zuckerlösung gerichtet, und zwar in einer Höhe y_0 über dem Boden des Behälters, wie in Abbildung 3 dargestellt. Setzen Sie $n(y) = n_0 - ky$, wobei n_0 und k positive Konstanten sind. Bestimmen Sie für die tatsächliche Bahn des Laserstrahls einen Ausdruck für x in Abhängigkeit von y und den zugehörigen Größen.	1.2

¹ Manoj Harbola (IIT-Kanpur) und Vijay A. Singh (ehemaliger nationaler Koordinator der Wissenschaftsolympiaden) waren die Hauptautoren dieser Aufgabe. Den Beiträgen des Akademischen Komitees, der Akademischen Entwicklungsgruppe und des Internationalen Gremiums gilt unser Dank.

	Sie dürfen verwenden: $\int \sec \theta d\theta = \ln(\sec \theta + \tan \theta) + \text{Konstante}$, wobei $\sec \theta = 1/\cos \theta$, oder $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + \text{Konstante}$	
B4	Bestimmen Sie den Wert von x_0 , der Stelle, an der der Strahl auf den Boden des Behälters trifft. Verwenden Sie $y_0 = 10.0 \text{ cm}$, $n_0 = 1.50$, $k = 0.050 \text{ cm}^{-1}$ ($1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$).	0.8

C Das Extremalprinzip und die Wellennatur der Materie

Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen dem PLA und der Wellennatur eines bewegten Teilchens. Dazu nehmen wir an, dass ein Teilchen, das sich von O nach P bewegt, alle möglichen Bahnen nehmen kann, und suchen eine Bahn, die sich aus der konstruktiven Interferenz von De-Broglie-Wellen ergibt.

C1	Während sich das Teilchen entlang seiner Bahn um eine infinitesimale Strecke Δs bewegt, stellen Sie den Zusammenhang zwischen der Änderung $\Delta\varphi$ der Phase seiner De-Broglie-Welle, der Änderung ΔA der Wirkung und der Planck-Konstanten her.	0.6
C2	Betrachten Sie erneut die Aufgabe aus Teil A, in der sich das Teilchen von O nach P bewegt (siehe Abb. 4). An der Grenze AB zwischen den beiden Bereichen werde eine undurchlässige Trennwand angebracht. In AB befindet sich eine kleine Öffnung CD der Breite d , wobei $d \ll (x_0 - x_1)$ und $d \ll x_1$ gelten. Betrachten Sie die beiden äußersten Wege OCP und ODP, wobei OCP auf der in Teil A behandelten klassischen Bahn liegt. Bestimmen Sie die Phasendifferenz $\Delta\varphi_{CD}$ zwischen den beiden Wegen in erster Ordnung.	1.2

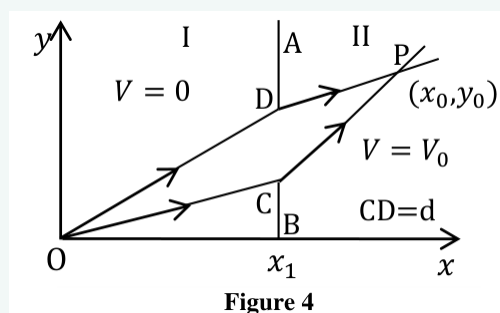


Abbildung 4

D Interferenz von Materiewellen

Betrachten Sie eine Elektronenkanone bei O, die einen kollimierten Elektronenstrahl auf einen schmalen Spalt bei F in der undurchlässigen Trennwand A_1B_1 bei $x = x_1$ richtet, sodass OFP eine Gerade ist. P ist ein Punkt auf dem Schirm bei $x = x_0$ (siehe Abb. 5). Die Geschwindigkeit in I beträgt $v_1 = 2.0000 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$, und es gilt $\theta = 10.0000^\circ$. Das Potenzial in II ist so gewählt, dass die Geschwindigkeit $v_2 = 1.9900 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$ beträgt. Der Abstand $x_0 - x_1$ beträgt 250.00 mm ($1\text{mm} = 10^{-3}\text{m}$). Vernachlässigen Sie die Wechselwirkung zwischen den Elektronen.

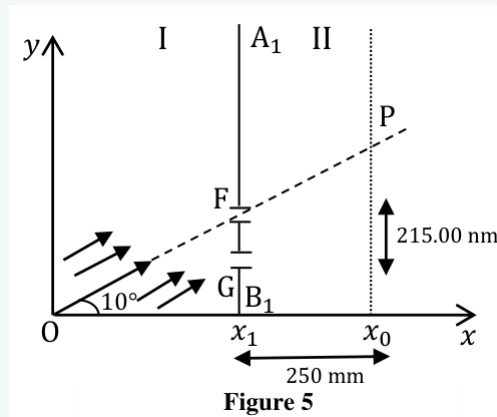


Abbildung 5

D1	Wenn die Elektronen bei O aus der Ruhe beschleunigt wurden, berechnen Sie die Beschleunigungsspannung U_1 .	0.3
D2	In der Trennwand A_1B_1 wird ein weiterer identischer Spalt G im Abstand von 215.00 nm ($1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$) unterhalb des Spalts F angebracht (Abb. 5). Wenn die Phasendifferenz zwischen den durch die Spalte F und G bei P eintreffenden De-Broglie-Wellen $2\pi\beta$ beträgt, berechnen Sie β .	0.8
D3	In welchem kleinsten Abstand Δy von P ist auf dem Schirm zu erwarten, dass keine Elektronen nachgewiesen werden (Nachweisrate null)? [Hinweis: Die Näherung $\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \sin\theta + \Delta\theta \cos\theta$ kann hilfreich sein.]	1.2
D4	Der Strahl hat einen quadratischen Querschnitt von $500\text{nm} \times 500\text{nm}$, und die Anordnung ist 2 m lang. Wie groß muss die minimale Flussdichte $I_{\min}$ (Anzahl der Elektronen pro Flächeneinheit senkrecht zur Strahlrichtung und pro Zeiteinheit) sein, damit sich zu einem gegebenen Zeitpunkt im Mittel mindestens ein Elektron in der Anordnung befindet?	0.4

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **A1:** $v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2V_0}{m}}$.
- **A2:** $v_2 = v_1 \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$.

- **A3:**

$$A(\alpha) = mv_1 \sqrt{x_1^2 + \alpha^2} + mv_2 \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2},$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(y_0 - \alpha) \sqrt{x_1^2 + \alpha^2}}{\alpha \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}}.$$

- **B1:** $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$

- **B2:** $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{n(y)^2}{n_0^2} - 1}.$

- **B3:**

$$x(y) = \frac{n_0}{k} \ln \left[\frac{n_0 - ky + \sqrt{(n_0 - ky)^2 - n_0^2}}{n_0} \right].$$

Gleichwertig dazu ist $y(x) = \frac{n_0}{k} \left[1 - \cosh \left(\frac{kx}{n_0} \right) \right].$

- **B4:** $x_0 = 23.86 \dots \text{ cm} \approx 24 \text{ cm}.$

- **C1:** $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{h} \Delta A = \frac{\Delta A}{\hbar}.$

- **C2:** $\Delta\varphi_{CD} = 0$ in erster Ordnung in d ; die führende Korrektur ist quadratisch.

- **D1:** $U_1 \approx 1.14 \times 10^3 \text{ V}.$

- **D2:** $\beta = \frac{m_e d (v_1 - v_2) \sin \theta}{h} \approx 5.13.$

- **D3:** $\Delta y \approx 1.6 \times 10^{-5} \text{ m} = 16 \text{ } \mu\text{m}, \text{ unterhalb von P}.$

- **D4:** $I_{\min} \approx 4 \times 10^{19} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$

Lösung

Für die numerischen Berechnungen zu den Elektronen verwenden wir

$$m_e = 9.1093837 \times 10^{-31} \text{ kg}, \quad e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J s},$$

wobei e der Betrag der Elektronenladung ist.

A1

Das Potenzial ist zeitunabhängig, daher bleibt die mechanische Energie erhalten:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + V_0.$$

Daraus folgt

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2V_0}{m}}.$$

Die Aufgabe setzt voraus, dass das Teilchen in den Bereich II übertritt.

A2

Das Potenzial hängt nur von x ab, daher besitzt die Kraft keine y -Komponente. Folglich bleibt der Impuls parallel zur Grenze erhalten:

$$mv_1 \sin \theta_1 = mv_2 \sin \theta_2.$$

Somit gilt

$$v_2 = v_1 \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}.$$

A3

Der Punkt des Grenzüberttritts sei $Q = (x_1, \alpha)$. Die beiden geraden Teilstrecken haben die Längen

$$L_1 = \sqrt{x_1^2 + \alpha^2}, \quad L_2 = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}.$$

Bei fester Gesamtenergie sind die Geschwindigkeiten in den beiden Bereichen festgelegt. Daher gilt

$$A(\alpha) = m(v_1 L_1 + v_2 L_2).$$

Die tatsächliche Bahn erfüllt

$$\frac{dA}{d\alpha} = m \left[v_1 \frac{\alpha}{L_1} - v_2 \frac{y_0 - \alpha}{L_2} \right] = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(y_0 - \alpha)L_1}{\alpha L_2} = \frac{(y_0 - \alpha)\sqrt{x_1^2 + \alpha^2}}{\alpha\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}}.$$

Da $\alpha/L_1 = \sin \theta_1$ und $(y_0 - \alpha)/L_2 = \sin \theta_2$ gelten, ergibt sich wieder A2. Außerdem ist

$$\frac{d^2 A}{d\alpha^2} = m \left[\frac{v_1 x_1^2}{L_1^3} + \frac{v_2 (x_0 - x_1)^2}{L_2^3} \right] > 0,$$

sodass diese stationäre Wirkung ein Minimum ist.

B1

Wir beschreiben die horizontale Grenzfläche durch $y = b$ und nehmen an, dass der Strahl sie bei (α, b) durchquert. Die Lichtgeschwindigkeit im Medium j ist c/n_j . Seine Laufzeit von O nach P beträgt daher

$$T(\alpha) = \frac{n_1}{c} \sqrt{\alpha^2 + b^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - b)^2}.$$

Das Fermatsche Prinzip verlangt $dT/d\alpha = 0$:

$$n_1 \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} = n_2 \frac{x_0 - \alpha}{\sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - b)^2}}.$$

Da die Winkel gegenüber der Grenzflächennormalen gemessen werden, sind die beiden geometrischen Verhältnisse $\sin i_1$ und $\sin i_2$. Somit gilt

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2, \quad \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

B2

Wir betrachten die Flüssigkeit als eine Folge dünner horizontaler Schichten. Die Anwendung von B1 auf benachbarte Schichten zeigt, dass

$$n(y) \sin i(y) = \text{konstant.}$$

Der Strahl verläuft anfangs horizontal, also ist $i(0) = 90^\circ$, woraus folgt:

$$n(y) \sin i(y) = n_0.$$

Für einen Strahl, der sich in Richtung zunehmender x bewegt, gilt

$$\sin i = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}.$$

Folglich ist

$$\frac{n(y)}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} = n_0,$$

und damit

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n(y)^2}{n_0^2} - 1.$$

Der Strahl wird zum größeren Brechungsindex hin gekrümmt, also nach unten. Mit der Wahl der negativen Steigung ergibt sich

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{n(y)^2}{n_0^2} - 1}}.$$

B3

Wir setzen $n(y) = n_0 - ky$ ein:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{n_0}{\sqrt{(n_0 - ky)^2 - n_0^2}}.$$

Integration vom Eintrittspunkt $(0, 0)$ aus ergibt

$$x = -n_0 \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{(n_0 - k\eta)^2 - n_0^2}}.$$

Mit $u = (n_0 - k\eta)/n_0$ wird daraus

$$x = \frac{n_0}{k} \int_1^{(n_0 - ky)/n_0} \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}.$$

Mit dem angegebenen Integral erhalten wir

$$\boxed{x(y) = \frac{n_0}{k} \ln \left[\frac{n_0 - ky + \sqrt{(n_0 - ky)^2 - n_0^2}}{n_0} \right]}.$$

Dies ist der Zweig mit $x \geq 0$ und $-y_0 \leq y \leq 0$.

Gleichwertig dazu ist

$$\frac{kx}{n_0} = \operatorname{arcosh}\left(1 - \frac{ky}{n_0}\right),$$

also

$$y(x) = \frac{n_0}{k} \left[1 - \cosh\left(\frac{kx}{n_0}\right) \right].$$

Die Bahn geht mit einer horizontalen Tangente durch den Ursprung und krümmt sich zunehmend nach unten.

B4

Am Boden gilt $y = -y_0$. Daher ist

$$x_0 = \frac{n_0}{k} \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{ky_0}{n_0}\right).$$

Bei durchgängiger Verwendung von Zentimetern gilt

$$\frac{n_0}{k} = 30.0 \text{ cm}, \quad 1 + \frac{ky_0}{n_0} = 1 + \frac{0.050(10.0)}{1.50} = \frac{4}{3}.$$

Somit ergibt sich

$$x_0 = 30.0 \ln\left(\frac{4 + \sqrt{7}}{3}\right) \text{ cm} = 23.86096 \dots \text{ cm}.$$

Damit ist

$$x_0 \approx 24 \text{ cm} = 0.24 \text{ m}.$$

C1

Die De-Broglie-Wellenlänge beträgt

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}.$$

Die über eine infinitesimale Strecke angesammelte räumliche Phase ist

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = \frac{2\pi}{h} mv \Delta s.$$

Da $\Delta A = mv \Delta s$ gilt, folgt

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{h} \Delta A = \frac{\Delta A}{\hbar}.$$

Für stationäre Wellen gleicher Energie fällt die gemeinsame zeitliche Phase beim Vergleich der Wege zur selben Beobachtungszeit weg.

C2

C habe die Koordinaten (x_1, α) , sodass D die Koordinaten $(x_1, \alpha + d)$ hat. In erster Ordnung gilt

$$OD - OC = d \sin \theta_1 + O(d^2),$$

während

$$DP - CP = -d \sin \theta_2 + O(d^2).$$

Daher ist

$$A_{ODP} - A_{OCP} = md(v_1 \sin \theta_1 - v_2 \sin \theta_2) + O(d^2).$$

Da OCP die klassische Bahn ist, liefert A2

$$v_1 \sin \theta_1 = v_2 \sin \theta_2.$$

Mit C1 erhalten wir

$$\Delta\varphi_{CD} = \frac{2\pi md}{h}(v_1 \sin \theta_1 - v_2 \sin \theta_2) + O(d^2).$$

Somit gilt

$$\boxed{\Delta\varphi_{CD} = 0 \quad \text{in erster Ordnung in } d}.$$

In zweiter Ordnung ist die Phasendifferenz im Allgemeinen von null verschieden. Die Stationarität der Wirkung bewirkt, dass benachbarte Wege in erster Ordnung dieselbe Phase haben.

D1

Die Beschleunigung aus der Ruhe durch eine Potenzialdifferenz vom Betrag U_1 ergibt

$$eU_1 = \frac{1}{2}m_e v_1^2.$$

Daher ist

$$U_1 = \frac{m_e v_1^2}{2e} = 1137.126 \dots \text{ V},$$

oder

$$\boxed{U_1 \approx 1.14 \times 10^3 \text{ V}}.$$

D2

Es sei

$$d = 215.00 \times 10^{-9} \text{ m}, \quad L = x_0 - x_1 = 0.25000 \text{ m}.$$

Wir behandeln den einfallenden kollimierten Strahl als kohärente ebene Welle und verwenden die Weglängendifferenzen im Fernfeld in erster Ordnung im Spaltabstand.

Da F oberhalb von G liegt, beträgt die Phasendifferenz der einfallenden Welle

$$\varphi_F^{\text{in}} - \varphi_G^{\text{in}} = \frac{m_e v_1}{\hbar} d \sin \theta.$$

Für P, das auf der geradlinigen Verlängerung von OF liegt, gilt

$$FP - GP \simeq -d \sin \theta.$$

Der Beitrag der Ausbreitung im Bereich II beträgt daher

$$-\frac{m_e v_2}{\hbar} d \sin \theta.$$

Definieren wir die gesamte Phasendifferenz als die Phase durch F minus die Phase durch G, so gilt

$$2\pi\beta = \frac{m_e d}{\hbar}(v_1 - v_2) \sin \theta.$$

Somit ist

$$\beta = \frac{m_e d (v_1 - v_2) \sin \theta}{h}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\beta = 5.132650 \dots, \quad \boxed{\beta \approx 5.13}.$$

Dies ist die unreduzierte Phasendifferenz in Einheiten einer vollen Schwingung; modulo einer vollen Schwingung beträgt sie $0.132650 \dots$

D3

Bei identischen Spalten mit gleichen Amplituden tritt destruktive Interferenz auf, wenn die Phasendifferenz ein ungeradzahliges Vielfaches von π oder eine halbzahlige Anzahl voller Schwingungen ist.

Die Ausbreitungsrichtung zu einem benachbarten Schirmpunkt sei $\theta + \delta\theta$. Die Phasendifferenz der einfallenden Welle bleibt unverändert, während sich die Ausbreitungsphase ändert. Die Phasendifferenz in Einheiten einer vollen Schwingung wird zu

$$b(\delta\theta) = \frac{m_e d}{h} [v_1 \sin \theta - v_2 \sin(\theta + \delta\theta)].$$

Mit der angegebenen Entwicklung für kleine Winkel ergibt sich

$$b(\delta\theta) \simeq \beta - \frac{m_e v_2 d}{h} \cos \theta \delta\theta.$$

Die benachbarten Halbzahlen sind 4.5 und 5.5. Ihre Abstände von β betragen

$$\beta - 4.5 = 0.632650 \dots, \quad 5.5 - \beta = 0.367350 \dots$$

Das nächstgelegene Minimum hat daher $b = 5.5$, woraus folgt:

$$\delta\theta = -\frac{h(5.5 - \beta)}{m_e v_2 d \cos \theta}.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass das Minimum unterhalb von P liegt.

Die vorzeichenbehaftete Verschiebung auf dem vertikalen Schirm ist

$$\delta y = L [\tan(\theta + \delta\theta) - \tan \theta] \simeq \frac{L}{\cos^2 \theta} \delta\theta.$$

Ihr Betrag ist somit

$$\Delta y = \frac{hL(5.5 - \beta)}{m_e v_2 d \cos^3 \theta}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\frac{hL}{m_e v_2 d \cos^3 \theta} = 44.5001 \dots \mu\text{m},$$

sodass das Ergebnis in führender Ordnung lautet:

$$\Delta y = (44.5001 \dots)(0.3673499 \dots) \mu\text{m} = 16.3471 \dots \mu\text{m}.$$

Daher gilt

$$\boxed{\Delta y \approx 16 \mu\text{m}, \quad \text{unterhalb von P}}.$$

Die Kleinwinkel- und Fernfeldnäherungen sind hier angemessen: $|\delta\theta| \simeq 6.34 \times 10^{-5} \text{ rad}$, und $d/L = 8.60 \times 10^{-7}$. Das angegebene Ergebnis vernachlässigt Korrekturen höherer Ordnung der Weglängen.

D4

Die Querschnittsfläche des Strahls senkrecht zur Strahlrichtung beträgt

$$S = (500 \times 10^{-9})^2 = 2.50 \times 10^{-13} \text{ m}^2.$$

Für eine Flugstrecke von 2 m beträgt die Durchflugzeit mit $v \simeq 2.0 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$

$$\tau \simeq \frac{2}{2.0 \times 10^7} = 1.0 \times 10^{-7} \text{ s}.$$

Bei einer Flussdichte I ist die pro Zeiteinheit eintretende Anzahl IS . Im stationären Betrieb beträgt die mittlere Anzahl in der Apparatur

$$\bar{N} = IS\tau.$$

Der minimale Fluss entspricht $\bar{N} = 1$:

$$I_{\min} = \frac{1}{S\tau}.$$

Daher gilt

$$I_{\min} \simeq \frac{1}{(2.50 \times 10^{-13})(1.0 \times 10^{-7})} = 4 \times 10^{19} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

Genauer gilt $\tau = \ell_1/v_1 + \ell_2/v_2$, wobei $\ell_1 + \ell_2$ die Flugstrecke ist. Die beiden Geschwindigkeiten unterscheiden sich nur um 0.5%, sodass ihre Ersetzung durch die gemeinsame Näherungsgeschwindigkeit die angegebene Genauigkeit nicht beeinflusst.

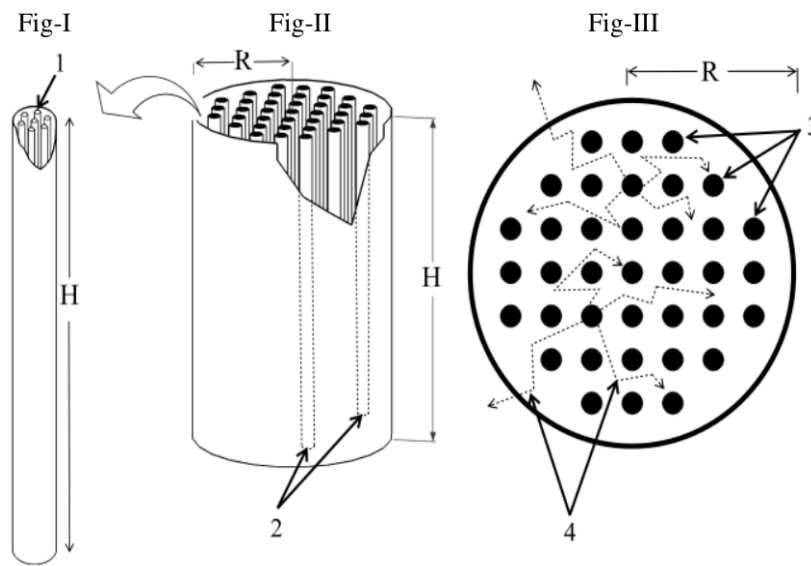
Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Der Entwurf eines Kernreaktors

Uran kommt in der Natur als UO_2 vor, wobei nur 0.720% der Uranatome ^{235}U sind. In ^{235}U lässt sich durch Neutronen leicht eine Kernspaltung auslösen, bei der 2-3 Spaltneutronen mit hoher kinetischer Energie emittiert werden. Diese Spaltwahrscheinlichkeit steigt, wenn die spaltauslösenden Neutronen eine niedrige kinetische Energie haben. Durch Verringerung der kinetischen Energie der Spaltneutronen kann man daher eine Kette von Spaltungen in weiteren ^{235}U -Kernen auslösen. Dies bildet die Grundlage des zur Stromerzeugung dienenden Kernreaktors (NR).

Ein typischer NR besteht aus einem zylindrischen Behälter der Höhe H und des Radius R , der mit einem als Moderator bezeichneten Material gefüllt ist. Zylindrische Rohre, sogenannte Brennstoffkanäle, sind parallel zur Achse in einem quadratischen Gitter angeordnet. Jeder Kanal enthält ein Bündel zylindrischer Brennstoffstäbe der Höhe H aus natürlichem UO_2 in fester Form. Spaltneutronen, die aus einem Brennstoffkanal austreten, stoßen mit dem Moderator zusammen, verlieren dabei Energie und erreichen die umliegenden Brennstoffkanäle mit einer hinreichend niedrigen Energie, um eine Spaltung auszulösen (Abb. I-III). Die durch Spaltung im Stab erzeugte

Wärme wird an ein Kühlmittel übertragen, das entlang des Stabes strömt. In dieser Aufgabe untersuchen wir einige physikalische Grundlagen von (A) Brennstoffstab, (B) Moderator und (C) NR mit zylindrischer Geometrie.



Schematic sketch of the Nuclear Reactor (NR)

Fig-I: Enlarged view of a fuel channel (1-Fuel Pins)

Fig-II: A view of the NR (2-Fuel Channels)

Fig-III: Top view of NR (3-Square Arrangement of Fuel Channels and 4-Typical Neutron Paths).

Only components relevant to the problem are shown (e.g. control rods and coolant are not shown).

A Brennstoffstab

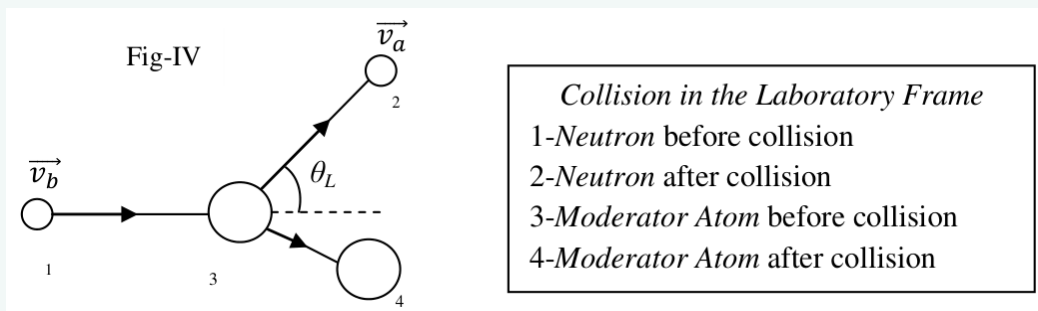
Daten für UO_2	1. Molare Masse $M_w = 0.270 \text{ kg mol}^{-1}$	2. Dichte $\rho = 1.060 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
	3. Schmelztemperatur $T_m = 3.138 \times 10^3 \text{ K}$	4. Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 3.280 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$

A1	Betrachten Sie die folgende Spaltreaktion eines ruhenden ^{235}U-Kerns, nachdem er ein Neutron mit vernachlässigbarer kinetischer Energie absorbiert hat. $^{235}\text{U} + {}^1_0\text{n} \longrightarrow {}^{94}\text{Zr} + {}^{140}\text{Ce} + 2 {}^1_0\text{n} + \Delta E$ Schätzen Sie die insgesamt freigesetzte Spaltenergie ΔE (in MeV) ab. Die Kernmassen sind: $m(^{235}\text{U}) = 235.044 \text{ u}$; $m(^{94}\text{Zr}) = 93.9063 \text{ u}$; $m(^{140}\text{Ce}) = 139.905 \text{ u}$; $m({}^1_0\text{n}) = 1.00867 \text{ u}$ und $1 \text{ u} = 931.502 \text{ MeV } c^{-2}$. Ignorieren Sie die unausgeglichene Ladungsbilanz.	0.8
A2	Schätzen Sie die Anzahl N der ^{235}U -Atome pro Volumeneinheit in natürlichem UO_2 ab.	0.5
A3	Nehmen Sie an, dass die Neutronenflussdichte $\varphi = 2.000 \times 10^{18} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ am Brennstoff gleichförmig ist. Der Spaltquerschnitt (die effektive Fläche des Targetkerns) eines ^{235}U-Kerns beträgt $\sigma_f = 5.400 \times 10^{-26} \text{ m}^2$. Wenn 80.00% der Spaltenergie als Wärme verfügbar sind, schätzen Sie die Wärmeleistung pro Volumeneinheit im Stab Q (in W m^{-3}) ab. $1 \text{ MeV} = 1.602 \times 10^{-13} \text{ J}$	1.2
A4	Die stationäre Temperaturdifferenz zwischen dem Zentrum (T_c) und der Oberfläche (T_s) des Stabes lässt sich als $T_c - T_s = k F(Q, a, \lambda)$ ausdrücken, wobei $k = 1/4$ eine dimensionslose Konstante und a der Radius des Stabes ist. Bestimmen Sie $F(Q, a, \lambda)$ mithilfe einer Dimensionsanalyse. Beachten Sie, dass λ die Wärmeleitfähigkeit von UO_2 ist.	0.5
A5	Die gewünschte Temperatur des Kühlmittels beträgt $5.770 \times 10^2 \text{ K}$. Schätzen Sie die Obergrenze a_u für den Radius a des Stabes ab.	1.0

B Der Moderator

Betrachten Sie den zweidimensionalen elastischen Stoß zwischen einem Neutron der Masse 1 u und einem Moderatoratom der Masse $A \text{ u}$. Vor dem Stoß werden alle Moderatoratome als im Laborsystem (LF) ruhend angenommen. Es seien $\vec{v}_b$ und $\vec{v}_a$ die Geschwindigkeiten des Neutrons vor beziehungsweise nach dem Stoß im LF. Es sei $\vec{v}_m$ die Geschwindigkeit des Schwerpunktsystems (CM) relativ zum LF und θ der Streuwinkel des Neutrons im CM-System. Alle an den Stößen beteiligten Teilchen bewegen sich mit nichtrelativistischen Geschwindigkeiten.

B1	Der Stoß im LF ist schematisch dargestellt, wobei θ_L der Streuwinkel ist (Abb. IV). Skizzieren Sie den Stoß schematisch im CM-System. Beschriften Sie die Teilchengeschwindigkeiten für 1, 2 und 3 durch Ausdrücke mit $\vec{v}_b$, $\vec{v}_a$ und $\vec{v}_m$. Zeichnen Sie den Streuwinkel θ ein.	1.0
----	---	-----



B2	Bestimmen Sie v und V , die Geschwindigkeitsbeträge des Neutrons und des Moderatoratoms im CM-System nach dem Stoß, in Abhängigkeit von A und v_b .	1.0
B3	Leiten Sie einen Ausdruck für $G(\alpha, \theta) = E_a/E_b$ her, wobei E_b und E_a die kinetischen Energien des Neutrons im LF vor beziehungsweise nach dem Stoß sind und $\alpha \equiv [(A-1)/(A+1)]^2$ ist.	1.0
B4	Nehmen Sie an, dass der obige Ausdruck für ein D_2O -Molekül gilt. Berechnen Sie den maximal möglichen relativen Energieverlust $f_l \equiv (E_b - E_a)/E_b$ des Neutrons für den Moderator D_2O (20 u).	0.5

C Der Kernreaktor

Um den NR bei einem beliebigen konstanten Neutronenfluss ψ (stationärer Zustand) zu betreiben, müssen die Neutronenverluste durch Entweichen durch eine Überschussproduktion von Neutronen im Reaktor ausgeglichen werden. Für einen Reaktor mit zylindrischer Geometrie beträgt die Leckagerate $k_1[(2.405/R)^2 + (\pi/H)^2]\psi$ und die Überschussproduktionsrate $k_2\psi$. Die Konstanten k_1 und k_2 hängen von den Materialeigenschaften des NR ab.

C1	Betrachten Sie einen NR mit $k_1 = 1.021 \times 10^{-2} \text{ m}$ und $k_2 = 8.787 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$. Bestimmen Sie die Abmessungen des NR im stationären Zustand unter Berücksichtigung dessen, dass bei festem Volumen die Leckagerate für eine effiziente Brennstoffnutzung minimiert werden soll.	1.5
C2	Die Brennstoffkanäle sind in einem quadratischen Gitter angeordnet (Abb. III), wobei der Abstand nächster Nachbarn 0.286 m beträgt. Der effektive Radius eines Brennstoffkanals (wenn er vollständig mit festem Brennstoff gefüllt wäre) beträgt $3.617 \times 10^{-2} \text{ m}$. Schätzen Sie die Anzahl der Brennstoffkanäle F_n im Reaktor und die Masse M an UO_2 ab, die zum Betrieb des NR im stationären Zustand erforderlich ist.	1.0

¹ Joseph Amal Nathan (BARC) und Vijay A. Singh (ehemaliger nationaler Koordinator der Wissenschaftsolympiaden) waren die Hauptautoren dieser Aufgabe. Den Beiträgen des Akademischen Komitees, der Akademischen Entwicklungsgruppe und des Internationalen Gremiums gilt unser herzlicher Dank.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **A1:** $\Delta E \simeq 208.7 \text{ MeV}$.
- **A2:** $N \simeq 1.70 \times 10^{26} \text{ m}^{-3}$.
- **A3:** $Q \simeq 4.92 \times 10^8 \text{ W m}^{-3}$.
- **A4:** $F(Q, a, \lambda) = \frac{Qa^2}{\lambda}$, also $T_c - T_s = \frac{Qa^2}{4\lambda}$.
- **A5:** $a_u \simeq 8.27 \times 10^{-3} \text{ m} = 8.27 \text{ mm}$.
- **B1:** Geschwindigkeitsbeschriftungen im CM-System: 1 : $\vec{v}_b - \vec{v}_m$, 2 : $\vec{v}_a - \vec{v}_m$, 3 : $-\vec{v}_m$.
Der Winkel zwischen der anfänglichen und der endgültigen Neutronengeschwindigkeit ist θ ; die beiden auslaufenden Teilchen bewegen sich in entgegengesetzte Richtungen.
- **B2:** $v = \frac{A}{A+1} v_b$, $V = \frac{1}{A+1} v_b$.
- **B3:** $G(\alpha, \theta) = \frac{1 + \alpha + (1 - \alpha) \cos \theta}{2}$.
- **B4:** $f_{l,\max} = \frac{80}{441} \simeq 0.1814 = 18.14\%$.
- **C1:** $R = 2.405 \sqrt{\frac{3k_1}{2k_2}} \simeq 3.175 \text{ m}$, $H = \pi \sqrt{\frac{3k_1}{k_2}} \simeq 5.865 \text{ m}$.
- **C2:** $F_n \simeq 387 \text{ Brennstoffkanäle}$; $M \simeq 9.89 \times 10^4 \text{ kg}$, also 98.9 Tonnen UO_2 .

Lösung

A1

Da die anfängliche kinetische Energie vernachlässigbar ist, ergibt sich die freigesetzte Energie aus der Energieerhaltung als Abnahme der gesamten Ruheenergie:

$$\Delta E = [m(^{235}\text{U}) + m(^1\text{n}) - m(^{94}\text{Zr}) - m(^{140}\text{Ce}) - 2m(^1\text{n})]c^2.$$

Mit den angegebenen Massen und ohne Ladungskorrektur gilt

$$\begin{aligned} \Delta m &= [235.044 + 1.00867 - (93.9063 + 139.905 + 2(1.00867))] \text{ u} \\ &= 0.22403 \text{ u}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\Delta E = 0.22403(931.502) \text{ MeV} = 208.684 \dots \text{ MeV},$$

also

$$\boxed{\Delta E \simeq 208.7 \text{ MeV}}.$$

A2

Jede Formeleinheit von UO_2 enthält ein Uranatom. Die Anzahl der Formeleinheiten pro Volumeneinheit beträgt

$$n_{\text{UO}_2} = \frac{\rho}{M_w} N_A,$$

wobei die übliche Avogadro-Konstante $N_A \simeq 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ist.

Der Anteil der Uranatome, die ^{235}U sind, beträgt 0.00720. Daher gilt

$$\begin{aligned} N &= 0.00720 \frac{\rho N_A}{M_w} \\ &= 0.00720 \frac{1.060 \times 10^4}{0.270} (6.022 \times 10^{23}) \text{ m}^{-3} \\ &= 1.7022 \dots \times 10^{26} \text{ m}^{-3}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\boxed{N \simeq 1.70 \times 10^{26} \text{ m}^{-3}}.$$

A3

Die Spaltrate eines einzelnen Targetkerns im vorgegebenen gleichförmigen Neutronenfluss beträgt $\varphi\sigma_f$. Die Spaltrate pro Volumeneinheit ist daher

$$r_f = N\varphi\sigma_f.$$

Numerisch ergibt sich

$$\varphi\sigma_f = (2.000 \times 10^{18})(5.400 \times 10^{-26}) = 1.080 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1},$$

und

$$r_f = 1.8384 \dots \times 10^{19} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

Die pro Spaltung abgegebene Wärme beträgt

$$E_h = 0.8000 \Delta E = 0.8000(208.684 \dots)(1.602 \times 10^{-13}) \text{ J}.$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} Q &= N\varphi\sigma_f E_h \\ &= 4.9168 \dots \times 10^8 \text{ W m}^{-3}, \end{aligned}$$

woraus sich ergibt:

$$\boxed{Q \simeq 4.92 \times 10^8 \text{ W m}^{-3}}.$$

A4

Für F setzen wir die dimensionale Form $Q^x a^y \lambda^z$ an. Bezeichnen wir die Dimensionen von Leistung, Länge und Temperatur mit P, L, Θ , so gilt

$$[Q] = PL^{-3}, \quad [a] = L, \quad [\lambda] = PL^{-1}\Theta^{-1}.$$

Somit ist

$$[F] = P^{x+z} L^{-3x+y-z} \Theta^{-z}.$$

Damit F die Dimension einer Temperatur hat, muss gelten:

$$x + z = 0, \quad -3x + y - z = 0, \quad -z = 1.$$

Diese Gleichungen ergeben

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = -1.$$

Der dimensionslose Zahlenfaktor ist bereits als k vorgegeben, daher gilt

$$\boxed{F(Q, a, \lambda) = \frac{Qa^2}{\lambda}}, \quad \boxed{T_c - T_s = \frac{Qa^2}{4\lambda}}.$$

A5

Bei gleichförmiger Wärmeerzeugung im Inneren ist das Zentrum der heißeste Bereich des Stabes. Um ein Schmelzen zu vermeiden, muss gelten:

$$T_c \leq T_m.$$

Wärme muss von der Staboberfläche zum Kühlmittel fließen, daher kann die Oberflächentemperatur nicht unter der Kühlmitteltemperatur liegen:

$$T_s \geq T_{\text{cool}}.$$

Daraus folgt

$$\frac{Qa^2}{4\lambda} = T_c - T_s \leq T_m - T_{\text{cool}}.$$

Der Grenzradius ist somit

$$a_u = \sqrt{\frac{4\lambda(T_m - T_{\text{cool}})}{Q}}.$$

Mit

$$T_m - T_{\text{cool}} = 3138 - 577.0 = 2561 \text{ K},$$

erhalten wir

$$a_u = \sqrt{\frac{4(3.280)(2561)}{4.9168 \dots \times 10^8}} = 8.2667 \dots \times 10^{-3} \text{ m}.$$

Somit ist

$$\boxed{a_u \simeq 8.27 \text{ mm}}.$$

Diese Obergrenze entspricht dem idealen Grenzfall $T_s = T_{\text{cool}}$. Ein endlicher Temperaturabfall zwischen der Oberfläche und dem Kühlmittel würde den zulässigen Radius verringern.

B1

Die Neutronenmasse sei m , sodass die Moderatormasse Am beträgt. Vor dem Stoß ruht der Moderator im LF. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist daher

$$\vec{v}_m = \frac{m\vec{v}_b + Am\vec{0}}{(A+1)m} = \frac{\vec{v}_b}{A+1}.$$

Bei einer Galilei-Transformation in das CM-System wird von jeder Geschwindigkeit im LF $\vec{v}_m$ subtrahiert. Somit lauten die gesuchten Beschriftungen

$$\boxed{\vec{u}_1 = \vec{v}_b - \vec{v}_m, \quad \vec{u}_2 = \vec{v}_a - \vec{v}_m, \quad \vec{u}_3 = -\vec{v}_m}.$$

Die Skizze sollte folgende Merkmale aufweisen:

- Vor dem Stoß nähert sich Neutron **1** von links und bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_b - \vec{v}_m$ horizontal nach rechts.
- Moderatorteilchen **3** nähert sich von rechts und bewegt sich mit der Geschwindigkeit $-\vec{v}_m$ horizontal nach links.
- Nach dem Stoß verlässt Neutron **2** den Stoßpunkt mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_a - \vec{v}_m$. Markieren Sie θ zwischen diesem Pfeil und der ursprünglichen, nach rechts gerichteten Bewegungsrichtung des Neutrons.
- Moderatorteilchen **4** bewegt sich in genau entgegengesetzter Richtung zu Neutron **2** fort, da der Gesamtimpuls im CM-System null ist. Seine Geschwindigkeit ist

$$\vec{u}_4 = -\frac{\vec{u}_2}{A}.$$

Zeigt beispielsweise der Pfeil des auslaufenden Neutrons nach rechts oben, so zeigt der Pfeil des auslaufenden Moderatorteilchens nach links unten.

B2

Die anfänglichen Geschwindigkeitsbeträge im CM-System sind

$$u_{n,b} = v_b - v_m = \frac{A}{A+1}v_b, \quad u_{M,b} = v_m = \frac{1}{A+1}v_b.$$

Die Impulserhaltung im CM-System verlangt, dass die Impulse nach dem Stoß gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind. Ihre Beträge erfüllen daher

$$mv = AmV, \quad \text{also} \quad v = AV.$$

Da der Stoß elastisch ist, bleibt die kinetische Energie erhalten:

$$\frac{1}{2}mu_{n,b}^2 + \frac{1}{2}Amu_{M,b}^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}AmV^2.$$

Nach Kürzen von $m/2$ folgt

$$\frac{A}{A+1}v_b^2 = v^2 + AV^2.$$

Einsetzen von $v = AV$ ergibt

$$A(A+1)V^2 = \frac{A}{A+1}v_b^2.$$

Daher gilt

$$\boxed{V = \frac{v_b}{A+1}}, \quad \boxed{v = \frac{A}{A+1}v_b}.$$

Der Stoß ändert die Geschwindigkeitsrichtungen, doch der Geschwindigkeitsbetrag jedes Teilchens im CM-System bleibt unverändert.

B3

Die Geschwindigkeit des Neutrons im LF nach dem Stoß ist

$$\vec{v}_a = \vec{v}_m + \vec{u}_2.$$

Der Vektor $\vec{v}_m$ zeigt entlang der ursprünglichen Neutronenrichtung, während $\vec{u}_2$ mit dieser Richtung den Winkel θ einschließt. Folglich gilt

$$v_a^2 = v_m^2 + v^2 + 2v_mv \cos \theta.$$

Mit den obigen Ergebnissen folgt

$$\frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{1 + A^2 + 2A \cos \theta}{(A + 1)^2}.$$

Da sich beide Energien auf dasselbe Neutron im LF beziehen, gilt

$$G(\alpha, \theta) = \frac{E_a}{E_b} = \frac{v_a^2}{v_b^2}.$$

Nun folgt aus

$$\alpha = \frac{(A - 1)^2}{(A + 1)^2}$$

die Beziehung

$$\frac{1 + \alpha}{2} = \frac{A^2 + 1}{(A + 1)^2}, \quad \frac{1 - \alpha}{2} = \frac{2A}{(A + 1)^2}.$$

Daher ist

$$G(\alpha, \theta) = \frac{1 + \alpha + (1 - \alpha) \cos \theta}{2}.$$

Eine äquivalente Form ist

$$G(\alpha, \theta) = 1 - (1 - \alpha) \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Insbesondere ergibt Vorwärtsstreuung $G = 1$, während Rückwärtsstreuung im CM-System $G = \alpha$ ergibt.

B4

Der relative Energieverlust ist

$$f_l = 1 - G = (1 - \alpha) \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Er ist bei Rückwärtsstreuung im CM-System, $\theta = \pi$, am größten. Somit gilt

$$f_{l,\max} = 1 - \alpha = 1 - \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right)^2 = \frac{4A}{(A + 1)^2}.$$

Entsprechend der Näherung der Aufgabe, dass das gesamte D_2O -Molekül ein Target der Masse 20 u ist, setzen wir $A = 20$:

$$f_{l,\max} = \frac{4(20)}{21^2} = \frac{80}{441} \simeq 0.1814 = 18.14\%.$$

C1

Für einen von null verschiedenen stationären Neutronenfluss müssen sich Produktion und Leckage ausgleichen:

$$k_1 \left[\frac{2.405^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} \right] \psi = k_2 \psi.$$

Nach Kürzen von ψ ergibt sich

$$\frac{2.405^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} = \frac{k_2}{k_1}. \quad (1)$$

Wir bestimmen zunächst die Form, die bei festem Volumen die Leckage minimiert. Wir schreiben

$$\mathcal{V} = \pi R^2 H, \quad b = 2.405,$$

sodass

$$H = \frac{\mathcal{V}}{\pi R^2}.$$

Der geometrische Faktor in der Leckagerate wird damit zu

$$S(R) = \frac{b^2}{R^2} + \frac{\pi^4 R^4}{\mathcal{V}^2}.$$

Seine Ableitung verschwindet, wenn

$$-\frac{2b^2}{R^3} + \frac{4\pi^4 R^3}{\mathcal{V}^2} = 0.$$

Durch Umstellen und Verwendung von $\mathcal{V} = \pi R^2 H$ folgt

$$\boxed{\frac{b^2}{R^2} = 2 \frac{\pi^2}{H^2}}. \quad (2)$$

Diese stationäre Stelle ist ein Minimum, da

$$S''(R) = \frac{6b^2}{R^4} + \frac{12\pi^4 R^2}{\mathcal{V}^2} > 0.$$

Das optimale Verhältnis von Höhe zu Radius ist daher

$$\frac{H}{R} = \frac{\sqrt{2} \pi}{b} = 1.84735 \dots$$

Aus (1) und (2) folgt

$$3 \frac{\pi^2}{H^2} = \frac{k_2}{k_1},$$

woraus sich ergibt:

$$\boxed{H = \pi \sqrt{\frac{3k_1}{k_2}}}, \quad \boxed{R = b \sqrt{\frac{3k_1}{2k_2}}}.$$

Numerisch ergibt sich

$$H = \pi \sqrt{\frac{3(1.021 \times 10^{-2})}{8.787 \times 10^{-3}}} \simeq \boxed{5.865 \text{ m}},$$

$$R = 2.405 \sqrt{\frac{3(1.021 \times 10^{-2})}{2(8.787 \times 10^{-3})}} \simeq \boxed{3.175 \text{ m}}.$$

C2

Der Abstand im quadratischen Gitter sei $d = 0.286 \text{ m}$. Unter Vernachlässigung von Randkorrekturen nimmt jeder Brennstoffkanal eine quadratische Zelle mit der Querschnittsfläche d^2 ein. Daher gilt

$$F_n \simeq \frac{\pi R^2}{d^2}.$$

Einsetzen ergibt

$$F_n \simeq \frac{\pi(3.17507\dots)^2}{(0.286)^2} = 387.19\dots$$

Die geschätzte Anzahl beträgt somit

$$F_n \simeq 387 \text{ Brennstoffkanäle}.$$

Mit dem effektiven Radius des festen Brennstoffs $r_f = 3.617 \times 10^{-2} \text{ m}$ beträgt das Volumen von UO_2 in einem Kanal $\pi r_f^2 H$. Seine Masse ist daher $\rho \pi r_f^2 H$, und die gesamte Brennstoffmasse beträgt

$$M = F_n \rho \pi r_f^2 H.$$

Mit der ungerundeten Schätzung aus dem Flächenverhältnis ergibt sich

$$\begin{aligned} M &\simeq (387.19\dots)(1.060 \times 10^4)\pi(3.617 \times 10^{-2})^2(5.86547\dots) \text{ kg} \\ &= 9.8942\dots \times 10^4 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$M \simeq 9.89 \times 10^4 \text{ kg} = 98.9 \text{ Tonnen } \text{UO}_2.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.