

IPhO 2014

Theorieaufgaben und Lösungen · Astana, Kasachstan · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

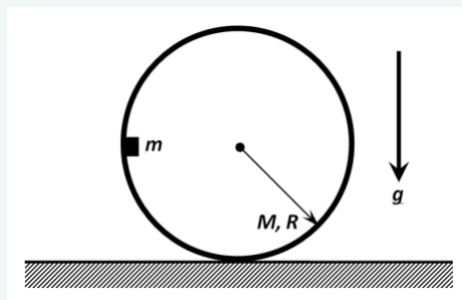
eulersolve.org/ipho/2014/

Aufgabe 1: Drei unabhängige Teile: Puck in einem rollenden Zylinder, Seifenblase mit Gas, LC-Schaltung mit einem Schalter

Diese Aufgabe besteht aus drei unabhängigen Teilen.

Teil A (3 Punkte)

Ein kleiner Puck der Masse m wird vorsichtig auf die Innenfläche eines dünnwandigen Hohlzylinders der Masse M und des Radius R gesetzt. Anfangs ruht der Zylinder auf einer horizontalen Ebene, und der Puck befindet sich in der Höhe R über der Ebene, wie in der linken Abbildung dargestellt. Bestimmen Sie die Wechselwirkungskraft F zwischen dem Puck und dem Zylinder in dem Moment, in dem der Puck den tiefsten Punkt seiner Bahn durchläuft. Nehmen Sie an, dass zwischen dem Puck und der Innenfläche des Zylinders keine Reibung wirkt und dass sich der Zylinder auf der Ebene ohne Gleiten bewegt. Die Fallbeschleunigung beträgt g .



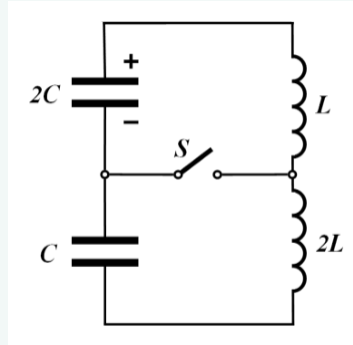
Teil B (3 Punkte)

Eine Blase mit dem Radius $r = 5.00 \text{ cm}$, die ein zweiatomiges ideales Gas enthält, besitzt einen Seifenfilm der Dicke $h = 10.0 \text{ }\mu\text{m}$ und befindet sich im Vakuum. Der Seifenfilm hat die Oberflächenspannung $\sigma = 4.00 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{m}}$ und die Dichte $\rho = 1.10 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. 1) Bestimmen Sie eine Formel für die molare Wärmekapazität des Gases in der Blase für einen Prozess, bei dem das Gas so langsam erwärmt wird, dass die Blase im mechanischen Gleichgewicht bleibt, und berechnen Sie ihren Zahlenwert; 2) Bestimmen Sie eine Formel für die Kreisfrequenz ω kleiner radialer Schwingungen der Blase und berechnen Sie ihren Zahlenwert unter der Annahme, dass die Wärmekapazität des Seifenfilms wesentlich größer ist als die Wärmekapazität des Gases in der Blase. Nehmen Sie an, dass sich das thermische Gleichgewicht innerhalb der Blase in einer Zeit einstellt, die wesentlich kürzer als die Schwingungsdauer ist.

Hinweis: Laplace zeigte, dass zwischen der Innen- und Außenseite einer gekrümmten Oberfläche eine Druckdifferenz besteht, die durch die Oberflächenspannung der Grenzfläche zwischen Flüssigkeit und Gas verursacht wird, sodass $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$.

Teil C (3 Punkte)

Anfangs ist der Schalter S in der rechts abgebildeten Schaltung geöffnet, ein Kondensator der Kapazität $2C$ trägt die elektrische Ladung q_0 , ein Kondensator der Kapazität C ist ungeladen, und in den beiden Spulen mit den Induktivitäten L beziehungsweise $2L$ fließen keine elektrischen Ströme. Der Kondensator beginnt sich zu entladen, und in dem Moment, in dem der Strom in den Spulen seinen Maximalwert erreicht, wird der Schalter S augenblicklich geschlossen. Bestimmen Sie den maximalen Strom $I_{\max}$, der danach durch den Schalter S fließt.



Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- Teil A:

$$F = mg \left(3 + \frac{m}{M} \right).$$

- Teil B, 1): Mit $\mathcal{R}$ als universeller Gaskonstante gilt

$$C_{\text{mol}} = 4\mathcal{R} = 33.3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

- Teil B, 2):

$$\omega = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho h r^2}} = 1.08 \times 10^2 \text{ rad s}^{-1}.$$

Die zugehörige gewöhnliche Frequenz beträgt $f = \omega/(2\pi) = 17.2 \text{ Hz}$.

- Teil C:

$$I_{\max} = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

Lösung

Teil A

Sei V die horizontale Geschwindigkeit des Zylindermittelpunkts und v_x die horizontale Geschwindigkeit des Pucks, jeweils nach rechts positiv gezählt. Das Trägheitsmoment des Zylinders beträgt

$$I_{\text{cyl}} = MR^2.$$

Zunächst bestimmen wir eine Beziehung zwischen diesen Geschwindigkeiten. Sei f die vorzeichenbehaftete horizontale Reibungskraft, die die Ebene auf den Zylinder ausübt. Die Wirkungslinie der Normalkraft des Pucks verläuft durch den Zylindermittelpunkt, sodass nur f ein Drehmoment um diesen Mittelpunkt erzeugt.

Wird die Winkelgeschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn positiv gezählt, so ergibt das Rollen ohne Gleiten

$$\Omega_{\text{cyl}} = -\frac{V}{R}.$$

Folglich gilt

$$I_{\text{cyl}} \dot{\Omega}_{\text{cyl}} = Rf \implies f = -M\dot{V}.$$

Für das Gesamtsystem aus Puck und Zylinder lautet die horizontale Bewegungsgleichung

$$m\dot{v}_x + M\dot{V} = f.$$

Durch Kombination dieser Gleichungen und unter Verwendung des anfänglichen Ruhezustands erhalten wir

$$\boxed{mv_x + 2MV = 0}.$$

Am tiefsten Punkt ist die Geschwindigkeit des Pucks horizontal; wir bezeichnen sie mit v . Seine Geschwindigkeit relativ zum Zylindermittelpunkt beträgt

$$u = v - V.$$

Somit gilt

$$V = -\frac{m}{2M}v, \quad u = \frac{2M+m}{2M}v.$$

Die mechanische Energie bleibt erhalten: Der Kontakt zwischen Puck und Zylinder ist reibungsfrei, und die Haftreibung am ruhenden Berührungspunkt mit der Ebene verrichtet keine Arbeit. Der Puck sinkt um die Höhe R ab, sodass

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + MV^2.$$

Einsetzen der Geschwindigkeitsbeziehung liefert

$$v^2 = \frac{4M}{2M+m}gR, \quad u^2 = \frac{2M+m}{M}gR.$$

Um die vertikale Beschleunigung zu bestimmen, sei θ der Winkel zwischen der Position des Pucks relativ zum Zylindermittelpunkt und der nach unten gerichteten Vertikalen. Seine Höhe beträgt

$$y = R - R\cos\theta.$$

Am tiefsten Punkt gelten $\theta = 0$ und $u = R\dot{\theta}$, sodass

$$\ddot{y} = R\dot{\theta}^2 = \frac{u^2}{R}.$$

Die Kraft des Zylinders auf den Puck ist dort nach oben gerichtet. Das zweite Newtonsche Gesetz ergibt daher

$$F - mg = m\frac{u^2}{R}.$$

Daraus folgt

$$F = mg \left(3 + \frac{m}{M} \right).$$

Teil B, 1)

Wir betrachten den Seifenfilm als dünn im Vergleich zum Blasenradius und nehmen seine Oberflächenspannung als konstant an. Ein Seifenfilm besitzt **zwei** Grenzflächen zwischen Flüssigkeit und Gas. Ihre Laplace-Drucksprünge addieren sich, sodass das Gleichgewicht im Vakuum erfordert, dass

$$p = \frac{4\sigma}{r}.$$

Seien n die Stoffmenge und $\mathcal{R}$ die universelle Gaskonstante. Mit der idealen Gasgleichung

$$pV = n\mathcal{R}T, \quad V = \frac{4\pi r^3}{3},$$

erhalten wir

$$n\mathcal{R}T = \frac{16\pi\sigma}{3}r^2.$$

Während des vorgegebenen langsamen Gleichgewichtsprozesses gilt somit

$$T \propto r^2, \quad \frac{dV}{V} = 3 \frac{dr}{r} = \frac{3}{2} \frac{dT}{T}.$$

Das Gas verrichtet daher die Arbeit

$$p dV = \frac{3}{2} \frac{pV}{T} dT = \frac{3}{2} n\mathcal{R} dT.$$

Für ein zweiatomiges ideales Gas, dessen Rotationsfreiheitsgrade angeregt und dessen Schwingungsfreiheitsgrade nicht angeregt sind, gilt

$$dU = \frac{5}{2} n\mathcal{R} dT.$$

Der auf das Gas angewandte erste Hauptsatz liefert

$$\delta Q = dU + p dV = \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \right) n\mathcal{R} dT.$$

Seine molare Wärmekapazität für diesen Prozess beträgt daher

$$C_{\text{mol}} = \frac{\delta Q}{n dT} = 4\mathcal{R}.$$

Mit $\mathcal{R} = 8.31446 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ergibt sich

$$C_{\text{mol}} = 33.3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Teil B, 2)

Der Film hat eine wesentlich größere Wärmekapazität als das Gas, und das thermische Gleichgewicht stellt sich rasch ein. Der Film wirkt daher während einer Schwingung als Wärmereservoir, sodass Kompression und Expansion des Gases näherungsweise **isotherm** verlaufen.

Der Gleichgewichtsradius sei r , und wir schreiben den momentanen Radius als

$$s = r + \xi, \quad |\xi| \ll r.$$

Mit dem Gleichgewichtsdruck $p_0 = 4\sigma/r$ ergibt das isotherme Gasgesetz

$$p(s) = p_0 \left(\frac{r}{s} \right)^3.$$

Die resultierende, nach außen wirkende Druckdifferenz am Film beträgt

$$p(s) - \frac{4\sigma}{s}.$$

Die Entwicklung bis zur ersten Ordnung in ξ liefert

$$p(s) \simeq p_0 \left(1 - \frac{3\xi}{r} \right), \quad \frac{4\sigma}{s} \simeq \frac{4\sigma}{r} \left(1 - \frac{\xi}{r} \right),$$

sodass

$$p(s) - \frac{4\sigma}{s} \simeq -\frac{8\sigma}{r^2} \xi.$$

Die konstante Masse des Films, ausgedrückt durch seine Abmessungen im Gleichgewicht, beträgt

$$m_f = 4\pi r^2 \rho h.$$

Unter Vernachlässigung der Trägheit des Gases und dissipativer Effekte lautet die Gleichung für die radiale Bewegung bis zur ersten Ordnung

$$m_f \ddot{\xi} = 4\pi r^2 \left(-\frac{8\sigma}{r^2} \xi \right) = -32\pi\sigma\xi.$$

Somit gilt

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0, \quad \boxed{\omega^2 = \frac{32\pi\sigma}{m_f} = \frac{8\sigma}{\rho h r^2}}.$$

Wir rechnen die gegebenen Größen in SI-Einheiten um:

$$r = 5.00 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad h = 1.00 \times 10^{-5} \text{ m}, \quad \rho = 1.10 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3},$$

und erhalten

$$\omega = \sqrt{\frac{8(4.00 \times 10^{-2})}{(1.10 \times 10^3)(1.00 \times 10^{-5})(5.00 \times 10^{-2})^2}}.$$

Daher gilt

$$\boxed{\omega = 1.08 \times 10^2 \text{ rad s}^{-1}}, \quad \boxed{f = 17.2 \text{ Hz}}.$$

Teil C

Bevor der Schalter geschlossen wird, fließt durch beide Spulen derselbe Strom i . Sei q die Ladung, die seit Beginn der Entladung nach unten durch die Spulen geflossen ist, sodass $i = \dot{q}$.

Die Ladung auf der oberen Platte des Kondensators mit der Kapazität $2C$ beträgt dann $q_0 - q$, während die Ladung auf der oberen Platte des Kondensators mit der Kapazität C gleich $-q$ ist.

Definieren wir beide Kondensatorspannungen von oben nach unten, so gilt

$$U_1 = \frac{q_0 - q}{2C}, \quad U_2 = -\frac{q}{C}.$$

Die Kirchhoffsche Maschenregel ergibt

$$3L\dot{i} = U_1 + U_2 = \frac{q_0 - 3q}{2C}.$$

Beim maximalen Strom gilt $\dot{i} = 0$. Daher gilt zum Schaltzeitpunkt

$$q = \frac{q_0}{3}, \quad \boxed{U_1 = \frac{q_0}{3C}, \quad U_2 = -\frac{q_0}{3C}}.$$

Wir setzen nun $t = 0$ auf den Zeitpunkt, zu dem der Schalter geschlossen wird. Der obere Kondensator und die obere Spule bilden einen LC-Schwingkreis, während das untere Paar einen weiteren bildet. Ihre Kreisfrequenzen sind gleich:

$$\Omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L(2C)}}, \quad \Omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(2L)C}},$$

sodass

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}.$$

Seien i_1 und i_2 die Ströme durch die obere beziehungsweise untere Spule, jeweils nach unten positiv gezählt. Ihre Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} L\dot{i}_1 &= U_1, & 2C\dot{U}_1 &= -i_1, \\ 2L\dot{i}_2 &= U_2, & C\dot{U}_2 &= -i_2. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\ddot{i}_1 + \Omega^2 i_1 = 0, \quad \ddot{i}_2 + \Omega^2 i_2 = 0.$$

Der Schalterstrom werde vom Verbindungspunkt der Spulen zum Verbindungspunkt der Kondensatoren positiv gezählt. Die Kirchhoffsche Knotenregel liefert

$$i_S = i_1 - i_2,$$

und daher

$$\ddot{i}_S + \Omega^2 i_S = 0.$$

Die Spulenströme sind beim Schalten stetig und waren zuvor gleich, sodass

$$i_S(0) = 0.$$

Auch die Kondensatorspannungen sind stetig, woraus folgt, dass

$$\dot{i}_S(0) = \frac{U_1(0)}{L} - \frac{U_2(0)}{2L} = \frac{q_0}{3LC} + \frac{q_0}{6LC} = \frac{q_0}{2LC}.$$

Der resultierende Schalterstrom lautet

$$i_S(t) = \frac{\dot{i}_S(0)}{\Omega} \sin(\Omega t) = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}}\right).$$

Sein maximaler Betrag ist somit

$$\boxed{I_{\max} = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Van-der-Waals-Zustandsgleichung

In einem bekannten Modell eines idealen Gases, dessen Zustandsgleichung dem Clapeyron-Mendeleejew-Gesetz folgt, werden die folgenden wichtigen physikalischen Effekte vernachlässigt. Erstens haben die Moleküle eines realen Gases eine endliche Größe, und zweitens wechselwirken sie miteinander. In allen Teilen dieser Aufgabe wird *ein Mol Wasser* betrachtet.

Teil A. Zustandsgleichung eines nichtidealen Gases (2 Punkte)

Berücksichtigt man die endliche Größe der Moleküle, so nimmt die Zustandsgleichung des Gases die folgende Form an:

$$P(V - b) = RT, \quad (1)$$

wobei P , V , T den Gasdruck, das Volumen pro Mol beziehungsweise die Temperatur bezeichnen, R die universelle Gaskonstante ist und b eine stoffabhängige Konstante ist, die ein bestimmtes Volumen abzieht.

A1 Schätzen Sie b ab und drücken Sie es durch den Moleküldurchmesser d aus. (0.3 Punkte)

Unter Berücksichtigung der zwischenmolekularen Anziehungskräfte schlug van der Waals die folgende Zustandsgleichung vor, die sowohl den gasförmigen als auch den flüssigen Aggregatzustand gut beschreibt:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \quad (2)$$

Dabei ist a eine weitere stoffabhängige Konstante.

Bei Temperaturen T unterhalb eines bestimmten kritischen Wertes T_c wird die Isotherme der Gleichung (2) durch die in Abbildung 1 gezeigte nichtmonotone Kurve 1 gut wiedergegeben; diese wird als Van-der-Waals-Isotherme bezeichnet. In derselben Abbildung zeigt Kurve 2 die Isotherme eines idealen Gases bei derselben Temperatur. Eine reale Isotherme unterscheidet sich von der Van-der-Waals-Isotherme durch einen geraden Abschnitt AB , der bei einem bestimmten konstanten Druck P_{LG} verläuft. Dieser gerade Abschnitt liegt zwischen den Volumina V_L und V_G und entspricht dem Gleichgewicht zwischen der flüssigen Phase (mit L bezeichnet) und der gasförmigen Phase (mit G bezeichnet). Aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zeigte J. Maxwell, dass der Druck P_{LG} so gewählt werden muss, dass die in Abbildung 1 dargestellten Flächen I und II gleich groß sind.

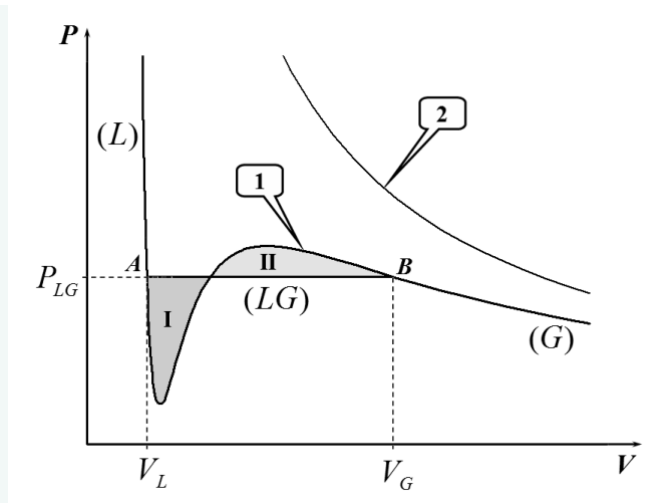


Abbildung 1. Van-der-Waals-Isotherme von Gas/Flüssigkeit (Kurve 1) und Isotherme eines idealen Gases (Kurve 2).

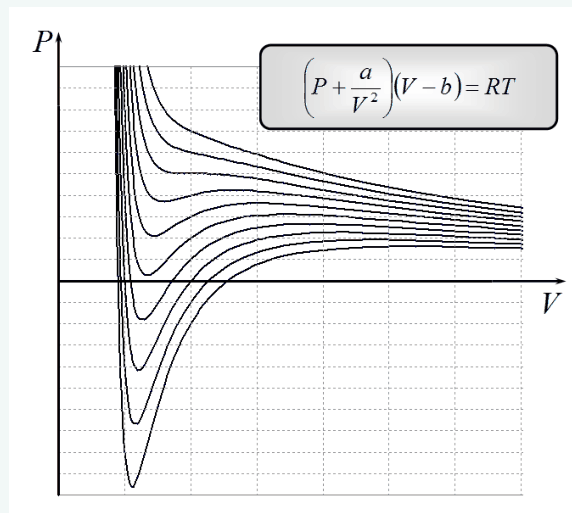


Abbildung 2. Mehrere Isothermen der Van-der-Waals-Zustandsgleichung.

Mit steigender Temperatur schrumpft der gerade Abschnitt AB auf der Isotherme zu einem einzigen Punkt, wenn Temperatur und Druck bestimmte Werte T_c beziehungsweise $P_{LG} = P_c$ erreichen. Die Parameter P_c und T_c heißen kritisch und lassen sich experimentell mit hoher Genauigkeit messen.

A2	Drücken Sie die Van-der-Waals-Konstanten a und b durch T_c und P_c aus. (1.3 Punkte)
A3	Für Wasser gilt $T_c = 647$ K und $P_c = 2.2 \cdot 10^7$ Pa. Berechnen Sie a_w und b_w für Wasser. (0.2 Punkte)
A4	Schätzen Sie den Durchmesser der Wassermoleküle d_w ab. (0.2 Punkte)

Teil B. Eigenschaften von Gas und Flüssigkeit (6 Punkte)

Dieser Teil der Aufgabe behandelt die Eigenschaften von Wasser im gasförmigen und flüssigen Zustand bei der Temperatur $T = 100$ °C. Der Sättigungsdampfdruck bei dieser Temperatur ist bekanntermaßen $p_{LG} = p_0 = 1.0 \cdot 10^5$ Pa, und die molare Masse von Wasser beträgt

$$\mu = 1.8 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{mole}}.$$

Gasförmiger Zustand

Zur Beschreibung der Eigenschaften von Wasser im gasförmigen Zustand ist es sinnvoll anzunehmen, dass die Ungleichung $V_G \gg b$ gilt.

- | | |
|----|---|
| B1 | Leiten Sie die Formel für das Volumen V_G her und drücken Sie es durch R, T, p_0 , und a aus. (0.8 Punkte) |
|----|---|

Mit dem idealen Gasgesetz lässt sich näherungsweise ein nahezu gleiches Volumen V_{G0} bestimmen.

- | | |
|----|---|
| B2 | Berechnen Sie die relative Abnahme des Gasvolumens aufgrund zwischenmolekularer Kräfte, $\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}}$, in Prozent. (0.3 Punkte) |
|----|---|

Wird das Volumen des Systems unter V_G verringert, beginnt das Gas zu kondensieren. Ein sorgfältig gereinigtes Gas kann jedoch in einem mechanisch metastabilen Zustand (als unterkühlter Dampf bezeichnet) verbleiben, bis sein Volumen einen bestimmten Wert $V_{G\min}$ erreicht.

Die Bedingung für die mechanische Stabilität eines unterkühlten Gases bei konstanter Temperatur lautet: $\frac{dP}{dV} < 0$.

- | | |
|----|--|
| B3 | Bestimmen und berechnen Sie, um welchen Faktor das Volumen von Wasserdampf verringert werden kann, während dieser noch in einem metastabilen Zustand verbleibt. Mit anderen Worten: Wie groß ist $V_G/V_{G\min}$? (0.7 Punkte) |
|----|--|

Flüssiger Zustand

Für die Beschreibung von Wasser im flüssigen Zustand nach van der Waals ist es sinnvoll anzunehmen, dass die folgende Ungleichung gilt: $P \ll a/V^2$.

- | | |
|----|--|
| B4 | Drücken Sie das Volumen des flüssigen Wassers V_L durch a, b, R , und T aus. (1.0 Punkte) |
|----|--|

Bestimmen Sie unter der Annahme $bRT \ll a$ die folgenden Eigenschaften von Wasser. *Wundern Sie sich nicht, wenn einige der berechneten Werte nicht mit den bekannten Tabellenwerten übereinstimmen!*

- | | |
|----|---|
| B5 | Drücken Sie die Dichte des flüssigen Wassers ρ_L durch geeignete Größen aus μ, a, b, R aus und berechnen Sie sie. (0.5 Punkte) |
| B6 | Drücken Sie den thermischen Volumenausdehnungskoeffizienten $\alpha = \frac{1}{V_L} \frac{\Delta V_L}{\Delta T}$ durch a, b, R aus und berechnen Sie ihn. (0.6 Punkte) |
| B7 | Drücken Sie die spezifische Verdampfungswärme von Wasser L durch μ, a, b, R aus und berechnen Sie sie. (1.1 Punkte) |
| B8 | Schätzen Sie die Oberflächenspannung σ von Wasser ab, indem Sie eine monomolekulare Wasserschicht betrachten. (1.2 Punkte) |

Teil C. Flüssigkeit-Gas-System (3 Punkte)

Aus der Maxwell-Regel (Flächengleichheit, durch einfache Integration) und der Van-der-Waals-Zustandsgleichung lässt sich zusammen mit den in Teil B vorgenommenen Näherungen zeigen, dass der Sättigungsdampfdruck p_{LG} wie folgt von der Temperatur T abhängt:

$$\ln p_{LG} = A + \frac{B}{T}, \quad (3)$$

wobei A und B Konstanten sind, die durch a und b ausgedrückt werden können als $A = \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) - 1$; $B = -\frac{a}{bR}$

W. Thomson zeigte, dass der Sättigungsdampfdruck von der Krümmung der Flüssigkeitsoberfläche abhängt. Betrachten Sie eine Flüssigkeit, die das Material einer Kapillare nicht benetzt (Kontaktwinkel 180°). Wird die Kapillare in die Flüssigkeit eingetaucht, sinkt die Flüssigkeit in der Kapillare aufgrund der Oberflächenspannung auf ein bestimmtes Niveau ab (siehe Abbildung 3).

- C1 Bestimmen Sie eine kleine Änderung Δp_T des Sättigungsdampfdrucks über der gekrümmten Flüssigkeitsoberfläche und drücken Sie sie durch die Dampfdichte ρ_s , die Flüssigkeitsdichte ρ_L , die Oberflächenspannung σ und den Krümmungsradius der Oberfläche r aus. **(1.3 Punkte)**

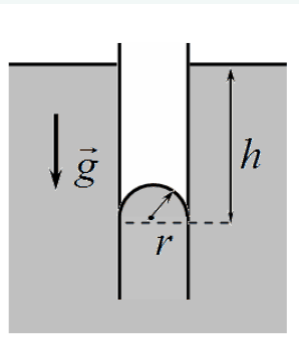


Abbildung 3. Eine Kapillare, die in eine Flüssigkeit eingetaucht ist, welche ihr Material nicht benetzt

Die in Teil B3 betrachteten metastabilen Zustände werden in realen Versuchsanordnungen vielfach genutzt, etwa in der Nebelkammer zum Nachweis von Elementarteilchen. Sie treten auch bei Naturerscheinungen wie der Bildung von Morgentau auf. Unterkühlter Dampf kann unter Bildung von Flüssigkeitströpfchen kondensieren. Sehr kleine Tröpfchen verdampfen schnell, hinreichend große hingegen können weiter wachsen.

- C2 Nehmen Sie an, dass der Wasserdampf in der Luft bei der Abendtemperatur $t_e = 20^\circ\text{C}$ gesättigt war, die Umgebungstemperatur am Morgen jedoch um einen kleinen Betrag von $\Delta t = 5.0^\circ\text{C}$ gesunken ist. Schätzen Sie unter der Annahme, dass der Dampfdruck unverändert geblieben ist, den kleinsten Radius von Tröpfchen ab, die wachsen können. Verwenden Sie den Tabellenwert der Oberflächenspannung von Wasser $\sigma = 7.3 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$. **(1.7 Punkte)**

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Für die numerischen Berechnungen werden $R = 8.31 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$, $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ und in Teil B $T = 373 \text{ K}$ verwendet. Die Volumina sind molare Volumina. Die folgenden molekularen Abschätzungen verwenden die übliche Konvention für das ausgeschlossene Volumen harter Kugeln; ihre Modellabhängigkeit wird in den Lösungen zu A1, A4 und B8 erörtert.

- **A1:** $b \sim N_A d^3$; die Abschätzung für harte Kugeln lautet

$$b = \frac{2\pi}{3} N_A d^3.$$

- **A2:**

$$a = \frac{27R^2 T_c^2}{64P_c}, \quad b = \frac{RT_c}{8P_c}.$$

- **A3:**

$$a_w \simeq 0.55 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}, \quad b_w \simeq 3.1 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

- **A4:**

$$d_w = \left(\frac{3b_w}{2\pi N_A} \right)^{1/3} \simeq 2.9 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

- **B1:**

$$V_G = \frac{RT + \sqrt{R^2 T^2 - 4ap_0}}{2p_0} \simeq 3.08 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

- **B2:**

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2 T^2}}}{2} \simeq 0.58\%.$$

- **B3:**

$$V_{G\min} = \frac{2a}{RT} \simeq 3.6 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}, \quad \frac{V_G}{V_{G\min}} \simeq 86.$$

- **B4:**

$$V_L = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4abRT}}{2RT} = \frac{2b}{1 + \sqrt{1 - \frac{4bRT}{a}}}.$$

- **B5:**

$$\rho_L \simeq \frac{\mu}{b} \simeq 5.9 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}.$$

- **B6:**

$$\alpha \simeq \frac{bR}{a} \simeq 4.6 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}.$$

- **B7:**

$$L \simeq \frac{a}{\mu b} \simeq 1.0 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}.$$

- **B8:** Eine Abschätzung anhand einer Monoschicht, der die Hälfte des Kohäsionsbeitrags aus dem Flüssigkeitsinneren fehlt, ergibt

$$\sigma \sim \frac{1}{2} \rho_L L d_w = \frac{a d_w}{2 b^2} \simeq 8.6 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}.$$

Verlässlich ist dabei nur die Größenordnung, $\sigma \sim 10^{-1} \text{ N m}^{-1}$.

- **C1:** Für die dargestellte konvexe Flüssigkeitsoberfläche gilt

$$\Delta p_T = \frac{2\sigma\rho_s}{r(\rho_L - \rho_s)} \simeq \frac{2\sigma\rho_s}{r\rho_L} > 0.$$

- **C2:** Mit $T_e = 293 \text{ K}$ und $\Delta T = 5.0 \text{ K}$ gilt

$$r_{\min} \simeq \frac{2\sigma T_e}{\rho_L L \Delta T} = \frac{2\sigma b^2 T_e}{a \Delta T} \simeq 1.4 \times 10^{-8} \text{ m} = 14 \text{ nm}.$$

Tröpfchen, die größer als dieser kritische Radius sind, können wachsen.

Lösung

A1. Molekülgröße und ausgeschlossenes Volumen

Wir modellieren die Moleküle als harte Kugeln mit dem Durchmesser d . Der Mittelpunkt eines Moleküls kann nicht in eine Kugel mit dem Radius d um den Mittelpunkt eines anderen Moleküls eindringen. Das einem Paar zugeordnete ausgeschlossene Volumen ist daher

$$v_{\text{ex}} = \frac{4\pi d^3}{3}.$$

Bei der üblichen Berechnung des ausgeschlossenen Volumens für ein verdünntes System harter Kugeln wird jedes Paar einmal gezählt; daraus ergibt sich ein Parameter des ausgeschlossenen Volumens pro Molekül von $v_{\text{ex}}/2$. Für ein Mol gilt

$$b = \frac{1}{2} N_A v_{\text{ex}} = \frac{2\pi}{3} N_A d^3.$$

Damit ist die übliche Van-der-Waals-Konstante b viermal so groß wie das gesamte geometrische Volumen der kugelförmigen Moleküle. Unabhängig von diesem geometrischen Vorfaktor ist die gesuchte Größenordnung $b \sim N_A d^3$.

A2. Bedingungen am kritischen Punkt

Wir schreiben die Zustandsgleichung in der Form

$$P(V, T) = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}.$$

Am kritischen Punkt verschmelzen die beiden Extrema der unterkritischen Isotherme zu einem Wendepunkt mit waagerechter Tangente. Daher gilt

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T_c, V_c} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_{T_c, V_c} = 0.$$

Diese Bedingungen ergeben

$$\frac{RT_c}{(V_c - b)^2} = \frac{2a}{V_c^3}, \quad \frac{RT_c}{(V_c - b)^3} = \frac{3a}{V_c^4}.$$

Division der zweiten Gleichung durch die erste liefert

$$\frac{1}{V_c - b} = \frac{3}{2V_c},$$

also

$$V_c = 3b.$$

Einsetzen in die Bedingung für die erste Ableitung und in die Zustandsgleichung ergibt

$$RT_c = \frac{8a}{27b}, \quad P_c = \frac{a}{27b^2}.$$

Auflösen nach den Konstanten liefert

$$b = \frac{RT_c}{8P_c}, \quad a = \frac{27R^2T_c^2}{64P_c}.$$

A3. Konstanten für Wasser

Mit den gegebenen kritischen Daten erhalten wir

$$b_w = \frac{8.31(647)}{8(2.2 \times 10^7)} = 3.055 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1},$$

und

$$a_w = \frac{27(8.31)^2(647)^2}{64(2.2 \times 10^7)} = 0.5543 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}.$$

Auf zwei signifikante Stellen gerundet ergibt sich

$$a_w \simeq 0.55 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}, \quad b_w \simeq 3.1 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

In den folgenden Berechnungen werden die ungerundeten Werte beibehalten.

A4. Moleküldurchmesser

Aus A1 folgt

$$d_w = \left(\frac{3b_w}{2\pi N_A} \right)^{1/3}.$$

Somit gilt

$$d_w \simeq 2.9 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.29 \text{ nm}.$$

Dies ist ein effektiver Durchmesser im Modell harter Kugeln.

B1. Volumen des gesättigten Dampfes

Wir wenden die vorgegebene Näherung $V_G \gg b$ an:

$$\left(p_0 + \frac{a}{V_G^2} \right) V_G = RT.$$

Multiplikation mit V_G ergibt

$$p_0 V_G^2 - RT V_G + a = 0.$$

Der gasförmige Zustand entspricht der größeren Lösung, die für $a \rightarrow 0$ gegen RT/p_0 strebt:

$$V_G = \frac{RT + \sqrt{R^2 T^2 - 4ap_0}}{2p_0}.$$

Bei $T = 373 \text{ K}$ gilt

$$V_G = 0.0308164 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1} \simeq 3.08 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

Bei schwacher Anziehung ergibt eine Entwicklung der Quadratwurzel außerdem

$$V_G \simeq \frac{RT}{p_0} - \frac{a}{RT}.$$

B2. Relative Volumenabnahme

Das Volumen des idealen Gases beträgt

$$V_{G0} = \frac{RT}{p_0} = 0.0309963 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

Mit B1 erhalten wir

$$\frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2 T^2}} \right).$$

Numerisch ergibt sich

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = 5.803 \times 10^{-3},$$

also

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} \simeq 0.58\%.$$

In erster Ordnung ist dieser Anteil gleich $ap_0/(R^2 T^2)$.

B3. Grenze der metastabilen Kompression

In derselben Näherung für das Gas gilt

$$P(V) = \frac{RT}{V} - \frac{a}{V^2}.$$

Mechanische Stabilität erfordert

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{RT}{V^2} + \frac{2a}{V^3} = \frac{2a - RTV}{V^3} < 0.$$

Das Gas bleibt somit gegenüber kleinen Volumenstörungen mechanisch stabil, wenn

$$V > \frac{2a}{RT}.$$

Das Grenzvolumen am Rand der Stabilität ist daher

$$V_{G \min} = \frac{2a}{RT} = 3.58 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

Der Kompressionsfaktor beträgt

$$\frac{V_G}{V_{G\min}} = \frac{RT}{2a} \frac{RT + \sqrt{R^2 T^2 - 4ap_0}}{2p_0} \simeq 86.2.$$

Damit gilt

$$\boxed{\frac{V_G}{V_{G\min}} \simeq 86.}$$

Am Grenzvolumen gilt $V_{G\min}/b \simeq 12$; das Ergebnis ist daher eine Abschätzung innerhalb der vorgegebenen Näherung, in der b vernachlässigt wird.

B4. Flüssigkeitsvolumen

Für die Flüssigkeit vernachlässigen wir P gegenüber a/V_L^2 :

$$\frac{a}{V_L^2}(V_L - b) = RT.$$

Daher gilt

$$RTV_L^2 - aV_L + ab = 0.$$

Die Flüssigkeit entspricht der Lösung mit dem kleineren Volumen, die für $T \rightarrow 0$ gegen b strebt:

$$\boxed{V_L = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4abRT}}{2RT} = \frac{2b}{1 + \sqrt{1 - 4bRT/a}}.}$$

Bei 373 K ergibt dieser Ausdruck näherungsweise

$$V_L = 3.91 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

Für die verbleibenden Fragen führen wir den vorausgesetzten kleinen Parameter ein:

$$\varepsilon = \frac{bRT}{a} \ll 1.$$

Die Entwicklung der Lösung für die Flüssigkeit ergibt

$$\boxed{V_L = b \left(1 + \frac{bRT}{a} + O(\varepsilon^2) \right).}$$

Für die angegebenen Wasserparameter ist $\varepsilon \simeq 0.17$, sodass die folgenden Ergebnisse in führender Ordnung Näherungswerte sind.

B5. Flüssigkeitsdichte

In führender Ordnung gilt $V_L \simeq b$. Da ein Mol die Masse μ hat, gilt

$$\boxed{\rho_L = \frac{\mu}{V_L} \simeq \frac{\mu}{b}.}$$

Numerisch ergibt sich

$$\rho_L \simeq \frac{1.8 \times 10^{-2}}{3.055 \times 10^{-5}} = \boxed{5.9 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}}.$$

Dies ist die von der vorgegebenen Näherung vorhergesagte Dichte.

B6. Thermischer Ausdehnungskoeffizient

Behalten wir den ersten temperaturabhängigen Term aus B4 bei, so erhalten wir

$$V_L \simeq b + \frac{b^2 RT}{a}.$$

Damit gilt bei konstantem äußeren Druck innerhalb der verwendeten Näherung

$$\frac{\partial V_L}{\partial T} \simeq \frac{b^2 R}{a}.$$

Mit $V_L \simeq b$ im Nenner folgt

$$\alpha = \frac{1}{V_L} \left(\frac{\partial V_L}{\partial T} \right)_P \simeq \frac{bR}{a}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\alpha \simeq 4.6 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}.$$

B7. Spezifische Verdampfungswärme

Die thermodynamische Identität

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P$$

verknüpft die innere Energie mit der Zustandsgleichung. Für das Van-der-Waals-Fluid gilt

$$T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P = \frac{RT}{V-b} - \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) = \frac{a}{V^2}.$$

Die molare innere Energie hat daher die Form

$$U(T, V) = U_0(T) - \frac{a}{V}.$$

Bei gleicher Temperatur beträgt die Zunahme der inneren Energie beim Verdampfen

$$U_G - U_L = a \left(\frac{1}{V_L} - \frac{1}{V_G} \right).$$

Das Verdampfen bei konstantem Druck erfordert außerdem Expansionsarbeit, sodass die pro Mol zugeführte Wärme beträgt:

$$\mu L = a \left(\frac{1}{V_L} - \frac{1}{V_G} \right) + p_0(V_G - V_L).$$

Da $V_G \gg V_L \simeq b$ und $RT \ll a/b$ gelten, ist der führende Beitrag a/b . Daher folgt

$$L \simeq \frac{a}{\mu b}.$$

Numerisch ergibt sich

$$L \simeq 1.0 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}.$$

Das Weglassen thermischer Korrekturen ist konsistent: Behält man $V_L \simeq b(1 + bRT/a)$ bei, so ergibt sich $a/V_L \simeq a/b - RT$, wobei die Korrektur $-RT$ den führenden Term der Expansionsarbeit $p_0 V_G \simeq RT$ aufhebt.

B8. Oberflächenspannung aus einer monomolekularen Schicht

Die Oberflächenspannung ist die freie Oberflächenenergie pro Flächeneinheit. Für eine energetische Abschätzung vernachlässigen wir den Beitrag der Oberflächenentropie und verwenden die in B7 ermittelte Kohäsionsenergie.

Die Kohäsionsenergie pro Molekül im Flüssigkeitsinneren beträgt näherungsweise

$$E_{\text{coh}} \simeq \frac{\mu L}{N_A} \simeq \frac{a}{b N_A}.$$

Einem Molekül nahe einer freien Oberfläche fehlen Nachbarn auf der Dampfseite. In einer einfachen Abschätzung ist die ihm zugeordnete kohäsive Bindungsenergie um etwa die Hälfte verringert, was eine zusätzliche Oberflächenenergie von der Größenordnung $E_{\text{coh}}/2$ ergibt.

Eine Oberflächenschicht mit der Fläche S und der Dicke d_w enthält ungefähr

$$N_{\text{layer}} \simeq \frac{\rho_L S d_w}{\mu} N_A$$

Moleküle. Ihre zusätzliche Energie ist daher

$$E_{\text{surface}} \sim \frac{1}{2} E_{\text{coh}} N_{\text{layer}} = \frac{1}{2} \rho_L L d_w S.$$

Setzen wir dies mit σS gleich, so folgt

$$\sigma \sim \frac{1}{2} \rho_L L d_w = \frac{a d_w}{2 b^2}.$$

Mit den obigen Abschätzungen ergibt sich

$$\sigma \sim 8.6 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}.$$

Die Betrachtung einer Monoschicht legt die Größenordnung $\sigma \sim 10^{-1} \text{ N m}^{-1}$ fest; ihr numerischer Vorfaktor hängt von der angenommenen Molekülanordnung und den fehlenden Wechselwirkungen ab.

C1. Sättigungsdampfdruck über einer gekrümmten Oberfläche

Es sei p_s der Sättigungsdampfdruck über der ebenen Flüssigkeitsoberfläche. Der nichtbenetzende Meniskus ist zum Dampf hin konvex und liegt in der Tiefe h unterhalb dieser Oberfläche.

Für einen kleinen Höhenunterschied liefert das hydrostatische Gleichgewicht die Drücke auf Höhe des Meniskus:

$$p_\ell = p_s + \rho_L g h, \quad p_v = p_s + \rho_s g h.$$

Der kugelförmige Meniskus erfüllt die Laplace-Gleichung für den Druckunterschied

$$p_\ell - p_v = \frac{2\sigma}{r}.$$

Folglich gilt

$$(\rho_L - \rho_s) g h = \frac{2\sigma}{r}.$$

Die Änderung des Gleichgewichtsdampfdrucks beträgt

$$\Delta p_T = p_v - p_s = \rho_s g h.$$

Eliminieren von h ergibt

$$\Delta p_T = \frac{2\sigma\rho_s}{r(\rho_L - \rho_s)} \simeq \frac{2\sigma\rho_s}{r\rho_L}.$$

Im letzten Schritt wurde $\rho_s \ll \rho_L$ verwendet. Die Änderung ist positiv: Eine konvexe Flüssigkeitsoberfläche erfordert einen höheren Gleichgewichtsdampfdruck als eine ebene Oberfläche.

C2. Kleinsten Radius eines wachsenden Tröpfchens

Es bezeichne $p_s(T)$ den Sättigungsdampfdruck über einer ebenen Oberfläche. Anfangs beträgt der tatsächliche Dampfdruck

$$p = p_s(T_e), \quad T_e = 293 \text{ K}.$$

Nach einer Abkühlung um $\Delta T = 5.0 \text{ K}$ bleibt der tatsächliche Druck konstant, während der Sättigungsdampfdruck über der ebenen Oberfläche sinkt. In erster Ordnung gilt

$$\Delta p_{\text{cool}} = p_s(T_e) - p_s(T_e - \Delta T) \simeq \left. \frac{dp_s}{dT} \right|_{T_e} \Delta T.$$

Aus Gleichung (3) folgt

$$\frac{1}{p_s} \frac{dp_s}{dT} = -\frac{B}{T^2} = \frac{a}{bRT^2}.$$

Somit gilt

$$\Delta p_{\text{cool}} \simeq p_s \frac{a\Delta T}{bRT_e^2}.$$

Ein Tröpfchen kann wachsen, wenn der Dampfdruck der Umgebung seinen krümmungsabhängigen Gleichgewichtsdampfdruck übersteigt. Beim kritischen Radius sind die beiden Druckänderungen gleich:

$$p_s \frac{a\Delta T}{bRT_e^2} = \frac{2\sigma\rho_s}{\rho_L r_{\min}}.$$

Behandeln wir den verdünnten Dampf als ideales Gas, so gilt

$$\rho_s \simeq \frac{\mu p_s}{RT_e}.$$

Einsetzen und Kürzen von p_s ergibt

$$r_{\min} \simeq \frac{2\sigma\mu b T_e}{\rho_L a \Delta T}.$$

Mit den Ergebnissen $\rho_L \simeq \mu/b$ und $L \simeq a/(\mu b)$ aus Teil B folgt

$$r_{\min} \simeq \frac{2\sigma b^2 T_e}{a \Delta T} = \frac{2\sigma T_e}{\rho_L L \Delta T}.$$

Mit dem angegebenen Tabellenwert der Oberflächenspannung ergibt sich

$$r_{\min} \simeq \frac{2(7.3 \times 10^{-2})(3.055 \times 10^{-5})^2(293)}{(0.5543)(5.0)} = \boxed{1.4 \times 10^{-8} \text{ m} \approx 14 \text{ nm}.}$$

Bei diesem Radius befindet sich ein Tröpfchen im instabilen Gleichgewicht. Größere Tröpfchen können wachsen; kleinere Tröpfchen neigen zum Verdampfen.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Einfachstes Modell einer Gasentladung

Ein elektrischer Strom, der durch ein Gas fließt, wird als Gasentladung bezeichnet. Es gibt viele Arten von Gasentladungen, darunter die Glimmentladung in Beleuchtungslampen, die Bogenentladung beim Schweißen und die bekannte Funkenentladung, die zwischen den Wolken und der Erde in Form von Blitzen auftritt.

Teil A. Unselbstständige Gasentladung (4.8 Punkte)

In diesem Teil der Aufgabe wird die sogenannte unselbstständige Gasentladung untersucht. Zu ihrer Aufrechterhaltung muss ständig ein externer Ionisator betrieben werden, der gleichmäßig im gesamten Volumen pro Volumeneinheit und Zeiteinheit Z_{ext} Paare aus einfach ionisierten Ionen und freien Elektronen erzeugt.

Wird ein externer Ionisator eingeschaltet, beginnt die Anzahl der Elektronen und Ionen zu wachsen. Ein unbegrenzter Anstieg der Anzahldichten der Elektronen und Ionen im Gas wird durch den Rekombinationsprozess verhindert, bei dem sich ein freies Elektron mit einem Ion zu einem neutralen Atom vereinigt. Die Anzahl der Rekombinationsereignisse Z_{rec} , die im Gas pro Volumeneinheit und Zeiteinheit auftreten, ist gegeben durch

$$Z_{\text{rec}} = r n_e n_i,$$

wobei r eine Konstante ist, die als Rekombinationskoeffizient bezeichnet wird, und n_e, n_i die Anzahldichten der Elektronen beziehungsweise der Ionen bezeichnen.

Es sei angenommen, dass der externe Ionisator zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet wird und die anfänglichen Anzahldichten der Elektronen und Ionen im Gas beide gleich null sind. Dann hängt die Elektronenanzahldichte $n_e(t)$ wie folgt von der Zeit t ab:

$$n_e(t) = n_0 + a \tanh bt,$$

wobei n_0, a und b Konstanten sind und $\tanh x$ für den Tangens hyperbolicus steht.

A1 Bestimmen Sie n_0, a, b und drücken Sie diese durch Z_{ext} und r aus. (1.8 Punkte)

Es seien zwei externe Ionisatoren verfügbar. Wird der erste eingeschaltet, erreicht die Elektronenanzahldichte im Gas ihren Gleichgewichtswert $n_{e1} = 12 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. Wird der zweite externe Ionisator eingeschaltet, erreicht die Elektronenanzahldichte ihren Gleichgewichtswert $n_{e2} = 16 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$.

A2 Bestimmen Sie die Elektronenanzahldichte n_e im Gleichgewicht, wenn beide externen Ionisatoren gleichzeitig eingeschaltet sind. (0.6 Punkte)

Achtung! Im Folgenden wird angenommen, dass der externe Ionisator bereits so lange eingeschaltet ist, dass alle Vorgänge stationär geworden sind und nicht mehr von der Zeit abhängen. Vernachlässigen Sie das elektrische Feld der Ladungsträger vollständig.

Es sei angenommen, dass das Gas die Röhre zwischen zwei parallelen leitenden Platten mit der Fläche S ausfüllt, die sich im Abstand $L \ll \sqrt{S}$ voneinander befinden. An die Platten wird die Spannung U angelegt, um zwischen ihnen ein elektrisches Feld zu erzeugen. Nehmen Sie an, dass die Anzahldichten beider Arten von Ladungsträgern entlang der Röhre nahezu konstant bleiben.

Nehmen Sie an, dass sowohl die Elektronen (gekennzeichnet durch den Index e) als auch die Ionen (gekennzeichnet durch den Index i) aufgrund der elektrischen Feldstärke E denselben Betrag der Driftgeschwindigkeit v annehmen, der sich ergibt zu

$$v = \beta E,$$

wobei β eine Konstante ist, die als Ladungsträgerbeweglichkeit bezeichnet wird.

A3	Drücken Sie die elektrische Stromstärke I in der Röhre durch $U, \beta, L, S, Z_{\text{ext}}, r$ und die Elementarladung e aus. (1.7 Punkte)
A4	Bestimmen Sie den spezifischen Widerstand ρ_{gas} des Gases bei hinreichend kleinen Werten der angelegten Spannung und drücken Sie ihn durch $\beta, L, Z_{\text{ext}}, r$ und e aus. (0.7 Punkte)

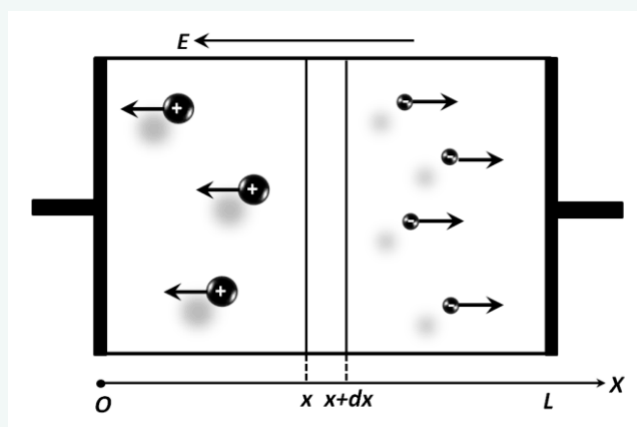
Teil B. Selbstständige Gasentladung (5.2 Punkte)

In diesem Teil der Aufgabe wird die Zündung einer selbstständigen Gasentladung betrachtet, um zu zeigen, wie sich der elektrische Strom in der Röhre selbst aufrechterhält.

Achtung! Nehmen Sie im Folgenden an, dass der externe Ionisator weiterhin mit derselben Rate Z_{ext} arbeitet. Vernachlässigen Sie das elektrische Feld der Ladungsträger, sodass das elektrische Feld entlang der Röhre homogen ist, und vernachlässigen Sie die Rekombination vollständig.

Für die selbstständige Gasentladung sind zwei wichtige Prozesse von Bedeutung, die oben nicht berücksichtigt wurden. Der erste Prozess ist die Sekundärelektronenemission, der zweite die Bildung einer Elektronenlawine. Sekundärelektronenemission tritt auf, wenn Ionen auf die negative Elektrode, die Kathode, treffen und dabei Elektronen aus ihr heraus schlagen, die sich zur positiven Elektrode, der Anode, bewegen. Das Verhältnis der Anzahl der pro Zeiteinheit herausgeschlagenen Elektronen $\dot{N}_e$ zur Anzahl der pro Zeiteinheit auf die Kathode treffenden Ionen $\dot{N}_i$ wird als Sekundärelektronenemissionskoeffizient bezeichnet, $\gamma = \dot{N}_e / \dot{N}_i$. Die Bildung einer Elektronenlawine lässt sich wie folgt erklären. Das elektrische Feld beschleunigt freie Elektronen, die genügend kinetische Energie gewinnen, um durch Stöße die Atome im Gas zu ionisieren. Dadurch nimmt die Anzahl der freien Elektronen, die sich zur Anode bewegen, erheblich zu. Dieser Prozess wird durch den Townsend-Koeffizienten α beschrieben, der den Zuwachs der Elektronenanzahl dN_e charakterisiert, wenn N_e bewegte Elektronen die Strecke dl zurückgelegt haben, d. h.

$$\frac{dN_e}{dl} = \alpha N_e.$$



Der Gesamtstrom I in einem beliebigen Querschnitt der Gasröhre setzt sich aus dem Ionenstrom $I_i(x)$ und dem Elektronenstrom $I_e(x)$ zusammen, die im stationären Zustand von der in der obigen Abbildung dargestellten Koordinate x abhängen. Der Elektronenstrom $I_e(x)$ ändert sich entlang der x -Achse gemäß der Formel

$$I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2,$$

wobei A_1, A_2, C_1 Konstanten sind.

B1 Bestimmen Sie A_1, A_2 und drücken Sie diese durch $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S$ aus. **(2 Punkte)**

Der Ionenstrom $I_i(x)$ ändert sich entlang der x -Achse gemäß der Formel

$$I_i(x) = C_2 + B_1 e^{B_2 x},$$

wobei B_1, B_2, C_2 Konstanten sind.

B2 Bestimmen Sie B_1, B_2 und drücken Sie diese durch $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S, C_1$ aus. **(0.6 Punkte)**

B3 Geben Sie die Bedingung für $I_i(x)$ bei $x = L$ an. **(0.3 Punkte)**

B4 Geben Sie die Bedingung für $I_i(x)$ und $I_e(x)$ bei $x = 0$ an. **(0.6 Punkte)**

B5 Bestimmen Sie den Gesamtstrom I und drücken Sie ihn durch $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$ aus. Nehmen Sie an, dass er endlich bleibt. **(1.2 Punkte)**

Der Townsend-Koeffizient α sei konstant. Wenn die Länge der Röhre einen bestimmten kritischen Wert überschreitet, d. h. $L > L_{\text{cr}}$, kann der externe Ionisator abgeschaltet werden, und die Entladung wird selbstständig.

B6 Bestimmen Sie L_{cr} und drücken Sie diese Größe durch $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$ aus. **(0.5 Punkte)**

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Die folgenden Stromstärken bezeichnen Beträge, und es gilt $U \geq 0$.

• **A1**

$$n_0 = 0, \quad a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}, \quad b = \sqrt{r Z_{\text{ext}}}.$$

• **A2**

$$n_e = 2.0 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3} = 2.0 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}.$$

• **A3**, unter Verwendung der angegebenen Näherung für die Sammlung der Ladungsträger bei gleichmäßiger Dichte:

$$I = \frac{e\beta S U}{rL} \left[\sqrt{\frac{\beta^2 U^2}{L^4} + 4r Z_{\text{ext}}} - \frac{\beta U}{L^2} \right].$$

- A4

$$\rho_{\text{gas}} = \frac{1}{2e\beta} \sqrt{\frac{r}{Z_{\text{ext}}}}.$$

- B1

$$A_1 = \alpha, \quad A_2 = -\frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}.$$

- B2

$$B_1 = -C_1, \quad B_2 = \alpha.$$

- B3

$$I_i(L) = 0.$$

- B4

$$I_e(0) = \gamma I_i(0).$$

- B5

$$I = \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha} \frac{(1 + \gamma)(e^{\alpha L} - 1)}{1 - \gamma(e^{\alpha L} - 1)}.$$

Eine physikalisch sinnvolle endliche stationäre Lösung mit $Z_{\text{ext}} > 0$ erfordert

$$\gamma(e^{\alpha L} - 1) < 1.$$

- B6, für $\alpha > 0, \gamma > 0$:

$$L_{\text{cr}} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right).$$

Lösung

A1. Anwachsen der Ladungsträgerdichte

Bei jedem Ionisationsereignis entstehen ein Elektron und ein Ion, während bei jeder Rekombination je eines von beiden verschwindet. Da ihre Anfangsdichten gleich sind, bleiben ihre Dichten gleich:

$$n_e(t) = n_i(t) = n(t).$$

Die Teilchenbilanz pro Volumeneinheit lautet daher

$$\frac{dn}{dt} = Z_{\text{ext}} - rn^2, \quad n(0) = 0.$$

Der vorgegebene Ausdruck ergibt $n(0) = n_0$, also

$$n_0 = 0.$$

Einsetzen von $n = a \tanh(bt)$ in die Bilanzgleichung liefert

$$ab [1 - \tanh^2(bt)] = Z_{\text{ext}} - ra^2 \tanh^2(bt).$$

Der Vergleich der konstanten Terme und der Koeffizienten von $\tanh^2(bt)$ ergibt

$$ab = Z_{\text{ext}}, \quad ab = ra^2.$$

Wählt man a, b positiv, so folgt

$$a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}, \quad b = \sqrt{rZ_{\text{ext}}}.$$

Damit gilt

$$n_e(t) = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}} \tanh\left(\sqrt{rZ_{\text{ext}}} t\right).$$

Die Anfangssteigung beträgt Z_{ext} , und der Grenzwert der Dichte ist $\sqrt{Z_{\text{ext}}/r}$, wie es das Gleichgewicht zwischen Erzeugung und Rekombination verlangt. Ein gleichzeitiger Vorzeichenwechsel von a und b beschreibt dieselbe Funktion.

A2. Zwei Ionisatoren

Die einzelnen Erzeugungsraten seien Z_1 und Z_2 . Im Gleichgewicht gilt

$$Z_1 = rn_{e1}^2, \quad Z_2 = rn_{e2}^2.$$

Die unabhängigen Erzeugungsraten addieren sich, wenn beide Ionisatoren in Betrieb sind:

$$rn_e^2 = Z_1 + Z_2 = r(n_{e1}^2 + n_{e2}^2).$$

Folglich gilt

$$n_e = \sqrt{n_{e1}^2 + n_{e2}^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}.$$

Daraus folgt

$$n_e = 2.0 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3} = 2.0 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}.$$

Die Dichten selbst addieren sich nicht, da die Rekombinationsrate quadratisch von der Dichte abhängt.

A3. Stationärer Strom mit Rekombination und Sammlung der Ladungsträger

Unter Vernachlässigung von Randeffekten und des Feldes der Ladungsträger gilt

$$E = \frac{U}{L}, \quad v = \frac{\beta U}{L}.$$

Wir wenden die vorgegebene Näherung einer gleichmäßigen Dichte auf das Volumen SL an. In einer Zeit dt nimmt eine Sammelelektrode $n_e Sv dt$ Elektronen auf; die gegenüberliegende Elektrode nimmt $n_i Sv dt$ Ionen auf. Die stationären Teilchenbilanzen lauten

$$\begin{aligned} Z_{\text{ext}}SL - rn_en_iSL - n_eSv &= 0, \\ Z_{\text{ext}}SL - rn_en_iSL - n_iSv &= 0. \end{aligned}$$

Für $v > 0$ ergibt die Subtraktion $n_e = n_i = n$. Somit gilt

$$rn^2 + \frac{v}{L}n - Z_{\text{ext}} = 0.$$

Nur die nichtnegative Lösung ist physikalisch sinnvoll:

$$n = \frac{1}{2r} \left[\sqrt{\left(\frac{v}{L}\right)^2 + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{v}{L} \right].$$

Obwohl sich Elektronen und Ionen in entgegengesetzte Richtungen bewegen, haben auch ihre Ladungen entgegengesetzte Vorzeichen. Ihre Beiträge zum Strom in technischer Stromrichtung addieren sich daher:

$$I = eS n_e v + eS n_i v = 2eS n v.$$

Einsetzen ergibt

$$I = \frac{eSv}{r} \left[\sqrt{\left(\frac{v}{L}\right)^2 + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{v}{L} \right].$$

Mit $v = \beta U/L$ folgt

$$I = \frac{e\beta SU}{rL} \left[\sqrt{\frac{\beta^2 U^2}{L^4} + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{\beta U}{L^2} \right].$$

Dies ist das Ergebnis der wörtlichen Anwendung des Modells der Ladungsträgersammlung bei räumlich gleichmäßiger Dichte. Streng genommen können die Dichten nicht bis an die Platten gleichmäßig bleiben: Die Elektronendichte muss an der Kathode und die Ionendichte an der Anode verschwinden. Die Formel ist daher zuverlässig, solange diese verarmten Schichten dünn gegenüber L sind, wie im Bereich kleiner Spannungen von A4; bei hoher Spannung strebt sie gegen $2eZ_{\text{ext}}SL$, das Doppelte des tatsächlichen Sättigungsstroms $eZ_{\text{ext}}SL$.

A4. Spezifischer Widerstand bei kleiner Spannung

Bei hinreichend kleiner Spannung,

$$\frac{\beta U}{L^2} \ll \sqrt{rZ_{\text{ext}}},$$

stört die Sammlung der Ladungsträger das Gleichgewicht zwischen Erzeugung und Rekombination nur geringfügig. In führender Ordnung gilt

$$n \simeq \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}.$$

Damit wird der Strom proportional zur Spannung:

$$I \simeq 2e\beta \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}} \frac{S}{L} U.$$

Der Vergleich mit

$$I = \frac{S}{\rho_{\text{gas}} L} U$$

ergibt

$$\rho_{\text{gas}} = \frac{1}{2e\beta} \sqrt{\frac{r}{Z_{\text{ext}}}}.$$

Die Länge L kürzt sich heraus. Werden die Größen in SI-Einheiten eingesetzt, ergibt sich das Ergebnis in $\Omega \text{ m}$.

B1. Gleichung für den Elektronenstrom

In Teil B wird die Rekombination vernachlässigt. Wir betrachten I_e und I_i als nichtnegative Strombeträge, sodass

$$I = I_e(x) + I_i(x).$$

Betrachten wir eine dünne Schicht der Dicke dx . Der externe Ionisator erzeugt in dieser Schicht pro Zeiteinheit

$$Z_{\text{ext}} S dx$$

Elektronen. Durch die Lawinenvervielfachung entstehen zusätzlich

$$\alpha \frac{I_e(x)}{e} dx$$

Elektronen pro Zeiteinheit. Jedes neu erzeugte Elektron trägt zum aus der Schicht austretenden Elektronenstrom bei; der zusätzliche Strom ist gleich e mal der Erzeugungsrate. Daher gilt

$$I_e(x + dx) - I_e(x) = [eSZ_{\text{ext}} + \alpha I_e(x)] dx.$$

In differentieller Form lautet dies

$$\frac{dI_e}{dx} = \alpha I_e + eSZ_{\text{ext}}.$$

Für konstantes $\alpha > 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$I_e(x) = C_1 e^{\alpha x} - \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}.$$

Der Vergleich mit dem vorgegebenen Ausdruck ergibt

$$\boxed{A_1 = \alpha, \quad A_2 = -\frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}.$$

B2. Gleichung für den Ionenstrom

Jedes Ionisationsereignis erzeugt auch ein Ion. Ionen bewegen sich in Richtung abnehmender x -Werte, sodass der durch die linke Grenzfläche aus der Schicht austretende Ionenstrom größer ist als der durch die rechte Grenzfläche eintretende:

$$I_i(x) - I_i(x + dx) = [eSZ_{\text{ext}} + \alpha I_e(x)] dx.$$

Somit gilt

$$\frac{dI_i}{dx} = -eSZ_{\text{ext}} - \alpha I_e(x).$$

Mit der Lösung für den Elektronenstrom folgt

$$\frac{dI_i}{dx} = -\alpha C_1 e^{\alpha x},$$

und die Integration ergibt

$$I_i(x) = C_2 - C_1 e^{\alpha x}.$$

Folglich gilt

$$\boxed{B_1 = -C_1, \quad B_2 = \alpha.}$$

Die beiden Differentialgleichungen zeigen außerdem, dass

$$\frac{d}{dx}(I_e + I_i) = 0,$$

was die Ladungserhaltung im stationären Zustand ausdrückt.

B3. Randbedingung an der Anode

Die Anode befindet sich bei $x = L$. Von dieser Elektrode gelangen keine Ionen in das Gas, und die im Gas erzeugten Ionen driften von ihr weg. Daher gilt

$$I_i(L) = 0.$$

Äquivalent dazu ist

$$C_2 = C_1 e^{\alpha L}.$$

B4. Randbedingung an der Kathode

Bei $x = 0$ beträgt die Auftreffrate der Ionen $I_i(0)/e$. Jedes auftreffende Ion setzt im Mittel γ Elektronen frei. Somit gilt

$$\frac{I_e(0)}{e} = \gamma \frac{I_i(0)}{e},$$

oder

$$I_e(0) = \gamma I_i(0).$$

B5. Stationärer Gesamtstrom

Zur Abkürzung definieren wir

$$K = \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}, \quad T = e^{\alpha L}.$$

Dann gilt

$$I_e(x) = C_1 e^{\alpha x} - K, \quad I_i(x) = C_2 - C_1 e^{\alpha x}.$$

Die Randbedingung an der Anode ergibt

$$C_2 = C_1 T.$$

Die Randbedingung an der Kathode wird zu

$$C_1 - K = \gamma(C_2 - C_1) = \gamma C_1(T - 1).$$

Daraus folgt

$$C_1 = \frac{K}{1 - \gamma(T - 1)}.$$

Die Addition von Elektronen- und Ionenstrom liefert

$$I = C_2 - K = C_1 T - K.$$

Einsetzen von C_1 und Vereinfachen ergibt

$$I = K \frac{T - 1 + \gamma(T - 1)}{1 - \gamma(T - 1)}.$$

Somit gilt

$$I = \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha} \frac{(1 + \gamma)(e^{\alpha L} - 1)}{1 - \gamma(e^{\alpha L} - 1)}.$$

Bei positiver externer Ionisationsrate erfordert ein physikalisch sinnvoller endlicher stationärer Strom

$$1 - \gamma(e^{\alpha L} - 1) > 0.$$

Bei verschwindendem Nenner sagt das lineare stationäre Modell eine Divergenz voraus; ein negativer Nenner würde einen unphysikalischen negativen Strombetrag ergeben.

B6. Kritische Länge für eine selbstständige Entladung

Aus einem von der Kathode emittierten Elektron werden bis zum Erreichen der Anode durch die Lawine

$$e^{\alpha L}$$

Elektronen. Da das ursprüngliche Elektron bereits vorhanden war, erzeugt die Lawine

$$e^{\alpha L} - 1$$

neue Elektron-Ion-Paare.

Bei vernachlässigter Rekombination erreichen alle diese Ionen die Kathode. Sie setzen im Mittel

$$\mathcal{R} = \gamma(e^{\alpha L} - 1)$$

Sekundärelektronen frei. Dies ist die Anzahl der Kathodenelektronen, die durch ein vorhergehendes Kathodenelektron erzeugt werden.

Für $\mathcal{R} < 1$ nimmt die Anzahl der Elektronen von Generation zu Generation ab, und eine externe Ionisation ist erforderlich. Die Schwelle ist erreicht, wenn jede Generation sich selbst genau ersetzt:

$$\gamma(e^{\alpha L_{\text{cr}}} - 1) = 1.$$

Auflösen ergibt

$$L_{\text{cr}} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right).$$

Für $L > L_{\text{cr}}$ verstärkt die Rückkopplung eine anfängliche Entladung auch nach dem Entfernen des externen Ionisators. Das vorliegende lineare Modell bestimmt die Zündschwelle; zur Bestimmung eines endlichen Betriebsstroms oberhalb dieser Schwelle müssen zusätzliche physikalische Effekte berücksichtigt werden.

Weder Z_{ext} noch e noch S gehen in die Schwelle ein. Für $\alpha = 0$ oder $\gamma = 0$ kann dieser Mechanismus bei keiner endlichen Länge eine Entladung aufrechterhalten.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.