

IPhO 2014

Problemas teóricos y soluciones · Astaná, Kazajistán · 3 problemas teóricos con soluciones completas

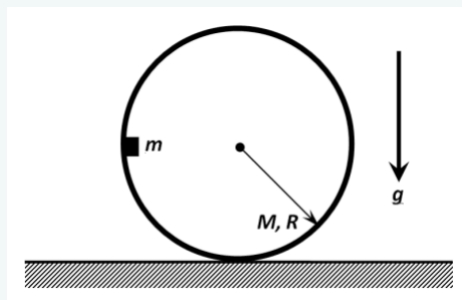
eulersolve.org/ipho/2014/

Problema 1: Tres partes independientes: disco en un cilindro que rueda, burbuja de jabón con gas, circuito LC con un interruptor

Este problema consta de tres partes independientes.

Parte A (3 puntos)

Se coloca cuidadosamente un pequeño disco de masa m sobre la superficie interior de un cilindro hueco de pared delgada, de masa M y radio R . Inicialmente, el cilindro está en reposo sobre el plano horizontal y el disco se encuentra a una altura R sobre el plano, como se muestra en la figura de la izquierda. Halle la fuerza de interacción F entre el disco y el cilindro en el instante en que el disco pasa por el punto más bajo de su trayectoria. Suponga que no hay rozamiento entre el disco y la superficie interior del cilindro, y que el cilindro se mueve sobre el plano sin deslizar. La aceleración de caída libre es g .



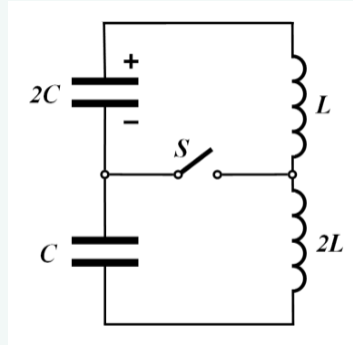
Parte B (3 puntos)

Una burbuja de radio $r = 5.00 \text{ cm}$, que contiene un gas ideal diatómico, tiene una película de jabón de espesor $h = 10.0 \text{ }\mu\text{m}$ y se encuentra en el vacío. La película de jabón tiene una tensión superficial $\sigma = 4.00 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y una densidad $\rho = 1.10 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. 1) Halle una fórmula para la capacidad calorífica molar del gas de la burbuja en un proceso en el que el gas se calienta tan lentamente que la burbuja permanece en equilibrio mecánico, y calcule su valor; 2) Halle una fórmula para la frecuencia ω de las pequeñas oscilaciones radiales de la burbuja y calcule su valor suponiendo que la capacidad calorífica de la película de jabón es mucho mayor que la capacidad calorífica del gas de la burbuja. Suponga que el equilibrio térmico en el interior de la burbuja se alcanza en un tiempo mucho menor que el período de las oscilaciones.

Indicación: Laplace demostró que existe una diferencia de presión entre el interior y el exterior de una superficie curva, causada por la tensión superficial de la interfaz entre el líquido y el gas, de modo que $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$.

Parte C (3 puntos)

Inicialmente, un interruptor S está abierto en el circuito que se muestra en la figura de la derecha, un condensador de capacidad $2C$ tiene una carga eléctrica q_0 , un condensador de capacidad C está descargado y no circula corriente eléctrica por ninguna de las dos bobinas, de inductancias L y $2L$, respectivamente. El condensador comienza a descargarse y, en el instante en que la corriente en las bobinas alcanza su valor máximo, el interruptor S se cierra instantáneamente. Halle la corriente máxima $I_{\max}$ que circula por el interruptor S a partir de ese momento.



Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **Parte A:**

$$F = mg \left(3 + \frac{m}{M} \right).$$

- **Parte B, 1):** Si $\mathcal{R}$ denota la constante universal de los gases,

$$C_{\text{mol}} = 4\mathcal{R} = 33.3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

- **Parte B, 2):**

$$\omega = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho h r^2}} = 1.08 \times 10^2 \text{ rad s}^{-1}.$$

La frecuencia ordinaria correspondiente es $f = \omega/(2\pi) = 17.2 \text{ Hz}$.

- **Parte C:**

$$I_{\max} = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

Solución

Parte A

Sean V la velocidad horizontal del centro del cilindro y v_x la velocidad horizontal del disco, ambas positivas hacia la derecha. El momento de inercia del cilindro es

$$I_{\text{cyl}} = MR^2.$$

Primero obtenemos una relación entre estas velocidades. Sea f la fuerza horizontal de rozamiento, con su signo, que el plano ejerce sobre el cilindro. La fuerza normal ejercida por el disco pasa por el centro del cilindro, de modo que solo f produce un momento respecto a ese centro.

Tomando como positiva la velocidad angular en sentido antihorario, la rodadura sin deslizamiento implica

$$\Omega_{\text{cyl}} = -\frac{V}{R}.$$

Por consiguiente,

$$I_{\text{cyl}}\dot{\Omega}_{\text{cyl}} = Rf \implies f = -M\dot{V}.$$

Para el sistema formado por el disco y el cilindro, la ecuación del movimiento horizontal es

$$m\dot{v}_x + M\dot{V} = f.$$

Combinando estas ecuaciones y utilizando el estado inicial de reposo,

$$\boxed{mv_x + 2MV = 0}.$$

En el punto más bajo, la velocidad del disco es horizontal; la denotamos por v . Su rapidez respecto al centro del cilindro es

$$u = v - V.$$

Por tanto,

$$V = -\frac{m}{2M}v, \quad u = \frac{2M+m}{2M}v.$$

La energía mecánica se conserva: el contacto entre el disco y el cilindro no presenta rozamiento, y el rozamiento estático en el punto de contacto con el plano, que está instantáneamente en reposo, no realiza trabajo. El disco desciende una altura R , lo que da

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + MV^2.$$

Sustituyendo la relación entre las velocidades,

$$v^2 = \frac{4M}{2M+m}gR, \quad u^2 = \frac{2M+m}{M}gR.$$

Para hallar la aceleración vertical, sea θ el desplazamiento angular del disco respecto a la vertical dirigida hacia abajo. Su altura es

$$y = R - R\cos\theta.$$

En el punto más bajo, $\theta = 0$ y $u = R\dot{\theta}$, de modo que

$$\ddot{y} = R\dot{\theta}^2 = \frac{u^2}{R}.$$

Allí, la fuerza que el cilindro ejerce sobre el disco está dirigida hacia arriba. Por tanto, la segunda ley de Newton da

$$F - mg = m\frac{u^2}{R}.$$

Así pues,

$$F = mg \left(3 + \frac{m}{M} \right).$$

Parte B, 1)

Consideramos que la película de jabón es delgada en comparación con el radio de la burbuja y que su tensión superficial es constante. Una película de jabón tiene **dos** interfaces líquido–gas. Sus saltos de presión de Laplace se suman, de modo que el equilibrio en el vacío exige

$$p = \frac{4\sigma}{r}.$$

Sean n el número de moles y $\mathcal{R}$ la constante universal de los gases. Utilizando la ecuación de estado del gas ideal,

$$pV = n\mathcal{R}T, \quad V = \frac{4\pi r^3}{3},$$

obtenemos

$$n\mathcal{R}T = \frac{16\pi\sigma}{3}r^2.$$

Por tanto, durante el proceso lento de equilibrio especificado,

$$T \propto r^2, \quad \frac{dV}{V} = 3\frac{dr}{r} = \frac{3}{2}\frac{dT}{T}.$$

En consecuencia, el gas realiza un trabajo

$$p dV = \frac{3}{2} \frac{pV}{T} dT = \frac{3}{2} n\mathcal{R} dT.$$

Para un gas ideal diatómico con los grados de libertad de rotación activos y los grados de libertad de vibración sin excitar,

$$dU = \frac{5}{2} n\mathcal{R} dT.$$

El primer principio de la termodinámica aplicado al gas da

$$\delta Q = dU + p dV = \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \right) n\mathcal{R} dT.$$

Por tanto, su capacidad calorífica molar para este proceso es

$$C_{\text{mol}} = \frac{\delta Q}{n dT} = 4\mathcal{R}.$$

Utilizando $\mathcal{R} = 8.31446 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$,

$$C_{\text{mol}} = 33.3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Parte B, 2)

La película tiene una capacidad calorífica mucho mayor que la del gas, y el equilibrio térmico se establece rápidamente. Por tanto, la película actúa como un depósito térmico durante una oscilación, haciendo que la compresión y la expansión del gas sean aproximadamente **isotérmicas**.

Sea r el radio de equilibrio y escribamos el radio instantáneo como

$$s = r + \xi, \quad |\xi| \ll r.$$

Con la presión de equilibrio $p_0 = 4\sigma/r$, la ley del gas en un proceso isotérmico da

$$p(s) = p_0 \left(\frac{r}{s} \right)^3.$$

La presión neta hacia fuera sobre la película es

$$p(s) - \frac{4\sigma}{s}.$$

Desarrollando hasta primer orden en ξ ,

$$p(s) \simeq p_0 \left(1 - \frac{3\xi}{r} \right), \quad \frac{4\sigma}{s} \simeq \frac{4\sigma}{r} \left(1 - \frac{\xi}{r} \right),$$

de modo que

$$p(s) - \frac{4\sigma}{s} \simeq -\frac{8\sigma}{r^2} \xi.$$

La masa constante de la película, expresada mediante sus dimensiones de equilibrio, es

$$m_f = 4\pi r^2 \rho h.$$

Despreciando la inercia del gas y los efectos disipativos, la ecuación del movimiento radial es, a primer orden,

$$m_f \ddot{\xi} = 4\pi r^2 \left(-\frac{8\sigma}{r^2} \xi \right) = -32\pi\sigma\xi.$$

Por tanto,

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0, \quad \boxed{\omega^2 = \frac{32\pi\sigma}{m_f} = \frac{8\sigma}{\rho h r^2}}.$$

Convirtiendo las magnitudes dadas a unidades del SI,

$$r = 5.00 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad h = 1.00 \times 10^{-5} \text{ m}, \quad \rho = 1.10 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3},$$

hallamos

$$\omega = \sqrt{\frac{8(4.00 \times 10^{-2})}{(1.10 \times 10^3)(1.00 \times 10^{-5})(5.00 \times 10^{-2})^2}}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\omega = 1.08 \times 10^2 \text{ rad s}^{-1}}, \quad \boxed{f = 17.2 \text{ Hz}}.$$

Parte C

Antes de que se cierre el interruptor, por ambas bobinas circula la misma corriente i . Sea q la carga que ha pasado hacia abajo a través de las bobinas desde que comenzó la descarga, de modo que $i = \dot{q}$.

La carga de la placa superior del condensador de capacidad $2C$ es entonces $q_0 - q$, mientras que la carga de la placa superior del condensador de capacidad C es $-q$. Definiendo las tensiones de ambos condensadores de arriba hacia abajo,

$$U_1 = \frac{q_0 - q}{2C}, \quad U_2 = -\frac{q}{C}.$$

La ley de tensiones de Kirchhoff da

$$3L\dot{i} = U_1 + U_2 = \frac{q_0 - 3q}{2C}.$$

Cuando la corriente es máxima, $\dot{i} = 0$. Así pues, en el instante de cierre del interruptor,

$$q = \frac{q_0}{3}, \quad \boxed{U_1 = \frac{q_0}{3C}, \quad U_2 = -\frac{q_0}{3C}}.$$

Fijemos ahora $t = 0$ en el instante en que se cierra el interruptor. El condensador superior y la bobina superior forman una malla LC, mientras que el par inferior forma otra. Sus frecuencias angulares son iguales:

$$\Omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L(2C)}}, \quad \Omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(2L)C}},$$

de modo que

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}.$$

Sean i_1 e i_2 las corrientes de las bobinas superior e inferior, ambas positivas hacia abajo. Sus ecuaciones son

$$\begin{aligned} L\dot{i}_1 &= U_1, & 2C\dot{U}_1 &= -i_1, \\ 2L\dot{i}_2 &= U_2, & C\dot{U}_2 &= -i_2. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\ddot{i}_1 + \Omega^2 i_1 = 0, \quad \ddot{i}_2 + \Omega^2 i_2 = 0.$$

Tomemos como positiva la corriente del interruptor desde la unión de las bobinas hacia la unión de los condensadores. La ley de corrientes de Kirchhoff da

$$i_S = i_1 - i_2,$$

y, por tanto,

$$\ddot{i}_S + \Omega^2 i_S = 0.$$

Las corrientes de las bobinas son continuas en el instante de cierre del interruptor y eran iguales antes de él, de modo que

$$i_S(0) = 0.$$

Las tensiones de los condensadores también son continuas, lo que da

$$\dot{i}_S(0) = \frac{U_1(0)}{L} - \frac{U_2(0)}{2L} = \frac{q_0}{3LC} + \frac{q_0}{6LC} = \frac{q_0}{2LC}.$$

La corriente resultante en el interruptor es

$$i_S(t) = \frac{\dot{i}_S(0)}{\Omega} \sin(\Omega t) = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}}\right).$$

Por tanto, su valor máximo en magnitud es

$$\boxed{I_{\max} = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Ecuación de estado de Van der Waals

En un conocido modelo de gas ideal, cuya ecuación de estado obedece la ley de Clapeyron-Mendeleev, se desprecian los siguientes efectos físicos importantes. En primer lugar, las moléculas de un gas real tienen un tamaño finito y, en segundo lugar, interactúan entre sí. En todas las partes de este problema se considera *un mol de agua*.

Parte A. Ecuación de estado de un gas no ideal (2 puntos)

Al tener en cuenta el tamaño finito de las moléculas, la ecuación de estado del gas adopta la forma

$$P(V - b) = RT, \quad (1)$$

donde P, V, T representan la presión del gas, su volumen por mol y su temperatura, respectivamente, R denota la constante universal de los gases y b es una constante específica que resta cierto volumen.

A1 Estime b y exprese la en función del diámetro de las moléculas d . (0.3 puntos)

Teniendo en cuenta las fuerzas de atracción intermoleculares, van der Waals propuso la siguiente ecuación de estado, que describe adecuadamente tanto el estado gaseoso como el líquido de la materia

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \quad (2)$$

donde a es otra constante específica.

A temperaturas T inferiores a cierto valor crítico T_c , la isoterma de la ecuación (2) está bien representada por la curva no monótona 1 que se muestra en la Figura 1, denominada isoterma de van der Waals. En la misma figura, la curva 2 muestra la isoterma de un gas ideal a la misma temperatura. Una isoterma real difiere de la isoterma de van der Waals por un segmento recto AB trazado a cierta presión constante P_{LG} . Este segmento recto se encuentra entre los volúmenes V_L y V_G , y corresponde al equilibrio entre la fase líquida (indicada por L) y la fase gaseosa (indicada por G). A partir del segundo principio de la termodinámica, J. Maxwell demostró que la presión P_{LG} debe elegirse de modo que las áreas I y II que se muestran en la Figura 1 sean iguales.

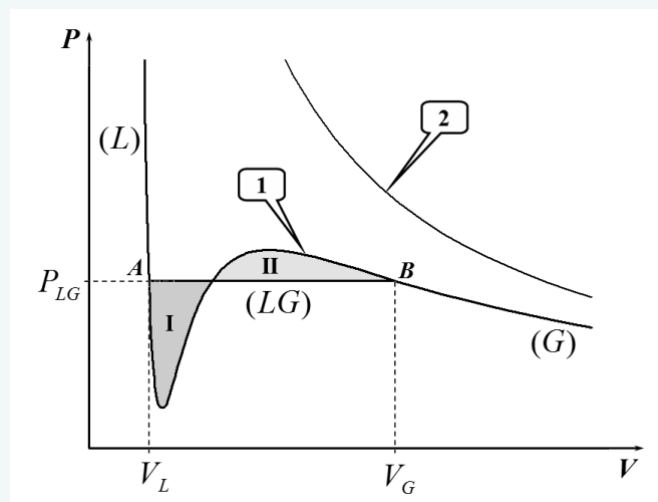


Figura 1. Isoterma de van der Waals del gas/líquido (curva 1) e isoterma de un gas ideal (curva 2).

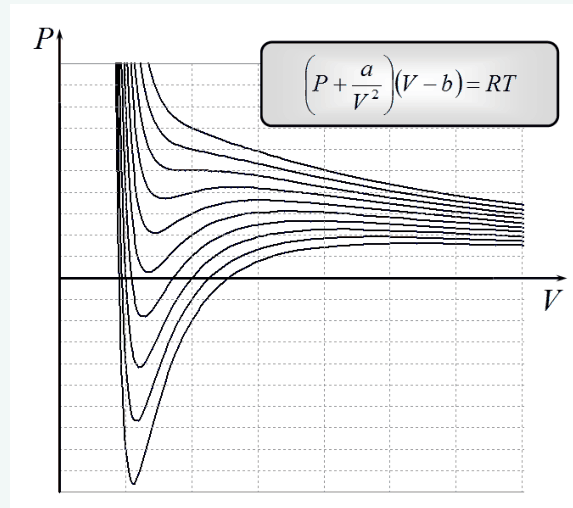


Figura 2. Varias isotermas de la ecuación de estado de van der Waals.

Al aumentar la temperatura, el segmento recto AB de la isoterma se reduce a un solo punto cuando la temperatura y la presión alcanzan ciertos valores T_c y $P_{LG} = P_c$, respectivamente. Los parámetros P_c y T_c se denominan críticos y pueden medirse experimentalmente con un alto grado de precisión.

A2	Expresar las constantes de van der Waals a y b en función de T_c y P_c . (1.3 puntos)
A3	Para el agua, $T_c = 647 \text{ K}$ y $P_c = 2.2 \cdot 10^7 \text{ Pa}$. Calcule a_w y b_w para el agua. (0.2 puntos)
A4	Estime el diámetro de las moléculas de agua d_w . (0.2 puntos)

Parte B. Propiedades del gas y del líquido (6 puntos)

Esta parte del problema trata de las propiedades del agua en los estados gaseoso y líquido a la temperatura $T = 100^\circ \text{C}$. Se sabe que la presión de vapor saturado a esta temperatura es $p_{LG} = p_0 = 1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, y la masa molar del agua es $\mu = 1.8 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{mole}}$.

Estado gaseoso

Es razonable suponer que la desigualdad $V_G \gg b$ es válida para describir las propiedades del agua en estado gaseoso.

B1	Deduzca la fórmula del volumen V_G y expréselo en función de R, T, p_0 , y a . (0.8 puntos)
----	--

Mediante la ley de los gases ideales puede calcularse aproximadamente un volumen V_{G0} casi igual.

B2	Calcule, en porcentaje, la disminución relativa del volumen del gas debida a las fuerzas intermoleculares, $\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}}$. (0.3 puntos)
----	--

Si el volumen del sistema se reduce por debajo de V_G , el gas empieza a condensarse. Sin embargo, un gas cuidadosamente purificado puede permanecer en un estado mecánicamente metaestable (denominado vapor subenfriado) hasta que su volumen alcanza cierto valor $V_{G \min}$.

La condición de estabilidad mecánica del gas subenfriado a temperatura constante se escribe como: $\frac{dP}{dV} < 0$.

B3	Determine y calcule cuántas veces puede reducirse el volumen del vapor de agua sin que deje de estar en un estado metaestable. En otras palabras, ¿cuánto vale $V_G/V_{G\min}$? (0.7 puntos)
----	--

Estado líquido

Para describir el agua en estado líquido mediante el modelo de van der Waals, es razonable suponer que se cumple la siguiente desigualdad: $P \ll a/V^2$.

B4	Expresé el volumen del agua líquida V_L en función de a, b, R , y T . (1.0 puntos)
----	---

Suponiendo que $bRT \ll a$, determine las siguientes características del agua. ¡No se sorprenda si algunos de los datos calculados no coinciden con los valores tabulados bien conocidos!

B5	Expresé la densidad del agua líquida ρ_L en función de algunos de los parámetros μ, a, b, R y calcule su valor. (0.5 puntos)
B6	Expresé el coeficiente de dilatación térmica volumétrica $\alpha = \frac{1}{V_L} \frac{\Delta V_L}{\Delta T}$ en función de a, b, R , y calcule su valor. (0.6 puntos)
B7	Expresé el calor específico de vaporización del agua L en función de μ, a, b, R y calcule su valor. (1.1 puntos)
B8	Considerando una capa monomolecular de agua, estime la tensión superficial σ del agua. (1.2 puntos)

Parte C. Sistema líquido-gas (3 puntos)

A partir de la regla de Maxwell (igualdad de áreas, mediante una integración sencilla) y de la ecuación de estado de van der Waals, junto con las aproximaciones realizadas en la Parte B, puede demostrarse que la presión de vapor saturado p_{LG} depende de la temperatura T de la siguiente manera

$$\ln p_{LG} = A + \frac{B}{T}, \quad (3)$$

donde A y B son ciertas constantes que pueden expresarse en función de a y b como $A = \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) - 1$; $B = -\frac{a}{bR}$

W. Thomson demostró que la presión de vapor saturado depende de la curvatura de la superficie del líquido. Considere un líquido que no moja el material de un capilar (ángulo de contacto de 180°). Cuando el capilar se sumerge en el líquido, el líquido en el capilar desciende hasta cierto nivel debido a la tensión superficial (véase la Figura 3).

C1	Determine una pequeña variación de presión Δp_T del vapor saturado sobre la superficie curva del líquido y exprese la en función de la densidad del vapor ρ_s , la densidad del líquido ρ_L , la tensión superficial σ y el radio de curvatura de la superficie r . (1.3 puntos)
----	--

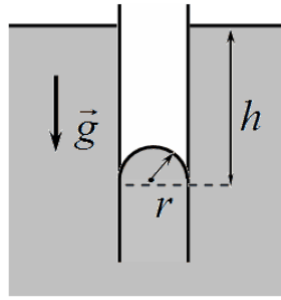


Figura 3. Capilar sumergido en un líquido que no moja su material

Los estados metaestables, considerados en el apartado B3, se utilizan ampliamente en dispositivos experimentales reales, como la cámara de niebla diseñada para registrar partículas elementales. También aparecen en fenómenos naturales como la formación del rocío matutino. El vapor subenfriado puede condensarse formando gotas de líquido. Las gotas muy pequeñas se evaporan rápidamente, pero las suficientemente grandes pueden seguir creciendo.

- C2 Suponga que, a la temperatura vespertina de $t_e = 20^\circ\text{C}$, el vapor de agua del aire estaba saturado, pero que por la mañana la temperatura ambiente ha descendido una pequeña cantidad de $\Delta t = 5.0^\circ\text{C}$. Suponiendo que la presión del vapor ha permanecido constante, estime el radio mínimo de las gotas que pueden crecer. Utilice el valor tabulado de la tensión superficial del agua $\sigma = 7.3 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$. **(1.7 puntos)**

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

En los cálculos numéricos se utilizan $R = 8.31 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$, $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ y $T = 373 \text{ K}$ en la Parte B. Los volúmenes son volúmenes molares. Las estimaciones moleculares siguientes utilizan la convención estándar del volumen excluido para esferas duras; su dependencia del modelo se analiza en las soluciones de A1, A4 y B8.

- **A1:** $b \sim N_A d^3$; la estimación para esferas duras es

$$b = \frac{2\pi}{3} N_A d^3.$$

- **A2:**

$$a = \frac{27R^2T_c^2}{64P_c}, \quad b = \frac{RT_c}{8P_c}.$$

- **A3:**

$$a_w \simeq 0.55 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}, \quad b_w \simeq 3.1 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

- **A4:**

$$d_w = \left(\frac{3b_w}{2\pi N_A} \right)^{1/3} \simeq 2.9 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

• **B1:**

$$V_G = \frac{RT + \sqrt{R^2T^2 - 4ap_0}}{2p_0} \simeq 3.08 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

• **B2:**

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2T^2}}}{2} \simeq 0.58\%.$$

• **B3:**

$$V_{G\min} = \frac{2a}{RT} \simeq 3.6 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}, \quad \frac{V_G}{V_{G\min}} \simeq 86.$$

• **B4:**

$$V_L = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4abRT}}{2RT} = \frac{2b}{1 + \sqrt{1 - \frac{4bRT}{a}}}.$$

• **B5:**

$$\rho_L \simeq \frac{\mu}{b} \simeq 5.9 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}.$$

• **B6:**

$$\alpha \simeq \frac{bR}{a} \simeq 4.6 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}.$$

• **B7:**

$$L \simeq \frac{a}{\mu b} \simeq 1.0 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}.$$

• **B8:** Una estimación basada en una monocapa, en la que falta la mitad de la contribución cohesiva del interior del líquido, da

$$\sigma \sim \frac{1}{2} \rho_L L d_w = \frac{a d_w}{2b^2} \simeq 8.6 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}.$$

Su precisión fiable corresponde a una estimación del orden de magnitud, $\sigma \sim 10^{-1} \text{ N m}^{-1}$.

• **C1:** Para la superficie convexa del líquido que se muestra,

$$\Delta p_T = \frac{2\sigma\rho_s}{r(\rho_L - \rho_s)} \simeq \frac{2\sigma\rho_s}{r\rho_L} > 0.$$

• **C2:** Con $T_e = 293 \text{ K}$ y $\Delta T = 5.0 \text{ K}$,

$$r_{\min} \simeq \frac{2\sigma T_e}{\rho_L L \Delta T} = \frac{2\sigma b^2 T_e}{a \Delta T} \simeq 1.4 \times 10^{-8} \text{ m} = 14 \text{ nm}.$$

Las gotas mayores que este radio crítico pueden crecer.

Solución

A1. Tamaño molecular y volumen excluido

Modelamos las moléculas como esferas duras de diámetro d . El centro de una molécula no puede entrar en una esfera de radio d alrededor del centro de otra. Por tanto, el volumen excluido asociado a un par es

$$v_{\text{ex}} = \frac{4\pi d^3}{3}.$$

En el cálculo estándar del volumen excluido para un gas diluido de esferas duras, cada par se cuenta una sola vez, lo que da un parámetro de volumen excluido por molécula de $v_{\text{ex}}/2$. Para un mol,

$$b = \frac{1}{2} N_A v_{\text{ex}} = \frac{2\pi}{3} N_A d^3.$$

Así, el parámetro habitual b de van der Waals es cuatro veces el volumen geométrico total de las moléculas esféricas. Independientemente de este prefactor geométrico, la escala solicitada es $b \sim N_A d^3$.

A2. Condiciones del punto crítico

Escribimos la ecuación de estado como

$$P(V, T) = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}.$$

En el punto crítico, los dos extremos de la isoterma subcrítica se fusionan en un punto de inflexión con tangente horizontal. Por tanto,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T_c, V_c} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_{T_c, V_c} = 0.$$

Estas condiciones dan

$$\frac{RT_c}{(V_c - b)^2} = \frac{2a}{V_c^3}, \quad \frac{RT_c}{(V_c - b)^3} = \frac{3a}{V_c^4}.$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera,

$$\frac{1}{V_c - b} = \frac{3}{2V_c},$$

de modo que

$$V_c = 3b.$$

La sustitución en la condición de la primera derivada y en la ecuación de estado da

$$RT_c = \frac{8a}{27b}, \quad P_c = \frac{a}{27b^2}.$$

Despejando las constantes,

$$b = \frac{RT_c}{8P_c}, \quad a = \frac{27R^2T_c^2}{64P_c}.$$

A3. Constantes del agua

Utilizando los datos críticos proporcionados,

$$b_w = \frac{8.31(647)}{8(2.2 \times 10^7)} = 3.055 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1},$$

y

$$a_w = \frac{27(8.31)^2(647)^2}{64(2.2 \times 10^7)} = 0.5543 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}.$$

Con dos cifras significativas,

$$a_w \simeq 0.55 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}, \quad b_w \simeq 3.1 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

En los cálculos posteriores se conservan los valores sin redondear.

A4. Diámetro molecular

A partir de A1,

$$d_w = \left(\frac{3b_w}{2\pi N_A} \right)^{1/3}.$$

Por consiguiente,

$$d_w \simeq 2.9 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.29 \text{ nm}.$$

Este es un diámetro efectivo dentro del modelo de esferas duras.

B1. Volumen del vapor saturado

Aplicamos la aproximación indicada $V_G \gg b$:

$$\left(p_0 + \frac{a}{V_G^2} \right) V_G = RT.$$

Multiplicando por V_G , obtenemos

$$p_0 V_G^2 - RT V_G + a = 0.$$

El estado gaseoso corresponde a la raíz mayor, que tiende a RT/p_0 cuando $a \rightarrow 0$:

$$V_G = \frac{RT + \sqrt{R^2 T^2 - 4ap_0}}{2p_0}.$$

A $T = 373 \text{ K}$,

$$V_G = 0.0308164 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1} \simeq 3.08 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

Para una atracción débil, el desarrollo de la raíz cuadrada también da

$$V_G \simeq \frac{RT}{p_0} - \frac{a}{RT}.$$

B2. Disminución relativa del volumen

El volumen del gas ideal es

$$V_{G0} = \frac{RT}{p_0} = 0.0309963 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

Utilizando B1,

$$\frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2T^2}} \right).$$

Numéricamente,

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = 5.803 \times 10^{-3},$$

de modo que

$$\boxed{\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} \simeq 0.58\%}.$$

A primer orden, esta fracción es $ap_0/(R^2T^2)$.

B3. Límite de compresión metaestable

Dentro de la misma aproximación para el gas,

$$P(V) = \frac{RT}{V} - \frac{a}{V^2}.$$

La estabilidad mecánica requiere

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{RT}{V^2} + \frac{2a}{V^3} = \frac{2a - RTV}{V^3} < 0.$$

Por tanto, el gas permanece mecánicamente estable frente a pequeñas perturbaciones del volumen cuando

$$V > \frac{2a}{RT}.$$

El volumen límite, de estabilidad marginal, es por tanto

$$\boxed{V_{G\min} = \frac{2a}{RT} = 3.58 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}}.$$

El factor de compresión es

$$\frac{V_G}{V_{G\min}} = \frac{RT}{2a} \frac{RT + \sqrt{R^2T^2 - 4ap_0}}{2p_0} \simeq 86.2.$$

Por tanto,

$$\boxed{\frac{V_G}{V_{G\min}} \simeq 86.}$$

En el volumen límite, $V_{G\min}/b \simeq 12$, de modo que el resultado es una estimación dentro de la aproximación indicada, que desprecia b .

B4. Volumen del líquido

Para el líquido, despreciamos P frente a a/V_L^2 :

$$\frac{a}{V_L^2}(V_L - b) = RT.$$

Por tanto,

$$RTV_L^2 - aV_L + ab = 0.$$

El líquido corresponde a la raíz de menor volumen, que tiende a b cuando $T \rightarrow 0$:

$$V_L = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4abRT}}{2RT} = \frac{2b}{1 + \sqrt{1 - 4bRT/a}}.$$

A 373 K, esta expresión da aproximadamente

$$V_L = 3.91 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

Para las preguntas restantes, introducimos el pequeño parámetro estipulado

$$\varepsilon = \frac{bRT}{a} \ll 1.$$

Desarrollando la raíz correspondiente al líquido,

$$V_L = b \left(1 + \frac{bRT}{a} + O(\varepsilon^2) \right).$$

Para los parámetros del agua proporcionados, $\varepsilon \simeq 0.17$, de modo que los siguientes resultados al orden dominante son aproximados.

B5. Densidad del líquido

Al orden dominante, $V_L \simeq b$. Como un mol tiene masa μ ,

$$\rho_L = \frac{\mu}{V_L} \simeq \frac{\mu}{b}.$$

Numéricamente,

$$\rho_L \simeq \frac{1.8 \times 10^{-2}}{3.055 \times 10^{-5}} = 5.9 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}.$$

Esta es la densidad predicha por la aproximación especificada.

B6. Coeficiente de dilatación térmica

Conservando el primer término dependiente de la temperatura de B4,

$$V_L \simeq b + \frac{b^2 RT}{a}.$$

Así, a presión externa constante dentro de la aproximación utilizada,

$$\frac{\partial V_L}{\partial T} \simeq \frac{b^2 R}{a}.$$

Utilizando $V_L \simeq b$ en el denominador,

$$\alpha = \frac{1}{V_L} \left(\frac{\partial V_L}{\partial T} \right)_P \simeq \frac{bR}{a}.$$

Numéricamente,

$$\alpha \simeq 4.6 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}.$$

B7. Calor latente específico de vaporización

La identidad termodinámica

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

relaciona la energía interna con la ecuación de estado. Para el fluido de van der Waals,

$$T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P = \frac{RT}{V-b} - \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right) = \frac{a}{V^2}.$$

Por tanto, la energía interna molar tiene la forma

$$U(T, V) = U_0(T) - \frac{a}{V}.$$

A la misma temperatura, el aumento de energía interna durante la vaporización es

$$U_G - U_L = a\left(\frac{1}{V_L} - \frac{1}{V_G}\right).$$

La vaporización a presión constante también requiere trabajo de expansión, por lo que el calor suministrado por mol es

$$\mu L = a\left(\frac{1}{V_L} - \frac{1}{V_G}\right) + p_0(V_G - V_L).$$

Como $V_G \gg V_L \simeq b$, y $RT \ll a/b$, la contribución dominante es a/b . Por tanto,

$$L \simeq \frac{a}{\mu b}.$$

Numéricamente,

$$L \simeq 1.0 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}.$$

La omisión de las correcciones térmicas es coherente: conservar $V_L \simeq b(1 + bRT/a)$ da $a/V_L \simeq a/b - RT$, cuya corrección $-RT$ cancela el término dominante del trabajo de expansión $p_0 V_G \simeq RT$.

B8. Tensión superficial a partir de una capa monomolecular

La tensión superficial es la energía libre superficial por unidad de área. Para una estimación energética, despreciamos la contribución de la entropía superficial y utilizamos la energía de cohesión obtenida en B7.

La energía de cohesión por molécula en el interior del líquido es aproximadamente

$$E_{\text{coh}} \simeq \frac{\mu L}{N_A} \simeq \frac{a}{b N_A}.$$

Una molécula próxima a una superficie libre carece de vecinas del lado del vapor. En una estimación sencilla, la energía de enlace cohesivo que se le asigna se reduce aproximadamente a la mitad, lo que da una energía superficial en exceso del orden de $E_{\text{coh}}/2$.

Una capa superficial de área S y espesor d_w contiene aproximadamente

$$N_{\text{layer}} \simeq \frac{\rho_L S d_w}{\mu} N_A$$

moléculas. Por tanto, su energía en exceso es

$$E_{\text{surface}} \sim \frac{1}{2} E_{\text{coh}} N_{\text{layer}} = \frac{1}{2} \rho_L L d_w S.$$

Identificándola con σS ,

$$\sigma \sim \frac{1}{2} \rho_L L d_w = \frac{a d_w}{2 b^2}.$$

Utilizando las estimaciones anteriores,

$$\sigma \sim 8.6 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}.$$

La construcción de la monocapa fija la escala, $\sigma \sim 10^{-1} \text{ N m}^{-1}$; su prefactor numérico depende de la disposición molecular supuesta y de las interacciones que faltan.

C1. Presión de saturación sobre una superficie curva

Sea p_s la presión de vapor saturado sobre la superficie plana del líquido. El menisco no mojante es convexo hacia el vapor y se encuentra a una profundidad h por debajo de dicha superficie.

Para una pequeña diferencia de altura, el equilibrio hidrostático da las presiones al nivel del menisco:

$$p_\ell = p_s + \rho_L g h, \quad p_v = p_s + \rho_s g h.$$

El menisco esférico obedece la relación de presión de Laplace

$$p_\ell - p_v = \frac{2\sigma}{r}.$$

Por consiguiente,

$$(\rho_L - \rho_s) g h = \frac{2\sigma}{r}.$$

La variación de la presión de vapor de equilibrio es

$$\Delta p_T = p_v - p_s = \rho_s g h.$$

Eliminando h ,

$$\Delta p_T = \frac{2\sigma \rho_s}{r(\rho_L - \rho_s)} \simeq \frac{2\sigma \rho_s}{r \rho_L}.$$

En el último paso se utiliza $\rho_s \ll \rho_L$. La variación es positiva: una superficie convexa del líquido requiere una presión de vapor de equilibrio mayor que una superficie plana.

C2. Radio mínimo de una gota que crece

Sea $p_s(T)$ la presión de saturación sobre una superficie plana. Inicialmente, la presión real del vapor es

$$p = p_s(T_e), \quad T_e = 293 \text{ K}.$$

Tras un enfriamiento de $\Delta T = 5.0 \text{ K}$, la presión real permanece constante mientras que la presión de saturación sobre la superficie plana disminuye. A primer orden,

$$\Delta p_{\text{cool}} = p_s(T_e) - p_s(T_e - \Delta T) \simeq \left. \frac{dp_s}{dT} \right|_{T_e} \Delta T.$$

A partir de la ecuación (3),

$$\frac{1}{p_s} \frac{dp_s}{dT} = -\frac{B}{T^2} = \frac{a}{b R T^2}.$$

Por tanto,

$$\Delta p_{\text{cool}} \simeq p_s \frac{a\Delta T}{bRT_e^2}.$$

Una gota puede crecer si la presión del vapor ambiente supera su presión de equilibrio, que depende de la curvatura. En el radio crítico, las dos variaciones de presión son iguales:

$$p_s \frac{a\Delta T}{bRT_e^2} = \frac{2\sigma\rho_s}{\rho_L r_{\min}}.$$

Tratando el vapor diluido como ideal,

$$\rho_s \simeq \frac{\mu p_s}{RT_e}.$$

Sustituyendo y cancelando p_s ,

$$r_{\min} \simeq \frac{2\sigma\mu bT_e}{\rho_L a\Delta T}.$$

Utilizando los resultados de la Parte B, $\rho_L \simeq \mu/b$ y $L \simeq a/(\mu b)$,

$$r_{\min} \simeq \frac{2\sigma b^2 T_e}{a\Delta T} = \frac{2\sigma T_e}{\rho_L L \Delta T}.$$

Con la tensión superficial tabulada proporcionada,

$$r_{\min} \simeq \frac{2(7.3 \times 10^{-2})(3.055 \times 10^{-5})^2(293)}{(0.5543)(5.0)} = \boxed{1.4 \times 10^{-8} \text{ m} \approx 14 \text{ nm.}}$$

Con este radio, una gota se encuentra en equilibrio inestable. Las gotas mayores pueden crecer; las menores tienden a evaporarse.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: El modelo más sencillo de descarga en gases

Una corriente eléctrica que circula a través de un gas se denomina descarga en gases. Existen muchos tipos de descargas en gases, entre ellas la descarga luminiscente de las lámparas de iluminación, la descarga de arco de la soldadura y la conocida descarga de chispa que se produce entre las nubes y la Tierra en forma de rayo.

Parte A. Descarga en gases no autosostenida (4.8 puntos)

En esta parte del problema se estudia la denominada descarga en gases no autosostenida. Para mantenerla se necesita el funcionamiento continuo de un ionizador externo, que crea uniformemente en el volumen Z_{ext} pares de iones con una sola carga positiva y electrones libres por unidad de volumen y por unidad de tiempo.

Cuando se conecta un ionizador externo, el número de electrones e iones comienza a aumentar. El aumento ilimitado de las densidades numéricas de electrones e iones en el gas se ve impedido por el proceso de recombinación, en el que un electrón libre se recombina con un ion para formar un átomo neutro. El número de procesos de recombinación Z_{rec} que se producen en el gas por unidad de volumen y por unidad de tiempo viene dado por

$$Z_{\text{rec}} = r n_e n_i,$$

donde r es una constante llamada coeficiente de recombinación, y n_e, n_i representan las densidades numéricas de electrones e iones, respectivamente.

Suponga que en el instante $t = 0$ se conecta el ionizador externo y que las densidades numéricas iniciales de electrones e iones en el gas son ambas iguales a cero. Entonces, la densidad numérica de electrones $n_e(t)$ depende del tiempo t de la siguiente manera:

$$n_e(t) = n_0 + a \tanh bt,$$

donde n_0, a y b son ciertas constantes, y $\tanh x$ representa la tangente hiperbólica.

A1 Halle n_0, a, b y expresaselas en función de Z_{ext} y r . **(1.8 puntos)**

Suponga que se dispone de dos ionizadores externos. Cuando se conecta el primero, la densidad numérica de electrones en el gas alcanza su valor de equilibrio $n_{e1} = 12 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. Cuando se conecta el segundo ionizador externo, la densidad numérica de electrones alcanza su valor de equilibrio $n_{e2} = 16 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$.

A2 Halle la densidad numérica de electrones n_e en equilibrio cuando ambos ionizadores externos se conectan simultáneamente. **(0.6 puntos)**

¡Atención! En lo que sigue se supone que el ionizador externo lleva conectado un tiempo suficientemente largo como para que todos los procesos se hayan vuelto estacionarios y no dependan del tiempo. Desprecie por completo el campo eléctrico debido a los portadores de carga.

Suponga que el gas llena el tubo situado entre dos placas conductoras paralelas de área S , separadas entre sí una distancia $L \ll \sqrt{S}$. Se aplica una tensión U entre las placas para crear un campo eléctrico entre ellas. Suponga que las densidades numéricas de ambos tipos de portadores de carga permanecen casi constantes a lo largo del tubo.

Suponga que tanto los electrones (indicados mediante el subíndice e) como los iones (indicados mediante el subíndice i) adquieren la misma rapidez de deriva v debido al campo eléctrico de intensidad E , dada por

$$v = \beta E,$$

donde β es una constante llamada movilidad de los portadores de carga.

A3 Expresé la corriente eléctrica I en el tubo en función de $U, \beta, L, S, Z_{\text{ext}}, r$ y e , que es la carga elemental. **(1.7 puntos)**

A4 Halle la resistividad ρ_{gas} del gas para valores suficientemente pequeños de la tensión aplicada y expresasela en función de $\beta, L, Z_{\text{ext}}, r$ y e . **(0.7 puntos)**

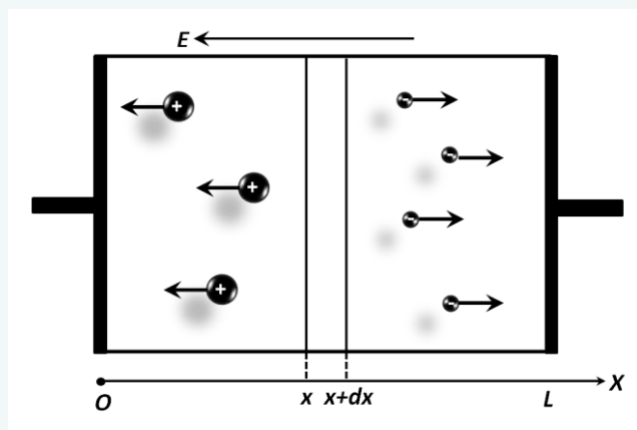
Parte B. Descarga en gases autosostenida (5.2 puntos)

En esta parte del problema se considera el inicio de la descarga en gases autosostenida para mostrar cómo la corriente eléctrica en el tubo llega a mantenerse por sí misma.

¡Atención! En lo que sigue, suponga que el ionizador externo continúa funcionando con la misma tasa Z_{ext} , desprecie el campo eléctrico debido a los portadores de carga, de modo que el campo eléctrico sea uniforme a lo largo del tubo, y suponga que la recombinación puede despreciarse por completo.

En la descarga en gases autosostenida hay dos procesos importantes que no se han considerado anteriormente. El primero es la emisión secundaria de electrones, y el segundo es la formación de una avalancha de electrones. La emisión secundaria de electrones se produce cuando los iones chocan contra el electrodo negativo, llamado cátodo, y arrancan de él electrones que se desplazan hacia el electrodo positivo, llamado ánodo. El cociente entre el número de electrones arrancados $\dot{N}_e$ por unidad de tiempo y el número de iones $\dot{N}_i$ que chocan contra el cátodo por unidad de tiempo se denomina coeficiente de emisión secundaria de electrones, $\gamma = \dot{N}_e / \dot{N}_i$. La formación de la avalancha de electrones se explica de la siguiente manera. El campo eléctrico acelera los electrones libres, que adquieren suficiente energía cinética para ionizar los átomos del gas al chocar con ellos. Como resultado, el número de electrones libres que se desplazan hacia el ánodo aumenta considerablemente. Este proceso se describe mediante el coeficiente de Townsend α , que caracteriza el aumento del número de electrones dN_e debido a N_e electrones en movimiento que han recorrido una distancia dl , es decir,

$$\frac{dN_e}{dl} = \alpha N_e.$$



La corriente total I en cualquier sección transversal del tubo de gas está compuesta por la corriente iónica $I_i(x)$ y la corriente electrónica $I_e(x)$, que, en el estado estacionario, dependen de la coordenada x , indicada en la figura anterior. La corriente electrónica $I_e(x)$ varía a lo largo del eje x según la fórmula

$$I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2,$$

donde A_1, A_2, C_1 son ciertas constantes.

B1 Halle A_1, A_2 y expréselas en función de $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S$. **(2 puntos)**

La corriente iónica $I_i(x)$ varía a lo largo del eje x según la fórmula

$$I_i(x) = C_2 + B_1 e^{B_2 x},$$

donde B_1, B_2, C_2 son ciertas constantes.

B2 Halle B_1, B_2 y expréselas en función de $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S, C_1$. **(0.6 puntos)**

B3 Escriba la condición para $I_i(x)$ en $x = L$. **(0.3 puntos)**

B4 Escriba la condición para $I_i(x)$ e $I_e(x)$ en $x = 0$. **(0.6 puntos)**

B5 Halle la corriente total I y exprésela en función de $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$. Suponga que permanece finita. **(1.2 puntos)**

Sea constante el coeficiente de Townsend α . Cuando la longitud del tubo supera cierto valor crítico, es decir, $L > L_{\text{cr}}$, el ionizador externo puede desconectarse y la descarga se vuelve autosostenida.

B6 Halle L_{cr} y expésela en función de $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$. **(0.5 puntos)**

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Las corrientes que se indican a continuación representan magnitudes, y $U \geq 0$.

- **A1**

$$n_0 = 0, \quad a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}, \quad b = \sqrt{rZ_{\text{ext}}}.$$

- **A2**

$$n_e = 2.0 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3} = 2.0 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}.$$

- **A3**, utilizando la aproximación indicada de recogida con densidad uniforme:

$$I = \frac{e\beta SU}{rL} \left[\sqrt{\frac{\beta^2 U^2}{L^4} + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{\beta U}{L^2} \right].$$

- **A4**

$$\rho_{\text{gas}} = \frac{1}{2e\beta} \sqrt{\frac{r}{Z_{\text{ext}}}}.$$

- **B1**

$$A_1 = \alpha, \quad A_2 = -\frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}.$$

- **B2**

$$B_1 = -C_1, \quad B_2 = \alpha.$$

- **B3**

$$I_i(L) = 0.$$

- **B4**

$$I_e(0) = \gamma I_i(0).$$

- B5

$$I = \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha} \frac{(1 + \gamma)(e^{\alpha L} - 1)}{1 - \gamma(e^{\alpha L} - 1)}.$$

Una solución estacionaria finita y físicamente admisible con $Z_{\text{ext}} > 0$ requiere

$$\gamma(e^{\alpha L} - 1) < 1.$$

- B6, para $\alpha > 0, \gamma > 0$:

$$L_{\text{cr}} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right).$$

Solución

A1. Crecimiento de la densidad de portadores

La ionización crea un electrón y un ion en cada proceso, mientras que la recombinación elimina uno de cada tipo. Como sus densidades iniciales son iguales, permanecen iguales:

$$n_e(t) = n_i(t) = n(t).$$

Por tanto, el balance de partículas por unidad de volumen es

$$\frac{dn}{dt} = Z_{\text{ext}} - rn^2, \quad n(0) = 0.$$

La expresión dada proporciona $n(0) = n_0$, de modo que

$$n_0 = 0.$$

Sustituyendo $n = a \tanh(bt)$ en la ecuación de balance,

$$ab [1 - \tanh^2(bt)] = Z_{\text{ext}} - ra^2 \tanh^2(bt).$$

Al igualar los términos constantes y los coeficientes de $\tanh^2(bt)$, se obtiene

$$ab = Z_{\text{ext}}, \quad ab = ra^2.$$

Tomando a, b positivos,

$$a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}, \quad b = \sqrt{rZ_{\text{ext}}}.$$

Así,

$$n_e(t) = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}} \tanh(\sqrt{rZ_{\text{ext}}} t).$$

Su pendiente inicial es Z_{ext} , y su densidad límite es $\sqrt{Z_{\text{ext}}/r}$, como exige el balance entre generación y recombinación. Invertir simultáneamente los signos de a y b describe la misma función.

A2. Dos ionizadores

Sean Z_1 y Z_2 las tasas de producción individuales. En equilibrio,

$$Z_1 = rn_{e1}^2, \quad Z_2 = rn_{e2}^2.$$

Las tasas de producción independientes se suman cuando funcionan ambos ionizadores:

$$rn_e^2 = Z_1 + Z_2 = r(n_{e1}^2 + n_{e2}^2).$$

En consecuencia,

$$n_e = \sqrt{n_{e1}^2 + n_{e2}^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}.$$

Por tanto,

$$n_e = 2.0 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3} = 2.0 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}.$$

Las propias densidades no se suman porque la tasa de recombinación depende cuadráticamente de la densidad.

A3. Corriente estacionaria con recombinación y recogida

Despreciando los efectos de borde y el campo de los portadores,

$$E = \frac{U}{L}, \quad v = \frac{\beta U}{L}.$$

Aplicamos la aproximación estipulada de densidad uniforme al volumen SL . En un tiempo dt , un electrodo colector retira $n_e Sv dt$ electrones; el electrodo opuesto retira $n_i Sv dt$ iones. Los balances estacionarios de partículas son

$$\begin{aligned} Z_{\text{ext}}SL - rn_en_iSL - n_eSv &= 0, \\ Z_{\text{ext}}SL - rn_en_iSL - n_iSv &= 0. \end{aligned}$$

Para $v > 0$, al restar se obtiene $n_e = n_i = n$. Por consiguiente,

$$rn^2 + \frac{v}{L}n - Z_{\text{ext}} = 0.$$

Solo la raíz no negativa es físicamente admisible:

$$n = \frac{1}{2r} \left[\sqrt{\left(\frac{v}{L}\right)^2 + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{v}{L} \right].$$

Aunque los electrones y los iones se mueven en sentidos opuestos, sus cargas también tienen signos opuestos. Por tanto, sus corrientes convencionales se suman:

$$I = eSn_ev + eSn_iv = 2eSnv.$$

Al sustituir se obtiene

$$I = \frac{eSv}{r} \left[\sqrt{\left(\frac{v}{L}\right)^2 + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{v}{L} \right].$$

Utilizando $v = \beta U/L$,

$$I = \frac{e\beta SU}{rL} \left[\sqrt{\frac{\beta^2 U^2}{L^4} + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{\beta U}{L^2} \right].$$

Este es el resultado de aplicar literalmente el modelo de recogida espacialmente uniforme. En rigor, las densidades no pueden mantenerse uniformes hasta las placas: la densidad de electrones debe anularse en el cátodo y la de iones en el ánodo. Por ello, la fórmula es fiable mientras estas capas empobrecidas sean delgadas frente a L , como en el régimen de tensiones pequeñas de A4; a tensión alta tiende a $2eZ_{\text{ext}}SL$, el doble de la corriente de saturación real $eZ_{\text{ext}}SL$.

A4. Resistividad a tensiones pequeñas

Para una tensión suficientemente pequeña,

$$\frac{\beta U}{L^2} \ll \sqrt{r Z_{\text{ext}}},$$

la recogida solo perturba ligeramente el equilibrio entre generación y recombinación. En la aproximación dominante,

$$n \simeq \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}.$$

Así, la corriente se vuelve proporcional a la tensión:

$$I \simeq 2e\beta \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}} \frac{S}{L} U.$$

Comparando esta expresión con

$$I = \frac{S}{\rho_{\text{gas}} L} U$$

se obtiene

$$\rho_{\text{gas}} = \frac{1}{2e\beta} \sqrt{\frac{r}{Z_{\text{ext}}}}.$$

La longitud L se cancela. Con magnitudes expresadas en unidades del SI, el resultado se obtiene en $\Omega \text{ m}$.

B1. Ecuación de la corriente electrónica

En la Parte B se desprecia la recombinación. Tomamos I_e e I_i como magnitudes no negativas de las corrientes, de modo que

$$I = I_e(x) + I_i(x).$$

Consideremos una lámina delgada de espesor dx . El ionizador externo crea

$$Z_{\text{ext}} S dx$$

electrones por unidad de tiempo en la lámina. La multiplicación por avalancha crea, además,

$$\alpha \frac{I_e(x)}{e} dx$$

electrones por unidad de tiempo. Cada nuevo electrón añade a la corriente electrónica que sale de la lámina una contribución igual a e por su tasa de producción. Por tanto,

$$I_e(x + dx) - I_e(x) = [eSZ_{\text{ext}} + \alpha I_e(x)]dx.$$

En forma diferencial,

$$\frac{dI_e}{dx} = \alpha I_e + eSZ_{\text{ext}}.$$

Para $\alpha > 0$ constante, su solución general es

$$I_e(x) = C_1 e^{\alpha x} - \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}.$$

La comparación con la expresión dada proporciona

$$A_1 = \alpha, \quad A_2 = -\frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}.$$

B2. Ecuación de la corriente iónica

Cada proceso de ionización también produce un ion. Los iones se mueven hacia valores decrecientes de x , de modo que la corriente iónica que sale de la lámina por su cara izquierda supera a la que entra por su cara derecha:

$$I_i(x) - I_i(x + dx) = [eSZ_{\text{ext}} + \alpha I_e(x)]dx.$$

Así,

$$\frac{dI_i}{dx} = -eSZ_{\text{ext}} - \alpha I_e(x).$$

Utilizando la solución para la corriente electrónica,

$$\frac{dI_i}{dx} = -\alpha C_1 e^{\alpha x},$$

y al integrar se obtiene

$$I_i(x) = C_2 - C_1 e^{\alpha x}.$$

En consecuencia,

$$B_1 = -C_1, \quad B_2 = \alpha.$$

Las dos ecuaciones diferenciales también muestran que

$$\frac{d}{dx}(I_e + I_i) = 0,$$

lo que expresa la conservación de la carga en régimen estacionario.

B3. Condición de contorno en el ánodo

El ánodo se encuentra en $x = L$. No entran iones en el gas desde este electrodo, y los iones creados en el interior del gas se alejan de él por deriva. Por tanto,

$$I_i(L) = 0.$$

De forma equivalente,

$$C_2 = C_1 e^{\alpha L}.$$

B4. Condición de contorno en el cátodo

En $x = 0$, la tasa de llegada de iones es $I_i(0)/e$. Cada ion que llega libera, en promedio, γ electrones. Por consiguiente,

$$\frac{I_e(0)}{e} = \gamma \frac{I_i(0)}{e},$$

o bien

$$I_e(0) = \gamma I_i(0).$$

B5. Corriente estacionaria total

Para abreviar, definimos

$$K = \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}, \quad T = e^{\alpha L}.$$

Entonces,

$$I_e(x) = C_1 e^{\alpha x} - K, \quad I_i(x) = C_2 - C_1 e^{\alpha x}.$$

La condición en el ánodo proporciona

$$C_2 = C_1 T.$$

La condición en el cátodo se convierte en

$$C_1 - K = \gamma(C_2 - C_1) = \gamma C_1(T - 1).$$

Por tanto,

$$C_1 = \frac{K}{1 - \gamma(T - 1)}.$$

Sumando las corrientes electrónica e iónica,

$$I = C_2 - K = C_1 T - K.$$

Sustituyendo C_1 y simplificando,

$$I = K \frac{T - 1 + \gamma(T - 1)}{1 - \gamma(T - 1)}.$$

Así,

$$I = \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha} \frac{(1 + \gamma)(e^{\alpha L} - 1)}{1 - \gamma(e^{\alpha L} - 1)}.$$

Con una tasa de ionización externa positiva, una corriente estacionaria finita y físicamente admisible requiere

$$1 - \gamma(e^{\alpha L} - 1) > 0.$$

Cuando el denominador es cero, el modelo estacionario lineal predice una divergencia; un denominador negativo daría una magnitud de corriente negativa, que carece de sentido físico.

B6. Longitud crítica para la descarga autosostenida

Un electrón emitido por el cátodo se multiplica hasta dar

$$e^{\alpha L}$$

electrones cuando la avalancha llega al ánodo. Como el electrón original ya estaba presente, la avalancha crea

$$e^{\alpha L} - 1$$

nuevos pares electrón-ion.

Al despreciar la recombinación, todos estos iones llegan al cátodo. Liberan, en promedio,

$$\mathcal{R} = \gamma(e^{\alpha L} - 1)$$

electrones secundarios. Este es el número de electrones del cátodo producidos por un electrón previo del cátodo.

Si $\mathcal{R} < 1$, las generaciones sucesivas disminuyen y es necesaria la ionización externa. El umbral se alcanza cuando cada generación se reemplaza exactamente a sí misma:

$$\gamma(e^{\alpha L_{\text{cr}}} - 1) = 1.$$

Despejando,

$$L_{\text{cr}} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right).$$

Para $L > L_{\text{cr}}$, la realimentación amplifica una descarga inicial incluso después de retirar el ionizador externo. El presente modelo lineal determina el umbral de inicio; se necesitan efectos físicos adicionales para determinar una corriente de funcionamiento finita por encima del umbral.

Ni Z_{ext} , ni e , ni S intervienen en el umbral. Si $\alpha = 0$ o $\gamma = 0$, este mecanismo no puede mantener una descarga para ninguna longitud finita.

La solución se comprobó con la solución oficial.