

IPhO 2014

Teorik sorular ve çözümler · Astana, Kazakistan · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

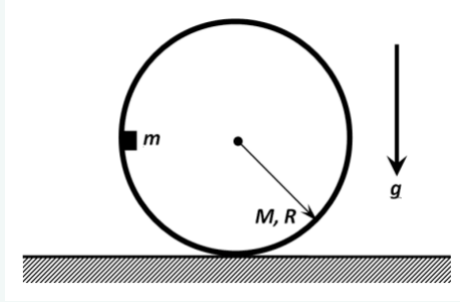
eulersolve.org/ipho/2014/

Soru 1: Üç bağımsız bölüm: yuvarlanan bir silindirin içindeki disk, gaz içeren sabun köpüğü, anahtarlı LC devresi

Bu soru birbirinden bağımsız üç bölümden oluşmaktadır.

Bölüm A (3 puan)

Kütlesi m olan küçük bir disk, kütlesi M ve yarıçapı R olan ince cidarlı, içi boş bir silindirin iç yüzeyine dikkatlice yerleştirilir. Başlangıçta silindir yatay düzlem üzerinde durmaktadır ve disk, soldaki şekilde gösterildiği gibi düzlemden R yüksekliğindedir. Diskin yörüngesinin en alt noktasından geçtiği anda disk ile silindir arasındaki etkileşim kuvveti F 'yi bulunuz. Disk ile silindirin iç yüzeyi arasında sürtünme olmadığını ve silindirin düzlem üzerinde kaymadan hareket ettiğini varsayınız. Serbest düşme ivmesi g 'dir.



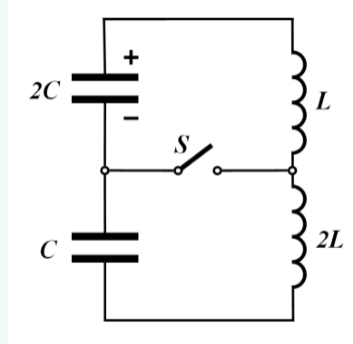
Bölüm B (3 puan)

İki atomlu bir ideal gaz içeren, yarıçapı $r = 5.00 \text{ cm}$ olan bir sabun köpüğünün sabun zarının kalınlığı $h = 10.0 \text{ }\mu\text{m}$ 'dir ve köpük vakumda bulunmaktadır. Sabun zarının yüzey gerilimi $\sigma = 4.00 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{m}}$, yoğunluğu ise $\rho = 1.10 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ 'tür. 1) Gazın, köpük mekanik dengede kalacak kadar yavaş ısıtıldığı bir süreçte, köpüğün içindeki gazın molar ısı kapasitesinin formülünü bulunuz ve sayısal değerini hesaplayınız; 2) Sabun zarının ısı kapasitesinin köpüğün içindeki gazın ısı kapasitesinden çok daha büyük olduğunu varsayarak, köpüğün küçük radyal salınımlarının frekansı ω 'nın formülünü bulunuz ve sayısal değerini hesaplayınız. Köpüğün içinde ısı dengeye ulaşılma süresinin salınım periyodundan çok daha kısa olduğunu varsayınız.

İpucu: Laplace, eğri bir yüzeyin içi ile dışı arasında, sıvı ile gaz arasındaki arayüzün yüzey geriliminden kaynaklanan bir basınç farkı bulunduğunu ve bu farkın $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$ olduğunu göstermiştir.

Bölüm C (3 puan)

Sağdaki şekilde gösterilen devrede başlangıçta S anahtarı açıktır; sırasıyla $2C$ olan kondansatör q_0 elektrik yükünü taşımakta, sırasıyla C olan kondansatör yüksüz bulunmakta ve indüktansları sırasıyla L ve $2L$ olan iki bobinden de elektrik akımı geçmemektedir. Kondansatör boşalmaya başlar ve bobinlerdeki akımın en büyük değerine ulaştığı anda S anahtarı aniden kapatılır. Bundan sonra S anahtarından geçen en büyük akım $I_{\max}$ 'ı bulunuz.



Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- Bölüm A:

$$F = mg \left(3 + \frac{m}{M} \right).$$

- Bölüm B, 1): $\mathcal{R}$ evrensel gaz sabitini göstermek üzere,

$$C_{\text{mol}} = 4\mathcal{R} = 33.3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

- Bölüm B, 2):

$$\omega = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho h r^2}} = 1.08 \times 10^2 \text{ rad s}^{-1}.$$

Buna karşılık gelen normal frekans $f = \omega/(2\pi) = 17.2 \text{ Hz}$ 'dir.

- Bölüm C:

$$I_{\max} = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

Çözüm

Bölüm A

Silindirin merkezinin yatay hızı V , diskin yatay hızı ise v_x olsun; her ikisi için de sağ yönü pozitif alalım. Silindirin eylemsizlik momenti

$$I_{\text{cyl}} = MR^2.$$

Önce bu hızlar arasında bir bağıntı elde edelim. Düzlemin silindire uyguladığı yatay sürtünme kuvvetinin işaretli değeri f olsun. Diskin uyguladığı normal kuvvetin etki doğrusu silindirin merkezinden geçtiğinden, bu merkeze göre yalnızca f tork oluşturur.

Saat yönünün tersindeki açısal hızı pozitif aldığımızda, kaymadan yuvarlanma koşulu

$$\Omega_{\text{cyl}} = -\frac{V}{R}.$$

olur. Dolayısıyla,

$$I_{\text{cyl}}\dot{\Omega}_{\text{cyl}} = Rf \implies f = -M\dot{V}.$$

Disk ve silindirden oluşan birleşik sistem için yatay hareket denklemi

$$m\dot{v}_x + M\dot{V} = f.$$

şeklindedir. Bu denklemleri birleştirip başlangıçta sistemin durgun olduğunu kullanırsak,

$$\boxed{mv_x + 2MV = 0}.$$

En alt noktada diskin hızı yataydır; bu hızı v ile gösterelim. Silindirin merkezine göre sürati

$$u = v - V.$$

olur. Böylece

$$V = -\frac{m}{2M}v, \quad u = \frac{2M+m}{2M}v.$$

Mekanik enerji korunur: disk ile silindir arasındaki temas sürtünmesizdir ve düzlemle olan durgun temas noktasındaki statik sürtünme iş yapmaz. Disk R kadar alçaldığından,

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + MV^2.$$

Hızlar arasındaki bağıntıyı yerine koyarsak,

$$v^2 = \frac{4M}{2M+m}gR, \quad u^2 = \frac{2M+m}{M}gR.$$

Düşey ivmeyi bulmak için, diskin aşağı yönlü düşey doğrultudan ölçülen açısal yer değiştirmesi θ olsun. Diskin yüksekliği

$$y = R - R\cos\theta.$$

şeklindedir. En alt noktada $\theta = 0$ ve $u = R\dot{\theta}$ olduğundan,

$$\ddot{y} = R\dot{\theta}^2 = \frac{u^2}{R}.$$

Silindirin diske uyguladığı kuvvet bu noktada yukarı yönlüdür. Dolayısıyla Newton'un ikinci yasası

$$F - mg = m\frac{u^2}{R}.$$

sonucunu verir. Buradan

$$\boxed{F = mg\left(3 + \frac{m}{M}\right)}.$$

Bölüm B, 1)

Sabun zarını köpüğün yarıçapına göre ince kabul edelim ve yüzey gerilimini sabit alalım. Bir sabun zarının **iki** sıvı-gaz arayüzü vardır. Bu arayüzlerdeki Laplace basınç farkları toplandığından, vakumda denge koşulu

$$p = \frac{4\sigma}{r}.$$

olur.

Mol sayısı n , evrensel gaz sabiti ise $\mathcal{R}$ olsun. İdeal gaz yasasını kullanarak,

$$pV = n\mathcal{R}T, \quad V = \frac{4\pi r^3}{3},$$

şunu elde ederiz:

$$n\mathcal{R}T = \frac{16\pi\sigma}{3}r^2.$$

Böylece, belirtilen yavaş denge süreci boyunca,

$$T \propto r^2, \quad \frac{dV}{V} = 3\frac{dr}{r} = \frac{3}{2}\frac{dT}{T}.$$

Dolayısıyla gazın yaptığı iş

$$p dV = \frac{3}{2} \frac{pV}{T} dT = \frac{3}{2} n\mathcal{R} dT.$$

olur.

Dönme serbestlik dereceleri etkin, titreşim serbestlik dereceleri ise uyarılmamış olan iki atomlu bir ideal gaz için,

$$dU = \frac{5}{2} n\mathcal{R} dT.$$

Termodinamiğin birinci yasasını gaza uyguladığımızda,

$$\delta Q = dU + p dV = \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \right) n\mathcal{R} dT.$$

elde edilir. Dolayısıyla bu süreçte gazın molar ısı kapasitesi

$$C_{\text{mol}} = \frac{\delta Q}{n dT} = 4\mathcal{R}.$$

olur. $\mathcal{R} = 8.31446 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ kullanıldığında,

$$C_{\text{mol}} = 33.3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Bölüm B, 2)

Zarın ısı kapasitesi gazinkinden çok daha büyüktür ve ısı denge hızla kurulur. Bu nedenle zar, bir salınım sırasında ısı deposu gibi davranır; böylece gazın sıkışması ve genişmesi yaklaşık olarak **izotermal** olur.

Denge yarıçapı r olsun ve anlık yarıçapı şöyle yazalım:

$$s = r + \xi, \quad |\xi| \ll r.$$

Denge basıncı $p_0 = 4\sigma/r$ olmak üzere, izotermal gaz yasası

$$p(s) = p_0 \left(\frac{r}{s} \right)^3.$$

sonucunu verir. Zira etkiyen dışı doğru net basınç

$$p(s) - \frac{4\sigma}{s}.$$

olur. ξ 'ye göre birinci mertebeye kadar açarsak,

$$p(s) \simeq p_0 \left(1 - \frac{3\xi}{r} \right), \quad \frac{4\sigma}{s} \simeq \frac{4\sigma}{r} \left(1 - \frac{\xi}{r} \right),$$

dolayısıyla

$$p(s) - \frac{4\sigma}{s} \simeq -\frac{8\sigma}{r^2} \xi.$$

Zarın sabit kütlesi, denge durumundaki boyutları cinsinden,

$$m_f = 4\pi r^2 \rho h.$$

şeklindedir. Gazın eylemsizliğini ve enerji kaybına yol açan etkileri ihmal edersek, radyal hareket denklemini birinci mertebede

$$m_f \ddot{\xi} = 4\pi r^2 \left(-\frac{8\sigma}{r^2} \xi \right) = -32\pi\sigma\xi.$$

olur. Böylece

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0, \quad \boxed{\omega^2 = \frac{32\pi\sigma}{m_f} = \frac{8\sigma}{\rho h r^2}}.$$

Verilen nicelikleri SI birimlerine dönüştürerek,

$$r = 5.00 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad h = 1.00 \times 10^{-5} \text{ m}, \quad \rho = 1.10 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3},$$

şunu buluruz:

$$\omega = \sqrt{\frac{8(4.00 \times 10^{-2})}{(1.10 \times 10^3)(1.00 \times 10^{-5})(5.00 \times 10^{-2})^2}}.$$

Dolayısıyla

$$\boxed{\omega = 1.08 \times 10^2 \text{ rad s}^{-1}}, \quad \boxed{f = 17.2 \text{ Hz}}.$$

Bölüm C

Anahtar kapanmadan önce her iki bobinden de aynı i akımı geçer. Boşalma başladığından beri bobinlerden aşağı yönde geçen yük q olsun; böylece $i = \dot{q}$ olur.

Bu durumda $2C$ kondansatörünün üst levhasındaki yük $q_0 - q$, C kondansatörünün üst levhasındaki yük ise $-q$ 'dur. Her iki kondansatörün gerilimini üstten alta doğru tanımlarsak,

$$U_1 = \frac{q_0 - q}{2C}, \quad U_2 = -\frac{q}{C}.$$

Kirchhoff'un gerilim yasası

$$3L\dot{i} = U_1 + U_2 = \frac{q_0 - 3q}{2C}.$$

sonucunu verir.

Akım en büyük değerindeyken $\dot{i} = 0$ 'dır. Dolayısıyla anahtarın kapatıldığı anda,

$$q = \frac{q_0}{3}, \quad \boxed{U_1 = \frac{q_0}{3C}, \quad U_2 = -\frac{q_0}{3C}}.$$

Şimdi anahtarın kapandığı anı $t = 0$ alalım. Üstteki kondansatör ile üstteki bobin bir LC çevrimi, alttaki çift ise başka bir LC çevrimi oluşturur. Bunların açısal frekansları eşittir:

$$\Omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L(2C)}}, \quad \Omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(2L)C}},$$

dolayısıyla

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}.$$

Üstteki ve alttaki bobinlerin akımları sırasıyla i_1 ve i_2 olsun; her ikisi için de aşağı yönü pozitif alalım. Bu akımların denklemleri

$$\begin{aligned} L\dot{i}_1 &= U_1, & 2C\dot{U}_1 &= -i_1, \\ 2L\dot{i}_2 &= U_2, & C\dot{U}_2 &= -i_2. \end{aligned}$$

şeklindedir. Dolayısıyla,

$$\ddot{i}_1 + \Omega^2 i_1 = 0, \quad \ddot{i}_2 + \Omega^2 i_2 = 0.$$

Anahtardan geçen akımın pozitif yönünü bobinlerin birleşim noktasından kondansatörlerin birleşim noktasına doğru alalım. Kirchhoff'un akım yasası

$$i_S = i_1 - i_2,$$

ve dolayısıyla

$$\ddot{i}_S + \Omega^2 i_S = 0.$$

sonucunu verir.

Bobin akımları anahtarlama anında sürekli ve öncesinde birbirine eşittir; bu nedenle

$$i_S(0) = 0.$$

Kondansatör gerilimleri de sürekli; dolayısıyla

$$\dot{i}_S(0) = \frac{U_1(0)}{L} - \frac{U_2(0)}{2L} = \frac{q_0}{3LC} + \frac{q_0}{6LC} = \frac{q_0}{2LC}.$$

Bunun sonucunda anahtardan geçen akım

$$i_S(t) = \frac{\dot{i}_S(0)}{\Omega} \sin(\Omega t) = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}}\right).$$

olur. Böylece akımın en büyük büyüklüğü

$$\boxed{I_{\max} = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Van der Waals hâl denklemi

Hâl denklemi Clapeyron-Mendeleev yasasına uyan, iyi bilinen ideal gaz modelinde aşağıdaki önemli fiziksel etkiler ihmal edilir. Birincisi, gerçek bir gazın molekülleri sonlu büyüklüktedir; ikincisi, birbirleriyle etkileşirler. Bu sorunun tüm bölümlerinde *bir mol su* ele alınmaktadır.

Bölüm A. İdeal olmayan gazın hâl denklemi (2 puan)

Moleküllerin sonlu büyüklüğü hesaba katıldığında, gazın hâl denklemi şu biçimi alır:

$$P(V - b) = RT, \quad (1)$$

burada P , V , T sırasıyla gazın basıncını, mol başına hacmini ve sıcaklığını, R evrensel gaz sabitini, b ise hacimden belirli bir miktarın çıkarılmasını sağlayan, maddeye özgü bir sabiti gösterir.

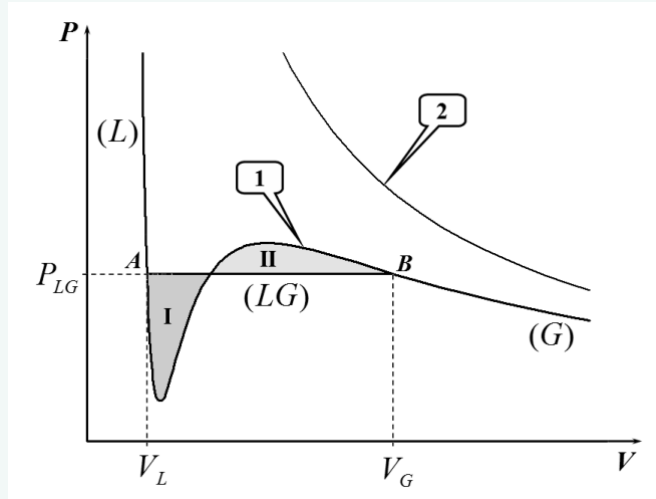
A1 b 'yi tahmin edin ve moleküllerin çapı d cinsinden ifade edin. (0.3 puan)

Moleküller arası çekim kuvvetlerini hesaba katan van der Waals, maddenin hem gaz hem de sıvı hâllerini başarılı biçimde betimleyen aşağıdaki hâl denklemini önermiştir:

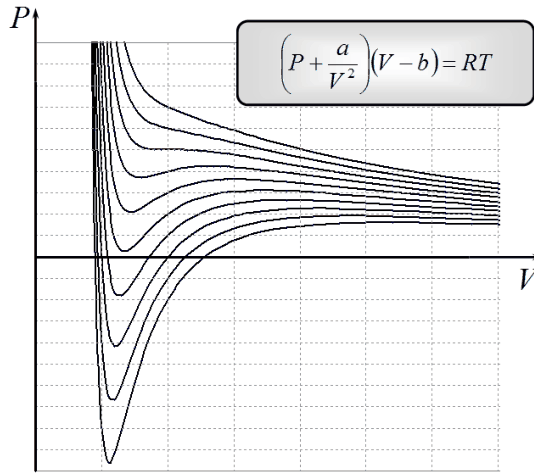
$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \quad (2)$$

Burada a , maddeye özgü başka bir sabittir.

Belirli bir kritik değer T_c 'nin altındaki T sıcaklıklarında, (2) denkleminin izotermi, Şekil 1'de gösterilen ve van der Waals izotermi olarak adlandırılan monoton olmayan 1 eğrisiyle iyi biçimde temsil edilir. Aynı şekildeki 2 eğrisi, aynı sıcaklıktaki bir ideal gazın izotermi gösterir. Gerçek izoterm, van der Waals izoterminden, belirli bir sabit P_{LG} basıncında çizilen AB doğru parçasıyla ayrılır. Bu doğru parçası V_L ve V_G hacimleri arasında yer alır ve sıvı faz (L ile gösterilen) ile gaz fazının (G ile gösterilen) dengesine karşılık gelir. J. Maxwell, termodinamiğin ikinci yasasından hareketle, P_{LG} basıncının Şekil 1'de gösterilen I ve II alanları eşit olacak şekilde seçilmesi gerektiğini göstermiştir.



Şekil 1. Gaz/sıvının van der Waals izotermi (1 eğrisi) ve bir ideal gazın izotermi (2 eğrisi).



Şekil 2. Van der Waals hâl denkleminin çeşitli izotermi.

Sıcaklık arttıkça izoterm üzerindeki AB doğru parçası küçülür; sıcaklık ve basınç sırasıyla belirli T_c ve $P_{LG} = P_c$ değerlerine ulaştığında tek bir noktaya dönüşür. P_c ve T_c parametrelerine kritik parametreler denir ve bunlar deneysel olarak yüksek doğrulukla ölçülebilir.

A2	Van der Waals sabitleri a ve b 'yi T_c ve P_c cinsinden ifade edin. (1.3 puan)
A3	Su için $T_c = 647 \text{ K}$ ve $P_c = 2.2 \cdot 10^7 \text{ Pa}$ 'dır. Su için a_w ve b_w 'yi hesaplayın. (0.2 puan)
A4	Su moleküllerinin çapı d_w 'yi tahmin edin. (0.2 puan)

Bölüm B. Gaz ve sıvının özellikleri (6 puan)

Sorunun bu bölümü, $T = 100^\circ \text{C}$ sıcaklığında gaz ve sıvı hâllerindeki suyun özelliklerini ele almaktadır. Bu sıcaklıktaki doymuş buhar basıncının $p_{LG} = p_0 = 1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ olduğu bilinmektedir ve suyun mol kütlesi $\mu = 1.8 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{mole}}$ 'dür.

Gaz hâli

Gaz hâlindeki suyun özelliklerini betimlemek için $V_G \gg b$ eşitsizliğinin geçerli olduğunu varsaymak makuldür.

B1	V_G hacminin formülünü türetin ve bunu R, T, p_0 , ve a cinsinden ifade edin. (0.8 puan)
----	---

Neredeyse aynı hacim olan V_{G0} , ideal gaz yasası kullanılarak yaklaşık olarak hesaplanabilir.

B2	Moleküller arası kuvvetlerden kaynaklanan gaz hacmindeki bağıl azalmayı, $\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}}$, yüzde olarak hesaplayın. (0.3 puan)
----	---

Sistemin hacmi V_G 'nin altına düşürülürse gaz yoğuşmaya başlar. Ancak iyice saflaştırılmış bir gaz, hacmi belirli bir $V_{G\min}$ değerine ulaşıncaya kadar mekanik olarak yarı kararlı bir durumda (aşırı soğutulmuş buhar olarak adlandırılır) kalabilir.

Aşırı soğutulmuş gazın sabit sıcaklıkta mekanik kararlılık koşulu şöyle yazılır: $\frac{dP}{dV} < 0$.

B3	Su buharının hacminin, yarı kararlı durumda kalmaya devam ederken kaç kat küçültülebileceğini bulun ve hesaplayın. Başka bir deyişle, $V_G/V_{G\min}$ nedir? (0.7 puan)
----	--

Sıvı hâli

Sıvı hâlindeki suyun van der Waals betimlemesi için $P \ll a/V^2$ eşitsizliğinin geçerli olduğunu varsaymak makuldür.

B4 Sıvı suyun hacmi V_L 'yi a, b, R , ve T cinsinden ifade edin. **(1.0 puan)**

$bRT \ll a$ olduğunu varsayarak suyun aşağıdaki özelliklerini bulun. *Hesaplanan bazı değerler, tablolarda verilen iyi bilinen değerlerle uyuşmazsa şaşırmayın!*

B5 Sıvı suyun yoğunluğu ρ_L 'yi μ, a, b, R büyüklüklerinden bazıları cinsinden ifade edin ve hesaplayın. **(0.5 puan)**

B6 Hacimsel ısı genleşme katsayısı $\alpha = \frac{1}{V_L} \frac{\Delta V_L}{\Delta T}$ 'yi a, b, R cinsinden ifade edin ve hesaplayın. **(0.6 puan)**

B7 Suyun özgül buharlaşma ısı L 'yi μ, a, b, R cinsinden ifade edin ve hesaplayın. **(1.1 puan)**

B8 Suyun tek molekül kalınlığındaki tabakasını ele alarak suyun yüzey gerilimi σ 'yı tahmin edin. **(1.2 puan)**

Bölüm C. Sıvı-gaz sistemi (3 puan)

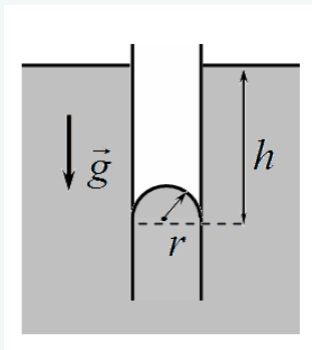
Maxwell kuralı (basit bir integral alınarak alanların eşitliği) ve van der Waals hâl denklemi, Bölüm B'de yapılan yaklaşımlarla birlikte kullanılarak doymuş buhar basıncı p_{LG} 'nin T sıcaklığına aşağıdaki gibi bağlı olduğu gösterilebilir:

$$\ln p_{LG} = A + \frac{B}{T}, \quad (3)$$

burada A ve B , a ve b cinsinden $A = \ln \left(\frac{a}{b^2} \right) - 1$; $B = -\frac{a}{bR}$ olarak ifade edilebilen sabitlerdir.

W. Thomson, doymuş buhar basıncının sıvı yüzeyinin eğriliğine bağlı olduğunu göstermiştir. Bir kılcal borunun malzemesini ıslatmayan bir sıvıyı ele alın (temas açısı 180°). Kılcal boru sıvıya daldırıldığında, borudaki sıvı yüzey gerilimi nedeniyle belirli bir seviyeye kadar alçalır (bkz. Şekil 3).

C1 Sıvının eğri yüzeyi üzerindeki doymuş buhar basıncındaki küçük Δp_T değişimini bulun ve bunu buhar yoğunluğu ρ_s , sıvı yoğunluğu ρ_L , yüzey gerilimi σ ve yüzeyin eğrilik yarıçapı r cinsinden ifade edin. **(1.3 puan)**



Şekil 3. Malzemesini ıslatmayan bir sıvıya daldırılmış kılcal boru

B3 bölümünde ele alınan yarı kararlı durumlar, temel parçacıkların kaydedilmesi için tasarlanmış sis odası gibi gerçek deney düzeneklerinde yaygın olarak kullanılır. Bu durumlar, sabah çiynin oluşması gibi doğa olaylarında da ortaya çıkar. Aşırı soğutulmuş buhar, sıvı damlacıkları oluşturarak

yoğuşabilir. Çok küçük damlacıklar hızla buharlaşır, ancak yeterince büyük olanlar büyümeye devam edebilir.

C2

Akşam $t_e = 20^\circ\text{C}$ sıcaklığında havadaki su buharının doymuş olduğunu, ancak sabah ortam sıcaklığının küçük bir miktar olan $\Delta t = 5.0^\circ\text{C}$ kadar düştüğünü varsayın. Buhar basıncının değişmeden kaldığını varsayarak büyüeyebilen damlacıkların minimum yarıçapını tahmin edin. Suyun yüzey geriliminin tablodaki değeri olan $\sigma = 7.3 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$ 'yi kullanın. **(1.7 puan)**

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Sayısal hesaplamalarda $R = 8.31 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$, $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ve Bölüm B'de $T = 373 \text{ K}$ kullanılmıştır. Hacimler molar hacimlerdir. Aşağıdaki moleküler tahminlerde, sert küreler için standart dışlanmış hacim kabulü kullanılmıştır; bunların modele bağımlılığı A1, A4 ve B8 çözümlerinde tartışılmaktadır.

- **A1:** $b \sim N_A d^3$; sert küre tahmini şöyledir:

$$b = \frac{2\pi}{3} N_A d^3.$$

- **A2:**

$$a = \frac{27R^2T_c^2}{64P_c}, \quad b = \frac{RT_c}{8P_c}.$$

- **A3:**

$$a_w \simeq 0.55 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}, \quad b_w \simeq 3.1 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

- **A4:**

$$d_w = \left(\frac{3b_w}{2\pi N_A} \right)^{1/3} \simeq 2.9 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

- **B1:**

$$V_G = \frac{RT + \sqrt{R^2T^2 - 4ap_0}}{2p_0} \simeq 3.08 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

- **B2:**

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2T^2}}}{2} \simeq 0.58\%.$$

- **B3:**

$$V_{G\min} = \frac{2a}{RT} \simeq 3.6 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}, \quad \frac{V_G}{V_{G\min}} \simeq 86.$$

- B4:

$$V_L = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4abRT}}{2RT} = \frac{2b}{1 + \sqrt{1 - \frac{4bRT}{a}}}.$$

- B5:

$$\rho_L \simeq \frac{\mu}{b} \simeq 5.9 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}.$$

- B6:

$$\alpha \simeq \frac{bR}{a} \simeq 4.6 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}.$$

- B7:

$$L \simeq \frac{a}{\mu b} \simeq 1.0 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}.$$

- B8: Sıvının iç kesimindeki kohezyon katkısının yarısının eksik olduğu tek tabakalı bir tahmin şunu verir:

$$\sigma \sim \frac{1}{2} \rho_L L d_w = \frac{a d_w}{2b^2} \simeq 8.6 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}.$$

Güvenilir hassasiyeti, $\sigma \sim 10^{-1} \text{ N m}^{-1}$ şeklinde bir büyüklük mertebesi tahmini düzeyindedir.

- C1: Gösterilen dışbükey sıvı yüzeyi için,

$$\Delta p_T = \frac{2\sigma\rho_s}{r(\rho_L - \rho_s)} \simeq \frac{2\sigma\rho_s}{r\rho_L} > 0.$$

- C2: $T_e = 293 \text{ K}$ ve $\Delta T = 5.0 \text{ K}$ ile,

$$r_{\min} \simeq \frac{2\sigma T_e}{\rho_L L \Delta T} = \frac{2\sigma b^2 T_e}{a \Delta T} \simeq 1.4 \times 10^{-8} \text{ m} = 14 \text{ nm}.$$

Bu kritik yarıçaptan daha büyük damlacıklar büyüyebilir.

Çözüm

A1. Moleküler büyüklük ve dışlanmış hacim

Molekülleri d çaplı sert küreler olarak modelleyelim. Bir molekülün merkezi, başka bir molekülün merkezi etrafındaki d yarıçaplı kürenin içine giremez. Dolayısıyla bir çiftle ilişkili dışlanmış hacim şöyledir:

$$v_{\text{ex}} = \frac{4\pi d^3}{3}.$$

Seyreltik sert küreler için standart dışlanmış hacim hesabında her çift bir kez sayılır ve molekül başına dışlanmış hacim parametresi $v_{\text{ex}}/2$ olur. Bir mol için,

$$b = \frac{1}{2} N_A v_{\text{ex}} = \frac{2\pi}{3} N_A d^3.$$

Böylece alışılmış van der Waals b parametresi, küresel moleküllerin toplam geometrik hacminin dört katıdır. Bu geometrik ön çarpandan bağımsız olarak, istenen ölçek $b \sim N_A d^3$ 'tür.

A2. Kritik nokta koşulları

Hâl denklemini şu şekilde yazalım:

$$P(V, T) = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}.$$

Kritik noktada, kritik sıcaklığın altındaki izotermin iki ekstremumu birleşerek yatay teğetli bir büküm noktası oluşturur. Dolayısıyla,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T_c, V_c} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_{T_c, V_c} = 0.$$

Bu koşullar şunları verir:

$$\frac{RT_c}{(V_c - b)^2} = \frac{2a}{V_c^3}, \quad \frac{RT_c}{(V_c - b)^3} = \frac{3a}{V_c^4}.$$

İkinci denklemini birinciye bölersek,

$$\frac{1}{V_c - b} = \frac{3}{2V_c},$$

buradan,

$$V_c = 3b.$$

Birinci türev koşulunda ve hâl denkleminde yerine koyarsak,

$$RT_c = \frac{8a}{27b}, \quad P_c = \frac{a}{27b^2}.$$

Sabitler için çözersek,

$$\boxed{b = \frac{RT_c}{8P_c}, \quad a = \frac{27R^2T_c^2}{64P_c}.$$

A3. Su için sabitler

Verilen kritik değerleri kullanarak,

$$b_w = \frac{8.31(647)}{8(2.2 \times 10^7)} = 3.055 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1},$$

ve

$$a_w = \frac{27(8.31)^2(647)^2}{64(2.2 \times 10^7)} = 0.5543 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}.$$

İki anlamlı basamakla,

$$\boxed{a_w \simeq 0.55 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}, \quad b_w \simeq 3.1 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

Sonraki hesaplamalarda yuvarlanmamış değerler kullanılmıştır.

A4. Molekül çapı

A1'den,

$$d_w = \left(\frac{3b_w}{2\pi N_A} \right)^{1/3}.$$

Bunun sonucunda,

$$d_w \simeq 2.9 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.29 \text{ nm.}$$

Bu, sert küre modeli çerçevesinde etkin bir çaptır.

B1. Doymuş buhar hacmi

Verilen $V_G \gg b$ yaklaşımını uygulayalım:

$$\left(p_0 + \frac{a}{V_G^2} \right) V_G = RT.$$

V_G ile çarparsak,

$$p_0 V_G^2 - RT V_G + a = 0.$$

Gaz hâli, $a \rightarrow 0$ iken RT/p_0 'a yaklaşan büyük köke karşılık gelir:

$$V_G = \frac{RT + \sqrt{R^2 T^2 - 4ap_0}}{2p_0}.$$

$T = 373 \text{ K}$ sıcaklığında,

$$V_G = 0.0308164 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1} \simeq 3.08 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

Zayıf çekim için karekökün açılımı ayrıca şunu verir:

$$V_G \simeq \frac{RT}{p_0} - \frac{a}{RT}.$$

B2. Bağlı hacim azalması

İdeal gaz hacmi şöyledir:

$$V_{G0} = \frac{RT}{p_0} = 0.0309963 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

B1'i kullanarak,

$$\frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2 T^2}} \right).$$

Sayısal olarak,

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = 5.803 \times 10^{-3},$$

dolayısıyla,

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} \simeq 0.58\%.$$

Birinci mertebede bu oran $ap_0/(R^2 T^2)$ 'dir.

B3. Yarı kararlı sıkıştırmanın sınırı

Aynı gaz yaklaşımı çerçevesinde,

$$P(V) = \frac{RT}{V} - \frac{a}{V^2}.$$

Mekanik kararlılık şu koşulu gerektirir:

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{RT}{V^2} + \frac{2a}{V^3} = \frac{2a - RTV}{V^3} < 0.$$

Böylece gaz, küçük hacim pertürbasyonlarına karşı şu koşulda mekanik olarak kararlı kalır:

$$V > \frac{2a}{RT}.$$

Dolayısıyla kararlılık sınırındaki hacim şöyledir:

$$V_{G \min} = \frac{2a}{RT} = 3.58 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

Sıkıştırma oranı şöyledir:

$$\frac{V_G}{V_{G \min}} = \frac{RT}{2a} \frac{RT + \sqrt{R^2 T^2 - 4ap_0}}{2p_0} \simeq 86.2.$$

Dolayısıyla,

$$\frac{V_G}{V_{G \min}} \simeq 86.$$

Sınır hacminde $V_{G \min}/b \simeq 12$ olduğundan, sonuç b 'yi ihmal eden, verilen yaklaşım çerçevesinde bir tahmindir.

B4. Sıvı hacmi

Sıvı için P 'yi a/V_L^2 'ye göre ihmal edelim:

$$\frac{a}{V_L^2}(V_L - b) = RT.$$

Dolayısıyla,

$$RTV_L^2 - aV_L + ab = 0.$$

Sıvı, $T \rightarrow 0$ iken b 'ye yaklaşan küçük hacimli köke karşılık gelir:

$$V_L = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4abRT}}{2RT} = \frac{2b}{1 + \sqrt{1 - 4bRT/a}}.$$

373 K sıcaklığında bu ifade yaklaşık olarak şunu verir:

$$V_L = 3.91 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

Kalan sorular için öngörülen küçük parametreyi tanımlayalım:

$$\varepsilon = \frac{bRT}{a} \ll 1.$$

Sıvı kökünün açılımını yaparsak,

$$V_L = b \left(1 + \frac{bRT}{a} + O(\varepsilon^2) \right).$$

Verilen su parametreleri için $\varepsilon \simeq 0.17$ olduğundan, aşağıdaki en düşük mertebeden sonuçlar yaklaşıktır.

B5. Sıvı yoğunluğu

En düşük mertebede $V_L \simeq b$ 'dir. Bir molün kütlesi μ olduğundan,

$$\rho_L = \frac{\mu}{V_L} \simeq \frac{\mu}{b}.$$

Sayısal olarak,

$$\rho_L \simeq \frac{1.8 \times 10^{-2}}{3.055 \times 10^{-5}} = 5.9 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}.$$

Bu, belirtilen yaklaşımın öngördüğü yoğunluktur.

B6. Isıl genleşme katsayısı

B4'teki sıcaklığa bağlı ilk terimi koruyarak,

$$V_L \simeq b + \frac{b^2 RT}{a}.$$

Böylece, kullanılan yaklaşım çerçevesinde sabit dış basınçta,

$$\frac{\partial V_L}{\partial T} \simeq \frac{b^2 R}{a}.$$

Paydada $V_L \simeq b$ kullanarak,

$$\alpha = \frac{1}{V_L} \left(\frac{\partial V_L}{\partial T} \right)_P \simeq \frac{bR}{a}.$$

Sayısal olarak,

$$\alpha \simeq 4.6 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}.$$

B7. Özgül gizli buharlaşma ısı

Termodinamik özdeşlik

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P$$

iç enerjiyi hâl denklemiyle ilişkilendirir. Van der Waals akışkanı için,

$$T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P = \frac{RT}{V-b} - \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) = \frac{a}{V^2}.$$

Dolayısıyla molar iç enerji şu biçimdedir:

$$U(T, V) = U_0(T) - \frac{a}{V}.$$

Aynı sıcaklıkta, buharlaşma sırasında iç enerji artışı şöyledir:

$$U_G - U_L = a \left(\frac{1}{V_L} - \frac{1}{V_G} \right).$$

Sabit basınçta buharlaşma, genleşme işi de gerektirdiğinden mol başına sağlanan ısı şöyledir:

$$\mu L = a \left(\frac{1}{V_L} - \frac{1}{V_G} \right) + p_0(V_G - V_L).$$

$V_G \gg V_L \simeq b$ ve $RT \ll a/b$ olduğundan, baskın katkı a/b 'dir. Dolayısıyla,

$$L \simeq \frac{a}{\mu b}.$$

Sayısal olarak,

$$L \simeq 1.0 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}.$$

Isıl düzeltmelerin ihmal edilmesi tutarlıdır: $V_L \simeq b(1 + bRT/a)$ ifadesinin korunması $a/V_L \simeq a/b - RT$ sonucunu verir; buradaki $-RT$ düzeltmesi, genleşme işinin başlıca terimi olan $p_0 V_G \simeq RT$ 'yi götürür.

B8. Tek moleküllü tabakadan yüzey gerilimi

Yüzey gerilimi, birim alan başına yüzey serbest enerjisidir. Enerjiye dayalı bir tahmin için yüzey entropisinin katkısını ihmal edelim ve B7'de bulunan kohezyon enerjisini kullanalım.

Sıvının iç kesiminde molekül başına kohezyon enerjisi yaklaşık olarak şöyledir:

$$E_{\text{coh}} \simeq \frac{\mu L}{N_A} \simeq \frac{a}{b N_A}.$$

Serbest yüzeye yakın bir molekülün buhar tarafında komşuları eksiktir. Basit bir tahminde, bu moleküle atanan kohezyon bağlanması yaklaşık yarıya iner; bu da $E_{\text{coh}}/2$ mertebesinde bir yüzey fazla enerjisi verir.

Alanı S ve kalınlığı d_w olan bir yüzey tabakası yaklaşık olarak

$$N_{\text{layer}} \simeq \frac{\rho_L S d_w}{\mu} N_A$$

molekül içerir. Dolayısıyla fazla enerjisi şöyledir:

$$E_{\text{surface}} \sim \frac{1}{2} E_{\text{coh}} N_{\text{layer}} = \frac{1}{2} \rho_L L d_w S.$$

Bunu σS ile özdeşleştirerek,

$$\sigma \sim \frac{1}{2} \rho_L L d_w = \frac{a d_w}{2 b^2}.$$

Yukarıdaki tahminleri kullanarak,

$$\sigma \sim 8.6 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}.$$

Tek tabakalı model, $\sigma \sim 10^{-1} \text{ N m}^{-1}$ ölçeğini belirler; sayısal ön çarpanı, varsayılan moleküler düzenleniş ve eksik etkileşimlere bağlıdır.

C1. Eğri bir yüzey üzerindeki doyma basıncı

Düz sıvı yüzeyi üzerindeki doymuş buhar basıncı p_s olsun. Islatmayan menisküs buhara doğru dışbükeydir ve bu yüzeyin h kadar altında bulunur.

Küçük bir yükseklik farkı için hidrostatik denge, menisküs seviyesindeki basınçları verir:

$$p_\ell = p_s + \rho_L g h, \quad p_v = p_s + \rho_s g h.$$

Küresel menisküs, Laplace basınç bağıntısına uyar:

$$p_\ell - p_v = \frac{2\sigma}{r}.$$

Bunun sonucunda,

$$(\rho_L - \rho_s)gh = \frac{2\sigma}{r}.$$

Denge buhar basıncındaki değişim şöyledir:

$$\Delta p_T = p_v - p_s = \rho_s gh.$$

h 'yi yok ederek,

$$\Delta p_T = \frac{2\sigma\rho_s}{r(\rho_L - \rho_s)} \simeq \frac{2\sigma\rho_s}{r\rho_L}.$$

Son adımda $\rho_s \ll \rho_L$ kullanılmıştır. Değişim pozitifdir: dışbükey bir sıvı yüzeyi, düz bir yüzeyden daha yüksek bir denge buhar basıncı gerektirir.

C2. Büyüyen bir damlacığın minimum yarıçapı

$p_s(T)$, düz bir yüzey üzerindeki doyma basıncını gösterebilir. Başlangıçta gerçek buhar basıncı şöyledir:

$$p = p_s(T_e), \quad T_e = 293 \text{ K}.$$

$\Delta T = 5.0 \text{ K}$ kadar soğumadan sonra gerçek basınç sabit kalırken düz yüzey üzerindeki doyma basıncı düşer. Birinci mertebede,

$$\Delta p_{\text{cool}} = p_s(T_e) - p_s(T_e - \Delta T) \simeq \left. \frac{dp_s}{dT} \right|_{T_e} \Delta T.$$

(3) denklemden,

$$\frac{1}{p_s} \frac{dp_s}{dT} = -\frac{B}{T^2} = \frac{a}{bRT^2}.$$

Böylece,

$$\Delta p_{\text{cool}} \simeq p_s \frac{a\Delta T}{bRT_e^2}.$$

Ortamin buhar basıncı, damlacığın eğriliğe bağlı denge basıncını aşarsa damlacık büyüyebilir. Kritik yarıçapta iki basınç değişimi eşittir:

$$p_s \frac{a\Delta T}{bRT_e^2} = \frac{2\sigma\rho_s}{\rho_L r_{\min}}.$$

Seyreltik buharı ideal kabul ederek,

$$\rho_s \simeq \frac{\mu p_s}{RT_e}.$$

Yerine koyup p_s 'yi sadeleştirerek,

$$r_{\min} \simeq \frac{2\sigma\mu b T_e}{\rho_L a \Delta T}.$$

Bölüm B'deki $\rho_L \simeq \mu/b$ ve $L \simeq a/(\mu b)$ sonuçlarını kullanarak,

$$r_{\min} \simeq \frac{2\sigma b^2 T_e}{a \Delta T} = \frac{2\sigma T_e}{\rho_L L \Delta T}.$$

Verilen tablodaki yüzey gerilimi değeriyle,

$$r_{\min} \simeq \frac{2(7.3 \times 10^{-2})(3.055 \times 10^{-5})^2(293)}{(0.5543)(5.0)} = \boxed{1.4 \times 10^{-8} \text{ m} \approx 14 \text{ nm.}}$$

Bu yarıçapta bir damlacık kararsız dengededir. Daha büyük damlacıklar büyüyebilir; daha küçük damlacıklar buharlaşma eğilimindedir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Gaz deşarjının en basit modeli

Bir gazın içinden geçen elektrik akımına gaz deşarjı denir. Aydınlatma lambalarındaki ışıma deşarjı, kaynak işlemlerindeki ark deşarjı ve bulutlarla yer arasında yıldırım biçiminde oluşan, iyi bilinen kıvılcım deşarjı da dahil olmak üzere birçok gaz deşarjı türü vardır.

Bölüm A. Kendiliğinden sürmeyen gaz deşarjı (4.8 puan)

Sorunun bu bölümünde, kendiliğinden sürmeyen gaz deşarjı olarak adlandırılan olay incelenmektedir. Bu deşarjın sürmesi için, hacmin her yerinde düzgün olarak birim hacim ve birim zamanda Z_{ext} adet tek yüklü iyon ve serbest elektron çifti oluşturan bir dış iyonlaştırıcının sürekli çalışması gerekir.

Dış iyonlaştırıcı açıldığında elektron ve iyon sayısı artmaya başlar. Gazdaki elektron ve iyonların sayı yoğunluklarının sınırsız biçimde artması, serbest bir elektronun bir iyonla birleşerek nötr bir atom oluşturduğu yeniden birleşme süreciyle engellenir. Gazda birim hacim ve birim zamanda gerçekleşen yeniden birleşme olaylarının sayısı Z_{rec} ,

$$Z_{\text{rec}} = rn_en_i,$$

ile verilir; burada r , yeniden birleşme katsayısı adı verilen bir sabittir ve n_e, n_i sırasıyla elektron ve iyon sayı yoğunluklarını gösterir.

Dış iyonlaştırıcının $t = 0$ anında açıldığını ve gazdaki elektron ve iyonların başlangıçtaki sayı yoğunluklarının her ikisinin de sıfır olduğunu varsayın. Bu durumda elektron sayı yoğunluğu $n_e(t)$, t zamanına aşağıdaki gibi bağlıdır:

$$n_e(t) = n_0 + a \tanh bt,$$

burada n_0, a ve b bazı sabitlerdir ve $\tanh x$ hiperbolik tanjantı gösterir.

A1 n_0, a, b sabitlerini bulun ve bunları Z_{ext} ve r cinsinden ifade edin. (1.8 puan)

İki dış iyonlaştırıcının mevcut olduğunu varsayın. Birincisi açıldığında gazdaki elektron sayı yoğunluğu, $n_{e1} = 12 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ denge değerine ulaşmaktadır. İkinci dış iyonlaştırıcı açıldığında elektron sayı yoğunluğu, $n_{e2} = 16 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ denge değerine ulaşmaktadır.

A2 Her iki dış iyonlaştırıcı aynı anda açıldığında dengedeki elektron sayı yoğunluğunu n_e bulun. (0.6 puan)

Dikkat! Bundan sonra, dış iyonlaştırıcının tüm süreçlerin kararlı hâle gelmesine ve zamandan bağımsız olmasına yetecek kadar uzun bir süredir açık olduğu varsayılmaktadır. Yük taşıyıcılarından kaynaklanan elektrik alanını tamamen ihmal edin.

Gazın, alanları S olan ve aralarında $L \ll \sqrt{S}$ uzaklığı bulunan iki paralel iletken levha arasındaki tüpü doldurduğunu varsayın. Levhalar arasında bir elektrik alanı oluşturmak için levhalara U gerilimi uygulanmaktadır. Her iki tür yük taşıyıcısının sayı yoğunluklarının tüp boyunca hemen hemen sabit kaldığını varsayın.

Hem elektronların (e alt indisiyle gösterilen) hem de iyonların (i alt indisiyle gösterilen), E elektrik alan şiddeti nedeniyle aynı v sürüklenme süratini kazandığını varsayın. Bu sürat,

$$v = \beta E,$$

ile verilir; burada β , yük hareketliliği adı verilen bir sabittir.

A3	Tüpteki elektrik akımını I , U , β , L , S , Z_{ext} , r ve temel yük olan e cinsinden ifade edin. (1.7 puan)
A4	Uygulanan gerilimin yeterince küçük değerleri için gazın öz direncini ρ_{gas} bulun ve bunu β , L , Z_{ext} , r ve e cinsinden ifade edin. (0.7 puan)

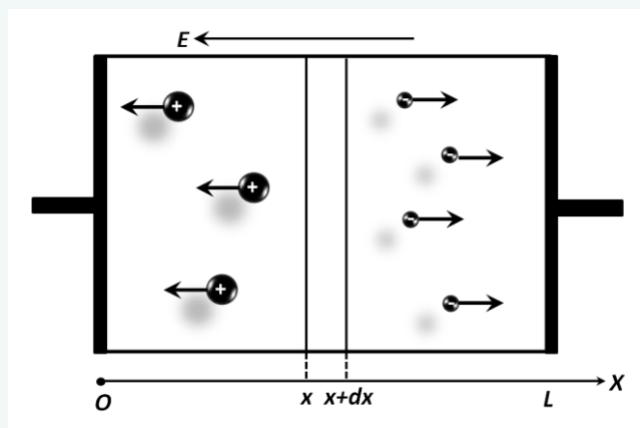
Bölüm B. Kendiliğinden süren gaz deşarjı (5.2 puan)

Sorunun bu bölümünde, tüpteki elektrik akımının nasıl kendi kendini sürdürür hâle geldiğini göstermek amacıyla kendiliğinden süren gaz deşarjının başlaması ele alınmaktadır.

Dikkat! Bundan sonra, dış iyonlaştırıcının aynı Z_{ext} hızıyla çalışmaya devam ettiğini varsayın; elektrik alanının tüp boyunca düzgün olması için yük taşıyıcılarından kaynaklanan elektrik alanını ihmal edin ve yeniden birleşmeyi tamamen göz ardı edin.

Kendiliğinden süren gaz deşarjında, yukarıda ele alınmayan iki önemli süreç vardır. İlk süreç ikincil elektron yayımı, ikincisi ise elektron çıgı oluşumudur. İkincil elektron yayımı, iyonların katot adı verilen negatif elektroda çarpması ve buradan kopan elektronların anot adı verilen pozitif elektroda doğru hareket etmesiyle gerçekleşir. Birim zamanda koparılan elektron sayısının $\dot{N}_e$, birim zamanda katoda çarpan iyon sayısına $\dot{N}_i$ oranına ikincil elektron yayım katsayısı denir: $\gamma = \dot{N}_e / \dot{N}_i$. Elektron çığının oluşumu şu şekilde açıklanır. Elektrik alanı serbest elektronları hızlandırır; bu elektronlar, gazdaki atomlara çarparak onları iyonlaştırmaya yetecek kinetik enerjiyi kazanır. Sonuç olarak anoda doğru hareket eden serbest elektronların sayısı önemli ölçüde artar. Bu süreç, dl uzaklığını kateden N_e hareketli elektron nedeniyle elektron sayısında meydana gelen dN_e artışını niteleyen Townsend katsayısı α ile tanımlanır; yani

$$\frac{dN_e}{dl} = \alpha N_e.$$



Gaz tüpünün herhangi bir kesitindeki toplam akım I , kararlı durumda yukarıdaki şekilde gösterilen x koordinatına bağlı olan iyon akımı $I_i(x)$ ile elektron akımı $I_e(x)$ 'ten oluşur. Elektron akımı $I_e(x)$, x eksenı boyunca aşağıdaki bağıntıya göre değişir:

$$I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2,$$

burada A_1, A_2, C_1 bazı sabitlerdir.

B1 A_1, A_2 sabitlerini bulun ve bunları $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S$ cinsinden ifade edin. **(2 puan)**

İyon akımı $I_i(x)$, x eksenı boyunca aşağıdaki bağıntıya göre değişir:

$$I_i(x) = C_2 + B_1 e^{B_2 x},$$

burada B_1, B_2, C_2 bazı sabitlerdir.

B2 B_1, B_2 sabitlerini bulun ve bunları $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S, C_1$ cinsinden ifade edin. **(0.6 puan)**

B3 $x = L$ noktasında $I_i(x)$ için geçerli koşulu yazın. **(0.3 puan)**

B4 $x = 0$ noktasında $I_i(x)$ ve $I_e(x)$ için geçerli koşulu yazın. **(0.6 puan)**

B5 Toplam akımı I bulun ve bunu $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$ cinsinden ifade edin. Akımın sonlu kaldığını varsayın. **(1.2 puan)**

Townsend katsayısı α sabit olsun. Tüpün uzunluğu belirli bir kritik değerden büyük olduğunda, yani $L > L_{\text{cr}}$ olduğunda, dış iyonlaştırıcı kapatılabilir ve deşarj kendiliğinden sürer hâle gelir.

B6 L_{cr} değerini bulun ve bunu $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$ cinsinden ifade edin. **(0.5 puan)**

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Aşağıdaki akımlar büyüklükleri belirtir ve $U \geq 0$ 'dır.

• **A1**

$$n_0 = 0, \quad a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}, \quad b = \sqrt{r Z_{\text{ext}}}.$$

• **A2**

$$n_e = 2.0 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3} = 2.0 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}.$$

• **A3**, belirtilen düzgün yoğunluklu toplama yaklaşımı kullanıldığında:

$$I = \frac{e\beta S U}{rL} \left[\sqrt{\frac{\beta^2 U^2}{L^4} + 4r Z_{\text{ext}}} - \frac{\beta U}{L^2} \right].$$

• **A4**

$$\rho_{\text{gas}} = \frac{1}{2e\beta} \sqrt{\frac{r}{Z_{\text{ext}}}}.$$

• B1

$$A_1 = \alpha, \quad A_2 = -\frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}.$$

• B2

$$B_1 = -C_1, \quad B_2 = \alpha.$$

• B3

$$I_i(L) = 0.$$

• B4

$$I_e(0) = \gamma I_i(0).$$

• B5

$$I = \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha} \frac{(1 + \gamma)(e^{\alpha L} - 1)}{1 - \gamma(e^{\alpha L} - 1)}.$$

$Z_{\text{ext}} > 0$ için fiziksel olarak anlamlı, sonlu bir kararlı durum çözümü,

$$\gamma(e^{\alpha L} - 1) < 1.$$

koşulunu gerektirir.

• B6, $\alpha > 0, \gamma > 0$ için:

$$L_{\text{cr}} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right).$$

Çözüm

A1. Taşıyıcı yoğunluğunun artışı

İyonlaşma her olayda bir elektron ve bir iyon oluştururken, yeniden birleşme her birinden bir tane ortadan kaldırır. Başlangıç yoğunlukları eşit olduğundan, yoğunlukları eşit kalır:

$$n_e(t) = n_i(t) = n(t).$$

Dolayısıyla birim hacimdeki parçacık dengesi,

$$\frac{dn}{dt} = Z_{\text{ext}} - rn^2, \quad n(0) = 0.$$

şeklindedir. Verilen ifade $n(0) = n_0$ sonucunu verir; dolayısıyla

$$n_0 = 0.$$

Denge denkleminde $n = a \tanh(bt)$ yerine konulursa,

$$ab [1 - \tanh^2(bt)] = Z_{\text{ext}} - ra^2 \tanh^2(bt).$$

Sabit terimler ve $\tanh^2(bt)$ katsayıları eşleştirildiğinde,

$$ab = Z_{\text{ext}}, \quad ab = ra^2.$$

a, b pozitif alınır,

$$a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}, \quad b = \sqrt{rZ_{\text{ext}}}.$$

Böylece

$$n_e(t) = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}} \tanh\left(\sqrt{rZ_{\text{ext}}} t\right).$$

Başlangıçtaki eğimi Z_{ext} , limit yoğunluğu ise üretim–yeniden birleşme dengesinin gerektirdiği gibi $\sqrt{Z_{\text{ext}}/r}$ 'dir. a ve b 'nin işaretlerinin aynı anda ters çevrilmesi aynı fonksiyonu tanımlar.

A2. İki iyonlaştırıcı

İyonlaştırıcıların ayrı ayrı üretim hızları Z_1 ve Z_2 olsun. Dengede,

$$Z_1 = rn_{e1}^2, \quad Z_2 = rn_{e2}^2.$$

Her iki iyonlaştırıcı çalıştığında bağımsız üretim hızları toplanır:

$$rn_e^2 = Z_1 + Z_2 = r(n_{e1}^2 + n_{e2}^2).$$

Bunun sonucunda,

$$n_e = \sqrt{n_{e1}^2 + n_{e2}^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}.$$

Dolayısıyla,

$$n_e = 2.0 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3} = 2.0 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}.$$

Yeniden birleşme hızı yoğunluğun karesiyle orantılı olduğundan yoğunlukların kendileri toplanmaz.

A3. Yeniden birleşme ve toplama varlığında kararlı durum akımı

Kenar etkileri ve taşıyıcıların alanı ihmal edildiğinde,

$$E = \frac{U}{L}, \quad v = \frac{\beta U}{L}.$$

Belirtilen düzgün yoğunluk yaklaşımını SL hacmine uygulayalım. dt süresinde, toplayıcı elektrot $n_e Sv dt$ elektron uzaklaştırır; karşı elektrot ise $n_i Sv dt$ iyon uzaklaştırır. Kararlı durumdaki parçacık denge denklemleri şöyledir:

$$\begin{aligned} Z_{\text{ext}}SL - rn_en_iSL - n_eSv &= 0, \\ Z_{\text{ext}}SL - rn_en_iSL - n_iSv &= 0. \end{aligned}$$

$v > 0$ için denklemler birbirinden çıkarıldığında $n_e = n_i = n$ elde edilir. Dolayısıyla

$$rn^2 + \frac{v}{L}n - Z_{\text{ext}} = 0.$$

Yalnızca negatif olmayan kök fiziksel olarak anlamlıdır:

$$n = \frac{1}{2r} \left[\sqrt{\left(\frac{v}{L}\right)^2 + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{v}{L} \right].$$

Elektronlar ve iyonlar zıt yönlerde hareket etse de yükleri de zıt işaretlidir. Bu nedenle oluşturdıkları konvansiyonel akımlar toplanır:

$$I = eSn_ev + eSn_iv = 2eSnv.$$

Yerine koyma işlemiyle,

$$I = \frac{eSv}{r} \left[\sqrt{\left(\frac{v}{L}\right)^2 + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{v}{L} \right].$$

$v = \beta U/L$ kullanılırsa,

$$I = \frac{e\beta SU}{rL} \left[\sqrt{\frac{\beta^2 U^2}{L^4} + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{\beta U}{L^2} \right].$$

Bu, uzaysal olarak düzgün toplama modelinin doğrudan uygulanmasının sonucudur. Kesin konuşmak gerekirse, yoğunluklar levhalara kadar düzgün kalmaz: elektron yoğunluğu katotta, iyon yoğunluğu ise anotta sıfır olmalıdır. Bu nedenle formül, bu seyrelmiş katmanlar L 'ye göre ince kaldığı sürece güvenilirdir (A4'teki küçük gerilim durumunda olduğu gibi); yüksek gerilimde ise $2eZ_{\text{ext}}SL$ değerine yaklaşır, bu da gerçek doyma akımı $eZ_{\text{ext}}SL$ 'nin iki katıdır.

A4. Küçük gerilimlerde öz direnç

Yeterince küçük gerilimlerde,

$$\frac{\beta U}{L^2} \ll \sqrt{rZ_{\text{ext}}},$$

toplama, üretim–yeniden birleşme dengesini yalnızca az miktarda bozar. En düşük mertebede,

$$n \simeq \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}.$$

Böylece akım gerilimle orantılı hâle gelir:

$$I \simeq 2e\beta \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}} \frac{S}{L} U.$$

Bu ifade,

$$I = \frac{S}{\rho_{\text{gas}} L} U$$

ile karşılaştırıldığında,

$$\rho_{\text{gas}} = \frac{1}{2e\beta} \sqrt{\frac{r}{Z_{\text{ext}}}}.$$

Uzunluk L sadeleşir. Büyüklükler SI birimleriyle alındığında sonuç $\Omega \text{ m}$ birimindedir.

B1. Elektron akımı denklemi

Bölüm B'de yeniden birleşme ihmal edilir. I_e ve I_i 'yi negatif olmayan akım büyüklükleri olarak alalım; böylece

$$I = I_e(x) + I_i(x).$$

Kalınlığı dx olan ince bir dilim ele alalım. Dış iyonlaştırıcı, dilim içinde birim zamanda

$$Z_{\text{ext}} S dx$$

elektron oluşturur. Çiğ çoğalması ise birim zamanda ek olarak

$$\propto \frac{I_e(x)}{e} dx$$

elektron oluşturur. Yeni oluşan elektronlar, dilimden çıkan elektron akımına üretim hızlarının e katı kadar katkıda bulunur. Dolayısıyla,

$$I_e(x + dx) - I_e(x) = [eSZ_{\text{ext}} + \alpha I_e(x)]dx.$$

Diferansiyel biçimde,

$$\frac{dI_e}{dx} = \alpha I_e + eSZ_{\text{ext}}.$$

Sabit $\alpha > 0$ için genel çözüm şöyledir:

$$I_e(x) = C_1 e^{\alpha x} - \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}.$$

Verilen ifadeyle karşılaştırıldığında,

$$\boxed{A_1 = \alpha, \quad A_2 = -\frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}.$$

B2. İyon akımı denklemi

Her iyonlaşma olayı aynı zamanda bir iyon üretir. İyonlar x 'in azaldığı yönde hareket ettiğinden, dilimin sol yüzünden çıkan iyon akımı sağ yüzünden giren iyon akımından büyüktür:

$$I_i(x) - I_i(x + dx) = [eSZ_{\text{ext}} + \alpha I_e(x)]dx.$$

Böylece

$$\frac{dI_i}{dx} = -eSZ_{\text{ext}} - \alpha I_e(x).$$

Elektron akımı için bulunan çözüm kullanıldığında,

$$\frac{dI_i}{dx} = -\alpha C_1 e^{\alpha x},$$

ve integral alındığında,

$$I_i(x) = C_2 - C_1 e^{\alpha x}.$$

Bunun sonucunda,

$$\boxed{B_1 = -C_1, \quad B_2 = \alpha.}$$

İki diferansiyel denklem ayrıca,

$$\frac{d}{dx}(I_e + I_i) = 0,$$

olduğunu gösterir; bu, kararlı durumda yükün korunumunu ifade eder.

B3. Anottaki sınır koşulu

Anot $x = L$ konumundadır. Bu elektrottan gazı iyon girmez ve gazın içinde oluşan iyonlar anottan uzaklaşacak yönde sürüklenir. Dolayısıyla,

$$\boxed{I_i(L) = 0.}$$

Eşdeğer olarak,

$$C_2 = C_1 e^{\alpha L}.$$

B4. Katottaki sınır koşulu

$x = 0$ konumunda iyonların varış hızı $I_i(0)/e$ 'dir. Gelen her iyon ortalama γ elektron serbest bırakır. Dolayısıyla

$$\frac{I_e(0)}{e} = \gamma \frac{I_i(0)}{e},$$

ya da

$$\boxed{I_e(0) = \gamma I_i(0).}$$

B5. Toplam kararlı durum akımı

Kısalık için şu tanımları yapalım:

$$K = \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}, \quad T = e^{\alpha L}.$$

Bu durumda

$$I_e(x) = C_1 e^{\alpha x} - K, \quad I_i(x) = C_2 - C_1 e^{\alpha x}.$$

Anottaki koşuldan,

$$C_2 = C_1 T.$$

Katottaki koşul şu hâle gelir:

$$C_1 - K = \gamma(C_2 - C_1) = \gamma C_1(T - 1).$$

Dolayısıyla,

$$C_1 = \frac{K}{1 - \gamma(T - 1)}.$$

Elektron ve iyon akımları toplandığında,

$$I = C_2 - K = C_1 T - K.$$

C_1 yerine konulup sadeleştirildiğinde,

$$I = K \frac{T - 1 + \gamma(T - 1)}{1 - \gamma(T - 1)}.$$

Böylece

$$\boxed{I = \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha} \frac{(1 + \gamma)(e^{\alpha L} - 1)}{1 - \gamma(e^{\alpha L} - 1)}}.$$

Dış iyonlaşma hızı pozitifken, fiziksel olarak anlamlı, sonlu bir kararlı durum akımı için

$$\boxed{1 - \gamma(e^{\alpha L} - 1) > 0.}$$

koşulu gerekir. Payda sıfır olduğunda doğrusal kararlı durum modeli akımın ıraksadığını öngörür; negatif bir payda ise fiziksel olarak anlamlı olmayan negatif bir akım büyüklüğü verir.

B6. Kendiliğinden süren deşarj için kritik uzunluk

Katottan yayılan bir elektron, çıkış anoda ulaşana kadar çoğalarak

$$e^{\alpha L}$$

elektrona dönüşür. Başlangıçtaki elektron zaten mevcut olduğundan, çıkış

$$e^{\alpha L} - 1$$

yeni elektron–iyon çifti oluşturur.

Yeniden birleşme ihmal edildiğinde bu iyonların tamamı katoda ulaşır. Ortalama olarak

$$\mathcal{R} = \gamma(e^{\alpha L} - 1)$$

ikincil elektron serbest bırakırlar. Bu, bir önceki nesildeki tek bir katot elektronunun ürettiği katot elektronu sayısıdır.

$\mathcal{R} < 1$ ise ardışık nesillerde elektron sayısı azalır ve dış iyonlaşma gereklidir. Her nesil kendisinin yerini tam olarak doldurduğunda eşik değerine ulaşılır:

$$\gamma(e^{\alpha L_{\text{cr}}} - 1) = 1.$$

Çözüldüğünde,

$$L_{\text{cr}} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right).$$

$L > L_{\text{cr}}$ için geri besleme, dış iyonlaştırıcı kaldırıldıktan sonra bile başlangıç deşarjını büyütür. Buradaki doğrusal model deşarjın başlama eşiğini belirler; eşik üzerinde sonlu bir çalışma akımını belirlemek için ek fiziksel etkiler gerekir.

Eşik değerine ne Z_{ext} , ne e , ne de S girer. $\alpha = 0$ veya $\gamma = 0$ ise bu mekanizma herhangi bir sonlu uzunlukta deşarjı sürdüremez.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.