

IPhO 2014

理论题与解答 · 哈萨克斯坦阿斯塔纳 · 3 道理论题及完整解答

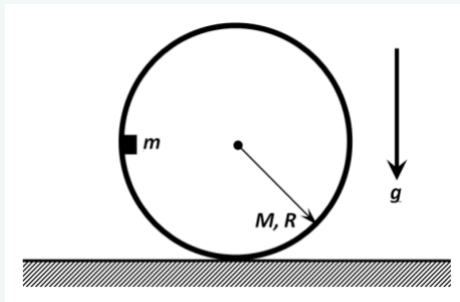
eulersolve.org/ipro/2014/

题目 1: 三个独立部分: 滚动圆筒内的小滑块、充有气体的肥皂泡、带开关的 LC 电路

本题由三个相互独立的部分组成。

部分 A (3 分)

将一个质量为 m 的小滑块小心地放在质量为 M 、半径为 R 的薄壁空心圆筒的内表面上。初始时，圆筒静止在水平面上，小滑块位于距平面高度为 R 的位置，如左图所示。求小滑块经过其轨迹最低点时，小滑块与圆筒之间的相互作用力 F 。假设小滑块与圆筒内表面之间没有摩擦，圆筒在平面上做无滑动滚动。重力加速度为 g 。



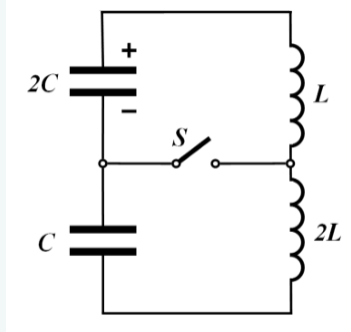
部分 B (3 分)

一个半径为 $r = 5.00 \text{ cm}$ 的肥皂泡内充有双原子理想气体，泡膜厚度为 $h = 10.0 \text{ }\mu\text{m}$ ，置于真空中。肥皂膜的表面张力系数为 $\sigma = 4.00 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ，密度为 $\rho = 1.10 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ 。1) 缓慢加热气体，使肥皂泡始终保持力学平衡，求此过程中泡内气体的摩尔热容公式，并计算其数值；2) 假设肥皂膜的热容远大于泡内气体的热容，求肥皂泡径向小振动的频率 ω 的公式，并计算其数值。假设泡内达到热平衡所需的时间远小于振动周期。

提示：拉普拉斯指出，液气界面的表面张力会使曲面内外产生压强差，其大小为 $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$ 。

部分 C (3 分)

在右图所示的电路中，开关 S 最初处于断开状态，电容为 $2C$ 的电容器带有电荷量 q_0 ，电容为 C 的电容器不带电，电感分别为 L 和 $2L$ 的两个线圈中均没有电流。电容器开始放电，在线圈中的电流达到最大值的瞬间，将开关 S 立即闭合。求此后流经开关 S 的最大电流 I_{max} 。



题目译自官方英文原文。

答案

- 部分 A:

$$F = mg \left(3 + \frac{m}{M} \right).$$

- 部分 B, 1): 用 $\mathcal{R}$ 表示普适气体常量,

$$C_{\text{mol}} = 4\mathcal{R} = 33.3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

- 部分 B, 2):

$$\omega = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho h r^2}} = 1.08 \times 10^2 \text{ rad s}^{-1}.$$

对应的普通频率为 $f = \omega/(2\pi) = 17.2 \text{ Hz}$ 。

- 部分 C:

$$I_{\text{max}} = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

解答

部分 A

设圆筒中心的水平速度为 V ，小滑块的水平速度为 v_x ，两者均以向右为正方向。圆筒的转动惯量为

$$I_{\text{cyl}} = MR^2.$$

首先求出这两个速度之间的关系。设平面对圆筒施加的水平摩擦力为 f ，其正负表示方向。小滑块施加的法向力通过圆筒中心，因此只有 f 对该中心产生力矩。

取逆时针角速度为正，无滑动滚动条件给出

$$\Omega_{\text{cyl}} = -\frac{V}{R}.$$

因此，

$$I_{\text{cyl}} \dot{\Omega}_{\text{cyl}} = Rf \implies f = -M\dot{V}.$$

对于小滑块与圆筒组成的系统，水平方向的运动方程为

$$m\dot{v}_x + M\dot{V} = f.$$

联立这些方程，并利用初始静止条件，得到

$$\boxed{mv_x + 2MV = 0}.$$

在最低点，小滑块的速度沿水平方向，记为 v 。它相对于圆筒中心的速率为

$$u = v - V.$$

于是

$$V = -\frac{m}{2M}v, \quad u = \frac{2M+m}{2M}v.$$

机械能守恒：小滑块与圆筒之间的接触无摩擦，而圆筒与平面之间瞬时静止的接触点处的静摩擦力不做功。小滑块下降的高度为 R ，因此

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + MV^2.$$

代入速度关系，得到

$$v^2 = \frac{4M}{2M+m}gR, \quad u^2 = \frac{2M+m}{M}gR.$$

为求竖直加速度，设 θ 为小滑块相对于竖直向下方向的角位移。其高度为

$$y = R - R\cos\theta.$$

在最低点， $\theta = 0$ 且 $u = R\dot{\theta}$ ，所以

$$\ddot{y} = R\dot{\theta}^2 = \frac{u^2}{R}.$$

此时圆筒对小滑块的作用力竖直向上。因此，由牛顿第二定律可得

$$F - mg = m\frac{u^2}{R}.$$

故

$$\boxed{F = mg\left(3 + \frac{m}{M}\right)}.$$

部分 B, 1)

将肥皂膜视为相对于气泡半径很薄的膜，并认为其表面张力系数恒定。肥皂膜具有**两个**液气界面。两个界面处的拉普拉斯压强跃变相加，因此在真空中达到平衡要求

$$p = \frac{4\sigma}{r}.$$

设 n 为物质的量， $\mathcal{R}$ 为普适气体常量。利用理想气体状态方程，

$$pV = n\mathcal{R}T, \quad V = \frac{4\pi r^3}{3},$$

得到

$$n\mathcal{R}T = \frac{16\pi\sigma}{3}r^2.$$

因此，在题目指定的缓慢平衡过程中，

$$T \propto r^2, \quad \frac{dV}{V} = 3 \frac{dr}{r} = \frac{3}{2} \frac{dT}{T}.$$

所以气体对外做功为

$$p dV = \frac{3}{2} \frac{pV}{T} dT = \frac{3}{2} n \mathcal{R} dT.$$

对于转动自由度已被激发而振动自由度尚未被激发的双原子理想气体，

$$dU = \frac{5}{2} n \mathcal{R} dT.$$

对气体应用热力学第一定律，得到

$$\delta Q = dU + p dV = \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \right) n \mathcal{R} dT.$$

因此，气体在此过程中的摩尔热容为

$$C_{\text{mol}} = \frac{\delta Q}{n dT} = 4 \mathcal{R}.$$

取 $\mathcal{R} = 8.31446 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ，得

$$C_{\text{mol}} = 33.3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

部分 B, 2)

膜的热容远大于气体的热容，且热平衡能迅速建立。因此，膜在振动过程中起到热库的作用，使气体的压缩与膨胀近似为**等温过程**。

设平衡半径为 r ，将瞬时半径写为

$$s = r + \xi, \quad |\xi| \ll r.$$

平衡压强为 $p_0 = 4\sigma/r$ ，由气体的等温定律可得

$$p(s) = p_0 \left(\frac{r}{s} \right)^3.$$

作用于膜上、方向向外的净压强为

$$p(s) - \frac{4\sigma}{s}.$$

展开至 ξ 的一阶，

$$p(s) \simeq p_0 \left(1 - \frac{3\xi}{r} \right), \quad \frac{4\sigma}{s} \simeq \frac{4\sigma}{r} \left(1 - \frac{\xi}{r} \right),$$

所以

$$p(s) - \frac{4\sigma}{s} \simeq -\frac{8\sigma}{r^2} \xi.$$

膜的质量保持不变，用平衡时的尺寸表示为

$$m_f = 4\pi r^2 \rho h.$$

忽略气体的惯性及耗散效应，保留至一阶的径向运动方程为

$$m_f \ddot{\xi} = 4\pi r^2 \left(-\frac{8\sigma}{r^2} \xi \right) = -32\pi \sigma \xi.$$

于是

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0, \quad \boxed{\omega^2 = \frac{32\pi\sigma}{m_f} = \frac{8\sigma}{\rho h r^2}}.$$

将给定量换算为国际单位制单位,

$$r = 5.00 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad h = 1.00 \times 10^{-5} \text{ m}, \quad \rho = 1.10 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3},$$

可得

$$\omega = \sqrt{\frac{8(4.00 \times 10^{-2})}{(1.10 \times 10^3)(1.00 \times 10^{-5})(5.00 \times 10^{-2})^2}}.$$

因此

$$\boxed{\omega = 1.08 \times 10^2 \text{ rad s}^{-1}}, \quad \boxed{f = 17.2 \text{ Hz}}.$$

部分 C

开关闭合前, 两个电感器中流过相同的电流 i 。设从放电开始至此时, 向下通过电感器的电荷量为 q , 则 $i = \dot{q}$ 。

此时, $2C$ 电容器上极板的电荷量为 $q_0 - q$, 而 C 电容器上极板的电荷量为 $-q$ 。将两个电容器的电压均定义为上极板相对于下极板的电势差,

$$U_1 = \frac{q_0 - q}{2C}, \quad U_2 = -\frac{q}{C}.$$

由基尔霍夫电压定律可得

$$3L\dot{i} = U_1 + U_2 = \frac{q_0 - 3q}{2C}.$$

电流达到最大值时, $\dot{i} = 0$ 。因此, 在开关闭合的瞬间,

$$q = \frac{q_0}{3}, \quad \boxed{U_1 = \frac{q_0}{3C}, \quad U_2 = -\frac{q_0}{3C}}.$$

现取开关闭合的时刻为 $t = 0$ 。上方的电容器与电感器构成一个 LC 回路, 下方的一对元件构成另一个 LC 回路。两者的角频率相同:

$$\Omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L(2C)}}, \quad \Omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(2L)C}},$$

所以

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}.$$

设上、下两个电感器中的电流分别为 i_1 和 i_2 , 均以向下为正方向。它们满足的方程为

$$\begin{aligned} L\dot{i}_1 &= U_1, & 2C\dot{U}_1 &= -i_1, \\ 2L\dot{i}_2 &= U_2, & C\dot{U}_2 &= -i_2. \end{aligned}$$

因此,

$$\ddot{i}_1 + \Omega^2 i_1 = 0, \quad \ddot{i}_2 + \Omega^2 i_2 = 0.$$

取开关电流的正方向为从电感器连接点指向电容器连接点。由基尔霍夫电流定律可得

$$i_S = i_1 - i_2,$$

因此

$$\ddot{i}_S + \Omega^2 i_S = 0.$$

开关闭合时电感器中的电流连续，且闭合前两者相等，所以

$$i_S(0) = 0.$$

电容器两端的电压也连续，因此

$$\dot{i}_S(0) = \frac{U_1(0)}{L} - \frac{U_2(0)}{2L} = \frac{q_0}{3LC} + \frac{q_0}{6LC} = \frac{q_0}{2LC}.$$

由此得到开关中的电流为

$$i_S(t) = \frac{\dot{i}_S(0)}{\Omega} \sin(\Omega t) = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}}\right).$$

因此，电流大小的最大值为

$$I_{\max} = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 2：范德瓦耳斯状态方程

在熟知的理想气体模型中，状态方程遵循克拉珀龙-门捷列夫定律，但忽略了以下重要的物理效应。首先，实际气体的分子具有有限的大小；其次，分子之间存在相互作用。本题各部分均考虑一摩尔水。

部分 A. 非理想气体状态方程（2 分）

考虑分子的有限大小后，气体状态方程具有如下形式

$$P(V - b) = RT, \quad (1)$$

其中， P, V, T 分别表示气体的压强、摩尔体积和温度， R 表示普适气体常量， b 是表示扣除一定体积的特征常量。

A1 估算 b ，并用分子直径 d 表示。（0.3 分）

考虑分子间的吸引力后，范德瓦耳斯提出了以下状态方程，它能很好地描述物质的气态和液态

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \quad (2)$$

其中， a 是另一个特征常量。

当温度 T 低于某一临界值 T_c 时，方程 (2) 的等温线可由图 1 中的非单调曲线 1 很好地表示，称为范德瓦耳斯等温线。同图中的曲线 2 表示相同温度下理想气体的等温线。实际等温线与范德瓦耳斯等温线的区别在于，它含有一段压强恒为 P_{LG} 的直线段 AB 。这段直线位于体积 V_L 和 V_G 之间，对应于液相（用 L 表示）与气相（用 G 表示）之间的平衡。麦克斯韦根据热力学第二定律证明，压强 P_{LG} 的选取必须使图 1 中的面积 I 和 II 相等。

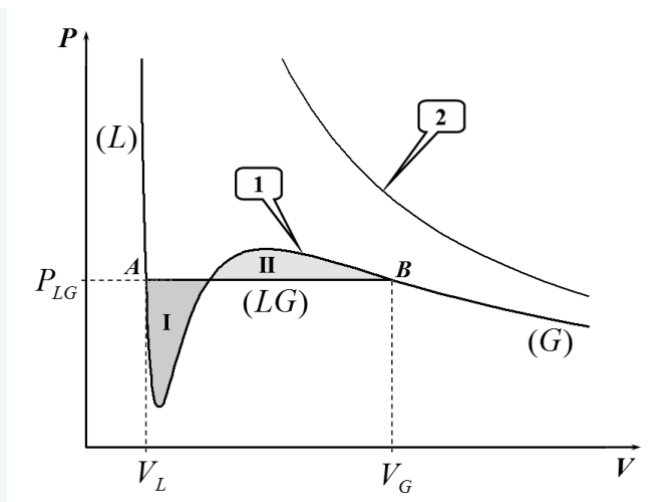


图 1. 气体/液体的范德瓦耳斯等温线（曲线 1）与理想气体的等温线（曲线 2）。

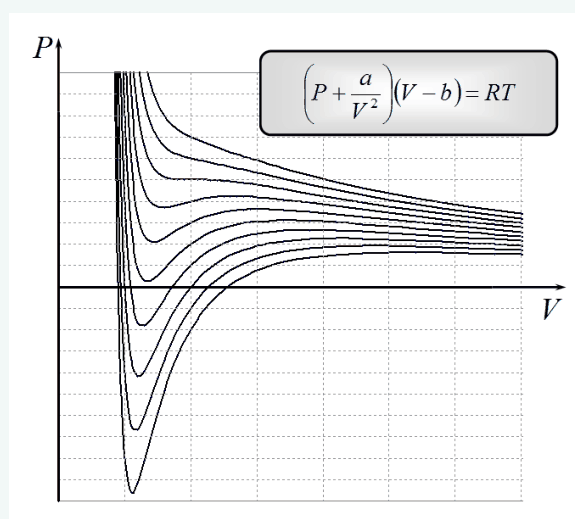


图 2. 范德瓦耳斯状态方程的若干条等温线。

随着温度升高，当温度和压强分别达到某些值 T_c 和 $P_{LG} = P_c$ 时，等温线上的直线段 AB 缩为一个点。参数 P_c 和 T_c 称为临界参数，可通过实验高精度地测量。

A2	用 T_c 和 P_c 表示范德瓦耳斯常量 a 和 b 。 (1.3 分)
A3	对于水， $T_c = 647 \text{ K}$ ， $P_c = 2.2 \cdot 10^7 \text{ Pa}$ 。计算水的 a_w 和 b_w 。 (0.2 分)
A4	估算水分子的直径 d_w 。 (0.2 分)

部分 B. 气体和液体的性质 (6 分)

本部分讨论温度为 $T = 100^\circ\text{C}$ 时水的气态和液态性质。已知此温度下的饱和蒸气压为 $p_{LG} = p_0 = 1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ，水的摩尔质量为 $\mu = 1.8 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{mole}}$ 。

气态

在描述气态水的性质时，可以合理地假设不等式 $V_G \gg b$ 成立。

B1	推导体积 V_G 的公式，并用 R, T, p_0 和 a 表示。 (0.8 分)
----	---

利用理想气体定律，可以近似估算出几乎相同的体积 V_{G0} 。

B2	计算分子间作用力引起的气体体积相对减小量 $\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}}$ ，并以百分数表示。 (0.3 分)
----	--

如果将系统体积减小到 V_G 以下，气体就开始凝结。然而，经过充分净化的气体可以保持力学亚稳态（称为过冷蒸气），直到其体积达到某个值 $V_{G\min}$ 。

恒温下过冷气体的力学稳定性条件写为： $\frac{dP}{dV} < 0$ 。

- | | |
|----|--|
| B3 | 求出并计算水蒸气在仍保持亚稳态的情况下，体积最多可压缩为原来的几分之一。换言之， $V_G/V_{G\min}$ 为多少？（0.7 分） |
|----|--|

液态

用范德瓦耳斯方程描述液态水时，可以合理地假设以下不等式成立： $P \ll a/V^2$ 。

- | | |
|----|---|
| B4 | 用 a, b, R , 和 T 表示液态水的体积 V_L 。（1.0 分） |
|----|---|

假设 $bRT \ll a$ ，求水的以下特性。如果计算出的某些数据与熟知的表列值不一致，不必惊讶！

- | | |
|----|---|
| B5 | 用 μ, a, b, R 中的某些量表示液态水的密度 ρ_L ，并计算其值。（0.5 分） |
| B6 | 用 a, b, R 表示体膨胀系数 $\alpha = \frac{1}{V_L} \frac{\Delta V_L}{\Delta T}$ ，并计算其值。（0.6 分） |
| B7 | 用 μ, a, b, R 表示水的比汽化潜热 L ，并计算其值。（1.1 分） |
| B8 | 考虑水的单分子层，估算水的表面张力系数 σ 。（1.2 分） |

部分 C. 液—气系统（3 分）

根据麦克斯韦规则（面积相等，作简单积分即可）和范德瓦耳斯状态方程，并采用部分 B 中的近似，可以证明饱和蒸气压 p_{LG} 随温度 T 的变化关系为

$$\ln p_{LG} = A + \frac{B}{T}, \quad (3)$$

其中， A 和 B 是常量，可用 a 和 b 表示为 $A = \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) - 1$ ； $B = -\frac{a}{bR}$

威廉·汤姆孙证明，饱和蒸气压取决于液面的曲率。考虑一种不润湿毛细管材料的液体（接触角为 180° ）。将毛细管浸入液体时，由于表面张力的作用，管内液面会下降到某一高度（见图 3）。

- | | |
|----|--|
| C1 | 求弯曲液面上方饱和蒸气压的微小变化 Δp_T ，并用蒸气密度 ρ_s 、液体密度 ρ_L 、表面张力系数 σ 和液面曲率半径 r 表示。（1.3 分） |
|----|--|

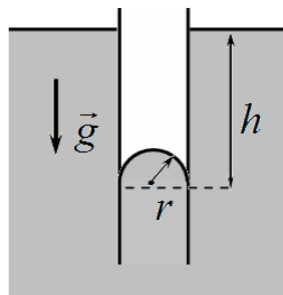


图 3. 浸入不润湿其材料的液体中的毛细管

B3 中讨论的亚稳态广泛用于实际实验装置，例如用于记录基本粒子的云室。它们也出现在自然现象中，例如晨露的形成。过冷蒸气会通过形成液滴而凝结。很小的液滴会迅速蒸发，而足够大的液滴则能够继续生长。

- | | |
|----|--|
| C2 | 假设傍晚温度为 $t_e = 20^\circ\text{C}$ 时，空气中的水蒸气处于饱和状态，但到清晨环境温度降低了一个较小的量 $\Delta t = 5.0^\circ\text{C}$ 。假设蒸气压保持不变，估算能够生长的液滴的最小半径。使用水的表面张力系数的表 |
|----|--|

答案

数值计算采用 $R = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ 、 $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ，部分 B 中取 $T = 373 \text{ K}$ 。各体积均为摩尔体积。以下分子尺度的估算采用标准硬球排除体积约定；其对模型的依赖性在 A1、A4 和 B8 的解答中讨论。

- A1: $b \sim N_A d^3$ ；硬球估算给出

$$b = \frac{2\pi}{3} N_A d^3.$$

- A2:

$$a = \frac{27R^2 T_c^2}{64P_c}, \quad b = \frac{RT_c}{8P_c}.$$

- A3:

$$a_w \simeq 0.55 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}, \quad b_w \simeq 3.1 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

- A4:

$$d_w = \left(\frac{3b_w}{2\pi N_A} \right)^{1/3} \simeq 2.9 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

- B1:

$$V_G = \frac{RT + \sqrt{R^2 T^2 - 4ap_0}}{2p_0} \simeq 3.08 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

- B2:

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2 T^2}}}{2} \simeq 0.58\%.$$

- B3:

$$V_{G\min} = \frac{2a}{RT} \simeq 3.6 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}, \quad \frac{V_G}{V_{G\min}} \simeq 86.$$

- B4:

$$V_L = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4abRT}}{2RT} = \frac{2b}{1 + \sqrt{1 - \frac{4bRT}{a}}}.$$

- B5:

$$\rho_L \simeq \frac{\mu}{b} \simeq 5.9 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}.$$

- B6:

$$\alpha \simeq \frac{bR}{a} \simeq 4.6 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}.$$

- B7:

$$L \simeq \frac{a}{\mu b} \simeq 1.0 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}.$$

- B8: 在单分子层估算中, 假设相对于体相缺少一半的内聚能贡献, 可得

$$\sigma \sim \frac{1}{2} \rho_L L d_w = \frac{a d_w}{2 b^2} \simeq 8.6 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}.$$

其可靠精度仅为数量级估算, 即 $\sigma \sim 10^{-1} \text{ N m}^{-1}$ 。

- C1: 对于图示的凸液面,

$$\Delta p_T = \frac{2\sigma\rho_s}{r(\rho_L - \rho_s)} \simeq \frac{2\sigma\rho_s}{r\rho_L} > 0.$$

- C2: 取 $T_e = 293 \text{ K}$ 和 $\Delta T = 5.0 \text{ K}$,

$$r_{\min} \simeq \frac{2\sigma T_e}{\rho_L L \Delta T} = \frac{2\sigma b^2 T_e}{a \Delta T} \simeq 1.4 \times 10^{-8} \text{ m} = 14 \text{ nm}.$$

半径大于此临界半径的液滴能够生长。

解答

A1. 分子大小与排除体积

将分子视为直径为 d 的硬球。一个分子的中心不能进入以另一个分子的中心为球心、半径为 d 的球内。因此, 一对分子对应的排除体积为

$$v_{\text{ex}} = \frac{4\pi d^3}{3}.$$

在标准的稀薄硬球体系排除体积计算中, 每对分子只计数一次, 因此每个分子的排除体积参数为 $v_{\text{ex}}/2$ 。对于一摩尔,

$$b = \frac{1}{2} N_A v_{\text{ex}} = \frac{2\pi}{3} N_A d^3.$$

因此, 通常的范德瓦耳斯参数 b 是球形分子几何体积总和的四倍。不论这一几何系数具体为何, 所求的尺度关系都是 $b \sim N_A d^3$ 。

A2. 临界点条件

将状态方程写成

$$P(V, T) = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}.$$

在临界点, 低于临界温度的等温线上的两个极值点合并为一个具有水平切线的拐点。因此

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T_c, V_c} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_{T_c, V_c} = 0.$$

由这些条件得到

$$\frac{RT_c}{(V_c - b)^2} = \frac{2a}{V_c^3}, \quad \frac{RT_c}{(V_c - b)^3} = \frac{3a}{V_c^4}.$$

将第二个方程除以第一个方程,

$$\frac{1}{V_c - b} = \frac{3}{2V_c},$$

所以

$$V_c = 3b.$$

代入一阶导数条件和状态方程, 得到

$$RT_c = \frac{8a}{27b}, \quad P_c = \frac{a}{27b^2}.$$

解出这两个常量,

$$b = \frac{RT_c}{8P_c}, \quad a = \frac{27R^2T_c^2}{64P_c}.$$

A3. 水的常量

利用给定的临界参数,

$$b_w = \frac{8.31(647)}{8(2.2 \times 10^7)} = 3.055 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1},$$

以及

$$a_w = \frac{27(8.31)^2(647)^2}{64(2.2 \times 10^7)} = 0.5543 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}.$$

保留两位有效数字,

$$a_w \simeq 0.55 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}, \quad b_w \simeq 3.1 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

后续计算保留未舍入的数值。

A4. 分子直径

由 A1,

$$d_w = \left(\frac{3b_w}{2\pi N_A} \right)^{1/3}.$$

因此,

$$d_w \simeq 2.9 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.29 \text{ nm}.$$

这是硬球模型中的有效直径。

B1. 饱和蒸气的体积

采用题目指定的近似 $V_G \gg b$:

$$\left(p_0 + \frac{a}{V_G^2} \right) V_G = RT.$$

两边乘以 V_G , 得到

$$p_0 V_G^2 - RT V_G + a = 0.$$

气态对应于较大的根; 当 $a \rightarrow 0$ 时, 该根趋于 RT/p_0 :

$$V_G = \frac{RT + \sqrt{R^2 T^2 - 4ap_0}}{2p_0}.$$

在 $T = 373 \text{ K}$ 时,

$$V_G = 0.0308164 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1} \simeq 3.08 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

对于较弱的吸引作用, 将平方根展开还可得到

$$V_G \simeq \frac{RT}{p_0} - \frac{a}{RT}.$$

B2. 体积的相对减小量

理想气体的体积为

$$V_{G0} = \frac{RT}{p_0} = 0.0309963 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

利用 B1,

$$\frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2 T^2}} \right).$$

数值上,

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = 5.803 \times 10^{-3},$$

所以

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} \simeq 0.58\%.$$

在一阶近似下, 该比值为 $ap_0/(R^2 T^2)$ 。

B3. 亚稳态压缩的极限

在相同的气体近似下,

$$P(V) = \frac{RT}{V} - \frac{a}{V^2}.$$

力学稳定性要求

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{RT}{V^2} + \frac{2a}{V^3} = \frac{2a - RTV}{V^3} < 0.$$

因此, 当满足以下条件时, 气体对于微小体积扰动保持力学稳定:

$$V > \frac{2a}{RT}.$$

故处于临界稳定状态的极限体积为

$$V_{G \min} = \frac{2a}{RT} = 3.58 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

压缩倍数为

$$\frac{V_G}{V_{G\min}} = \frac{RT}{2a} \frac{RT + \sqrt{R^2T^2 - 4ap_0}}{2p_0} \simeq 86.2.$$

因此

$$\boxed{\frac{V_G}{V_{G\min}} \simeq 86.}$$

在此极限体积处, $V_{G\min}/b \simeq 12$, 所以该结果是在题目指定的忽略 b 的近似下得到的估算。

B4. 液体体积

对于液体, 相对于 a/V_L^2 忽略 P :

$$\frac{a}{V_L^2}(V_L - b) = RT.$$

因此

$$RTV_L^2 - aV_L + ab = 0.$$

液态对应于体积较小的根; 当 $T \rightarrow 0$ 时, 该根趋于 b :

$$\boxed{V_L = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4abRT}}{2RT} = \frac{2b}{1 + \sqrt{1 - 4bRT/a}}.}$$

在 373 K 时, 此式给出的近似值为

$$V_L = 3.91 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

对于其余各问, 引入题目规定的小参数

$$\varepsilon = \frac{bRT}{a} \ll 1.$$

将液态对应的根展开,

$$\boxed{V_L = b \left(1 + \frac{bRT}{a} + O(\varepsilon^2) \right).}$$

对于给定的水的参数, $\varepsilon \simeq 0.17$, 所以下面的最低阶结果都是近似值。

B5. 液体密度

在最低阶近似下, $V_L \simeq b$ 。由于一摩尔的质量为 μ ,

$$\boxed{\rho_L = \frac{\mu}{V_L} \simeq \frac{\mu}{b}.}$$

数值上,

$$\rho_L \simeq \frac{1.8 \times 10^{-2}}{3.055 \times 10^{-5}} = \boxed{5.9 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}.}$$

这是指定近似所预测的密度。

B6. 热膨胀系数

保留 B4 中第一个与温度有关的项,

$$V_L \simeq b + \frac{b^2 RT}{a}.$$

因此，在所采用的近似下，固定外压时有

$$\frac{\partial V_L}{\partial T} \simeq \frac{b^2 R}{a}.$$

在分母中采用 $V_L \simeq b$,

$$\alpha = \frac{1}{V_L} \left(\frac{\partial V_L}{\partial T} \right)_P \simeq \frac{bR}{a}.$$

数值上,

$$\alpha \simeq 4.6 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}.$$

B7. 比汽化潜热

热力学恒等式

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P$$

将内能与状态方程联系起来。对于范德瓦耳斯流体,

$$T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P = \frac{RT}{V-b} - \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) = \frac{a}{V^2}.$$

因此，摩尔内能具有如下形式

$$U(T, V) = U_0(T) - \frac{a}{V}.$$

在相同温度下，汽化引起的内能增加量为

$$U_G - U_L = a \left(\frac{1}{V_L} - \frac{1}{V_G} \right).$$

恒压汽化还需要做膨胀功，因此每摩尔所吸收的热量为

$$\mu L = a \left(\frac{1}{V_L} - \frac{1}{V_G} \right) + p_0(V_G - V_L).$$

由于 $V_G \gg V_L \simeq b$, 且 $RT \ll a/b$, 主导贡献为 a/b 。因此

$$L \simeq \frac{a}{\mu b}.$$

数值上,

$$L \simeq 1.0 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}.$$

忽略热修正是自治的：保留 $V_L \simeq b(1 + bRT/a)$ 得到 $a/V_L \simeq a/b - RT$, 其中的 $-RT$ 修正与膨胀功的主导项 $p_0 V_G \simeq RT$ 相互抵消。

B8. 由单分子层估算表面张力系数

表面张力系数等于单位面积的表面自由能。为从能量角度进行估算，忽略表面熵的贡献，并使用 B7 中求出的内聚能。

体相中每个分子的内聚能近似为

$$E_{\text{coh}} \simeq \frac{\mu L}{N_A} \simeq \frac{a}{b N_A}.$$

靠近自由表面的分子在蒸气一侧缺少相邻分子。在一个简单估算中，分配给它的内聚结合能约减少一半，因此表面过剩能的量级为 $E_{\text{coh}}/2$ 。

面积为 S 、厚度为 d_w 的表面层大约含有

$$N_{\text{layer}} \simeq \frac{\rho_L S d_w}{\mu} N_A$$

个分子。因此，其过剩能为

$$E_{\text{surface}} \sim \frac{1}{2} E_{\text{coh}} N_{\text{layer}} = \frac{1}{2} \rho_L L d_w S.$$

令其等于 σS ,

$$\sigma \sim \frac{1}{2} \rho_L L d_w = \frac{a d_w}{2 b^2}.$$

利用上述估算，

$$\sigma \sim 8.6 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}.$$

单分子层模型确定了量级 $\sigma \sim 10^{-1} \text{ N m}^{-1}$ ；其数值系数取决于假设的分子排列方式和缺失的相互作用。

C1. 弯曲液面上方的饱和蒸气压

设 p_s 为平坦液面上方的饱和蒸气压。不润湿的弯月面向蒸气一侧凸起，位于该平坦液面下方深度 h 处。

对于较小的高度差，流体静力平衡给出弯月面所在高度处的压强：

$$p_\ell = p_s + \rho_L g h, \quad p_v = p_s + \rho_s g h.$$

球形弯月面满足拉普拉斯压强关系

$$p_\ell - p_v = \frac{2\sigma}{r}.$$

因此，

$$(\rho_L - \rho_s) g h = \frac{2\sigma}{r}.$$

平衡蒸气压的变化为

$$\Delta p_T = p_v - p_s = \rho_s g h.$$

消去 h ,

$$\Delta p_T = \frac{2\sigma\rho_s}{r(\rho_L - \rho_s)} \simeq \frac{2\sigma\rho_s}{r\rho_L}.$$

最后一步使用了 $\rho_s \ll \rho_L$ 。变化量为正：凸液面所需的平衡蒸气压高于平坦液面的平衡蒸气压。

C2. 能够生长的液滴的最小半径

设 $p_s(T)$ 表示平坦液面上方的饱和蒸气压。最初，实际蒸气压为

$$p = p_s(T_e), \quad T_e = 293 \text{ K}.$$

温度降低 $\Delta T = 5.0 \text{ K}$ 后，实际压强保持不变，而平坦液面的饱和蒸气压下降。在一阶近似下，

$$\Delta p_{\text{cool}} = p_s(T_e) - p_s(T_e - \Delta T) \simeq \left. \frac{dp_s}{dT} \right|_{T_e} \Delta T.$$

由方程 (3),

$$\frac{1}{p_s} \frac{dp_s}{dT} = -\frac{B}{T^2} = \frac{a}{bRT^2}.$$

因此

$$\Delta p_{\text{cool}} \simeq p_s \frac{a\Delta T}{bRT_e^2}.$$

如果环境蒸气压超过液滴由其曲率决定的平衡蒸气压, 液滴便能够生长。在临界半径处, 这两个压强变化量相等:

$$p_s \frac{a\Delta T}{bRT_e^2} = \frac{2\sigma\rho_s}{\rho_L r_{\min}}.$$

将稀薄蒸气视为理想气体,

$$\rho_s \simeq \frac{\mu p_s}{RT_e}.$$

代入并约去 p_s ,

$$r_{\min} \simeq \frac{2\sigma\mu bT_e}{\rho_L a\Delta T}.$$

利用部分 B 的结果 $\rho_L \simeq \mu/b$ 和 $L \simeq a/(\mu b)$,

$$r_{\min} \simeq \frac{2\sigma b^2 T_e}{a\Delta T} = \frac{2\sigma T_e}{\rho_L L \Delta T}.$$

使用给定的表面张力系数表列值,

$$r_{\min} \simeq \frac{2(7.3 \times 10^{-2})(3.055 \times 10^{-5})^2(293)}{(0.5543)(5.0)} = \boxed{1.4 \times 10^{-8} \text{ m} \approx 14 \text{ nm.}}$$

在此半径处, 液滴处于不稳定平衡。较大的液滴能够生长; 较小的液滴则倾向于蒸发。

解答已与官方解答核对。

题目 3: 气体放电的最简单模型

电流通过气体的现象称为气体放电。气体放电有许多类型, 包括照明灯中的辉光放电、焊接中的电弧放电, 以及众所周知的以闪电形式发生在云层与大地之间的火花放电。

部分 A. 非自持气体放电 (4.8分)

本题这一部分研究所谓的非自持气体放电。要维持这种放电, 需要外部电离源持续工作, 在整个气体体积内均匀地产生单电离离子与自由电子, 每单位体积、单位时间产生的离子—电子对数为 Z_{ext} 。

当开启外部电离源时, 电子和离子的数目开始增加。复合过程阻止了气体中电子和离子数密度的无限增大: 在这一过程中, 自由电子与离子复合, 形成中性原子。气体中每单位体积、单位时间发生的复合次数 Z_{rec} 为

$$Z_{\text{rec}} = r n_e n_i,$$

其中, r 是称为复合系数的常量, n_e, n_i 分别表示电子和离子的数密度。

假设在 $t = 0$ 时开启外部电离源, 且气体中电子和离子的初始数密度均为零。此时, 电子数密度 $n_e(t)$ 随时间 t 的变化如下:

$$n_e(t) = n_0 + a \tanh bt,$$

其中, n_0, a 和 b 为常量, $\tanh x$ 表示双曲正切函数。

A1 求 n_0, a, b , 并用 Z_{ext} 和 r 表示。 (1.8分)

假设有两个可用的外部电离源。仅开启第一个时, 气体中的电子数密度达到平衡值 $n_{e1} = 12 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ 。仅开启第二个外部电离源时, 电子数密度达到平衡值 $n_{e2} = 16 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ 。

A2 求两个外部电离源同时开启时, 平衡状态下的电子数密度 n_e 。 (0.6 分)

注意! 以下假设外部电离源已开启足够长的时间, 使所有过程均已达到稳态, 不再随时间变化。完全忽略载流子产生的电场。

假设气体充满两块平行导电极板之间的管内, 两极板的面积均为 S , 间距为 $L \ll \sqrt{S}$ 。在两极板之间施加电压 U , 从而在其间产生电场。假设两种载流子的数密度沿管长方向均保持近似不变。

假设电子 (以下标 e 表示) 和离子 (以下标 i 表示) 在电场强度 E 的作用下获得大小相同的定向运动速率 v , 其表达式为

$$v = \beta E,$$

其中, β 是称为电荷迁移率的常量。

A3 用 $U, \beta, L, S, Z_{\text{ext}}, r$ 和元电荷 e 表示管内的电流 I 。 (1.7 分)

A4 求所加电压足够小时气体的电阻率 ρ_{gas} , 并用 $\beta, L, Z_{\text{ext}}, r$ 和 e 表示。 (0.7 分)

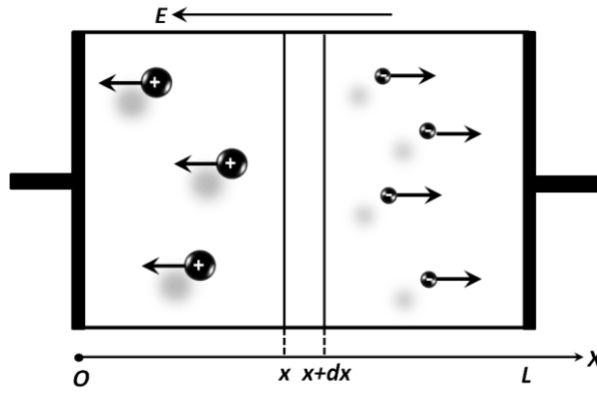
部分 B. 自持气体放电 (5.2 分)

本题这一部分考虑自持气体放电的起始, 以说明管内电流如何能够自行维持。

注意! 以下假设外部电离源继续以相同的 Z_{ext} 速率工作, 忽略载流子产生的电场, 从而管内电场沿管长方向均匀, 并且完全忽略复合过程。

对于自持气体放电, 有两个重要过程在前面尚未考虑。第一个过程是二次电子发射, 第二个过程是电子雪崩的形成。当离子撞击称为阴极的负电极时, 会从中击出电子, 使其向称为阳极的正电极运动, 这就发生了二次电子发射。单位时间内被击出的电子数 $\dot{N}_e$ 与单位时间内撞击阴极的离子数 $\dot{N}_i$ 之比称为二次电子发射系数, $\gamma = \dot{N}_e / \dot{N}_i$ 。电子雪崩的形成可解释如下。电场加速自由电子, 使其获得足够的动能, 在碰撞气体原子时将其电离。结果, 向阳极运动的自由电子数显著增加。这一过程用汤森系数 α 描述, 它表征 N_e 个运动电子通过距离 dl 后电子数的增加量 dN_e , 即

$$\frac{dN_e}{dl} = \alpha N_e.$$



气体管任意横截面上的总电流 I 由离子电流 $I_i(x)$ 和电子电流 $I_e(x)$ 组成。在稳态下，这两种电流均取决于上图所示的坐标 x 。电子电流 $I_e(x)$ 沿 x 轴按下式变化：

$$I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2,$$

其中， A_1, A_2, C_1 为常量。

B1 求 A_1, A_2 ，并用 $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S$ 表示。（2 分）

离子电流 $I_i(x)$ 沿 x 轴按下式变化：

$$I_i(x) = C_2 + B_1 e^{B_2 x},$$

其中， B_1, B_2, C_2 为常量。

B2 求 B_1, B_2 ，并用 $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S, C_1$ 表示。（0.6 分）

B3 写出 $I_i(x)$ 在 $x = L$ 处满足的条件。（0.3 分）

B4 写出 $I_i(x)$ 和 $I_e(x)$ 在 $x = 0$ 处满足的条件。（0.6 分）

B5 求总电流 I ，并用 $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$ 表示。假设总电流保持有限。（1.2 分）

设汤森系数 α 为常量。当管长大于某个临界值，即 $L > L_{\text{cr}}$ 时，可以关闭外部电离源，而放电成为自持放电。

B6 求 L_{cr} ，并用 $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$ 表示。（0.5 分）

题目译自官方英文原文。

答案

下文中的电流均表示大小，且 $U \geq 0$ 。

• A1

$$n_0 = 0, \quad a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}, \quad b = \sqrt{r Z_{\text{ext}}}.$$

• A2

$$n_e = 2.0 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3} = 2.0 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}.$$

- A3, 采用题设的均匀数密度收集近似:

$$I = \frac{e\beta SU}{rL} \left[\sqrt{\frac{\beta^2 U^2}{L^4} + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{\beta U}{L^2} \right].$$

- A4

$$\rho_{\text{gas}} = \frac{1}{2e\beta} \sqrt{\frac{r}{Z_{\text{ext}}}}.$$

- B1

$$A_1 = \alpha, \quad A_2 = -\frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}.$$

- B2

$$B_1 = -C_1, \quad B_2 = \alpha.$$

- B3

$$I_i(L) = 0.$$

- B4

$$I_e(0) = \gamma I_i(0).$$

- B5

$$I = \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha} \frac{(1 + \gamma)(e^{\alpha L} - 1)}{1 - \gamma(e^{\alpha L} - 1)}.$$

当 $Z_{\text{ext}} > 0$ 时, 物理上有意义的有限稳态解要求

$$\gamma(e^{\alpha L} - 1) < 1.$$

- B6, 对于 $\alpha > 0, \gamma > 0$:

$$L_{\text{cr}} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right).$$

解答

A1. 载流子数密度的增长

每次电离产生一个电子和一个离子, 而每次复合各消耗一个。由于它们的初始数密度相等, 之后也始终相等:

$$n_e(t) = n_i(t) = n(t).$$

因此, 单位体积内的粒子数平衡方程为

$$\frac{dn}{dt} = Z_{\text{ext}} - rn^2, \quad n(0) = 0.$$

题给表达式给出 $n(0) = n_0$, 所以

$$n_0 = 0.$$

将 $n = a \tanh(bt)$ 代入平衡方程，得

$$ab[1 - \tanh^2(bt)] = Z_{\text{ext}} - ra^2 \tanh^2(bt).$$

比较常数项和 $\tanh^2(bt)$ 的系数，得到

$$ab = Z_{\text{ext}}, \quad ab = ra^2.$$

取 a, b 为正值，得

$$a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}, \quad b = \sqrt{rZ_{\text{ext}}}.$$

于是

$$n_e(t) = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}} \tanh(\sqrt{rZ_{\text{ext}}} t).$$

其初始斜率为 Z_{ext} ，极限数密度为 $\sqrt{Z_{\text{ext}}/r}$ ，符合产生与复合相平衡的要求。同时改变 a 和 b 的符号，描述的仍是同一个函数。

A2. 两个电离源

设两个电离源各自的产生率为 Z_1 和 Z_2 。在平衡状态下，

$$Z_1 = rn_{e1}^2, \quad Z_2 = rn_{e2}^2.$$

两个电离源同时工作时，各自独立的产生率相加：

$$rn_e^2 = Z_1 + Z_2 = r(n_{e1}^2 + n_{e2}^2).$$

因此，

$$n_e = \sqrt{n_{e1}^2 + n_{e2}^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}.$$

所以，

$$n_e = 2.0 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3} = 2.0 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}.$$

数密度本身不能直接相加，因为复合率与数密度的平方成正比。

A3. 考虑复合与收集时的稳态电流

忽略边缘效应和载流子产生的电场，得

$$E = \frac{U}{L}, \quad v = \frac{\beta U}{L}.$$

对体积 SL 内的气体采用题设的均匀数密度近似。在时间 dt 内，一个收集电极收走 $n_e Sv dt$ 个电子；另一电极收走 $n_i Sv dt$ 个离子。稳态下的粒子数平衡方程为

$$\begin{aligned} Z_{\text{ext}}SL - rn_en_iSL - n_eSv &= 0, \\ Z_{\text{ext}}SL - rn_en_iSL - n_iSv &= 0. \end{aligned}$$

当 $v > 0$ 时，两式相减得到 $n_e = n_i = n$ 。因此

$$rn^2 + \frac{v}{L}n - Z_{\text{ext}} = 0.$$

只有非负根具有物理意义：

$$n = \frac{1}{2r} \left[\sqrt{\left(\frac{v}{L}\right)^2 + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{v}{L} \right].$$

虽然电子和离子的运动方向相反，但它们的电荷符号也相反。因此，按规定的电流方向计算，两者的电流相加：

$$I = eSn_e v + eSn_i v = 2eSnv.$$

代入可得

$$I = \frac{eSv}{r} \left[\sqrt{\left(\frac{v}{L}\right)^2 + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{v}{L} \right].$$

利用 $v = \beta U/L$ ，得

$$I = \frac{e\beta SU}{rL} \left[\sqrt{\frac{\beta^2 U^2}{L^4} + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{\beta U}{L^2} \right].$$

这是严格按空间均匀的收集模型计算得到的结果。确切地说，密度不可能直到极板处都保持均匀：电子密度在阴极处必须为零，离子密度在阳极处必须为零。因此，只有当这些载流子耗尽层的厚度远小于 L 时（例如 A4 的小电压情形），该公式才可靠；在高电压下，它趋于 $2eZ_{\text{ext}}SL$ ，是实际饱和电流 $eZ_{\text{ext}}SL$ 的两倍。

A4. 小电压下的电阻率

当电压足够小，即

$$\frac{\beta U}{L^2} \ll \sqrt{rZ_{\text{ext}}},$$

收集过程对产生与复合平衡的扰动很小。取最低阶近似，得

$$n \simeq \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}.$$

因此，电流与电压成正比：

$$I \simeq 2e\beta \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}} \frac{S}{L} U.$$

将其与

$$I = \frac{S}{\rho_{\text{gas}} L} U$$

比较，得到

$$\rho_{\text{gas}} = \frac{1}{2e\beta} \sqrt{\frac{r}{Z_{\text{ext}}}}.$$

长度 L 被约去。各物理量采用国际单位制单位时，结果的单位为 $\Omega \text{ m}$ 。

B1. 电子电流方程

在部分 B 中，忽略复合过程。取 I_e 和 I_i 为非负的电流大小，因此

$$I = I_e(x) + I_i(x).$$

考虑厚度为 dx 的薄层。外部电离源在该薄层内单位时间产生的电子数为

$$Z_{\text{ext}} S dx$$

个。雪崩倍增在单位时间额外产生的电子数为

$$\alpha \frac{I_e(x)}{e} dx$$

个。新产生的电子对流出薄层的电子电流的贡献，等于其产生率乘以 e 。因此，

$$I_e(x + dx) - I_e(x) = [eSZ_{\text{ext}} + \alpha I_e(x)]dx.$$

写成微分形式，得

$$\frac{dI_e}{dx} = \alpha I_e + eSZ_{\text{ext}}.$$

当 $\alpha > 0$ 为常量时，其通解为

$$I_e(x) = C_1 e^{\alpha x} - \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}.$$

与题给表达式比较，得到

$$\boxed{A_1 = \alpha, \quad A_2 = -\frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}.}$$

B2. 离子电流方程

每次电离也产生一个离子。离子向 x 减小的方向运动，因此从薄层左侧面流出的离子电流大于从右侧面流入的离子电流：

$$I_i(x) - I_i(x + dx) = [eSZ_{\text{ext}} + \alpha I_e(x)]dx.$$

于是

$$\frac{dI_i}{dx} = -eSZ_{\text{ext}} - \alpha I_e(x).$$

利用电子电流的解，得

$$\frac{dI_i}{dx} = -\alpha C_1 e^{\alpha x},$$

积分得到

$$I_i(x) = C_2 - C_1 e^{\alpha x}.$$

因此，

$$\boxed{B_1 = -C_1, \quad B_2 = \alpha.}$$

这两个微分方程还表明

$$\frac{d}{dx}(I_e + I_i) = 0,$$

这体现了稳态下的电荷守恒。

B3. 阳极处的边界条件

阳极位于 $x = L$ 处。没有离子从该电极进入气体，而气体内部产生的离子则漂移离开阳极。因此，

$$\boxed{I_i(L) = 0.}$$

等价地，

$$C_2 = C_1 e^{\alpha L}.$$

B4. 阴极处的边界条件

在 $x = 0$ 处，离子的到达率为 $I_i(0)/e$ 。每个到达的离子平均释放 γ 个电子。因此

$$\frac{I_e(0)}{e} = \gamma \frac{I_i(0)}{e},$$

即

$$I_e(0) = \gamma I_i(0).$$

B5. 稳态总电流

为简便起见，定义

$$K = \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}, \quad T = e^{\alpha L}.$$

则

$$I_e(x) = C_1 e^{\alpha x} - K, \quad I_i(x) = C_2 - C_1 e^{\alpha x}.$$

阳极处的条件给出

$$C_2 = C_1 T.$$

阴极处的条件变为

$$C_1 - K = \gamma(C_2 - C_1) = \gamma C_1(T - 1).$$

因此，

$$C_1 = \frac{K}{1 - \gamma(T - 1)}.$$

将电子电流和离子电流相加，得

$$I = C_2 - K = C_1 T - K.$$

代入 C_1 并化简，得

$$I = K \frac{T - 1 + \gamma(T - 1)}{1 - \gamma(T - 1)}.$$

于是

$$I = \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha} \frac{(1 + \gamma)(e^{\alpha L} - 1)}{1 - \gamma(e^{\alpha L} - 1)}.$$

当外部电离率为正时，物理上有意义的有限稳态电流要求

$$1 - \gamma(e^{\alpha L} - 1) > 0.$$

当分母为零时，线性稳态模型预言电流发散；分母为负则会给出负的电流大小，不具有物理意义。

B6. 自持放电的临界长度

阴极发射的一个电子，在雪崩到达阳极时倍增为

$$e^{\alpha L}$$

个电子。由于最初的电子已经存在，因此雪崩新产生了

$$e^{\alpha L} - 1$$

对电子—离子对。

忽略复合时，这些离子全部到达阴极。它们平均释放的二次电子数为

$$\mathcal{R} = \gamma(e^{\alpha L} - 1)$$

个。这就是前一代的一个阴极电子所产生的下一代阴极电子数。

若 $\mathcal{R} < 1$ ，电子数逐代减少，因而必须依靠外部电离。临界条件是每一代恰好补足自身：

$$\gamma(e^{\alpha L_{\text{cr}}} - 1) = 1.$$

解得

$$L_{\text{cr}} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right).$$

当 $L > L_{\text{cr}}$ 时，即使移去外部电离源，反馈仍会使初始放电增强。本线性模型确定了放电起始的阈值；要确定超过阈值时有限的工作电流，还需要考虑其他物理效应。

阈值与 Z_{ext} 、 e 及 S 均无关。若 $\alpha = 0$ 或 $\gamma = 0$ ，则无论管长取何有限值，这一机制都无法维持放电。

解答已与官方解答核对。