

المسألة 1: جسيمات من الشمس

يمكن للفوتونات القادمة من سطح الشمس والنيوترينوات القادمة من لبّها أن تخبرنا عن درجات الحرارة الشمسية، وأن تؤكّد أيضاً أن الشمس تشعّ بفعل التفاعلات النووية.

في جميع أجزاء هذه المسألة، اعتبر كتلة الشمس $M_{\odot} = 2.00 \times 10^{30} \text{ kg}$ ، ونصف قطرها $R_{\odot} = 7.00 \times 10^8 \text{ m}$ ، وقدرتها الإشعاعية (الطاقة الإشعاعية المنبعثة في وحدة الزمن) $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{26} \text{ W}$ ، والمسافة بين الأرض والشمس $d_{\odot} = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$.

ملاحظة:

$$(i) \quad \int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} + \text{ثابت}$$

$$(ii) \quad \int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax} + \text{ثابت}$$

$$(iii) \quad \int x^3 e^{ax} dx = \left(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4} \right) e^{ax} + \text{ثابت}$$

A الإشعاع القادم من الشمس :

الجزء	السؤال	الدرجات
A1	افترض أن الشمس تشعّ كجسم أسود مثالي. استخدم هذه الحقيقة لحساب درجة حرارة سطح الشمس T_s .	0.3

يمكن تقريب طيف الإشعاع الشمسي تقريباً جيداً بقانون توزيع فين. وفقاً لذلك، تُعطى الطاقة الشمسية الساقطة على أي سطح على الأرض في وحدة الزمن ولكل وحدة من مجال التردد، $u(\nu)$ ، بالعلاقة

$$u(\nu) = A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi h}{c^2} \nu^3 \exp(-h\nu/k_B T_s),$$

حيث ν هو التردد، و A هي مساحة السطح العمودي على اتجاه الإشعاع الساقط.

لننظر الآن في خلية شمسية تتكون من قرص رقيق من مادة شبه موصلة، مساحته A ، موضوع عمودياً على اتجاه أشعة الشمس.

الجزء	السؤال	الدرجات
A2	باستخدام تقريب فين، عبّر عن القدرة الإشعاعية الشمسية الكلية P_{in} الساقطة على سطح الخلية الشمسية بدلالة A ، و $R_{\odot}$ ، و $d_{\odot}$ ، و T_s ، والثوابت الأساسية c ، و h ، و k_B .	0.3
A3	عبّر عن عدد الفوتونات $n_{\gamma}(\nu)$ الساقطة على سطح الخلية الشمسية في وحدة الزمن ولكل وحدة من مجال التردد، بدلالة A ، و $R_{\odot}$ ، و $d_{\odot}$ ، و T_s ، و ν ، والثوابت الأساسية c ، و h ، و k_B .	0.2

للمادة شبه الموصلة في الخلية الشمسية «فجوة نطاق» طاقتها E_g . نفترض النموذج الآتي: كل فوتون طاقته $E \geq E_g$ يثير إلكترونًا عبر فجوة النطاق. ويسمى هذا الإلكترون بطاقة E_g بوصفها طاقة خرج مفيدة، وتبتد أي طاقة زائدة على هيئة حرارة (ولا تتحول إلى طاقة مفيدة).

الدرجة	السؤال	الجزء
1.0	عرّف $x_g = h\nu_g/k_B T_s$ ، حيث $E_g = h\nu_g$. عبّر عن قدرة الخرج المفيدة للخلية P_{out} بدلالة x_g ، و A ، و $R_{\odot}$ ، و $d_{\odot}$ ، و T_s ، و الثوابت الأساسية c ، و h ، و k_B .	A4
0.2	عبّر عن كفاءة هذه الخلية الشمسية η بدلالة x_g .	A5
1.0	ارسم رسمًا نوعيًا لـ η بدلالة x_g . ينبغي إظهار القيمتين عند $x_g = 0$ وعندما $x_g \rightarrow \infty$ بوضوح. ما ميل $\eta(x_g)$ عند $x_g = 0$ وعندما $x_g \rightarrow \infty$ ؟	A6
1.0	لنكن x_0 قيمة x_g التي تكون عندها η عظمى. أوجد المعادلة التكميلية التي تحدد x_0 . قدّر قيمة x_0 بدقة في حدود ± 0.25 . ومن ثم احسب $\eta(x_0)$.	A7
0.2	فجوة النطاق للسيليكون النقي هي $E_g = 1.11$ eV. احسب كفاءة خلية شمسية من السيليكون η_{Si} باستخدام هذه القيمة.	A8

¹ كان أمول ديغي (TIFR)، وأنویش مازومدار (HBCSE-TIFR)، وفيجاي أ. سينغ (المنسق الوطني السابق للأولبيادات العلمية) المؤلفين الرئيسيين لهذه المسألة. ونتقدم بالشكر والتقدير على مساهمات اللجنة الأكاديمية، ومجموعة التطوير الأكاديمي، والمجلس الدولي.

في أواخر القرن التاسع عشر، اقترح كلفن وهلمهولتز (KH) فرضية لتفسير كيفية إشعاع الشمس. فقد افترضوا أن الشمس بدأت كسحابة هائلة من المادة، كتلتها $M_{\odot}$ وكثافتها مهمة، ثم أخذت تنكمش باستمرار. وعندئذ يكون إشعاع الشمس ناتجًا عن تحرر طاقة الوضع الثقالية خلال هذا الانكماش البطيء.

الدرجة	السؤال	الجزء
0.3	لنفترض أن كثافة المادة منتظمة داخل الشمس. أوجد طاقة الوضع الثقالية الكلية للشمس في الوقت الحاضر Ω ، بدلالة G ، و $M_{\odot}$ ، و $R_{\odot}$.	A9
0.5	قدّر أقصى مدة ممكنة τ_{KH} (بالسنوات) يمكن أن تكون الشمس قد ظلت تشعّ خلالها وفقًا لفرضية KH. افترض أن القدرة الإشعاعية للشمس كانت ثابتة طوال هذه المدة.	A10

لا تتوافق τ_{KH} المحسوبة أعلاه مع عمر النظام الشمسي المقدّر من دراسات النيازك. وهذا يبيّن أن مصدر طاقة الشمس لا يمكن أن يكون ثقاليًا بحتًا.

B النيوتريونات القادمة من الشمس :

في عام 1938، اقترح هانس بيته أن الاندماج النووي للهيدروجين إلى الهيليوم في لبّ الشمس هو مصدر طاقتها. والتفاعل النووي الصافي هو:



يمكن اعتبار «النيوتريونات الإلكترونية» ν_e الناتجة في هذا التفاعل عديمة الكتلة. وهي تفلت من الشمس، ويؤكد الكشف عنها على الأرض حدوث تفاعلات نووية داخل الشمس. يمكن إهمال الطاقة التي تحملها النيوتريونات بعيدًا في هذه المسألة.

الدرجة	السؤال	الجزء
0.6	احسب كثافة فيض عدد النيوتريونات الواصلة إلى الأرض Φ_{ν} ، بوحدة $\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$. الطاقة المتحررة في التفاعل أعلاه هي $\Delta E = 4.0 \times 10^{-12}$ J. افترض أن الطاقة التي تشعّها الشمس ناتجة بالكامل عن هذا التفاعل.	B1

أثناء انتقال بعض النيوتريونات الإلكترونية ν_e من لبّ الشمس إلى الأرض، تتحول إلى أنواع أخرى من النيوتريونات ν_x . كفاءة الكشف في الكشف عن ν_x تساوي 1/6 من كفاءته في الكشف عن ν_e . إذا لم يحدث تحول للنيوتريونات، نتوقع الكشف عن متوسط قدره N_1 نيوترينو في السنة. ولكن بسبب التحول، يُكشف فعليًا عن متوسط قدره N_2 نيوترينو (من ν_x و ν_e معًا) في السنة.

الدرجة	السؤال	الجزء
0.4	بدلالة N_1 و N_2 ، احسب النسبة f من ν_e التي تتحول إلى ν_x .	B2

للكشف عن النيوتريونات، تُنشأ كواشف كبيرة مملوءة بالماء. وعلى الرغم من ندرة تفاعلات النيوتريونات مع المادة، فإنها تقتل أحياناً إلكترونات من جزيئات الماء في الكاشف. تتحرك هذه الإلكترونات عالية الطاقة عبر الماء بسرعات عالية، وتصدر أثناء ذلك إشعاعاً كهرومغناطيسياً. ما دامت سرعة أحد هذه الإلكترونات أكبر من سرعة الضوء في الماء (معامل انكساره n)، ينبعث هذا الإشعاع، المسمى إشعاع تشيرينكوف، على شكل مخروط.

الدرجة	السؤال	الجزء
2.0	افترض أن إلكترونًا اقتلعه نيوترينو يفقد الطاقة بمعدل ثابت مقداره α في وحدة الزمن أثناء انتقاله عبر الماء. إذا أُصدر هذا الإلكترون إشعاع تشيرينكوف لمدة Δt ، فحدد الطاقة التي منحها النيوترينو لهذا الإلكترون (E_{imparted}) بدلالة α ، و Δt ، و n ، و m_e ، و c . (افترض أن الإلكترون كان ساكنًا قبل تفاعله مع النيوترينو.)	B3

يحدث اندماج H إلى He داخل الشمس عبر عدة خطوات. وتنتج نواة ${}^7\text{Be}$ (كتلتها السكونية m_{Be}) في إحدى هذه الخطوات الوسيطة. ويمكنها بعد ذلك أن تمتص إلكترونًا، فتنتج نواة ${}^7\text{Li}$ (كتلتها السكونية $m_{\text{Li}} < m_{\text{Be}}$) وتصدر ν_e . والتفاعل النووي الموافق هو:



عندما تكون نواة Be ($m_{\text{Be}} = 11.65 \times 10^{-27} \text{ kg}$) ساكنة وتمتص إلكترونًا ساكنًا أيضًا، تكون طاقة النيوترينو المنبعث $E_\nu = 1.44 \times 10^{-13} \text{ J}$. إلا أن نوى Be تتحرك حركة حرارية عشوائية بفعل درجة الحرارة T_c في لبّ الشمس، وتعمل كمصادر نيوتريونات متحركة. ونتيجة لذلك، تتذبذب طاقة النيوتريونات المنبعثة، ويكون الجذر التربيعي لمتوسط مربع هذه التذبذبات (rms) هو ΔE_{rms} .

الدرجة	السؤال	الجزء
2.0	إذا كان $\Delta E_{\text{rms}} = 5.54 \times 10^{-17} \text{ J}$ ، فاحسب السرعة الجذرية المتوسطة لنوى Be، أي V_{Be} ، ومن ثم قدر T_c . (تلميح: تعتمد ΔE_{rms} على الجذر التربيعي لمتوسط مربع مركبة السرعة على امتداد خط النظر).	B4

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

A1 •

$$T_s = \left(\frac{L_\odot}{4\pi R_\odot^2 \sigma} \right)^{1/4} \simeq 5.76 \times 10^3 \text{ K}.$$

A2 •

$$P_{\text{in}} = \frac{12\pi A R_\odot^2 (k_B T_s)^4}{d_\odot^2 c^2 h^3}.$$

A3 •

$$n_\gamma(\nu) = \frac{2\pi A R_\odot^2}{d_\odot^2 c^2} \nu^2 e^{-h\nu/(k_B T_s)}.$$

A4 •

$$P_{\text{out}} = \frac{2\pi A R_\odot^2 (k_B T_s)^4}{d_\odot^2 c^2 h^3} x_g (x_g^2 + 2x_g + 2) e^{-x_g}.$$

A5 •

$$\eta(x_g) = \frac{x_g (x_g^2 + 2x_g + 2) e^{-x_g}}{6}.$$

• **A6** يبدأ المنحنى من نقطة الأصل بميل $1/3$ ، ويبلغ قيمة عظمى واحدة قرب $(2.27, 0.457)$ ، ويقترب من المحور الأفقي من الأعلى:

$$\eta(0) = 0, \quad \lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta = 0, \quad \eta'(0) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta' = 0 \quad \text{من الأسفل.}$$

• **A7**

$$x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0, \quad x_0 \simeq 2.27, \quad \eta(x_0) \simeq 0.457 = 45.7\%.$$

• **A8**

$$x_{g,\text{Si}} \simeq 2.24, \quad \eta_{\text{Si}} \simeq 0.457 = 45.7\%.$$

• **A9**

$$\Omega = -\frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}} \simeq -2.29 \times 10^{41} \text{ J.}$$

• **A10**

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}L_{\odot}} \simeq 1.88 \times 10^7 \text{ years.}$$

• **B1**

$$\Phi_{\nu} = \frac{2L_{\odot}}{4\pi d_{\odot}^2 \Delta E} \simeq 6.8 \times 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

• **B2**

$$f = \frac{6}{5} \left(1 - \frac{N_2}{N_1} \right).$$

• **B3**

$$E_{\text{imparted}} = \alpha \Delta t + m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}} - 1 \right).$$

• **B4**

$$V_{\text{Be}} = \sqrt{3} c \frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}} \simeq 2.00 \times 10^5 \text{ m s}^{-1},$$

$$T_c = \frac{m_{\text{Be}} c^2}{k_B} \left(\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}} \right)^2 \simeq 1.12 \times 10^7 \text{ K.}$$

الحل

لإجراء الحسابات العددية، نستخدم الثوابت القياسية

$$\sigma = 5.6704 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4},$$

$$G = 6.6743 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2},$$

$$k_B = 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1},$$

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1},$$

$$1 \text{ year} = 3.15576 \times 10^7 \text{ s}, \quad 1 \text{ eV} = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J}$$

A1

وفقاً لقانون ستيفان-بولتزمان، يصدر الجسم الأسود قدرة σT^4 لكل وحدة مساحة من سطحه. مساحة السطح المشع للشمس هي $4\pi R_\odot^2$ ، ولذلك

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_s^4.$$

ومن ثم،

$$T_s = \left[\frac{3.85 \times 10^{26}}{4\pi(7.00 \times 10^8)^2(5.6704 \times 10^{-8})} \right]^{1/4} = \boxed{5.76 \times 10^3 \text{ K}}.$$

A2

القدرة الكلية الساقطة هي التكامل على جميع الترددات:

$$P_{\text{in}} = A \frac{R_\odot^2}{d_\odot^2} \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \nu^3 e^{-h\nu/(k_B T_s)} d\nu.$$

نضع

$$x = \frac{h\nu}{k_B T_s}, \quad d\nu = \frac{k_B T_s}{h} dx.$$

وعندئذ

$$P_{\text{in}} = \frac{2\pi A R_\odot^2 (k_B T_s)^4}{d_\odot^2 c^2 h^3} \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx.$$

تعطي صيغة التكامل المعطاة

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = [-e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)]_0^\infty = 6.$$

إذاً

$$P_{\text{in}} = \boxed{\frac{12\pi A R_\odot^2 (k_B T_s)^4}{d_\odot^2 c^2 h^3}}.$$

تستخدم جميع حسابات الكفاءة فيما يأتي قدرة الدخل نفسها المحسوبة بتقريب فين.

A3

يحمل كل فوتون تردده ν طاقة $h\nu$. وبقسمة القدرة الطيفية على هذه الطاقة نحصل على المعدل الطيفي لوصول الفوتونات:

$$n_\gamma(\nu) = \frac{u(\nu)}{h\nu}.$$

ومن ثم

$$n_\gamma(\nu) = \boxed{\frac{2\pi A R_\odot^2}{d_\odot^2 c^2} \nu^2 e^{-h\nu/(k_B T_s)}}.$$

وحداته هي فوتونات في الثانية لكل هرتز.

A4

لا تسهم إلا الفوتونات التي تحقق $\nu \geq \nu_g$ ، ويسهم كل منها بطاقة مفيدة E_g . وبناءً على ذلك،

$$P_{\text{out}} = E_g \int_{\nu_g}^\infty n_\gamma(\nu) d\nu.$$

باستخدام $E_g = x_g k_B T_s$ والتعويض الوارد في A2،

$$P_{\text{out}} = \frac{2\pi A R_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3} x_g \int_{x_g}^{\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

والآن

$$\int_{x_g}^{\infty} x^2 e^{-x} dx = [-(x^2 + 2x + 2)e^{-x}]_{x_g}^{\infty} = (x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g}.$$

ومن ثم،

$$P_{\text{out}} = \frac{2\pi A R_{\odot}^2 (k_B T_s)^4}{d_{\odot}^2 c^2 h^3} x_g (x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g}.$$

A5

الكفاءة هي قدرة الخرج المفيدة مقسومة على القدرة الساقطة:

$$\eta = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}.$$

تُختزل العوامل المشتركة ذات الأبعاد الفيزيائية والعوامل الهندسية، فنحصل على

$$\eta(x_g) = \frac{x_g(x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g}}{6}, \quad x_g \geq 0.$$

A6

عندما تكون فجوة النطاق صفرًا،

$$\eta(0) = 0.$$

على الرغم من أن الفوتونات تستطيع حينئذ إثارة الإلكترونات، فإن الطاقة المفيدة لكل إلكترون تساوي صفرًا.

للقيم الكبيرة من x_g ،

$$\eta(x_g) \sim \frac{x_g^3 e^{-x_g}}{6},$$

ولذلك

$$\lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta(x_g) = 0.$$

إن عدد الفوتونات التي تتجاوز طاقتها الفجوة يتناقص أُسِّيًّا، مما يجعل الخرج المفيد يُؤول إلى الصفر.

بالتفاضل،

$$\eta'(x_g) = \frac{e^{-x_g}}{6} (-x_g^3 + x_g^2 + 2x_g + 2).$$

إذاً

$$\eta'(0) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x_g \rightarrow \infty} \eta'(x_g) = 0 \text{ من الأسفل}.$$

يبدأ الرسم من نقطة الأصل بمماس معادلته $\eta = x_g/3$ ، ويرتفع إلى قيمة عظمى وحيدة قرب $x_g = 2.27$ ، ثم يتناقص مقتربًا من المقارب الأفقي $\eta = 0$ مع بقاءه موجبًا. ولزيد من المعلومات عن شكل المنحنى،

$$\eta''(x_g) = \frac{e^{-x_g}}{6} x_g^2 (x_g - 4),$$

ولذلك يكون المنحنى مقعرًا نحو الأسفل عندما $0 < x_g < 4$ ، ومقعرًا نحو الأعلى عندما $x_g > 4$.

فيما يأتي نقاط تمثيلية:

$\eta(x_g)$	x_g
0	0
0.307	1
0.451	2
0.457	2.27
0.317	4
0.124	6
0.00923	10
$\rightarrow 0$	$\rightarrow \infty$

A7

عند القيمة العظمى، $\eta'(x_0) = 0$. وبما أن العامل الأسّي لا يندم أبدًا،

$$-x_0^3 + x_0^2 + 2x_0 + 2 = 0,$$

أو

$$x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0.$$

عندما $x_0 > 0$ ، تكافئ هذه المعادلة

$$x_0 = 1 + \frac{2}{x_0} + \frac{2}{x_0^2}.$$

يتزايد الطرف الأيسر تزايدًا صارمًا مع x_0 ، بينما يتناقص الطرف الأيمن تناقصًا صارمًا. لذلك لا توجد إلا نقطة سكون واحدة عند قيمة موجبة. ومع السلوك عند طرفي المجال المبين في A6، يثبت هذا أنها نقطة القيمة العظمى المطلقة.

لتكن $F(x) = x^3 - x^2 - 2x - 2$. عندئذ

$$F(2) = -2, \quad F(2.5) = 2.375.$$

إذًا $2 < x_0 < 2.5$ ، وهو ما يعطينا بالفعل $x_0 = 2.25 \pm 0.25$. ويعطي تحسين التقريب

$$x_0 \simeq 2.27.$$

بالتعويض في الكفاءة،

$$\eta(x_0) = \frac{x_0(x_0^2 + 2x_0 + 2)e^{-x_0}}{6} \simeq 0.45703.$$

ومن ثم

$$\eta_{\max} \simeq 45.7\%.$$

A8

عند درجة حرارة السطح التي أوجدناها في A1،

$$k_B T_s \simeq 0.4966 \text{ eV}.$$

بالنسبة إلى السيليكون،

$$x_{g,\text{Si}} = \frac{E_g}{k_B T_s} = \frac{1.11}{0.4966} \simeq 2.235.$$

ومن ثم،

$$\eta_{\text{Si}} = \frac{2.235 (2.235^2 + 2(2.235) + 2) e^{-2.235}}{6} \simeq 0.45694.$$

إذاً

$$\boxed{\eta_{\text{Si}} \simeq 45.7\%}.$$

هذه القيمة قريبة جداً من القيمة العظمى، لأن فجوة السيليكون قريبة من الفجوة المثلى $x_0 k_B T_s \simeq 1.13 \text{ eV}$.

A9

نبني الكرة المتجانسة بإحضار قشور كروية رقيقة متتالية من اللانهاية. عند نصف القطر r ، تكون الكتلة المجمعة بالفعل

$$M(r) = M_{\odot} \frac{r^3}{R_{\odot}^3},$$

وتكون كتلة القشرة

$$dM = \frac{3M_{\odot} r^2}{R_{\odot}^3} dr.$$

وفقاً لمبرهنة القشرة، تكون طاقة الوضع المضافة

$$d\Omega = -\frac{GM(r) dM}{r}.$$

ومن ثم،

$$\Omega = -\frac{3GM_{\odot}^2}{R_{\odot}^6} \int_0^{R_{\odot}} r^4 dr = -\frac{3GM_{\odot}^2}{R_{\odot}^6} \frac{R_{\odot}^5}{5}.$$

وعليه

$$\boxed{\Omega = -\frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}}} \simeq -2.29 \times 10^{41} \text{ J}.$$

تقابل الإشارة السالبة اختيار طاقة الوضع مساوية للصفر عند تباعد لانهائي.

A10

تكون طاقة الوضع الثقالية للسحابة الابتدائية الشديدة الامتداد مساوية للصفر تقريباً. ولذلك يحرر انكماشها، في أقصى تقدير، طاقة مقدارها

$$E_{\text{available}} = -\Omega = \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}}.$$

نحصل على أقصى مدة ممكنة للإشعاع بافتراض أن كل هذه الطاقة المتحررة قد أُشعَّت. وعند ثبات القدرة الإشعاعية،

$$L_{\odot} \tau_{\text{KH}} = \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}},$$

ولذلك

$$\boxed{\tau_{\text{KH}} = \frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot} L_{\odot}}}.$$

عدياً،

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{2.288 \times 10^{41}}{3.85 \times 10^{26}} \simeq 5.94 \times 10^{14} \text{ s} = \boxed{1.88 \times 10^7 \text{ years}}.$$

أي جزء من الطاقة المتحررة يُحتفظ به على هيئة طاقة داخلية سيقبل المدة التي يمكن للانكماش الثقالي أن يدعم فيها الإشعاع؛ لذا فإن هذه المدة حد أعلى.

B1

بإهمال الطاقة التي تحملها النيوتريونات بعيداً، يكون عدد تفاعلات الاندماج في الثانية

$$\dot{N}_{\text{reaction}} = \frac{L_{\odot}}{\Delta E}.$$

ينتج كل تفاعل نيوتريونين:

$$\dot{N}_{\nu} = \frac{2L_{\odot}}{\Delta E}.$$

في حالة الانبعاث الكروي، تعبر هذه النيوتريونات مساحة $4\pi d_{\odot}^2$ عند بُعد الأرض. إذًا

$$\Phi_{\nu} = \frac{2L_{\odot}}{4\pi d_{\odot}^2 \Delta E}.$$

بالتعويض نحصل على

$$\Phi_{\nu} = \frac{2(3.85 \times 10^{26})}{4\pi(1.50 \times 10^{11})^2(4.0 \times 10^{-12})} = \boxed{6.8 \times 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}}.$$

B2

بعد التحول، تبقى النسبة $1 - f$ على هيئة نيوتريونات إلكترونية، وتسهم في $(1 - f)N_1$ عملية كشف في السنة. وتسهم النسبة المتحولة في $fN_1/6$ عملية كشف، لأن كفاءة الكشف عنها تساوي السدس.

وبناءً على ذلك،

$$N_2 = (1 - f)N_1 + \frac{fN_1}{6} = N_1 \left(1 - \frac{5f}{6}\right).$$

بحل المعادلة،

$$\boxed{f = \frac{6}{5} \left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right)}.$$

يقابل المجال الفيزيائي $0 \leq f \leq 1$ المجال $N_1/6 \leq N_2 \leq N_1$.

B3

يتوقف إشعاع تشيرينكوف عندما يتباطأ الإلكترون حتى تبلغ سرعته سرعة الضوء في الماء:

$$v_{\text{th}} = \frac{c}{n}.$$

تُعطى طاقة حركة الإلكترون عند تلك اللحظة بالعلاقة النسبية:

$$K_{\text{th}} = (\gamma_{\text{th}} - 1)m_e c^2, \quad \gamma_{\text{th}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\text{th}}^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}}.$$

خلال زمن الانبعاث Δt ، يفقد الإلكترون طاقة $\alpha \Delta t$. ولذلك فإن طاقة حركته الابتدائية مباشرة بعد التفاعل مع النيوتريو هي

$$K_i = K_{\text{th}} + \alpha \Delta t.$$

بما أن الإلكترون كان ساكنًا في البداية قبل التفاعل، فإن الطاقة التي يمنحها النيوتريو تساوي K_i . ومن ثم

$$\boxed{E_{\text{imparted}} = \alpha \Delta t + m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}} - 1 \right)}.$$

الحد الثاني أساسي: إذ لا يزال للإلكترون طاقة حركية عندما يتوقف انبعاث تشيرينكوف.

B4

نستخدم النموذج المذكور الذي ينشأ فيه تشتت الطاقة من الحركة الحرارية لمصادر Be. لتكن $v_{\parallel}$ مركبة سرعة المصدر باتجاه الأرض. بالنسبة إلى نيوتريو عديم الكتلة، تكون كمية حركته في إطار سكون المصدر $p_{\nu} = E_{\nu}/c$. إلى الرتبة الأولى في سرعة المصدر غير النسبية، يعطي تحويل لورنتز للطاقة

$$E_{\text{obs}} \simeq E_{\nu} + v_{\parallel} \frac{E_{\nu}}{c}.$$

إذًا، إزاحة الطاقة بفعل دوبلر هي

$$\delta E \simeq E_{\nu} \frac{v_{\parallel}}{c}.$$

الحركة الحرارية متساوية الخواص، ولذلك

$$\langle v_{\parallel} \rangle = 0, \quad \langle v_{\parallel}^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3} = \frac{V_{\text{Be}}^2}{3}.$$

بأخذ الجذر التربيعي لمتوسط مربع إزاحة الطاقة،

$$\Delta E_{\text{rms}} = \frac{E_{\nu}}{c} \sqrt{\langle v_{\parallel}^2 \rangle} = \frac{E_{\nu} V_{\text{Be}}}{\sqrt{3} c}.$$

ومن ثم،

$$V_{\text{Be}} = \sqrt{3} c \frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}}.$$

عدديًا،

$$\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}} = \frac{5.54 \times 10^{-17}}{1.44 \times 10^{-13}} = 3.847 \times 10^{-4},$$

ومن ثم

$$V_{\text{Be}} \simeq 2.00 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}.$$

تؤكد النسبة $V_{\text{Be}}/c \simeq 6.66 \times 10^{-4}$ صلاحية التقريب غير النسبي.

وفقاً لمبدأ التوزيع المتساوي للطاقة على درجات الحرية الانتقالية الثلاث،

$$\frac{1}{2} m_{\text{Be}} V_{\text{Be}}^2 = \frac{3}{2} k_B T_c.$$

إذًا

$$T_c = \frac{m_{\text{Be}} V_{\text{Be}}^2}{3 k_B} = \frac{m_{\text{Be}} c^2}{k_B} \left(\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_{\nu}} \right)^2.$$

بالتعويض بالمعطيات،

$$T_c = \frac{(11.65 \times 10^{-27})(2.9979 \times 10^8)^2}{1.380649 \times 10^{-23}} \left(\frac{5.54 \times 10^{-17}}{1.44 \times 10^{-13}} \right)^2,$$

فنحصل على

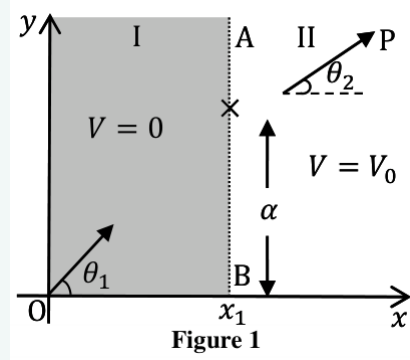
$$T_c \simeq 1.12 \times 10^7 \text{ K}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: مبدأ القيمة القصوى أو الدنيا

A مبدأ القيمة القصوى أو الدنيا في الميكانيكا

اعتبر المستوى الأفقي العديم الاحتكاك $x - y$ المبين في الشكل 1. يقسمه المستقيم AB ، الذي يحقق المعادلة $x = x_1$ ، إلى منطقتين، I وII. طاقة الوضع لجسيم نقطي كتلته m في المنطقة I هي $V = 0$ ، بينما هي $V = V_0$ في المنطقة II. يُطلق الجسيم من نقطة الأصل O بسرعة v_1 على امتداد مستقيم يصنع زاوية θ_1 مع المحور x . ويصل إلى النقطة P في المنطقة II متحركاً بسرعة v_2 على امتداد مستقيم يصنع زاوية θ_2 مع المحور x . أهمل الجاذبية والتأثيرات النسبية في هذه المهمة T-2 بأكملها (جميع أجزائها).



الشكل 1

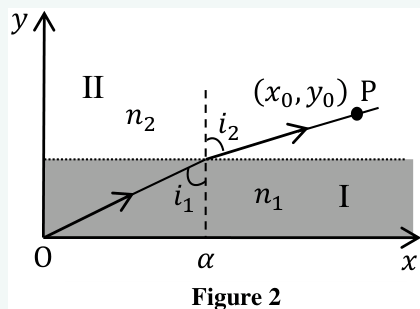
A1	أوجد تعبيراً عن v_2 بدلالة m و v_1 و V_0 .	0.2
A2	عبر عن v_2 بدلالة v_1 و θ_1 و θ_2 .	0.3

نعرف كمية تسمى الفعل، $A = m \int v(s) ds$ ، حيث ds طول متناهٍ في الصغر على امتداد مسار جسيم كتلته m يتحرك بسرعة $v(s)$. ويُجرى التكامل على المسار. فعلى سبيل المثال، لجسيم يتحرك بسرعة ثابتة v على مسار دائري نصف قطره R ، يكون الفعل A لدورة واحدة مساوياً لـ $2\pi m R v$. ويمكن إثبات أنه، لجسيم طاقته ثابتة E ، يكون المسار الفعلي من بين جميع المسارات الممكنة بين نقطتين ثابتتين هو المسار الذي يأخذ عليه A ، المعرف أعلاه، قيمة قصوى أو دنيا. ويُعرف هذا تاريخياً باسم مبدأ الفعل الأقل (PLA).

A3	يقتضي مبدأ PLA أن يكون مسار جسيم يتحرك بين نقطتين ثابتتين في منطقة ذات طاقة وضع ثابتة خطاً مستقيماً. لتكن إحداثيات النقطتين الثابتتين O و P في الشكل 1 هي $(0, 0)$ و (x_0, y_0) على الترتيب، ولتكن إحداثيات نقطة الحد الفاصل التي ينتقل عندها الجسيم من المنطقة I إلى المنطقة II هي (x_1, α) . لاحظ أن x_1 ثابت، وأن الفعل يعتمد على الإحداثي α فقط. اكتب التعبير عن الفعل $A(\alpha)$. واستخدم مبدأ PLA لإيجاد العلاقة بين v_1/v_2 وهذه الإحداثيات.	1.0
----	---	-----

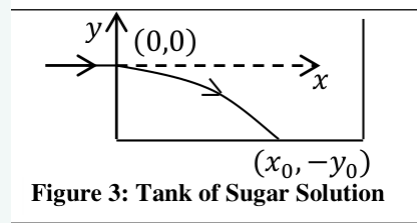
B مبدأ القيمة القصوى أو الدنيا في البصريات

ينتقل شعاع ضوئي من الوسط I إلى الوسط II، ومعاملا انكسارهما هما n_1 و n_2 على الترتيب. يفصل بين الوسطين مستقيم موازٍ للمحور x . يصنع الشعاع الضوئي زاوية i_1 مع المحور y في الوسط I وزاوية i_2 في الوسط II (انظر الشكل 2). ولإيجاد مسار الشعاع، نستخدم مبدأ آخر للقيمة القصوى أو الدنيا يُعرف بمبدأ فيرما للزمن الأقل.



0.5	B1	ينص المبدأ على أن الشعاع الضوئي يتحرك بين نقطتين ثابتتين على مسار يكون الزمن المستغرق لقطع المسافة بينهما عليه ذا قيمة قصوى أو دنيا. اشتق العلاقة بين $\sin i_1$ و $\sin i_2$ استناداً إلى مبدأ فيرما.
-----	----	--

يبين الشكل 3 رسماً تخطيطياً لمسار حزمة ليزر تسقط أفقياً على محلول سكري يتناقص فيه تركيز السكر مع الارتفاع. ونتيجة لذلك، يتناقص معامل انكسار المحلول أيضاً مع الارتفاع.



الشكل 3: حوض المحلول السكري

1.5	B2	افترض أن معامل الانكسار $n(y)$ يعتمد على y فقط. استخدم المعادلة التي حصلت عليها في B1 لإيجاد التعبير عن ميل مسار الحزمة dy/dx بدلالة معامل الانكسار n_0 عند $y = 0$ و $n(y)$.
1.2	B3	توجه حزمة الليزر أفقياً من نقطة الأصل $(0, 0)$ إلى داخل المحلول السكري على ارتفاع y_0 من قاع الحوض، كما هو مبين في الشكل 3. خذ $n(y) = n_0 - ky$ حيث n_0 و k ثابتان موجبان. أوجد تعبيراً عن x بدلالة y والكميات ذات الصلة للمسار الفعلي لحزمة الليزر.

¹ كان مانوج هاربولا (IIT-Kanpur) وفيجاي أ. سينغ (المنسق الوطني السابق للأولمبيادات العلمية) المؤلفين الرئيسيين لهذه المسألة. ونتقدم بالشكر والتقدير إلى اللجنة الأكاديمية ومجموعة التطوير الأكاديمي والمجلس الدولي على إسهاماتهم.

		يمكنك استخدام: ثابت $\int \sec \theta d\theta = \ln(\sec \theta + \tan \theta) + \text{ثابت}$ ، حيث $\sec \theta = 1/\cos \theta$ ، أو $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + \text{ثابت}$
0.8	B4	أوجد قيمة x_0 ، وهي النقطة التي تلتقي عندها الحزمة بقاع الحوض. خذ $y_0 = 10.0 \text{ cm}$ ، و $n_0 = 1.50$ ، و $k = 0.050 \text{ cm}^{-1}$ ($1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$).

C مبدأ القيمة القصوى أو الدنيا والطبيعة الموجية للمادة

نستكشف الآن الصلة بين مبدأ PLA والطبيعة الموجية لجسيم متحرك. ولهذا نفترض أن الجسيم المتحرك من O إلى P يمكنه سلوك جميع المسارات الممكنة، وسنبحث عن مسار يعتمد على التداخل البناء لموجات دي برولي.

0.6	C1	عندما يتحرك الجسيم على امتداد مساره مسافة متناهية في الصغر Δs ، اربط التغير $\Delta \varphi$ في طور موجة دي برولي الخاصة به بالتغير ΔA في الفعل وثابت بلانك.
1.2	C2	تذكر المسألة الواردة في الجزء A، التي ينتقل فيها الجسيم من O إلى P (انظر الشكل 4). ليُوضع حاجز معتم عند الحد الفاصل AB بين المنطقتين. توجد في AB فتحة صغيرة CD عرضها d ، بحيث $d \ll (x_0 - x_1)$ و $d \ll x_1$. اعتبر المسارين الطرفين OCP و ODP، بحيث يقع OCP على المسار الكلاسيكي الذي نوقش في الجزء A. أوجد فرق الطور $\Delta \varphi_{CD}$ بين المسارين حتى الرتبة الأولى.

• **A3 :**

$$A(\alpha) = mv_1\sqrt{x_1^2 + \alpha^2} + mv_2\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2},$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(y_0 - \alpha)\sqrt{x_1^2 + \alpha^2}}{\alpha\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}}.$$

• **B1 :** $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

• **B2 :** $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{n(y)^2}{n_0^2} - 1}$.

• **B3 :**

$$x(y) = \frac{n_0}{k} \ln \left[\frac{n_0 - ky + \sqrt{(n_0 - ky)^2 - n_0^2}}{n_0} \right].$$

وبصورة مكافئة، $y(x) = \frac{n_0}{k} \left[1 - \cosh \left(\frac{kx}{n_0} \right) \right]$.

• **B4 :** $x_0 = 23.86 \dots \text{ cm} \approx 24 \text{ cm}$.

• **C1 :** $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{h} \Delta A = \frac{\Delta A}{\hbar}$.

• **C2 :** $\Delta\varphi_{CD} = 0$ حتى الرتبة الأولى في d ؛ والتصحيح الرئيس تربيعي.

• **D1 :** $U_1 \approx 1.14 \times 10^3 \text{ V}$.

• **D2 :** $\beta = \frac{m_e d (v_1 - v_2) \sin \theta}{h} \approx 5.13$.

• **D3 :** $\Delta y \approx 1.6 \times 10^{-5} \text{ m} = 16 \mu\text{m}$ أسفل **P**.

• **D4 :** $I_{\min} \approx 4 \times 10^{19} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

الحل

للهسابات العددية الخاصة بالإلكترونات، استخدم

$$m_e = 9.1093837 \times 10^{-31} \text{ kg}, \quad e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J s},$$

حيث e هو مقدار شحنة الإلكترون.

A1

طاقة الوضع مستقلة عن الزمن، لذا فإن الطاقة الميكانيكية محفوظة:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + V_0.$$

ومن ثم،

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2V_0}{m}}.$$

تفترض المسألة أن الجسيم ينفذ إلى المنطقة II.

A2

تعتمد طاقة الوضع على x فقط، لذا لا توجد للقوة مركبة في اتجاه y . وبناءً على ذلك، تُحفظ كمية الحركة الموازية للحد الفاصل:

$$mv_1 \sin \theta_1 = mv_2 \sin \theta_2.$$

إذن،

$$v_2 = v_1 \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}.$$

A3

لتكن نقطة عبور الحد الفاصل هي $Q = (x_1, \alpha)$. طول القطعتين المستقيمتين هما

$$L_1 = \sqrt{x_1^2 + \alpha^2}, \quad L_2 = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}.$$

عند ثبات الطاقة الكلية، تكون سرعتان في المنطقتين ثابتتين. ومن ثم

$$A(\alpha) = m(v_1 L_1 + v_2 L_2).$$

يحقق المسار الفعلي

$$\frac{dA}{d\alpha} = m \left[v_1 \frac{\alpha}{L_1} - v_2 \frac{y_0 - \alpha}{L_2} \right] = 0.$$

ومن ثم،

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(y_0 - \alpha)L_1}{\alpha L_2} = \frac{(y_0 - \alpha)\sqrt{x_1^2 + \alpha^2}}{\alpha\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}}.$$

بما أن $\alpha/L_1 = \sin \theta_1$ و $(y_0 - \alpha)/L_2 = \sin \theta_2$ ، فإن هذا يعيد إنتاج نتيجة A2. علاوة على ذلك،

$$\frac{d^2 A}{d\alpha^2} = m \left[\frac{v_1 x_1^2}{L_1^3} + \frac{v_2 (x_0 - x_1)^2}{L_2^3} \right] > 0,$$

لذا فإن هذه القيمة الساكنة للفعل هي قيمة دنيا.

B1

لنكتب معادلة السطح الفاصل الأفقي على الصورة $y = b$ ، ولنفترض أن الشعاع يعبره عند (α, b) . سرعة الضوء في الوسط j هي c/n_j . ولذلك فإن زمن انتقاله من O إلى P هو

$$T(\alpha) = \frac{n_1}{c} \sqrt{\alpha^2 + b^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - b)^2}.$$

يتطلب مبدأ فيرما أن يكون $dT/d\alpha = 0$:

$$n_1 \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} = n_2 \frac{x_0 - \alpha}{\sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - b)^2}}.$$

لأن الزاويتين تُقاسان من العمود على السطح الفاصل، فإن النسبتين الهندسيتين هما $\sin i_1$ و $\sin i_2$. إذن

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2, \quad \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

B2

اعتبر السائل تتابعاً من طبقات أفقية رقيقة. يبين تطبيق B1 بين الطبقات المتجاورة أن

$$n(y) \sin i(y) = \text{ثابت}.$$

الشعاع الابتدائي أفقي، لذا فإن $i(0) = 90^\circ$ ، وهو ما يعطي

$$n(y) \sin i(y) = n_0.$$

لشعاع يتحرك في اتجاه تزايد x ،

$$\sin i = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}.$$

وبناءً على ذلك،

$$\frac{n(y)}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} = n_0,$$

ومن ثم

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n(y)^2}{n_0^2} - 1.$$

ينحني الشعاع نحو معامل الانكسار الأكبر، أي إلى الأسفل. وباختيار الميل السالب،

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{n(y)^2}{n_0^2} - 1}}.$$

B3

نعوض $n(y) = n_0 - ky$:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{n_0}{\sqrt{(n_0 - ky)^2 - n_0^2}}.$$

بالتكامل من نقطة الدخول $(0, 0)$ ،

$$x = -n_0 \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{(n_0 - k\eta)^2 - n_0^2}}.$$

بوضع $u = (n_0 - k\eta)/n_0$ ، يصبح ذلك

$$x = \frac{n_0}{k} \int_1^{(n_0 - ky)/n_0} \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}.$$

وباستخدام التكامل المعطى،

$$\boxed{x(y) = \frac{n_0}{k} \ln \left[\frac{n_0 - ky + \sqrt{(n_0 - ky)^2 - n_0^2}}{n_0} \right]}.$$

هذا هو الفرع الذي يحقق $x \geq 0$ و $-y_0 \leq y \leq 0$.

وبصورة مكافئة،

$$\frac{kx}{n_0} = \operatorname{arcosh} \left(1 - \frac{ky}{n_0} \right),$$

ومن ثم

$$\boxed{y(x) = \frac{n_0}{k} \left[1 - \cosh \left(\frac{kx}{n_0} \right) \right]}.$$

يمر هذا المسار بنقطة الأصل بمماس أفقي، ويزداد انحناءه نحو الأسفل.

B4

عند القاع، $y = -y_0$ ، ومن ثم،

$$x_0 = \frac{n_0}{k} \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{ky_0}{n_0} \right).$$

باستخدام السنتيمترات على نحو متسق،

$$\frac{n_0}{k} = 30.0 \text{ cm}, \quad 1 + \frac{ky_0}{n_0} = 1 + \frac{0.050(10.0)}{1.50} = \frac{4}{3}.$$

إذن

$$x_0 = 30.0 \ln \left(\frac{4 + \sqrt{7}}{3} \right) \text{ cm} = 23.86096 \dots \text{ cm}.$$

ومن ثم

$$\boxed{x_0 \approx 24 \text{ cm} = 0.24 \text{ m}}.$$

C1

طول موجة دي برولي هو

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}.$$

الطور المكاني المتراكم على مسافة متناهية في الصغر هو

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = \frac{2\pi}{h} mv \Delta s.$$

بما أن $\Delta A = mv \Delta s$ ،

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{h} \Delta A = \frac{\Delta A}{\hbar}}.$$

بالنسبة إلى الموجات المستقرة ذات الطاقة نفسها، يُلغى الطور الزمني المشترك عند مقارنة المسارات في زمن الرصد نفسه.

C2

لتكن إحداثيات C هي (x_1, α) ، فتكون إحداثيات D هي $(x_1, \alpha + d)$. حتى الرتبة الأولى،

$$OD - OC = d \sin \theta_1 + O(d^2),$$

بينما

$$DP - CP = -d \sin \theta_2 + O(d^2).$$

ومن ثم،

$$A_{ODP} - A_{OCP} = md(v_1 \sin \theta_1 - v_2 \sin \theta_2) + O(d^2).$$

لأن OCP هو المسار الكلاسيكي، فإن A2 تعطي

$$v_1 \sin \theta_1 = v_2 \sin \theta_2.$$

وباستخدام C1،

$$\Delta\varphi_{CD} = \frac{2\pi md}{h} (v_1 \sin \theta_1 - v_2 \sin \theta_2) + O(d^2).$$

إذن

$$\boxed{\Delta\varphi_{CD} = 0 \text{ حتى الرتبة الأولى في } d}.$$

يكون فرق الطور عمومًا غير صفري عند الرتبة الثانية. ويجعل سكون الفعل المسارات المتجاورة ذات طور واحد حتى الرتبة الأولى.

D1

التسريع من السكون عبر فرق جهد مقداره U_1 يعطي

$$eU_1 = \frac{1}{2}m_e v_1^2.$$

ومن ثم

$$U_1 = \frac{m_e v_1^2}{2e} = 1137.126 \dots \text{ V},$$

أو

$$\boxed{U_1 \approx 1.14 \times 10^3 \text{ V}}.$$

D2

ليكن

$$d = 215.00 \times 10^{-9} \text{ m}, \quad L = x_0 - x_1 = 0.25000 \text{ m}.$$

نتعامل مع الحزمة الساقطة المتوازية بوصفها موجة مستوية مترابطة، ونستخدم فروق أطوال المسارات في المجال البعيد حتى الرتبة الأولى في المسافة الفاصلة بين الشقين.

بما أن F يقع أعلى G، فإن فرق طور الموجة الساقطة هو

$$\varphi_F^{\text{in}} - \varphi_G^{\text{in}} = \frac{m_e v_1}{\hbar} d \sin \theta.$$

عند P، التي تقع على الامتداد المستقيم لـ OF،

$$FP - GP \simeq -d \sin \theta.$$

لذلك يسهم الانتشار في المنطقة II بمقدار

$$-\frac{m_e v_2}{\hbar} d \sin \theta.$$

بأخذ فرق الطور الكلي على أنه الطور عبر F مطروحاً منه الطور عبر G،

$$2\pi\beta = \frac{m_e d}{\hbar} (v_1 - v_2) \sin \theta.$$

إذن

$$\boxed{\beta = \frac{m_e d (v_1 - v_2) \sin \theta}{h}}.$$

عددياً،

$$\beta = 5.132650 \dots, \quad \boxed{\beta \approx 5.13}.$$

هذا هو فرق الطور غير المختزل مقيساً بالدورات؛ أما باقيه بترديد دورة واحدة فهو $0.132650 \dots$.

D3

لشقين متماثلين ذوي سعتين متساويتين، يحدث التداخل الهدّام عندما يكون فرق الطور مضاعفاً فردياً لـ π ، أو عدداً نصف صحيح من الدورات.

ليكن اتجاه الخروج نحو نقطة قريبة على الشاشة هو $\theta + \delta\theta$. يظل فرق طور الموجة الساقطة ثابتاً، بينما يتغير طور الانتشار. ويصبح فرق الطور مقيساً بالدورات

$$b(\delta\theta) = \frac{m_e d}{h} [v_1 \sin \theta - v_2 \sin(\theta + \delta\theta)].$$

باستخدام التوسع المعطى للزوايا الصغيرة،

$$b(\delta\theta) \simeq \beta - \frac{m_e v_2 d}{h} \cos \theta \delta\theta.$$

العددان نصف الصحيحان المجاوران هما 4.5 و 5.5. ويُعداهما عن β هما

$$\beta - 4.5 = 0.632650\dots, \quad 5.5 - \beta = 0.367350\dots$$

لذلك يتحقق أقرب حد أدنى عند $b = 5.5$ ، وهو ما يعطي

$$\delta\theta = -\frac{h(5.5 - \beta)}{m_e v_2 d \cos \theta}.$$

تعني الإشارة السالبة أن الحد الأدنى يقع أسفل P.

الإزاحة ذات الإشارة على الشاشة الرأسية هي

$$\delta y = L [\tan(\theta + \delta\theta) - \tan \theta] \simeq \frac{L}{\cos^2 \theta} \delta\theta.$$

إذن مقدارها هو

$$\Delta y = \frac{hL(5.5 - \beta)}{m_e v_2 d \cos^3 \theta}.$$

عدديًا،

$$\frac{hL}{m_e v_2 d \cos^3 \theta} = 44.5001\dots \mu\text{m},$$

لذا فإن النتيجة في الرتبة الرئيسة هي

$$\Delta y = (44.5001\dots)(0.3673499\dots) \mu\text{m} = 16.3471\dots \mu\text{m}.$$

ومن ثم،

$$\Delta y \approx 16 \mu\text{m}, \quad \text{أسفل P}.$$

تقريبًا الزوايا الصغيرة والمجال البعيد مناسبان هنا: $|\delta\theta| \simeq 6.34 \times 10^{-5} \text{ rad}$ ، و $d/L = 8.60 \times 10^{-7}$. وتهمل النتيجة المذكورة تصحيحات أطوال المسارات من الرتب الأعلى.

D4

مساحة المقطع العرضي العمودي على الحزمة هي

$$S = (500 \times 10^{-9})^2 = 2.50 \times 10^{-13} \text{ m}^2.$$

لمسافة طيران قدرها 2 m، وباستخدام $v \simeq 2.0 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$ ، يكون زمن العبور

$$\tau \simeq \frac{2}{2.0 \times 10^7} = 1.0 \times 10^{-7} \text{ s}.$$

إذا كانت كثافة الفيض هي I ، فإن عدد الإلكترونات الداخلة في وحدة الزمن هو IS . وفي التشغيل المستقر، يكون متوسط عدد الإلكترونات في الجهاز

$$\bar{N} = IS\tau.$$

يقابل الحد الأدنى للفيض الحالة $\bar{N} = 1$:

$$I_{\min} = \frac{1}{S\tau}.$$

ومن ثم،

$$I_{\min} \simeq \frac{1}{(2.50 \times 10^{-13})(1.0 \times 10^{-7})} = 4 \times 10^{19} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

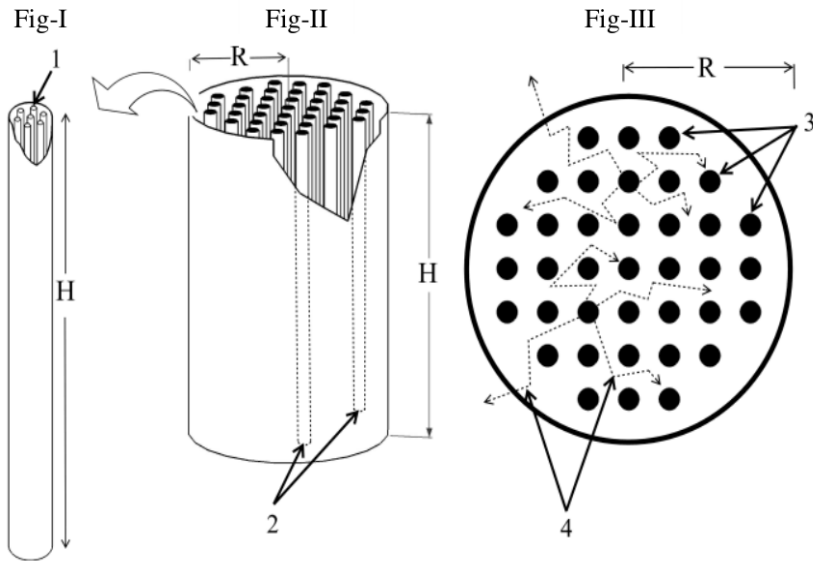
وبصورة أدق، $\tau = \ell_1/v_1 + \ell_2/v_2$ ، حيث $\ell_1 + \ell_2$ هي مسافة الطيران. لا تختلف السرعتان إلا بنسبة 0.5%، لذا فإن استبدالهما بالسرعة التقريبية المشتركة لا يؤثر في الدقة المذكورة.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: تصميم مفاعل نووي

يوجد اليورانيوم في الطبيعة على هيئة UO_2 ، ولا تتجاوز نسبة ذرات ^{235}U فيه 0.720% من ذرات اليورانيوم. يحدث الانشطار المستحث بالنيوترونات بسهولة في ^{235}U ، مع انبعاث 2-3 نيوترونات انشطار ذات طاقة حركية عالية. ويزداد احتمال هذا الانشطار إذا كانت النيوترونات التي تستحثه ذات طاقة حركية منخفضة. لذا يمكن، بخفض الطاقة الحركية لنيوترونات الانشطار، استحثاث سلسلة من الانشطارات في نوى أخرى من ^{235}U . وهذا هو أساس عمل المفاعل النووي المولّد للطاقة (NR).

يتكون المفاعل النووي النموذجي من خزان أسطواني ارتفاعه H ونصف قطره R ، مملوء بمادة تُسمّى المهدّي. وتُرتّب فيه أنابيب أسطوانية تُسمّى قنوات الوقود، في اتجاه المحور ضمن مصفوفة مربعة، وتحتوي كل قناة على حزمة من قضبان وقود أسطوانية من UO_2 الطبيعي في الحالة الصلبة، ارتفاعها H . تصطدم نيوترونات الانشطار الخارجة من إحدى قنوات الوقود بالمهدّي، فتفقد طاقة وتصل إلى قنوات الوقود المحيطة بطاقة منخفضة بما يكفي لإحداث الانشطار (الأشكال I-III). وتنتقل الحرارة المتولدة من الانشطار داخل القضيب إلى مائع تبريد يجري على امتداد طوله. سندرس في هذه المسألة بعض الأسس الفيزيائية لكل من (A) قضيب الوقود، و(B) المهدّي، و(C) المفاعل النووي ذي الشكل الأسطواني.



Schematic sketch of the Nuclear Reactor (NR)

Fig-I: Enlarged view of a fuel channel (1-Fuel Pins)

Fig-II: A view of the NR (2-Fuel Channels)

Fig-III: Top view of NR (3-Square Arrangement of Fuel Channels and 4-Typical Neutron Paths).

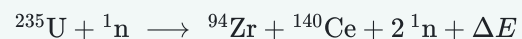
Only components relevant to the problem are shown (e.g. control rods and coolant are not shown).

A قضيب الوقود

بيانات UO_2	1. الكتلة المولية $M_w = 0.270 \text{ kg mol}^{-1}$	2. الكثافة $\rho = 1.060 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
	3. درجة الانصهار $T_m = 3.138 \times 10^3 \text{ K}$	4. الموصلية الحرارية $\lambda = 3.280 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$

0.8

A1 تأمل تفاعل الانشطار الآتي لنواة ^{235}U ساكنة بعد امتصاصها نيوترونًا طاقته الحركية مهملة.



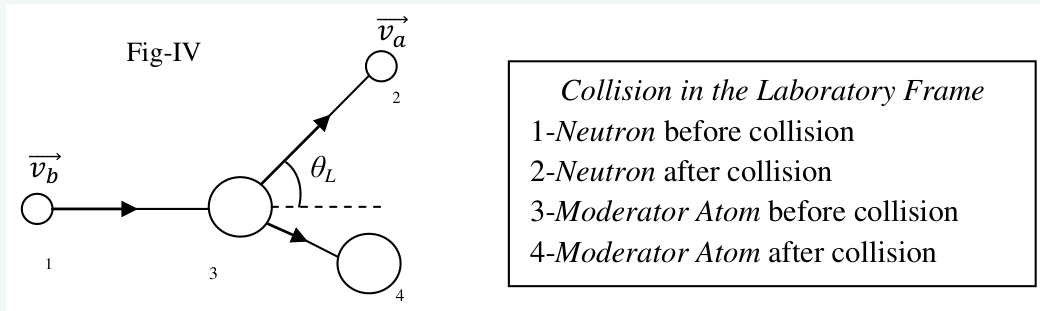
قَدّر ΔE (بوحدة MeV)، وهي طاقة الانشطار الكلية المنطلقة. الكتل النووية هي: $m(^{235}\text{U}) = 235.044 \text{ u}$

		$1 \text{ u} = 931.502 \text{ MeV } c^{-2}$ ، $m(^1\text{n}) = 1.00867 \text{ u}$ ؛ $m(^{140}\text{Ce}) = 139.905 \text{ u}$ ؛ $m(^{94}\text{Zr}) = 93.9063 \text{ u}$ أهمل عدم توازن الشحنة.
0.5	A2	قَدِّر N ، وهو عدد ذرات ^{235}U في وحدة الحجم من UO_2 الطبيعي.
1.2	A3	افترض أن كثافة فيض النيوترونات على الوقود، $\varphi = 2.000 \times 10^{18} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$ ، منتظمة. المقطع العرضي للانشطار (المساحة الفعالة للنواة المستهدفة) لنواة ^{235}U هو $\sigma_f = 5.400 \times 10^{-26} \text{ m}^2$. إذا كانت نسبة 80.00% من طاقة الانشطار متاحة على هيئة حرارة، فقدر Q (بوحدة W m^{-3})، وهو معدل توليد الحرارة في القضيب لكل وحدة حجم. $1 \text{ MeV} = 1.602 \times 10^{-13} \text{ J}$
0.5	A4	يمكن التعبير عن فرق درجة الحرارة في الحالة المستقرة بين مركز القضيب (T_c) وسطحه (T_s) بالعلاقة $T_c - T_s = k F(Q, a, \lambda)$ ، حيث $k = 1/4$ ثابت عديم الأبعاد، و a نصف قطر القضيب. أوجد $F(Q, a, \lambda)$ باستخدام التحليل البُعدي. لاحظ أن λ هي الموصلية الحرارية لـ UO_2 .
1.0	A5	درجة الحرارة المطلوبة لمائع التبريد هي $5.770 \times 10^2 \text{ K}$. قَدِّر الحد الأعلى a_u لنصف قطر القضيب a .

B المهدئ

تأمل تصادمًا مرئيًا في بُعدين بين نيوترون كتلته 1 u وذرة من المهدئ كتلتها $A \text{ u}$. تُعدّ جميع ذرات المهدئ قبل التصادم ساكنة في الإطار المرجعي للمختبر (LF). لتكن $\vec{v}_a$ و $\vec{v}_b$ سرعتي النيوترون المنجهتين قبل التصادم وبعده، على الترتيب، في إطار المختبر. ولتكن $\vec{v}_m$ سرعة إطار مركز الكتلة (CM) بالنسبة إلى إطار المختبر، و θ زاوية تشتت النيوترون في إطار مركز الكتلة. تتحرك جميع الجسيمات المشاركة في التصادمات بسرعات غير نسبية.

1.0	B1	يُمثّل التصادم في إطار المختبر برسم تخطيطي، حيث θ_L هي زاوية التشتت (الشكل IV). ارسم التصادم تخطيطيًا في إطار مركز الكتلة. بيّن سرعات الجسيمات 1 و 2 و 3 بدلالة $\vec{v}_a$ و $\vec{v}_b$ و $\vec{v}_m$. وحدّد زاوية التشتت θ .
-----	----	--



1.0	B2	أوجد v و V ، وهما مقدارًا سرعة النيوترون وذرة المهدئ في إطار مركز الكتلة بعد التصادم، بدلالة A و v_b .
1.0	B3	اشتق تعبيرًا لـ $G(\alpha, \theta) = E_a/E_b$ ، حيث E_a و E_b هما طاقتا حركة النيوترون في إطار المختبر قبل التصادم وبعده، على الترتيب، و $\alpha \equiv [(A-1)/(A+1)]^2$.
0.5	B4	افترض أن التعبير السابق ينطبق على جزيء D_2O . احسب أكبر فقد نسبي ممكن لطاقة النيوترون $f_l \equiv (E_b - E_a)/E_b$ عند استخدام المهدئ D_2O (20 u).

C المفاعل النووي

لتشغيل المفاعل النووي عند أي فيض نيوتروني ثابت ψ (حالة مستقرة)، يجب تعويض تسرّب النيوترونات بإنتاج فائض من النيوترونات داخل المفاعل. في المفاعل ذي الشكل الأسطواناني، يكون معدل التسرّب $\psi[(2.405/R)^2 + (\pi/H)^2]$ ، ومعدل الإنتاج الفائض $k_2\psi$. ويعتمد الثابتان k_1 و k_2 على خصائص مواد المفاعل النووي.

1.5	C1	تأمل مفاعلًا نوويًا له $k_1 = 1.021 \times 10^{-2} \text{ m}$ و $k_2 = 8.787 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$. مع ملاحظة أنه ينبغي، عند حجم ثابت، تقليل معدل التسرّب إلى أدنى قيمة لتحقيق كفاءة في استخدام الوقود، أوجد أبعاد المفاعل النووي في الحالة المستقرة.
1.0	C2	تُرتّب قنوات الوقود في شبكة مربعة (الشكل III)، وتبلغ المسافة بين أقرب قناتين متجاورتين 0.286 m. نصف القطر الفعّال لقناة الوقود (لو كانت مصممة) هو $3.617 \times 10^{-2} \text{ m}$. قَدِّر عدد قنوات الوقود F_n في المفاعل، وكتلة UO_2 ، M ، اللازمة لتشغيل المفاعل النووي في الحالة المستقرة.

¹ كان جوزيف أمل ناثن (BARC) وفيجاى أ. سينغ (المنسق الوطني السابق للأولبيادات العلمية) المؤلفين الرئيسيين لهذه المسألة. ونتوجّه بالشكر والتقدير إلى اللجنة الأكاديمية ومجموعة التطوير الأكاديمي والمجلس الدولي على مساهماتهم.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- **A1:** $\Delta E \simeq 208.7 \text{ MeV}$.
- **A2:** $N \simeq 1.70 \times 10^{26} \text{ m}^{-3}$.
- **A3:** $Q \simeq 4.92 \times 10^8 \text{ W m}^{-3}$.
- **A4:** $F(Q, a, \lambda) = \frac{Qa^2}{\lambda}$ ، ومن ثم $T_c - T_s = \frac{Qa^2}{4\lambda}$.
- **A5:** $a_u \simeq 8.27 \times 10^{-3} \text{ m} = 8.27 \text{ mm}$.
- **B1:** تسميات السرعات في إطار مركز الكتلة: $\vec{v}_b - \vec{v}_m$: 1، $\vec{v}_a - \vec{v}_m$: 2، $-\vec{v}_m$: 3. الزاوية بين سرعتي النيوترون الابتدائية والنهائية هي θ ؛ ويتحرك الجسيمان الخارجان في اتجاهين متعاكسين.
- **B2:** $v = \frac{A}{A+1}v_b$ ، $V = \frac{1}{A+1}v_b$.
- **B3:** $G(\alpha, \theta) = \frac{1 + \alpha + (1 - \alpha) \cos \theta}{2}$.
- **B4:** $f_{l, \max} = \frac{80}{441} \simeq 0.1814 = 18.14\%$.
- **C1:** $H = \pi \sqrt{\frac{3k_1}{k_2}} \simeq 5.865 \text{ m}$ ، $R = 2.405 \sqrt{\frac{3k_1}{2k_2}} \simeq 3.175 \text{ m}$.
- **C2:** $F_n \simeq 387$ قناة وقود؛ $M \simeq 9.89 \times 10^4 \text{ kg}$ ، أي 98.9 طنًا من UO_2 .

الحل

A1

بما أن الطاقة الحركية الابتدائية مهملة، فإن حفظ الطاقة يعطي الطاقة المنطلقة بوصفها النقص في طاقة السكون الكلية:

$$\Delta E = [m(^{235}\text{U}) + m(^1\text{n}) - m(^{94}\text{Zr}) - m(^{140}\text{Ce}) - 2m(^1\text{n})]c^2.$$

باستخدام الكتل المعطاة من دون أي تصحيح للشحنة،

$$\begin{aligned} \Delta m &= [235.044 + 1.00867 - (93.9063 + 139.905 + 2(1.00867))]u \\ &= 0.22403 \text{ u}. \end{aligned}$$

إذن،

$$\Delta E = 0.22403(931.502) \text{ MeV} = 208.684 \dots \text{ MeV},$$

أي

$$\boxed{\Delta E \simeq 208.7 \text{ MeV}}.$$

A2

تحتوي كل وحدة صيغة من UO_2 على ذرة يورانيوم واحدة. وعدد وحدات الصيغة في وحدة الحجم هو

$$n_{\text{UO}_2} = \frac{\rho}{M_w} N_A,$$

حيث ثابت أفوغادرو القياسي هو $N_A \simeq 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

نسبة ذرات اليورانيوم التي تكون من النظير ^{235}U هي 0.00720. ومن ثم

$$\begin{aligned} N &= 0.00720 \frac{\rho N_A}{M_w} \\ &= 0.00720 \frac{1.060 \times 10^4}{0.270} (6.022 \times 10^{23}) \text{ m}^{-3} \\ &= 1.7022 \dots \times 10^{26} \text{ m}^{-3}. \end{aligned}$$

وبذلك

$$\boxed{N \simeq 1.70 \times 10^{26} \text{ m}^{-3}}.$$

A3

معدل انشطار نواة مستهدفة واحدة في فيض النيوترونات المنتظم المعطى هو $\varphi\sigma_f$. لذا فإن معدل الانشطار لكل وحدة حجم هو

$$r_f = N\varphi\sigma_f.$$

عدياً،

$$\varphi\sigma_f = (2.000 \times 10^{18})(5.400 \times 10^{-26}) = 1.080 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1},$$

و

$$r_f = 1.8384 \dots \times 10^{19} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

الحرارة المودعة في كل انشطار هي

$$E_h = 0.8000 \Delta E = 0.8000(208.684 \dots)(1.602 \times 10^{-13}) \text{ J}.$$

وبالتالي،

$$\begin{aligned} Q &= N\varphi\sigma_f E_h \\ &= 4.9168 \dots \times 10^8 \text{ W m}^{-3}, \end{aligned}$$

فنحصل على

$$\boxed{Q \simeq 4.92 \times 10^8 \text{ W m}^{-3}}.$$

A4

لتكن الصيغة البُعدية لـ F هي $Q^x a^y \lambda^z$. وبالرمز إلى أبعاد القدرة والطول ودرجة الحرارة بـ P, L, Θ ،

$$[Q] = PL^{-3}, \quad [a] = L, \quad [\lambda] = PL^{-1}\Theta^{-1}.$$

إذن

$$[F] = P^{x+z} L^{-3x+y-z} \Theta^{-z}.$$

لكي تكون أبعاد F هي أبعاد درجة الحرارة،

$$x + z = 0, \quad -3x + y - z = 0, \quad -z = 1.$$

تعطي هذه المعادلات

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = -1.$$

العامل العددي العديم الأبعاد معطى بالفعل على هيئة k ، لذا

$$\boxed{F(Q, a, \lambda) = \frac{Qa^2}{\lambda}}, \quad \boxed{T_c - T_s = \frac{Qa^2}{4\lambda}}.$$

A5

عند توليد الحرارة داخلياً بانتظام، يكون المركز أشد أجزاء القضيب سخونة. ولتجنب الانصهار يجب أن يتحقق

$$T_c \leq T_m.$$

يجب أن تتدفق الحرارة من سطح القضيب إلى مائع التبريد، ولذلك لا يمكن أن تقل درجة حرارة السطح عن درجة حرارة مائع التبريد:

$$T_s \geq T_{\text{cool}}.$$

ويترتب على ذلك أن

$$\frac{Qa^2}{4\lambda} = T_c - T_s \leq T_m - T_{\text{cool}}.$$

إذن نصف القطر الحدي هو

$$a_u = \sqrt{\frac{4\lambda(T_m - T_{\text{cool}})}{Q}}.$$

وباستخدام

$$T_m - T_{\text{cool}} = 3138 - 577.0 = 2561 \text{ K},$$

نحصل على

$$a_u = \sqrt{\frac{4(3.280)(2561)}{4.9168 \times 10^8}} = 8.2667 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

وعليه

$$\boxed{a_u \simeq 8.27 \text{ mm}}.$$

يقابل هذا الحد الأعلى الحالة الحدية المثالية $T_s = T_{\text{cool}}$. وأي هبوط غير صفري في درجة الحرارة بين السطح ومائع التبريد من شأنه أن يقلل نصف القطر المسموح به.

B1

لتكن كتلة النيوترون m ، فتكون كتلة ذرة المهدئ Am . قبل التصادم، تكون ذرة المهدئ ساكنة في إطار المختبر. لذا تكون سرعة مركز الكتلة

$$\vec{v}_m = \frac{m\vec{v}_b + Am\vec{0}}{(A+1)m} = \frac{\vec{v}_b}{A+1}.$$

يطرح تحويل غاليلي إلى إطار مركز الكتلة $\vec{v}_m$ من كل سرعة في إطار المختبر. ومن ثم تكون التسميات المطلوبة

$$\boxed{\vec{u}_1 = \vec{v}_b - \vec{v}_m, \quad \vec{u}_2 = \vec{v}_a - \vec{v}_m, \quad \vec{u}_3 = -\vec{v}_m}.$$

ينبغي أن يتضمن الرسم التخطيطي السمات الآتية:

- قبل التصادم، يقترب النيوترون 1 من اليسار، متحركاً أفقياً نحو اليمين بسرعة $\vec{v}_b - \vec{v}_m$.
- تقترب ذرة المهدئ 3 من اليمين، متحركة أفقياً نحو اليسار بسرعة $-\vec{v}_m$.
- بعد التصادم، يغادر النيوترون 2 نقطة التصادم بسرعة $\vec{v}_a - \vec{v}_m$. حدد θ بين هذا السهم واتجاه النيوترون الأصلي نحو اليمين.
- تغادر ذرة المهدئ 4 في الاتجاه المعاكس تماماً لاتجاه النيوترون 2، لأن الزخم الكلي في إطار مركز الكتلة يساوي صفراً. وتكون سرعتها

$$\vec{u}_4 = -\frac{\vec{u}_2}{A}.$$

على سبيل المثال، إذا كان سهم النيوترون الخارج يشير إلى الأعلى واليمين، فإن سهم ذرة المهدئ الخارجة يشير إلى الأسفل واليسار.

B2

مقدارا السرعتين الابتدائيتين في إطار مركز الكتلة هما

$$u_{n,b} = v_b - v_m = \frac{A}{A+1}v_b, \quad u_{M,b} = v_m = \frac{1}{A+1}v_b.$$

يقتضي حفظ الزخم في إطار مركز الكتلة أن يكون الزخمان النهائيان متساويين في المقدار ومتعاكسين في الاتجاه. لذا يحقق مقداراهما

$$mv = AmV, \quad \text{ومن ثم} \quad v = AV.$$

بما أن التصادم مرّن، فإن الطاقة الحركية محفوظة:

$$\frac{1}{2}mu_{n,b}^2 + \frac{1}{2}Amu_{M,b}^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}AmV^2.$$

بعد اختزال $m/2$ ،

$$\frac{A}{A+1}v_b^2 = v^2 + AV^2.$$

بالتعويض $v = AV$ نحصل على

$$A(A+1)V^2 = \frac{A}{A+1}v_b^2.$$

ومن ثم

$$\boxed{V = \frac{v_b}{A+1}}, \quad \boxed{v = \frac{A}{A+1}v_b}.$$

يغيّر التصادم اتجاهي السرعتين، لكن مقدار سرعة كل جسيم في إطار مركز الكتلة يبقى دون تغيير.

B3

السرعة النهائية للنيوترون في إطار المختبر هي

$$\vec{v}_a = \vec{v}_m + \vec{u}_2.$$

يتجه المتجه $\vec{v}_m$ على امتداد الاتجاه الابتدائي للنيوترون، بينما يصنع $\vec{u}_2$ زاوية θ مع ذلك الاتجاه. وبالتالي،

$$v_a^2 = v_m^2 + v^2 + 2v_mv \cos \theta.$$

باستخدام النتائج السابقة،

$$\frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{1 + A^2 + 2A \cos \theta}{(A+1)^2}.$$

بما أن الطاقتين تخصّان النيوترون نفسه في إطار المختبر،

$$G(\alpha, \theta) = \frac{E_a}{E_b} = \frac{v_a^2}{v_b^2}.$$

والآن، فإن

$$\alpha = \frac{(A-1)^2}{(A+1)^2}$$

تستلزم

$$\frac{1+\alpha}{2} = \frac{A^2+1}{(A+1)^2}, \quad \frac{1-\alpha}{2} = \frac{2A}{(A+1)^2}.$$

إذن،

$$\boxed{G(\alpha, \theta) = \frac{1+\alpha+(1-\alpha)\cos \theta}{2}}.$$

وصيغة مكافئة لذلك هي

$$G(\alpha, \theta) = 1 - (1-\alpha) \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

على وجه الخصوص، يعطي التشتت الأمامي $G=1$ ، بينما يعطي التشتت الخلفي في إطار مركز الكتلة $G=\alpha$.

الفقد النسبي للطاقة هو

$$f_l = 1 - G = (1 - \alpha) \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

يبلغ أكبر قيمة له عند التشتت الخلفي في إطار مركز الكتلة، أي $\theta = \pi$. لذا

$$f_{l,\max} = 1 - \alpha = 1 - \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right)^2 = \frac{4A}{(A + 1)^2}.$$

وفقاً للتقريب الوارد في المسألة، الذي يعدّ جزيء D_2O بأكمله هدفاً كتلته 20 u ، نضع $A = 20$:

$$f_{l,\max} = \frac{4(20)}{21^2} = \frac{80}{441} \simeq 0.1814 = 18.14\%.$$

عند فيض نيوتروني مستقر غير صفري، يجب أن يتوازن الإنتاج والتسرّب:

$$k_1 \left[\frac{2.405^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} \right] \psi = k_2 \psi.$$

باختزال ψ ،

$$\frac{2.405^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} = \frac{k_2}{k_1}. \quad (1)$$

نحدّد أولاً الشكل الذي يجعل التسرّب أصغر ما يمكن عند حجم ثابت. نكتب

$$\mathcal{V} = \pi R^2 H, \quad b = 2.405,$$

بحيث

$$H = \frac{\mathcal{V}}{\pi R^2}.$$

يصبح العامل الهندسي في معدل التسرّب

$$S(R) = \frac{b^2}{R^2} + \frac{\pi^4 R^4}{\mathcal{V}^2}.$$

تتعدم مشتقته عندما

$$-\frac{2b^2}{R^3} + \frac{4\pi^4 R^3}{\mathcal{V}^2} = 0.$$

بإعادة الترتيب واستخدام $\mathcal{V} = \pi R^2 H$ ،

$$\boxed{\frac{b^2}{R^2} = 2 \frac{\pi^2}{H^2}}. \quad (2)$$

تمثّل هذه النقطة الساكنة قيمة صغرى، لأن

$$S''(R) = \frac{6b^2}{R^4} + \frac{12\pi^4 R^2}{\mathcal{V}^2} > 0.$$

إذن النسبة المثلى بين الارتفاع ونصف القطر هي

$$\frac{H}{R} = \frac{\sqrt{2}\pi}{b} = 1.84735 \dots$$

بجمع نتيجتي (1) و(2)،

$$3 \frac{\pi^2}{H^2} = \frac{k_2}{k_1},$$

فنحصل على

$$\boxed{H = \pi \sqrt{\frac{3k_1}{k_2}}}, \quad \boxed{R = b \sqrt{\frac{3k_1}{2k_2}}}.$$

عدديًا،

$$H = \pi \sqrt{\frac{3(1.021 \times 10^{-2})}{8.787 \times 10^{-3}}} \simeq \boxed{5.865 \text{ m}},$$

$$R = 2.405 \sqrt{\frac{3(1.021 \times 10^{-2})}{2(8.787 \times 10^{-3})}} \simeq \boxed{3.175 \text{ m}}.$$

C2

لتكن المسافة بين نقاط الشبكة المربعة $d = 0.286 \text{ m}$. بإهمال تصحيحات الحدود، تشغل كل قناة وقود خلية مربعة مساحة مقطعها العرضي d^2 . إذن،

$$F_n \simeq \frac{\pi R^2}{d^2}.$$

بالتعويض نحصل على

$$F_n \simeq \frac{\pi(3.17507\dots)^2}{(0.286)^2} = 387.19\dots$$

ومن ثم يكون العدد المقدّر

$$\boxed{F_n \simeq 387 \text{ وقود}}.$$

عند نصف قطر فعال للوقود المصمت $r_f = 3.617 \times 10^{-2} \text{ m}$ ، يكون حجم UO_2 في قناة واحدة $\pi r_f^2 H$. لذا تكون كتلته $\rho \pi r_f^2 H$ ، وتكون كتلة الوقود الكلية

$$M = F_n \rho \pi r_f^2 H.$$

باستخدام التقدير المستند إلى المساحة دون تقريب،

$$M \simeq (387.19\dots)(1.060 \times 10^4) \pi (3.617 \times 10^{-2})^2 (5.86547\dots) \text{ kg}$$

$$= 9.8942\dots \times 10^4 \text{ kg}.$$

إذن

$$\boxed{M \simeq 9.89 \times 10^4 \text{ kg} = 98.9 \text{ طنًا من } \text{UO}_2}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.