

IPhO 2014

Теоретические задачи и решения · Астана, Казахстан · 3 теоретические задачи с полными решениями

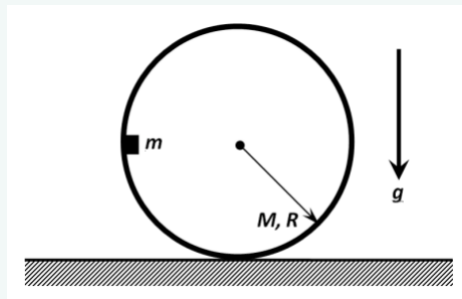
eulersolve.org/ipho/2014/

Задача 1: Три независимые части: шайба в катящемся цилиндре, мыльный пузырь с газом, LC-контур с ключом

Эта задача состоит из трёх независимых частей.

Часть А (3 балла)

Маленькую шайбу массой m осторожно помещают на внутреннюю поверхность тонкостенного полого цилиндра массой M и радиусом R . Первоначально цилиндр покоится на горизонтальной плоскости, а шайба находится на высоте R над плоскостью, как показано на рисунке слева. Найдите силу взаимодействия F между шайбой и цилиндром в момент, когда шайба проходит через низшую точку своей траектории. Считайте, что трение между шайбой и внутренней поверхностью цилиндра отсутствует, а цилиндр движется по плоскости без проскальзывания. Ускорение свободного падения равно g .



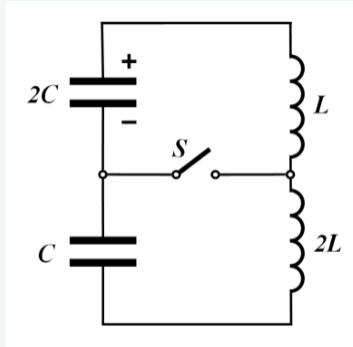
Часть В (3 балла)

Пузырь радиусом $r = 5.00$ см, содержащий двухатомный идеальный газ, имеет мыльную плёнку толщиной $h = 10.0$ μm и находится в вакууме. Поверхностное натяжение мыльной плёнки равно $\sigma = 4.00 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{m}}$, а её плотность — $\rho = 1.10 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. 1) Найдите формулу для молярной теплоёмкости газа в пузыре в процессе, при котором газ нагревают настолько медленно, что пузырь остаётся в механическом равновесии, и вычислите её значение; 2) Найдите формулу для частоты ω малых радиальных колебаний пузыря и вычислите её значение, предполагая, что теплоёмкость мыльной плёнки намного больше теплоёмкости газа в пузыре. Считайте, что тепловое равновесие внутри пузыря устанавливается за время, намного меньшее периода колебаний.

Указание: Лаплас показал, что между внутренней и внешней сторонами искривлённой поверхности существует разность давлений, обусловленная поверхностным натяжением на границе раздела жидкости и газа, причём $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$.

Часть С (3 балла)

Первоначально ключ S в цепи, изображённой на рисунке справа, разомкнут, конденсатор ёмкостью $2C$ несёт электрический заряд q_0 , конденсатор ёмкостью C не заряжен, а в обеих катушках с индуктивностями L и $2L$ соответственно электрические токи отсутствуют. Конденсатор начинает разряжаться, и в момент, когда ток в катушках достигает максимального значения, ключ S мгновенно замыкают. Найдите максимальный ток $I_{\max}$ через ключ S после его замыкания.



Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- Часть А:

$$F = mg \left(3 + \frac{m}{M} \right).$$

- Часть В, 1): Обозначая универсальную газовую постоянную через $\mathcal{R}$, получаем

$$C_{\text{mol}} = 4\mathcal{R} = 33.3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

- Часть В, 2):

$$\omega = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho h r^2}} = 1.08 \times 10^2 \text{ rad s}^{-1}.$$

Соответствующая обычная частота равна $f = \omega/(2\pi) = 17.2 \text{ Hz}$.

- Часть С:

$$I_{\max} = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

Решение

Часть А

Пусть V — горизонтальная скорость центра цилиндра, а v_x — горизонтальная скорость шайбы; для обеих скоростей положительным считаем направление вправо. Момент инерции цилиндра равен

$$I_{\text{cyl}} = MR^2.$$

Сначала получим соотношение между этими скоростями. Обозначим через f проекцию горизонтальной силы трения, действующей на цилиндр со стороны плоскости, с учётом её знака. Нормальная сила, действующая со стороны шайбы, проходит через центр цилиндра, поэтому только сила f создаёт момент относительно этого центра.

Считая положительным направление угловой скорости против часовой стрелки, из условия качения без проскальзывания получаем

$$\Omega_{\text{cyl}} = -\frac{V}{R}.$$

Следовательно,

$$I_{\text{cyl}}\dot{\Omega}_{\text{cyl}} = Rf \implies f = -M\dot{V}.$$

Для системы, состоящей из шайбы и цилиндра, уравнение движения в горизонтальном направлении имеет вид

$$m\dot{v}_x + M\dot{V} = f.$$

Объединяя эти уравнения и учитывая, что первоначально система покоилась, получаем

$$\boxed{mv_x + 2MV = 0}.$$

В низшей точке скорость шайбы горизонтальна; обозначим её через v . Её скорость относительно центра цилиндра равна

$$u = v - V.$$

Таким образом,

$$V = -\frac{m}{2M}v, \quad u = \frac{2M+m}{2M}v.$$

Механическая энергия сохраняется: трение в месте контакта шайбы с цилиндром отсутствует, а сила трения покоя в неподвижной точке контакта с плоскостью работы не совершает. Шайба опускается на высоту R , поэтому

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + MV^2.$$

Подставляя соотношение между скоростями, получаем

$$v^2 = \frac{4M}{2M+m}gR, \quad u^2 = \frac{2M+m}{M}gR.$$

Чтобы найти вертикальное ускорение, обозначим через θ угловое отклонение шайбы от вертикали, направленной вниз. Её высота равна

$$y = R - R\cos\theta.$$

В нижней точке $\theta = 0$ и $u = R\dot{\theta}$, поэтому

$$\ddot{y} = R\dot{\theta}^2 = \frac{u^2}{R}.$$

В этой точке сила, действующая на шайбу со стороны цилиндра, направлена вверх. Поэтому второй закон Ньютона даёт

$$F - mg = m \frac{u^2}{R}.$$

Отсюда

$$F = mg \left(3 + \frac{m}{M} \right).$$

Часть В, 1)

Будем считать толщину мыльной плёнки малой по сравнению с радиусом пузыря, а её поверхностное натяжение — постоянным. У мыльной плёнки **две** границы раздела жидкости и газа. Лапласовские скачки давления на них складываются, поэтому условие равновесия в вакууме имеет вид

$$p = \frac{4\sigma}{r}.$$

Пусть n — количество вещества в молях, а $\mathcal{R}$ — универсальная газовая постоянная. Используя уравнение состояния идеального газа,

$$pV = n\mathcal{R}T, \quad V = \frac{4\pi r^3}{3},$$

получаем

$$n\mathcal{R}T = \frac{16\pi\sigma}{3}r^2.$$

Таким образом, в заданном медленном равновесном процессе

$$T \propto r^2, \quad \frac{dV}{V} = 3 \frac{dr}{r} = \frac{3}{2} \frac{dT}{T}.$$

Следовательно, газ совершает работу

$$p dV = \frac{3}{2} \frac{pV}{T} dT = \frac{3}{2} n\mathcal{R} dT.$$

Для двухатомного идеального газа с возбуждёнными вращательными и невозбуждёнными колебательными степенями свободы

$$dU = \frac{5}{2} n\mathcal{R} dT.$$

Первое начало термодинамики, применённое к газу, даёт

$$\delta Q = dU + p dV = \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \right) n\mathcal{R} dT.$$

Поэтому его молярная теплоёмкость в данном процессе равна

$$C_{\text{mol}} = \frac{\delta Q}{n dT} = 4\mathcal{R}.$$

Используя $\mathcal{R} = 8.31446 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$, получаем

$$C_{\text{mol}} = 33.3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Часть В, 2)

Теплоёмкость плёнки намного больше теплоёмкости газа, а тепловое равновесие устанавливается быстро. Поэтому во время колебания плёнка играет роль термостата, так что сжатие и расширение газа происходят приблизительно **изотермически**.

Пусть равновесный радиус равен r , а мгновенный радиус запишем в виде

$$s = r + \xi, \quad |\xi| \ll r.$$

При равновесном давлении $p_0 = 4\sigma/r$ закон изотермического процесса для газа даёт

$$p(s) = p_0 \left(\frac{r}{s} \right)^3.$$

Результирующее давление на плёнку, направленное наружу, равно

$$p(s) - \frac{4\sigma}{s}.$$

Разлагая до первого порядка по ξ , получаем

$$p(s) \simeq p_0 \left(1 - \frac{3\xi}{r} \right), \quad \frac{4\sigma}{s} \simeq \frac{4\sigma}{r} \left(1 - \frac{\xi}{r} \right),$$

поэтому

$$p(s) - \frac{4\sigma}{s} \simeq -\frac{8\sigma}{r^2} \xi.$$

Постоянная масса плёнки, выраженная через её размеры в равновесном состоянии, равна

$$m_f = 4\pi r^2 \rho h.$$

Пренебрегая инерцией газа и диссипативными эффектами, в первом порядке получаем уравнение радиального движения

$$m_f \ddot{\xi} = 4\pi r^2 \left(-\frac{8\sigma}{r^2} \xi \right) = -32\pi\sigma\xi.$$

Таким образом,

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0, \quad \boxed{\omega^2 = \frac{32\pi\sigma}{m_f} = \frac{8\sigma}{\rho h r^2}}.$$

Переводя заданные величины в единицы СИ,

$$r = 5.00 \times 10^{-2} \text{ м}, \quad h = 1.00 \times 10^{-5} \text{ м}, \quad \rho = 1.10 \times 10^3 \text{ кг м}^{-3},$$

находим

$$\omega = \sqrt{\frac{8(4.00 \times 10^{-2})}{(1.10 \times 10^3)(1.00 \times 10^{-5})(5.00 \times 10^{-2})^2}}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\omega = 1.08 \times 10^2 \text{ рад с}^{-1}}, \quad \boxed{f = 17.2 \text{ Гц}}.$$

Часть С

До замыкания ключа через обе катушки течёт один и тот же ток i . Пусть q — заряд, прошедший вниз через катушки с начала разряда, так что $i = \dot{q}$.

Тогда заряд верхней обкладки конденсатора ёмкостью $2C$ равен $q_0 - q$, а заряд верхней обкладки конденсатора ёмкостью C равен $-q$. Определяя напряжение на каждом конденсаторе как разность потенциалов верхней и нижней обкладок, получаем

$$U_1 = \frac{q_0 - q}{2C}, \quad U_2 = -\frac{q}{C}.$$

Второе правило Кирхгофа даёт

$$3L\dot{i} = U_1 + U_2 = \frac{q_0 - 3q}{2C}.$$

При максимальном токе $\dot{i} = 0$. Следовательно, в момент замыкания ключа

$$q = \frac{q_0}{3}, \quad \boxed{U_1 = \frac{q_0}{3C}, \quad U_2 = -\frac{q_0}{3C}}.$$

Теперь примем момент замыкания ключа за $t = 0$. Верхние конденсатор и катушка образуют один LC-контур, а нижняя пара — другой. Их угловые частоты равны:

$$\Omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L(2C)}}, \quad \Omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(2L)C}},$$

так что

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}.$$

Пусть i_1 и i_2 — токи в верхней и нижней катушках; для обоих токов положительным считаем направление вниз. Для них справедливы уравнения

$$\begin{aligned} L\dot{i}_1 &= U_1, & 2C\dot{U}_1 &= -i_1, \\ 2L\dot{i}_2 &= U_2, & C\dot{U}_2 &= -i_2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\ddot{i}_1 + \Omega^2 i_1 = 0, \quad \ddot{i}_2 + \Omega^2 i_2 = 0.$$

Будем считать ток через ключ положительным в направлении от точки соединения катушек к точке соединения конденсаторов. Первое правило Кирхгофа даёт

$$i_S = i_1 - i_2,$$

и поэтому

$$\ddot{i}_S + \Omega^2 i_S = 0.$$

Токи в катушках непрерывны в момент замыкания ключа и до него были равны, поэтому

$$i_S(0) = 0.$$

Напряжения на конденсаторах также непрерывны, откуда

$$\dot{i}_S(0) = \frac{U_1(0)}{L} - \frac{U_2(0)}{2L} = \frac{q_0}{3LC} + \frac{q_0}{6LC} = \frac{q_0}{2LC}.$$

В результате ток через ключ имеет вид

$$i_S(t) = \frac{\dot{i}_S(0)}{\Omega} \sin(\Omega t) = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}}\right).$$

Таким образом, его максимальное значение по модулю равно

$$I_{\max} = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Уравнение состояния Ван-дер-Ваальса

В хорошо известной модели идеального газа, уравнение состояния которого подчиняется закону Клапейрона — Менделеева, не учитываются следующие важные физические эффекты. Во-первых, молекулы реального газа имеют конечные размеры, а во-вторых, они взаимодействуют друг с другом. Во всех частях этой задачи рассматривается *один моль воды*.

Часть А. Уравнение состояния неидеального газа (2 балла)

С учётом конечных размеров молекул уравнение состояния газа принимает вид

$$P(V - b) = RT, \quad (1)$$

где P, V, T — соответственно давление газа, его молярный объём и температура, R — универсальная газовая постоянная, а b — некоторая постоянная, учитывающая исключённый объём.

A1 Оцените b и выразите её через диаметр молекул d . (0.3 балла)

Учитывая силы межмолекулярного притяжения, Ван-дер-Ваальс предложил следующее уравнение состояния, которое хорошо описывает как газообразное, так и жидкое состояние вещества:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \quad (2)$$

Здесь a — ещё одна постоянная, характеризующая вещество.

При температурах T ниже некоторого критического значения T_c изотерма уравнения (2) имеет вид немонотонной кривой 1, показанной на рисунке 1; её называют изотермой Ван-дер-Ваальса. На том же рисунке кривая 2 показывает изотерму идеального газа при той же температуре. Реальная изотерма отличается от изотермы Ван-дер-Ваальса наличием прямолинейного участка AB , проведённого при некотором постоянном давлении P_{LG} . Этот участок расположен между объёмами V_L и V_G и соответствует равновесию жидкой фазы (обозначенной L) и газообразной фазы (обозначенной G). Исходя из второго начала термодинамики, Дж. Максвелл показал, что давление P_{LG} следует выбирать так, чтобы площади I и II , показанные на рисунке 1, были равны.

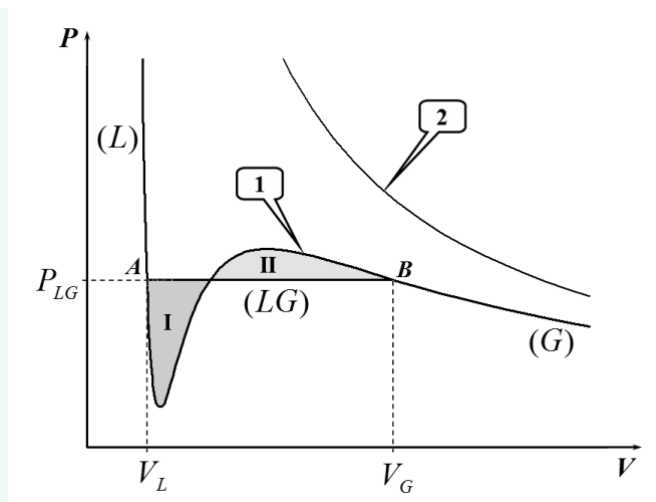


Рисунок 1. Изотерма Ван-дер-Ваальса для газа/жидкости (кривая 1) и изотерма идеального газа (кривая 2).

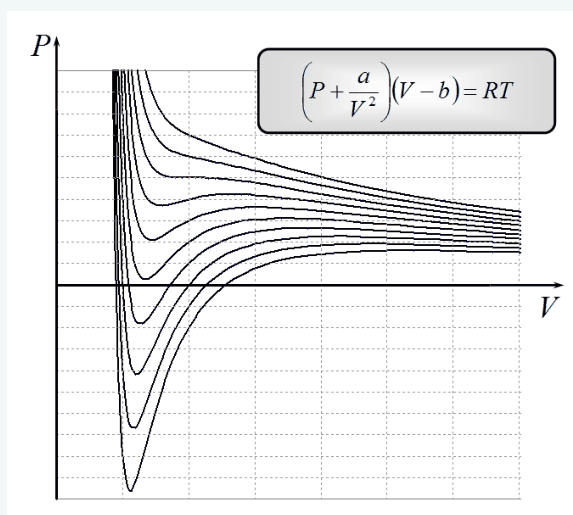


Рисунок 2. Несколько изотерм уравнения состояния Ван-дер-Ваальса.

С повышением температуры прямолинейный участок AB изотермы стягивается в одну точку, когда температура и давление достигают некоторых значений T_c и $P_{LG} = P_c$ соответственно. Параметры P_c и T_c называются критическими и могут быть измерены экспериментально с высокой точностью.

A2	Выразите постоянные Ван-дер-Ваальса a и b через T_c и P_c . (1.3 балла)
A3	Для воды $T_c = 647$ К и $P_c = 2.2 \cdot 10^7$ Па. Вычислите a_w и b_w для воды. (0.2 балла)
A4	Оцените диаметр молекул воды d_w . (0.2 балла)

Часть В. Свойства газа и жидкости (6 баллов)

В этой части задачи рассматриваются свойства воды в газообразном и жидком состояниях при температуре $T = 100$ °С. Известно, что давление насыщенного пара при этой температуре равно $p_{LG} = p_0 = 1.0 \cdot 10^5$ Па, а молярная масса воды составляет $\mu = 1.8 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{mole}}$.

Газообразное состояние

При описании свойств воды в газообразном состоянии разумно считать, что выполняется неравенство $V_G \gg b$.

B1 Выведите формулу для объёма V_G и выразите его через R, T, p_0 , и a . **(0.8 балла)**

Практически такой же объём V_{G0} можно приближённо оценить с помощью уравнения состояния идеального газа.

B2 Оцените в процентах относительное уменьшение объёма газа, обусловленное межмолекулярными силами, $\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}}$. **(0.3 балла)**

Если объём системы становится меньше V_G , газ начинает конденсироваться. Однако тщательно очищенный газ может оставаться в механически метастабильном состоянии (называемом переохлаждённым паром), пока его объём не достигнет некоторого значения $V_{G\min}$.

Условие механической устойчивости переохлаждённого газа при постоянной температуре записывается в виде: $\frac{dP}{dV} < 0$.

B3 Найдите и оцените, во сколько раз можно уменьшить объём водяного пара, сохранив его метастабильное состояние. Другими словами, чему равно $V_G/V_{G\min}$? **(0.7 балла)**

Жидкое состояние

При описании воды в жидком состоянии с помощью уравнения Ван-дер-Ваальса разумно считать, что выполняется неравенство $P \ll a/V^2$.

B4 Выразите объём жидкой воды V_L через a, b, R , и T . **(1.0 балла)**

Полагая $bRT \ll a$, найдите следующие характеристики воды. Не удивляйтесь, если некоторые вычисленные значения не совпадут с хорошо известными табличными значениями!

B5 Выразите плотность жидкой воды ρ_L через необходимые величины из набора μ, a, b, R и оцените её. **(0.5 балла)**

B6 Выразите коэффициент объёмного теплового расширения $\alpha = \frac{1}{V_L} \frac{\Delta V_L}{\Delta T}$ через a, b, R и оцените его. **(0.6 балла)**

B7 Выразите удельную теплоту парообразования воды L через μ, a, b, R и оцените её. **(1.1 балла)**

B8 Рассматривая мономолекулярный слой воды, оцените коэффициент поверхностного натяжения воды σ . **(1.2 балла)**

Часть С. Система жидкость–газ (3 балла)

Из правила Максвелла (равенства площадей, с помощью простого интегрирования) и уравнения состояния Ван-дер-Ваальса с учётом приближений, принятых в части В, можно показать, что давление насыщенного пара p_{LG} зависит от температуры T следующим образом:

$$\ln p_{LG} = A + \frac{B}{T}, \quad (3)$$

где A и B — некоторые постоянные, которые можно выразить через a и b как $A = \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) - 1$; $B = -\frac{a}{bR}$.

У. Томсон показал, что давление насыщенного пара зависит от кривизны поверхности жидкости. Рассмотрим жидкость, которая не смачивает материал капилляра (краевой угол 180°). При погружении капилляра в жидкость её уровень в капилляре понижается до некоторого значения вследствие поверхностного натяжения (см. рисунок 3).

- C1 Найдите малое изменение давления Δp_T насыщенного пара над искривлённой поверхностью жидкости и выразите его через плотность пара ρ_s , плотность жидкости ρ_L , коэффициент поверхностного натяжения σ и радиус кривизны поверхности r . **(1.3 балла)**

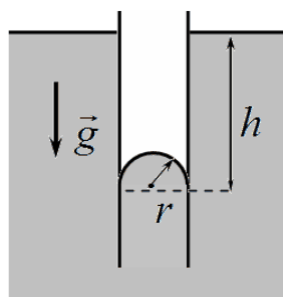


Рисунок 3. Капилляр, погружённый в жидкость, которая не смачивает его материал

Метастабильные состояния, рассмотренные в пункте В3, широко используются в реальных экспериментальных установках, например в камере Вильсона, предназначенной для регистрации элементарных частиц. Они также встречаются в природных явлениях, таких как образование утренней росы. Переохлаждённый пар конденсируется с образованием капель жидкости. Очень маленькие капли быстро испаряются, а достаточно крупные могут продолжать расти.

- C2 Предположим, что при вечерней температуре $t_e = 20^\circ\text{C}$ водяной пар в воздухе был насыщенным, а к утру температура окружающей среды понизилась на небольшую величину $\Delta t = 5.0^\circ\text{C}$. Считая, что давление пара осталось неизменным, оцените минимальный радиус капель, которые могут расти. Используйте табличное значение коэффициента поверхностного натяжения воды $\sigma = 7.3 \cdot 10^{-2} \text{ N/м}$. **(1.7 балла)**

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

В численных расчётах используются $R = 8.31 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$, $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, а в части В — $T = 373 \text{ K}$. Все объёмы являются молярными. Приведённые ниже молекулярные оценки используют стандартное определение исключённого объёма в модели твёрдых сфер; их зависимость от модели обсуждается в решениях пунктов А1, А4 и В8.

- **A1:** $b \sim N_A d^3$; оценка в модели твёрдых сфер имеет вид

$$b = \frac{2\pi}{3} N_A d^3.$$

• A2:

$$a = \frac{27R^2T_c^2}{64P_c}, \quad b = \frac{RT_c}{8P_c}.$$

• A3:

$$a_w \simeq 0.55 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}, \quad b_w \simeq 3.1 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

• A4:

$$d_w = \left(\frac{3b_w}{2\pi N_A} \right)^{1/3} \simeq 2.9 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

• B1:

$$V_G = \frac{RT + \sqrt{R^2T^2 - 4ap_0}}{2p_0} \simeq 3.08 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

• B2:

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2T^2}}}{2} \simeq 0.58\%.$$

• B3:

$$V_{G\min} = \frac{2a}{RT} \simeq 3.6 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}, \quad \frac{V_G}{V_{G\min}} \simeq 86.$$

• B4:

$$V_L = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4abRT}}{2RT} = \frac{2b}{1 + \sqrt{1 - \frac{4bRT}{a}}}.$$

• B5:

$$\rho_L \simeq \frac{\mu}{b} \simeq 5.9 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}.$$

• B6:

$$\alpha \simeq \frac{bR}{a} \simeq 4.6 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}.$$

• B7:

$$L \simeq \frac{a}{\mu b} \simeq 1.0 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}.$$

- **B8:** Оценка по мономолекулярному слою, в котором отсутствует половина вклада энергии сцепления, характерного для объёма жидкости, даёт

$$\sigma \sim \frac{1}{2} \rho_L L d_w = \frac{a d_w}{2 b^2} \simeq 8.6 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}.$$

Надёжность этого результата ограничивается оценкой порядка величины:
 $\sigma \sim 10^{-1} \text{ N m}^{-1}$.

- **C1:** Для показанной выпуклой поверхности жидкости

$$\Delta p_T = \frac{2\sigma\rho_s}{r(\rho_L - \rho_s)} \simeq \frac{2\sigma\rho_s}{r\rho_L} > 0.$$

- **C2:** При $T_e = 293 \text{ K}$ и $\Delta T = 5.0 \text{ K}$

$$r_{\min} \simeq \frac{2\sigma T_e}{\rho_L L \Delta T} = \frac{2\sigma b^2 T_e}{a \Delta T} \simeq 1.4 \times 10^{-8} \text{ m} = 14 \text{ nm}.$$

Капли с радиусом больше этого критического значения могут расти.

Решение

A1. Размер молекул и исключённый объём

Представим молекулы в виде твёрдых сфер диаметра d . Центр одной молекулы не может находиться внутри сферы радиуса d с центром в другой молекуле. Поэтому исключённый объём, связанный с парой молекул, равен

$$v_{\text{ex}} = \frac{4\pi d^3}{3}.$$

В стандартном расчёте исключённого объёма для разреженного газа твёрдых сфер каждая пара учитывается один раз, так что параметр исключённого объёма в расчёте на одну молекулу равен $v_{\text{ex}}/2$. Для одного моля

$$b = \frac{1}{2} N_A v_{\text{ex}} = \frac{2\pi}{3} N_A d^3.$$

Таким образом, обычный параметр Ван-дер-Ваальса b в четыре раза больше суммарного геометрического объёма сферических молекул. Независимо от этого геометрического множителя, искомая оценка порядка величины имеет вид $b \sim N_A d^3$.

A2. Условия в критической точке

Запишем уравнение состояния в виде

$$P(V, T) = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}.$$

В критической точке два экстремума докритической изотермы сливаются в точку перегиба с горизонтальной касательной. Поэтому

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T_c, V_c} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_{T_c, V_c} = 0.$$

Эти условия дают

$$\frac{RT_c}{(V_c - b)^2} = \frac{2a}{V_c^3}, \quad \frac{RT_c}{(V_c - b)^3} = \frac{3a}{V_c^4}.$$

Разделив второе уравнение на первое, получаем

$$\frac{1}{V_c - b} = \frac{3}{2V_c},$$

откуда

$$V_c = 3b.$$

Подстановка в условие обращения первой производной в нуль и в уравнение состояния даёт

$$RT_c = \frac{8a}{27b}, \quad P_c = \frac{a}{27b^2}.$$

Выражая постоянные, получаем

$$b = \frac{RT_c}{8P_c}, \quad a = \frac{27R^2T_c^2}{64P_c}.$$

А3. Постоянные для воды

Используя заданные критические параметры, получаем

$$b_w = \frac{8.31(647)}{8(2.2 \times 10^7)} = 3.055 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1},$$

и

$$a_w = \frac{27(8.31)^2(647)^2}{64(2.2 \times 10^7)} = 0.5543 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}.$$

С двумя значащими цифрами

$$a_w \simeq 0.55 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}, \quad b_w \simeq 3.1 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

В дальнейших расчётах сохраняются неокруглённые значения.

А4. Диаметр молекулы

Из А1

$$d_w = \left(\frac{3b_w}{2\pi N_A} \right)^{1/3}.$$

Следовательно,

$$d_w \simeq 2.9 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.29 \text{ nm}.$$

Это эффективный диаметр в рамках модели твёрдых сфер.

В1. Объём насыщенного пара

Применим предписанное приближение $V_G \gg b$:

$$\left(p_0 + \frac{a}{V_G^2} \right) V_G = RT.$$

Умножение на V_G даёт

$$p_0 V_G^2 - RT V_G + a = 0.$$

Газообразному состоянию соответствует больший корень, который стремится к RT/p_0 при $a \rightarrow 0$:

$$V_G = \frac{RT + \sqrt{R^2 T^2 - 4ap_0}}{2p_0}.$$

При $T = 373 \text{ K}$

$$V_G = 0.0308164 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1} \simeq 3.08 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

При слабом притяжении разложение квадратного корня также даёт

$$V_G \simeq \frac{RT}{p_0} - \frac{a}{RT}.$$

В2. Относительное уменьшение объёма

Объём идеального газа равен

$$V_{G0} = \frac{RT}{p_0} = 0.0309963 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

Используя В1, получаем

$$\frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2 T^2}} \right).$$

Численно

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = 5.803 \times 10^{-3},$$

так что

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} \simeq 0.58\%.$$

В первом порядке эта доля равна $ap_0/(R^2 T^2)$.

В3. Предел метастабильного сжатия

В рамках того же приближения для газа

$$P(V) = \frac{RT}{V} - \frac{a}{V^2}.$$

Для механической устойчивости необходимо

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{RT}{V^2} + \frac{2a}{V^3} = \frac{2a - RTV}{V^3} < 0.$$

Таким образом, газ остаётся механически устойчивым по отношению к малым возмущениям объёма при

$$V > \frac{2a}{RT}.$$

Следовательно, предельный объём, соответствующий границе устойчивости, равен

$$V_{G \min} = \frac{2a}{RT} = 3.58 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

Степень сжатия равна

$$\frac{V_G}{V_{G \min}} = \frac{RT}{2a} \frac{RT + \sqrt{R^2 T^2 - 4ap_0}}{2p_0} \simeq 86.2.$$

Поэтому

$$\frac{V_G}{V_{G \min}} \simeq 86.$$

При предельном объёме $V_{G \min}/b \simeq 12$, так что результат представляет собой оценку в рамках предписанного приближения, в котором пренебрегают b .

В4. Объём жидкости

Для жидкости пренебрежём P по сравнению с a/V_L^2 :

$$\frac{a}{V_L^2}(V_L - b) = RT.$$

Следовательно,

$$RTV_L^2 - aV_L + ab = 0.$$

Жидкости соответствует корень с меньшим объёмом, который стремится к b при $T \rightarrow 0$:

$$V_L = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4abRT}}{2RT} = \frac{2b}{1 + \sqrt{1 - 4bRT/a}}.$$

При 373 К это выражение даёт приближённо

$$V_L = 3.91 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

Для остальных вопросов введём предусмотренный условием малый параметр

$$\varepsilon = \frac{bRT}{a} \ll 1.$$

Разлагая корень, соответствующий жидкости, получаем

$$V_L = b \left(1 + \frac{bRT}{a} + O(\varepsilon^2) \right).$$

Для заданных параметров воды $\varepsilon \simeq 0.17$, поэтому следующие результаты в ведущем порядке являются приближёнными.

В5. Плотность жидкости

В ведущем порядке $V_L \simeq b$. Поскольку масса одного моля равна μ ,

$$\rho_L = \frac{\mu}{V_L} \simeq \frac{\mu}{b}.$$

Численно

$$\rho_L \simeq \frac{1.8 \times 10^{-2}}{3.055 \times 10^{-5}} = 5.9 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}.$$

Это плотность, предсказываемая указанным приближением.

В6. Коэффициент теплового расширения

Сохраняя первый зависящий от температуры член из В4, получаем

$$V_L \simeq b + \frac{b^2 RT}{a}.$$

Таким образом, при постоянном внешнем давлении в рамках используемого приближения

$$\frac{\partial V_L}{\partial T} \simeq \frac{b^2 R}{a}.$$

Используя в знаменателе $V_L \simeq b$, получаем

$$\alpha = \frac{1}{V_L} \left(\frac{\partial V_L}{\partial T} \right)_P \simeq \frac{bR}{a}.$$

Численно

$$\alpha \simeq 4.6 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}.$$

В7. Удельная теплота парообразования

Термодинамическое тождество

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P$$

связывает внутреннюю энергию с уравнением состояния. Для вещества, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса,

$$T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P = \frac{RT}{V-b} - \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) = \frac{a}{V^2}.$$

Следовательно, молярная внутренняя энергия имеет вид

$$U(T, V) = U_0(T) - \frac{a}{V}.$$

При одной и той же температуре увеличение внутренней энергии при парообразовании равно

$$U_G - U_L = a \left(\frac{1}{V_L} - \frac{1}{V_G} \right).$$

Парообразование при постоянном давлении также требует совершения работы расширения, поэтому подведённая теплота в расчёте на один моль равна

$$\mu L = a \left(\frac{1}{V_L} - \frac{1}{V_G} \right) + p_0(V_G - V_L).$$

Поскольку $V_G \gg V_L \simeq b$ и $RT \ll a/b$, ведущий вклад равен a/b . Поэтому

$$L \simeq \frac{a}{\mu b}.$$

Численно

$$L \simeq 1.0 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}.$$

Пренебрежение температурными поправками согласованно: сохранение $V_L \simeq b(1 + bRT/a)$ даёт $a/V_L \simeq a/b - RT$, причём поправка $-RT$ компенсирует ведущий член работы расширения $p_0 V_G \simeq RT$.

В8. Поверхностное натяжение по модели мономолекулярного слоя

Коэффициент поверхностного натяжения равен поверхностной свободной энергии на единицу площади. Для энергетической оценки пренебрежём вкладом поверхностной энтропии и используем энергию сцепления, найденную в В7.

Энергия сцепления в объёме жидкости в расчёте на одну молекулу приближённо равна

$$E_{\text{coh}} \simeq \frac{\mu L}{N_A} \simeq \frac{a}{b N_A}.$$

У молекулы вблизи свободной поверхности отсутствуют соседи со стороны пара. В простой оценке приходящаяся на неё энергия сцепления уменьшается примерно наполовину, что даёт избыточную поверхностную энергию порядка $E_{\text{coh}}/2$.

Поверхностный слой площадью S и толщиной d_w содержит приблизительно

$$N_{\text{layer}} \simeq \frac{\rho_L S d_w}{\mu} N_A$$

молекул. Поэтому его избыточная энергия равна

$$E_{\text{surface}} \sim \frac{1}{2} E_{\text{coh}} N_{\text{layer}} = \frac{1}{2} \rho_L L d_w S.$$

Приравнявая её к σS , получаем

$$\sigma \sim \frac{1}{2} \rho_L L d_w = \frac{a d_w}{2 b^2}.$$

Используя полученные выше оценки, находим

$$\sigma \sim 8.6 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}.$$

Модель мономолекулярного слоя определяет порядок величины, $\sigma \sim 10^{-1} \text{ N m}^{-1}$; численный множитель зависит от предполагаемого расположения молекул и отсутствующих взаимодействий.

С1. Давление насыщенного пара над искривлённой поверхностью

Пусть p_s — давление насыщенного пара над плоской поверхностью жидкости. Мениск несмачивающей жидкости выпуклый в сторону пара и расположен на глубине h ниже этой поверхности.

При малой разности высот из условия гидростатического равновесия получаем давления на уровне мениска:

$$p_\ell = p_s + \rho_L g h, \quad p_v = p_s + \rho_s g h.$$

Для сферического мениска выполняется формула Лапласа для разности давлений

$$p_\ell - p_v = \frac{2\sigma}{r}.$$

Следовательно,

$$(\rho_L - \rho_s)gh = \frac{2\sigma}{r}.$$

Изменение равновесного давления пара равно

$$\Delta p_T = p_v - p_s = \rho_s gh.$$

Исключая h , получаем

$$\Delta p_T = \frac{2\sigma\rho_s}{r(\rho_L - \rho_s)} \simeq \frac{2\sigma\rho_s}{r\rho_L}.$$

В последнем переходе использовано $\rho_s \ll \rho_L$. Изменение положительно: над выпуклой поверхностью жидкости равновесное давление пара должно быть выше, чем над плоской.

C2. Минимальный радиус растущей капли

Обозначим через $p_s(T)$ давление насыщенного пара над плоской поверхностью. Первоначально фактическое давление пара равно

$$p = p_s(T_e), \quad T_e = 293 \text{ K}.$$

После охлаждения на $\Delta T = 5.0 \text{ K}$ фактическое давление остаётся неизменным, а давление насыщенного пара над плоской поверхностью понижается. В первом порядке

$$\Delta p_{\text{cool}} = p_s(T_e) - p_s(T_e - \Delta T) \simeq \left. \frac{dp_s}{dT} \right|_{T_e} \Delta T.$$

Из уравнения (3)

$$\frac{1}{p_s} \frac{dp_s}{dT} = -\frac{B}{T^2} = \frac{a}{bRT^2}.$$

Таким образом,

$$\Delta p_{\text{cool}} \simeq p_s \frac{a\Delta T}{bRT_e^2}.$$

Капля может расти, если давление окружающего пара превышает её равновесное давление, зависящее от кривизны. При критическом радиусе два изменения давления равны:

$$p_s \frac{a\Delta T}{bRT_e^2} = \frac{2\sigma\rho_s}{\rho_L r_{\min}}.$$

Считая разреженный пар идеальным, получаем

$$\rho_s \simeq \frac{\mu p_s}{RT_e}.$$

Подставляя и сокращая p_s , находим

$$r_{\min} \simeq \frac{2\sigma\mu bT_e}{\rho_L a\Delta T}.$$

Используя результаты части В, $\rho_L \simeq \mu/b$ и $L \simeq a/(\mu b)$, получаем

$$r_{\min} \simeq \frac{2\sigma b^2 T_e}{a\Delta T} = \frac{2\sigma T_e}{\rho_L L \Delta T}.$$

С заданным табличным значением коэффициента поверхностного натяжения

$$r_{\min} \simeq \frac{2(7.3 \times 10^{-2})(3.055 \times 10^{-5})^2(293)}{(0.5543)(5.0)} = \boxed{1.4 \times 10^{-8} \text{ m} \approx 14 \text{ nm.}}$$

При этом радиусе капля находится в неустойчивом равновесии. Более крупные капли могут расти, а более мелкие склонны испаряться.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Простейшая модель газового разряда

Электрический ток, протекающий через газ, называется газовым разрядом. Существует множество видов газовых разрядов, в том числе тлеющий разряд в осветительных лампах, дуговой разряд при сварке и хорошо известный искровой разряд, возникающий между облаками и землёй в виде молнии.

Часть А. Несамостоятельный газовый разряд (4.8 балла)

В этой части задачи изучается так называемый несамостоятельный газовый разряд. Для его поддержания необходима непрерывная работа внешнего ионизатора, который равномерно по всему объёму создаёт Z_{ext} пар однократно ионизованных ионов и свободных электронов в единицу времени в единице объёма.

При включении внешнего ионизатора число электронов и ионов начинает расти. Неограниченному росту концентраций электронов и ионов в газе препятствует процесс рекомбинации, при котором свободный электрон соединяется с ионом, образуя нейтральный атом. Число актов рекомбинации Z_{rec} , происходящих в газе в единице объёма за единицу времени, определяется выражением

$$Z_{\text{rec}} = r n_e n_i,$$

где r — постоянная, называемая коэффициентом рекомбинации, а n_e, n_i обозначают концентрации электронов и ионов соответственно.

Пусть в момент времени $t = 0$ включается внешний ионизатор, а начальные концентрации электронов и ионов в газе равны нулю. Тогда концентрация электронов $n_e(t)$ зависит от времени t следующим образом:

$$n_e(t) = n_0 + a \tanh bt,$$

где n_0, a и b — некоторые постоянные, а $\tanh x$ обозначает гиперболический тангенс.

A1 Найдите n_0, a, b и выразите их через Z_{ext} и r . (1.8 балла)

Предположим, что имеются два внешних ионизатора. При включении первого из них концентрация электронов в газе достигает равновесного значения $n_{e1} = 12 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. При включении второго внешнего ионизатора концентрация электронов достигает равновесного значения $n_{e2} = 16 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$.

A2 Найдите равновесную концентрацию электронов n_e , когда оба внешних ионизатора включены одновременно. (0.6 балла)

Внимание! Далее предполагается, что внешний ионизатор работает достаточно долго, так что все процессы стали стационарными и не зависят от времени. Полностью пренебрегайте электрическим полем носителей заряда.

Предположим, что газ заполняет трубку между двумя параллельными проводящими пластинами площадью S , расположенными на расстоянии $L \ll \sqrt{S}$ друг от друга. К пластинам приложено напряжение U , создающее между ними электрическое поле. Считайте, что концентрации обоих видов носителей заряда остаются практически постоянными вдоль трубки.

Предположим, что и электроны (обозначаемые индексом e), и ионы (обозначаемые индексом i) под действием электрического поля напряжённостью E приобретают одинаковую по модулю скорость упорядоченного движения v , определяемую выражением

$$v = \beta E,$$

где β — постоянная, называемая подвижностью носителей заряда.

A3	Выразите силу электрического тока I в трубке через $U, \beta, L, S, Z_{\text{ext}}, r$ и элементарный заряд e . (1.7 балла)
A4	Найдите удельное сопротивление ρ_{gas} газа при достаточно малых значениях приложенного напряжения и выразите его через $\beta, L, Z_{\text{ext}}, r$ и e . (0.7 балла)

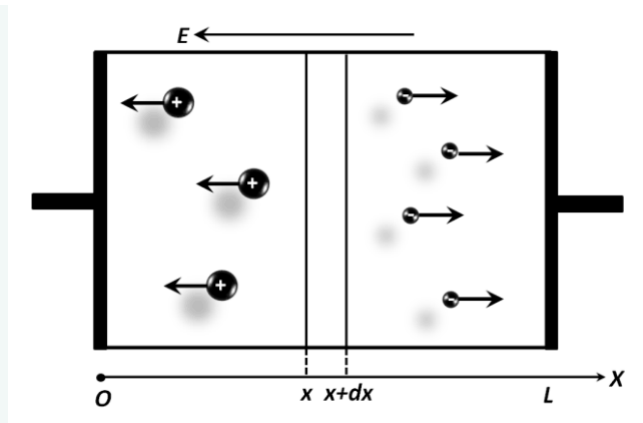
Часть В. Самостоятельный газовый разряд (5.2 балла)

В этой части задачи рассматривается зажигание самостоятельного газового разряда, чтобы показать, каким образом электрический ток в трубке становится самоподдерживающимся.

Внимание! Далее считайте, что внешний ионизатор продолжает работать с той же интенсивностью Z_{ext} ; пренебрегайте электрическим полем носителей заряда, так что электрическое поле однородно вдоль трубки, и полностью пренебрегайте рекомбинацией.

Для самостоятельного газового разряда существенны два процесса, не рассмотренных выше. Первый процесс — вторичная электронная эмиссия, а второй — образование электронной лавины. Вторичная электронная эмиссия возникает, когда ионы ударяются об отрицательный электрод, называемый катодом, и выбивают из него электроны, которые движутся к положительному электроду, называемому анодом. Отношение числа выбитых электронов $\dot{N}_e$ в единицу времени к числу ионов $\dot{N}_i$, попадающих на катод в единицу времени, называется коэффициентом вторичной электронной эмиссии: $\gamma = \dot{N}_e / \dot{N}_i$. Образование электронной лавины объясняется следующим образом. Электрическое поле ускоряет свободные электроны, которые приобретают кинетическую энергию, достаточную для ионизации атомов газа при столкновениях с ними. В результате число свободных электронов, движущихся к аноду, значительно возрастает. Этот процесс описывается коэффициентом Таунсенда α , который характеризует увеличение числа электронов dN_e при прохождении N_e движущимися электронами расстояния dl , то есть

$$\frac{dN_e}{dl} = \alpha N_e.$$



Полный ток I в любом поперечном сечении газовой трубки складывается из ионного $I_i(x)$ и электронного $I_e(x)$ токов, которые в стационарном состоянии зависят от координаты x , показанной на рисунке выше. Электронный ток $I_e(x)$ изменяется вдоль оси x согласно формуле

$$I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2,$$

где A_1, A_2, C_1 — некоторые постоянные.

B1 Найдите A_1, A_2 и выразите их через $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S$. (2 балла)

Ионный ток $I_i(x)$ изменяется вдоль оси x согласно формуле

$$I_i(x) = C_2 + B_1 e^{B_2 x},$$

где B_1, B_2, C_2 — некоторые постоянные.

B2 Найдите B_1, B_2 и выразите их через $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S, C_1$. (0.6 балла)

B3 Запишите условие для $I_i(x)$ при $x = L$. (0.3 балла)

B4 Запишите условие для $I_i(x)$ и $I_e(x)$ при $x = 0$. (0.6 балла)

B5 Найдите полный ток I и выразите его через $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$. Считайте, что он остаётся конечным. (1.2 балла)

Пусть коэффициент Таунсенда α постоянен. Когда длина трубки превышает некоторое критическое значение, то есть $L > L_{\text{cr}}$, внешний ионизатор можно выключить, и разряд становится самостоятельным.

B6 Найдите L_{cr} и выразите его через $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$. (0.5 балла)

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Ниже токи обозначают модули силы тока, и $U \geq 0$.

• A1

$$n_0 = 0, \quad a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}, \quad b = \sqrt{r Z_{\text{ext}}}.$$

- A2

$$n_e = 2.0 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3} = 2.0 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}.$$

- A3, в заданном приближении сбора носителей электродами при однородной концентрации:

$$I = \frac{e\beta SU}{rL} \left[\sqrt{\frac{\beta^2 U^2}{L^4} + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{\beta U}{L^2} \right].$$

- A4

$$\rho_{\text{gas}} = \frac{1}{2e\beta} \sqrt{\frac{r}{Z_{\text{ext}}}}.$$

- B1

$$A_1 = \alpha, \quad A_2 = -\frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}.$$

- B2

$$B_1 = -C_1, \quad B_2 = \alpha.$$

- B3

$$I_i(L) = 0.$$

- B4

$$I_e(0) = \gamma I_i(0).$$

- B5

$$I = \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha} \frac{(1 + \gamma)(e^{\alpha L} - 1)}{1 - \gamma(e^{\alpha L} - 1)}.$$

Для физически допустимого конечного стационарного решения при $Z_{\text{ext}} > 0$ необходимо

$$\gamma(e^{\alpha L} - 1) < 1.$$

- B6, при $\alpha > 0, \gamma > 0$:

$$L_{\text{cr}} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right).$$

Решение

A1. Рост концентрации носителей заряда

При каждом акте ионизации образуются один электрон и один ион, а при рекомбинации исчезает по одной частице каждого вида. Поскольку их начальные концентрации равны, они остаются равными:

$$n_e(t) = n_i(t) = n(t).$$

Поэтому баланс частиц в единице объёма имеет вид

$$\frac{dn}{dt} = Z_{\text{ext}} - rn^2, \quad n(0) = 0.$$

Из заданного выражения следует $n(0) = n_0$, поэтому

$$n_0 = 0.$$

Подставляя $n = a \tanh(bt)$ в уравнение баланса, получаем

$$ab [1 - \tanh^2(bt)] = Z_{\text{ext}} - ra^2 \tanh^2(bt).$$

Приравнявая постоянные члены и коэффициенты при $\tanh^2(bt)$, находим

$$ab = Z_{\text{ext}}, \quad ab = ra^2.$$

Выбирая a, b положительными, получаем

$$a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}, \quad b = \sqrt{rZ_{\text{ext}}}.$$

Таким образом,

$$n_e(t) = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}} \tanh(\sqrt{rZ_{\text{ext}}} t).$$

Начальная скорость роста концентрации равна Z_{ext} , а её предельное значение равно $\sqrt{Z_{\text{ext}}/r}$, как и требуется из условия баланса образования и рекомбинации носителей. Одновременная смена знаков a и b описывает ту же функцию.

A2. Два ионизатора

Обозначим интенсивности образования пар каждым из ионизаторов через Z_1 и Z_2 . В равновесии

$$Z_1 = rn_{e1}^2, \quad Z_2 = rn_{e2}^2.$$

При работе обоих ионизаторов независимые интенсивности образования пар складываются:

$$rn_e^2 = Z_1 + Z_2 = r(n_{e1}^2 + n_{e2}^2).$$

Следовательно,

$$n_e = \sqrt{n_{e1}^2 + n_{e2}^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} \times 10^{10} \text{ см}^{-3}.$$

Отсюда

$$n_e = 2.0 \times 10^{11} \text{ см}^{-3} = 2.0 \times 10^{17} \text{ м}^{-3}.$$

Сами концентрации не складываются, поскольку интенсивность рекомбинации квадратично зависит от концентрации.

A3. Стационарный ток с учётом рекомбинации и сбора носителей электродами

Пренебрегая краевыми эффектами и полем носителей заряда, получаем

$$E = \frac{U}{L}, \quad v = \frac{\beta U}{L}.$$

Применим заданное приближение однородной концентрации к объёму SL . За время dt собирающий электрод удаляет из газа $n_e Sv dt$ электронов, а противоположный электрод — $n_i Sv dt$ ионов. Стационарные уравнения баланса частиц имеют вид

$$\begin{aligned} Z_{\text{ext}}SL - rn_en_iSL - n_eSv &= 0, \\ Z_{\text{ext}}SL - rn_en_iSL - n_iSv &= 0. \end{aligned}$$

При $v > 0$ вычитание даёт $n_e = n_i = n$. Следовательно,

$$rn^2 + \frac{v}{L}n - Z_{\text{ext}} = 0.$$

Физический смысл имеет только неотрицательный корень:

$$n = \frac{1}{2r} \left[\sqrt{\left(\frac{v}{L}\right)^2 + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{v}{L} \right].$$

Хотя электроны и ионы движутся в противоположных направлениях, их заряды также имеют противоположные знаки. Поэтому создаваемые ими токи, определяемые по принятому направлению тока, складываются:

$$I = eSn_ev + eSn_iv = 2eSnv.$$

Подстановка даёт

$$I = \frac{eSv}{r} \left[\sqrt{\left(\frac{v}{L}\right)^2 + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{v}{L} \right].$$

Используя $v = \beta U/L$, получаем

$$I = \frac{e\beta SU}{rL} \left[\sqrt{\frac{\beta^2 U^2}{L^4} + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{\beta U}{L^2} \right].$$

Это результат буквального применения модели сбора носителей электродами при пространственно однородной концентрации. Строго говоря, концентрации не могут оставаться однородными вплоть до пластин: концентрация электронов должна обращаться в нуль у катода, а концентрация ионов — у анода. Поэтому формула надёжна, пока эти обеднённые слои тонки по сравнению с L , как в режиме малых напряжений из А4; при большом напряжении она стремится к $2eZ_{\text{ext}}SL$, что вдвое больше истинного тока насыщения $eZ_{\text{ext}}SL$.

А4. Удельное сопротивление при малом напряжении

При достаточно малом напряжении,

$$\frac{\beta U}{L^2} \ll \sqrt{rZ_{\text{ext}}},$$

сбор носителей электродами лишь слабо нарушает равновесие между их образованием и рекомбинацией. В главном приближении

$$n \simeq \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}.$$

Таким образом, ток становится пропорциональным напряжению:

$$I \simeq 2e\beta \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}} \frac{S}{L} U.$$

Сравнивая это выражение с

$$I = \frac{S}{\rho_{\text{gas}} L} U$$

получаем

$$\rho_{\text{gas}} = \frac{1}{2e\beta} \sqrt{\frac{r}{Z_{\text{ext}}}}.$$

Длина L сокращается. Если величины выражены в единицах СИ, результат получается в $\Omega \text{ m}$.

B1. Уравнение для электронного тока

В части В рекомбинацией пренебрегают. Будем считать I_e и I_i неотрицательными модулями силы тока, так что

$$I = I_e(x) + I_i(x).$$

Рассмотрим тонкий слой толщиной dx . Внешний ионизатор создаёт в этом слое

$$Z_{\text{ext}} S dx$$

электронов в единицу времени. Лавинное размножение создаёт дополнительно

$$\alpha \frac{I_e(x)}{e} dx$$

электронов в единицу времени. Каждый вновь образующийся электрон даёт вклад в электронный ток, выходящий из слоя, равный e , умноженному на скорость его образования. Поэтому

$$I_e(x + dx) - I_e(x) = [eSZ_{\text{ext}} + \alpha I_e(x)]dx.$$

В дифференциальной форме

$$\frac{dI_e}{dx} = \alpha I_e + eSZ_{\text{ext}}.$$

При постоянном $\alpha > 0$ общее решение этого уравнения имеет вид

$$I_e(x) = C_1 e^{\alpha x} - \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}.$$

Сравнение с заданным выражением даёт

$$A_1 = \alpha, \quad A_2 = -\frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}.$$

B2. Уравнение для ионного тока

При каждом акте ионизации также образуется один ион. Ионы движутся в сторону уменьшения x , поэтому ионный ток, выходящий из слоя через его левую грань, превышает ток, входящий через правую грань:

$$I_i(x) - I_i(x + dx) = [eSZ_{\text{ext}} + \alpha I_e(x)]dx.$$

Таким образом,

$$\frac{dI_i}{dx} = -eSZ_{\text{ext}} - \alpha I_e(x).$$

Используя найденное выражение для электронного тока, получаем

$$\frac{dI_i}{dx} = -\alpha C_1 e^{\alpha x},$$

а интегрирование даёт

$$I_i(x) = C_2 - C_1 e^{\alpha x}.$$

Следовательно,

$$\boxed{B_1 = -C_1, \quad B_2 = \alpha.}$$

Из двух дифференциальных уравнений также следует, что

$$\frac{d}{dx}(I_e + I_i) = 0,$$

что выражает закон сохранения заряда в стационарном режиме.

В3. Граничное условие на аноде

Анод находится при $x = L$. Из этого электрода ионы в газ не поступают, а ионы, образующиеся внутри газа, дрейфуют от него. Поэтому

$$\boxed{I_i(L) = 0.}$$

Эквивалентно,

$$C_2 = C_1 e^{\alpha L}.$$

В4. Граничное условие на катоде

При $x = 0$ число ионов, прибывающих в единицу времени, равно $I_i(0)/e$. Каждый прибывающий ион выбивает в среднем γ электронов. Следовательно,

$$\frac{I_e(0)}{e} = \gamma \frac{I_i(0)}{e},$$

или

$$\boxed{I_e(0) = \gamma I_i(0).}$$

В5. Полный стационарный ток

Для краткости введём обозначения

$$K = \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}, \quad T = e^{\alpha L}.$$

Тогда

$$I_e(x) = C_1 e^{\alpha x} - K, \quad I_i(x) = C_2 - C_1 e^{\alpha x}.$$

Условие на аноде даёт

$$C_2 = C_1 T.$$

Условие на катоде принимает вид

$$C_1 - K = \gamma(C_2 - C_1) = \gamma C_1(T - 1).$$

Следовательно,

$$C_1 = \frac{K}{1 - \gamma(T - 1)}.$$

Складывая электронный и ионный токи, получаем

$$I = C_2 - K = C_1 T - K.$$

Подставляя C_1 и упрощая, находим

$$I = K \frac{T - 1 + \gamma(T - 1)}{1 - \gamma(T - 1)}.$$

Таким образом,

$$I = \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha} \frac{(1 + \gamma)(e^{\alpha L} - 1)}{1 - \gamma(e^{\alpha L} - 1)}.$$

При положительной интенсивности внешней ионизации для физически допустимого конечного стационарного тока необходимо

$$1 - \gamma(e^{\alpha L} - 1) > 0.$$

При нулевом знаменателе линейная стационарная модель предсказывает неограниченный рост тока; отрицательный знаменатель дал бы физически невозможное отрицательное значение модуля силы тока.

В6. Критическая длина для самостоятельного разряда

Один электрон, испущенный катодом, в результате лавинного размножения даёт

$$e^{\alpha L}$$

электронов к моменту достижения лавиной анода. Поскольку исходный электрон уже существовал, в лавине образуется

$$e^{\alpha L} - 1$$

новых электрон-ионных пар.

Если пренебречь рекомбинацией, все эти ионы достигают катода. Они выбивают в среднем

$$\mathcal{R} = \gamma(e^{\alpha L} - 1)$$

вторичных электронов. Это число электронов, испущенных катодом благодаря одному предшествующему электрону, испущенному катодом.

Если $\mathcal{R} < 1$, численность последовательных поколений уменьшается и необходима внешняя ионизация. Порог достигается, когда каждое поколение в точности воспроизводит себя:

$$\gamma(e^{\alpha L_{\text{cr}}} - 1) = 1.$$

Решая это уравнение, получаем

$$L_{\text{cr}} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right).$$

При $L > L_{\text{cr}}$ обратная связь усиливает начальный разряд даже после отключения внешнего ионизатора. Данная линейная модель определяет порог зажигания; для определения конечного рабочего тока выше порога необходимо учитывать дополнительные физические эффекты.

Ни Z_{ext} , ни e , ни S не входят в выражение для порога. Если $\alpha = 0$ или $\gamma = 0$, этот механизм не может поддерживать разряд ни при какой конечной длине.

Решение проверено по официальному решению.