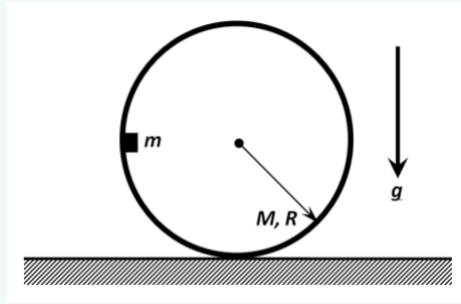


المسألة 1: ثلاثة أجزاء مستقلة: قرص في أسطوانة متدحرجة، وفقاعة صابون تحتوي على غاز، ودائرة LC مزودة بمفتاح

تتكون هذه المسألة من ثلاثة أجزاء مستقلة.

الجزء A (3 نقاط)

يوضع قرص صغير كتلته m برفق على السطح الداخلي لأسطوانة مجوفة رقيقة الجدار كتلتها M ونصف قطرها R . في البداية، تكون الأسطوانة ساكنة على مستوى أفقي، ويقع القرص على ارتفاع R فوق المستوى كما هو موضح في الشكل على اليسار. أوجد قوة التفاعل F بين القرص والأسطوانة لحظة مرور القرص بأدنى نقطة في مساره. افترض انعدام الاحتكاك بين القرص والسطح الداخلي للأسطوانة، وأن الأسطوانة تتحرك على المستوى دون انزلاق. تسارع السقوط الحر هو g .



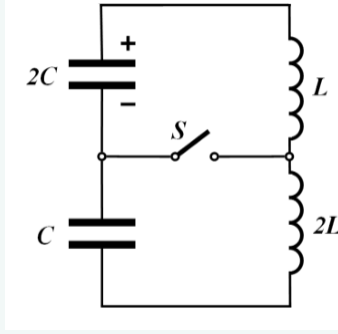
الجزء B (3 نقاط)

توجد في الفراغ فقاعة نصف قطرها $r = 5.00 \text{ cm}$ ، تحتوي على غاز مثالي ثنائي الذرة، ولها غشاء صابوني سمكه $h = 10.0 \mu\text{m}$. التوتر السطحي للغشاء الصابوني هو $\sigma = 4.00 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ، وكثافته $\rho = 1.10 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. أوجد صيغة السعة الحرارية المولية للغاز داخل الفقاعة في عملية يُسخَّن فيها الغاز ببطء كافٍ لبقاء الفقاعة في حالة اتزان ميكانيكي، واحسب قيمتها؛ (2) أوجد صيغة التردد الزاوي ω للاهتزازات الشعاعية الصغيرة للفقاعة، واحسب قيمته بافتراض أن السعة الحرارية للغشاء الصابوني أكبر بكثير من السعة الحرارية للغاز داخل الفقاعة. افترض أن الاتزان الحراري داخل الفقاعة يتحقق في زمن أقصر بكثير من زمن دورة الاهتزاز.

تلميح: بين لابلاس وجود فرق ضغط بين داخل سطح منحنٍ وخارجه، ينشأ عن التوتر السطحي للسطح الفاصل بين السائل والغاز، بحيث $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$.

الجزء C (3 نقاط)

في البداية، يكون المفتاح S مفتوحاً في الدائرة المبينة في الشكل على اليمين، ويحمل مكثف سعته $2C$ شحنة كهربائية q_0 ، ويكون مكثف سعته C غير مشحون، ولا تسري تيارات كهربائية في أيٍّ من الملفين اللذين حثهما الذاتي L و $2L$ ، على الترتيب. يبدأ المكثف بتفريغ شحنته، وفي اللحظة التي يبلغ فيها التيار في الملفين قيمته العظمى، يُغلق المفتاح S لحظياً. أوجد أقصى تيار I_{max} يمر عبر المفتاح S بعد ذلك.



نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• الجزء A:

$$F = mg \left(3 + \frac{m}{M} \right).$$

• الجزء 1، B: حيث يرمز $\mathcal{R}$ إلى ثابت الغاز العام،

$$C_{\text{mol}} = 4\mathcal{R} = 33.3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

• الجزء 2، B:

$$\omega = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho h r^2}} = 1.08 \times 10^2 \text{ rad s}^{-1}.$$

التردد العادي الموافق هو $f = \omega/(2\pi) = 17.2 \text{ Hz}$.

• الجزء C:

$$I_{\text{max}} = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

الحل

الجزء A

لتكن V السرعة الأفقية لمركز الأسطوانة، و v_x السرعة الأفقية للقرص، مع اعتبار الاتجاه نحو اليمين موجباً لكليهما. عزم القصور الذاتي للأسطوانة هو

$$I_{\text{cyl}} = MR^2.$$

نستخرج أولاً علاقة بين هاتين السرعتين. لتكن f القيمة الجبرية لقوة الاحتكاك الأفقية التي يؤثر بها المستوى في الأسطوانة. يمر خط عمل القوة العمودية التي يؤثر بها القرص بمركز الأسطوانة، لذا فإن f وحدها تولّد عزماً حول ذلك المركز.

باعتبار السرعة الزاوية عكس اتجاه عقارب الساعة موجبة، يعطي شرط التدرج دون انزلاق

$$\Omega_{\text{cyl}} = -\frac{V}{R}.$$

وبالتالي،

$$I_{\text{cyl}} \dot{\Omega}_{\text{cyl}} = Rf \implies f = -M\dot{V}.$$

بالنسبة إلى المنظومة المؤلفة من القرص والأسطوانة معاً، تكون معادلة الحركة الأفقية

$$m\dot{v}_x + M\dot{V} = f.$$

بدمج هاتين المعادلتين واستخدام حالة السكون الابتدائية،

$$\boxed{mv_x + 2MV = 0}.$$

عند أدنى نقطة، تكون سرعة القرص أفقية؛ ولنرمز إليها بـ v . مقدار سرعته بالنسبة إلى مركز الأسطوانة هو

$$u = v - V.$$

ومن ثم

$$V = -\frac{m}{2M}v, \quad u = \frac{2M+m}{2M}v.$$

الطاقة الميكانيكية محفوظة: فالتلامس بين القرص والأسطوانة عديم الاحتكاك، ولا يبذل الاحتكاك السكوني عند نقطة التلامس الساكنة مع المستوى أي شغل. يهبط القرص مسافة رأسية مقدارها R ، فنحصل على

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + MV^2.$$

بالتعويض بعلاقة السرعتين،

$$v^2 = \frac{4M}{2M+m}gR, \quad u^2 = \frac{2M+m}{M}gR.$$

لإيجاد التسارع الرأسي، لتكن θ الإزاحة الزاوية للقرص مقيسة من الاتجاه الرأسي نحو الأسفل. ارتفاعه هو

$$y = R - R \cos \theta.$$

عند أدنى نقطة، يكون $\theta = 0$ و $u = R\dot{\theta}$ ، لذا

$$\ddot{y} = R\dot{\theta}^2 = \frac{u^2}{R}.$$

نتجه قوة الأسطوانة المؤثرة في القرص نحو الأعلى عند تلك النقطة. لذلك يعطي قانون نيوتن الثاني

$$F - mg = m\frac{u^2}{R}.$$

وعليه

$$\boxed{F = mg\left(3 + \frac{m}{M}\right)}.$$

(الجزء 1، B)

نعتبر الغشاء الصابوني رقيقاً مقارنة بنصف قطر الفقاعة، ونأخذ توتره السطحي ثابتاً. للغشاء الصابوني **سطحان** فاصلان بين السائل والغاز. يتجمع فرقاً ضغط لابلاس عبرهما، لذا يتطلب الاتزان في الفراغ

$$p = \frac{4\sigma}{r}.$$

لتكن n عدد المولات و $\mathcal{R}$ ثابت الغاز العام. باستخدام قانون الغاز المثالي،

$$pV = n\mathcal{R}T, \quad V = \frac{4\pi r^3}{3},$$

نحصل على

$$n\mathcal{R}T = \frac{16\pi\sigma}{3}r^2.$$

إذن، خلال العملية البطيئة المحددة التي يبقى فيها النظام في اتزان،

$$T \propto r^2, \quad \frac{dV}{V} = 3 \frac{dr}{r} = \frac{3}{2} \frac{dT}{T}.$$

وعليه يبذل الغاز شغلًا مقداره

$$p dV = \frac{3}{2} \frac{pV}{T} dT = \frac{3}{2} n \mathcal{R} dT.$$

لغاز مثالي ثنائي الذرة تكون درجات حرارته الدورانية فعّالة ودرجات حرارته الاهتزازية غير مثارة،

$$dU = \frac{5}{2} n \mathcal{R} dT.$$

بتطبيق القانون الأول للديناميكا الحرارية على الغاز نحصل على

$$\delta Q = dU + p dV = \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \right) n \mathcal{R} dT.$$

لذلك تكون سعته الحرارية المولية في هذه العملية

$$C_{\text{mol}} = \frac{\delta Q}{n dT} = 4 \mathcal{R}.$$

باستخدام $\mathcal{R} = 8.31446 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ،

$$C_{\text{mol}} = 33.3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

(الجزء 2، B)

السعة الحرارية للغشاء أكبر بكثير من السعة الحرارية للغاز، ويتحقق الاتزان الحراري سريعًا. لذلك يعمل الغشاء بوصفه مستودعًا حراريًا أثناء الاهتزاز، مما يجعل انضغاط الغاز وتمده متساويي درجة الحرارة تقريبًا.

ليكن نصف قطر الاتزان r ، ولنكتب نصف القطر اللحظي على الصورة

$$s = r + \xi, \quad |\xi| \ll r.$$

عند ضغط اتزان $p_0 = 4\sigma/r$ ، يعطي قانون الغاز عند ثبوت درجة الحرارة

$$p(s) = p_0 \left(\frac{r}{s} \right)^3.$$

فرق الضغط الصافي المؤثر في الغشاء نحو الخارج هو

$$p(s) - \frac{4\sigma}{s}.$$

بالتوسع حتى الرتبة الأولى في ξ ،

$$p(s) \simeq p_0 \left(1 - \frac{3\xi}{r} \right), \quad \frac{4\sigma}{s} \simeq \frac{4\sigma}{r} \left(1 - \frac{\xi}{r} \right),$$

فنحصل على

$$p(s) - \frac{4\sigma}{s} \simeq -\frac{8\sigma}{r^2} \xi.$$

كتلة الغشاء الثابتة، معبرًا عنها باستخدام أبعاده عند الاتزان، هي

$$m_f = 4\pi r^2 \rho h.$$

بإهمال القصور الذاتي للغاز والتأثيرات المبددة للطاقة، تكون معادلة الحركة الشعاعية، حتى الرتبة الأولى،

$$m_f \ddot{\xi} = 4\pi r^2 \left(-\frac{8\sigma}{r^2} \xi \right) = -32\pi \sigma \xi.$$

ومن ثم

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0, \quad \boxed{\omega^2 = \frac{32\pi\sigma}{m_f} = \frac{8\sigma}{\rho h r^2}}.$$

بتحويل المقادير المعطاة إلى وحدات النظام الدولي،

$$r = 5.00 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad h = 1.00 \times 10^{-5} \text{ m}, \quad \rho = 1.10 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3},$$

نجد

$$\omega = \sqrt{\frac{8(4.00 \times 10^{-2})}{(1.10 \times 10^3)(1.00 \times 10^{-5})(5.00 \times 10^{-2})^2}}.$$

ولذلك

$$\boxed{\omega = 1.08 \times 10^2 \text{ rad s}^{-1}}, \quad \boxed{f = 17.2 \text{ Hz}}.$$

الجزء C

قبل إغلاق المفتاح، يمر في كلا الملفين التيار نفسه i . لتكن q الشحنة التي مرت نحو الأسفل عبر الملفين منذ بدء التفريغ، بحيث $\dot{q} = i$. تكون الشحنة على اللوح العلوي للمكثف ذي السعة $2C$ عندئذٍ $q_0 - q$ ، بينما تكون الشحنة على اللوح العلوي للمكثف ذي السعة C هي $-q$. بتعريف جهدي المكثفين من الأعلى إلى الأسفل،

$$U_1 = \frac{q_0 - q}{2C}, \quad U_2 = -\frac{q}{C}.$$

يعطي قانون كيرشوف للجهد

$$3L\dot{i} = U_1 + U_2 = \frac{q_0 - 3q}{2C}.$$

عند بلوغ التيار قيمته العظمى، يكون $\dot{i} = 0$. ومن ثم، في لحظة إغلاق المفتاح،

$$q = \frac{q_0}{3}, \quad \boxed{U_1 = \frac{q_0}{3C}, \quad U_2 = -\frac{q_0}{3C}}.$$

نضع الآن $t = 0$ عند إغلاق المفتاح. يشكل المكثف العلوي والملف العلوي حلقة LC واحدة، بينما يشكل الزوج السفلي حلقة أخرى. تردداهما الزاويان متساويان:

$$\Omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L(2C)}}, \quad \Omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(2L)C}},$$

وبالتالي

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}.$$

ليكن i_1 و i_2 تيارَي الملفين العلوي والسفلي، مع اعتبار الاتجاه نحو الأسفل موجباً لكليهما. معادلاتهما هي

$$\begin{aligned} L\dot{i}_1 &= U_1, & 2C\dot{U}_1 &= -i_1, \\ 2L\dot{i}_2 &= U_2, & C\dot{U}_2 &= -i_2. \end{aligned}$$

وبالتالي،

$$\ddot{i}_1 + \Omega^2 i_1 = 0, \quad \ddot{i}_2 + \Omega^2 i_2 = 0.$$

نعتبر تيار المفتاح موجباً من نقطة التقاء الملفين نحو نقطة التقاء المكثفين. يعطي قانون كيرشوف للتيار

$$i_S = i_1 - i_2,$$

ومن ثم

$$\ddot{i}_S + \Omega^2 i_S = 0.$$

تيارا الملفين مستمران عند إغلاق المفتاح، وكانا متساويين قبله، لذا

$$i_S(0) = 0.$$

جهدا المكثفين مستمران أيضاً، مما يعطي

$$i_S(0) = \frac{U_1(0)}{L} - \frac{U_2(0)}{2L} = \frac{q_0}{3LC} + \frac{q_0}{6LC} = \frac{q_0}{2LC}.$$

تيار المفتاح الناتج هو

$$i_S(t) = \frac{i_S(0)}{\Omega} \sin(\Omega t) = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}}\right).$$

وعليه فإن قيمته العظمى من حيث المقدار هي

$$I_{\max} = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: معادلة فان دير فالس للحالة

في نموذج معروف للغاز المثالي الذي تخضع معادلة حالته لقانون كلايرون-مندلييف، تُهمل التأثيرات الفيزيائية المهمة الآتية. أولاً، لجزيئات الغاز الحقيقي حجم محدود، وثانياً، تتفاعل هذه الجزيئات بعضها مع بعض. في جميع أجزاء هذه المسألة، نتناول مولاً واحداً من الماء.

الجزء A. معادلة حالة الغاز غير المثالي (2 درجة)

عند أخذ الحجم المحدود للجزيئات في الحسبان، تصبح معادلة حالة الغاز على الصورة

$$P(V - b) = RT, \quad (1)$$

حيث ترمز P, V, T إلى ضغط الغاز وحجمه لكل مول ودرجة حرارته، على الترتيب، ويرمز R إلى ثابت الغازات العام، ويمثل b ثابتاً خاصاً يُطرح بمقداره جزء من الحجم.

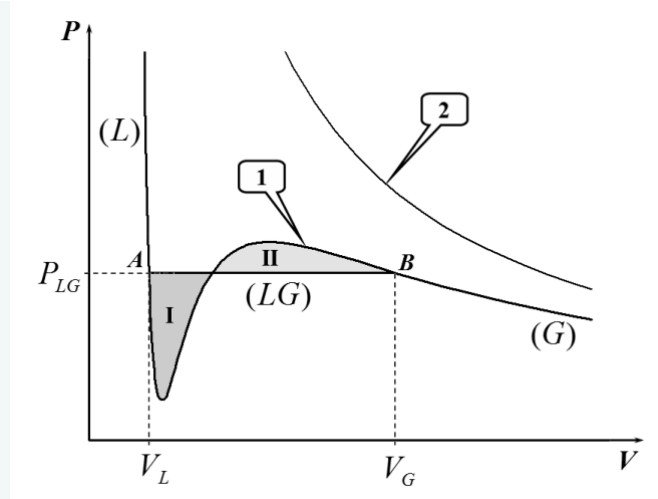
A1 قدر b وعبر عنه بدلالة قطر الجزيئات d . (0.3 درجة)

مع أخذ قوى التجاذب بين الجزيئات في الحسبان، اقترح فان دير فالس معادلة الحالة الآتية، التي تصف بصورة جيدة كلاً من الحالتين الغازية والسائلة للمادة

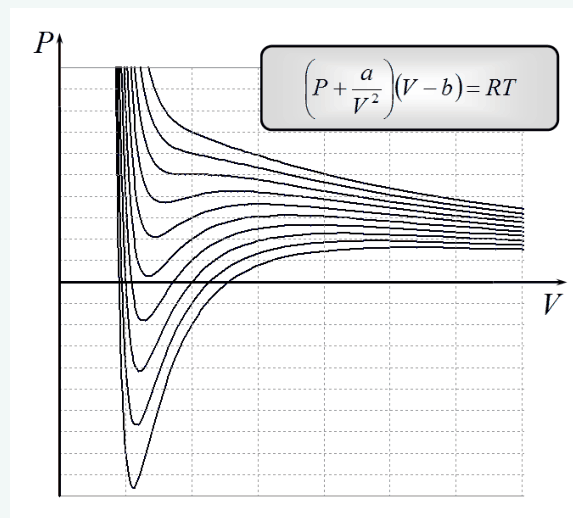
$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \quad (2)$$

حيث a ثابت خاص آخر.

عند درجات حرارة T أقل من قيمة حرجة معينة T_c ، يُمثل منحنى تساوي درجة الحرارة للمعادلة (2) تمثيلاً جيداً بالمنحنى غير الرتيب 1 الموضح في الشكل 1، ويُسمى حينئذٍ منحنى فان دير فالس متساوي الحرارة. وفي الشكل نفسه، يبين المنحنى 2 منحنى تساوي درجة الحرارة لغاز مثالي عند درجة الحرارة نفسها. يختلف منحنى تساوي درجة الحرارة الحقيقي عن منحنى فان دير فالس بقطعة مستقيمة AB مرسومة عند ضغط ثابت معين P_{LG} . تقع هذه القطعة المستقيمة بين الحجمين V_L و V_G ، وتقابل اتزان الطور السائل (المشار إليه بالرمز L) والطور الغازي (المشار إليه بالرمز G). انطلاقاً من القانون الثاني للديناميكا الحرارية، بين ج. ماكسويل أنه يجب اختيار الضغط P_{LG} بحيث تتساوى المساحتان I و II الموضحتان في الشكل 1.



الشكل 1. منحني فان دير فالس متساوي الحرارة للغاز/السائل (المنحني 1) ومنحني تساوي درجة الحرارة لغاز مثالي (المنحني 2).



الشكل 2. عدة منحنيات متساوية الحرارة لمعادلة فان دير فالس للحالة.

مع ارتفاع درجة الحرارة، تتقلص القطعة المستقيمة AB على منحني تساوي درجة الحرارة إلى نقطة واحدة عندما تبلغ درجة الحرارة والضغط قيمتين معينتين T_c و $P_{LG} = P_c$ ، على الترتيب. يُسمّى المعاملان P_c و T_c بالمعاملين الحرجين، ويمكن قياسهما تجريبياً بدرجة عالية من الدقة.

A2	عبر عن ثابتي فان دير فالس a و b بدلالة T_c و P_c . (1.3 درجة)
A3	بالنسبة إلى الماء، $T_c = 647 \text{ K}$ و $P_c = 2.2 \cdot 10^7 \text{ Pa}$. احسب a_w و b_w للماء. (0.2 درجة)
A4	قدّر قطر جزيئات الماء d_w . (0.2 درجة)

الجزء B. خواص الغاز والسائل (6 درجات)

يتناول هذا الجزء من المسألة خواص الماء في الحالتين الغازية والسائلة عند درجة الحرارة $T = 100^\circ \text{C}$. من المعلوم أن ضغط البخار المشبع عند هذه الدرجة هو $p_{LG} = p_0 = 1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ، وأن الكتلة المولية للماء هي $\mu = 1.8 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{mole}}$.

الحالة الغازية

من المعقول افتراض تحقق المتباينة $V_G \gg b$ عند وصف خواص الماء في الحالة الغازية.

B1	اشتق صيغة الحجم V_G وعبر عنه بدلالة R, T, p_0 و a . (0.8 درجة)
----	--

يمكن حساب حجم مقارب جداً V_{G0} بصورة تقريبية باستخدام قانون الغاز المثالي.

B2 احسب، بالنسبة المئوية، النقص النسبي في حجم الغاز الناتج عن القوى بين الجزيئات، $\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{V_{G0}-V_G}{V_{G0}}$. (0.3 درجة)

إذا خُفّض حجم النظام إلى ما دون V_G ، يبدأ الغاز بالتكاثف. غير أن الغاز المنقى بعناية يمكن أن يبقى في حالة شبه مستقرة ميكانيكياً (تُسمّى البخار فائق التبريد) حتى يبلغ حجمه قيمة معينة $V_{G \min}$.

يُكتب شرط الاستقرار الميكانيكي للغاز فائق التبريد عند درجة حرارة ثابتة على النحو الآتي: $\frac{dP}{dV} < 0$.

B3 أوجد واحسب عامل التخفيض الذي يمكن أن يخضع له حجم بخار الماء مع بقائه في حالة شبه مستقرة. وبعبارة أخرى، ما قيمة $V_G/V_{G \min}$ ؟ (0.7 درجة)

الحالة السائلة

عند وصف الماء في الحالة السائلة وفق نموذج فان دير فالس، من المعقول افتراض تحقق المتباينة الآتية $P \ll a/V^2$.

B4 عبّر عن حجم الماء السائل V_L بدلالة a, b, R ، و T . (1.0 درجة)

بافتراض أن $bRT \ll a$ ، أوجد الخصائص الآتية للماء. لا تستغرب إذا لم تتطابق بعض القيم المحسوبة مع القيم المعروفة الواردة في الجدول!

B5	عبّر عن كثافة الماء السائل ρ_L بدلالة بعض الكميات μ, a, b, R ، واحسب قيمتها. (0.5 درجة)
B6	عبّر عن معامل التمدد الحراري الحجمي $\alpha = \frac{1}{V_L} \frac{\Delta V_L}{\Delta T}$ بدلالة a, b, R ، واحسب قيمته. (0.6 درجة)
B7	عبّر عن الحرارة النوعية لتبخّر الماء L بدلالة μ, a, b, R ، واحسب قيمتها. (1.1 درجة)
B8	بالنظر إلى طبقة من الماء بسُمك جزئي واحد، قدر التوتر السطحي للماء σ . (1.2 درجة)

الجزء C. نظام السائل والغاز (3 درجات)

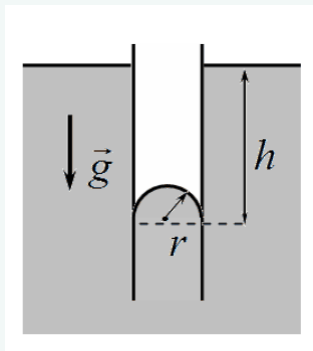
انطلاقاً من قاعدة ماكسويل (تساوي المساحات، بتطبيق تكامل بسيط) ومعادلة فان دير فالس للحالة، وباستخدام التقريبات التي أُجريت في الجزء B، يمكن إثبات أن ضغط البخار المشبع p_{LG} يعتمد على درجة الحرارة T على النحو الآتي

$$\ln p_{LG} = A + \frac{B}{T}, \quad (3)$$

حيث A و B ثابتان يمكن التعبير عنهما بدلالة a و b كما يأتي: $A = \ln \left(\frac{a}{b^2} \right) - 1$ ، $B = -\frac{a}{bR}$

بيّن و. طومسون أن ضغط البخار المشبع يعتمد على تقوّس سطح السائل. لننظر في سائل لا يبيلّل المادة المصنوع منها أنبوب شعري (زاوية التماس 180°). عندما يُغمّر الأنبوب الشعري في السائل، ينخفض السائل داخله إلى مستوى معين بسبب التوتر السطحي (انظر الشكل 3).

C1 أوجد التغير الصغير Δp_T في ضغط البخار المشبع فوق سطح السائل المنحني، وعبّر عنه بدلالة كثافة البخار ρ_s ، وكثافة السائل ρ_L ، والتوتر السطحي σ ، ونصف قطر تقوّس السطح r . (1.3 درجة)



الشكل 3. أنبوب شعري مغمور في سائل لا يبيلّل مادته

تُستخدم الحالات شبه المستقرة، التي تناولناها في الجزء B3، على نطاق واسع في الأجهزة التجريبية الفعلية، مثل غرفة السحاب المصممة لرصد الجسيمات الأولية. كما تظهر في ظواهر طبيعية مثل تكوّن ندى الصباح. يتكاثف البخار فائق التبريد بتكوين قطرات سائلة. تتبخّر القطرات الصغيرة جدًا بسرعة، لكن القطرات الكبيرة بما يكفي يمكن أن تستمر في النمو.

C2 افترض أن بخار الماء في الهواء كان مشبعًا عند درجة حرارة المساء $t_e = 20^\circ\text{C}$ ، لكن درجة حرارة الوسط المحيط انخفضت بحلول الصباح بمقدار صغير $\Delta t = 5.0^\circ\text{C}$. بافتراض أن ضغط البخار بقي دون تغيير، قدّر أصغر نصف قطر للقطرات التي يمكنها النمو. استخدم القيمة الجدولية للتوتر السطحي للماء $\sigma = 7.3 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$ (1.7 درجة)

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

تستخدم الحسابات العددية $R = 8.31 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$ ، و $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ، و $T = 373 \text{ K}$ في الجزء B. الحجم هو حجم مولية. تستخدم التقديرات الجزيئية أدناه الاصطلاح القياسي للحجم المستبعد للكرات الصلبة؛ وتناقش تبعيتها للنموذج في حلول A1 و A4 و B8.

• A1: $b \sim N_A d^3$ ؛ والتقدير وفق نموذج الكرات الصلبة هو

$$b = \frac{2\pi}{3} N_A d^3.$$

• A2:

$$a = \frac{27R^2T_c^2}{64P_c}, \quad b = \frac{RT_c}{8P_c}.$$

• A3:

$$a_w \simeq 0.55 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}, \quad b_w \simeq 3.1 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

• A4:

$$d_w = \left(\frac{3b_w}{2\pi N_A} \right)^{1/3} \simeq 2.9 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

• B1:

$$V_G = \frac{RT + \sqrt{R^2T^2 - 4ap_0}}{2p_0} \simeq 3.08 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

• B2:

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2T^2}}}{2} \simeq 0.58\%.$$

• B3:

$$V_{G \min} = \frac{2a}{RT} \simeq 3.6 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}, \quad \frac{V_G}{V_{G \min}} \simeq 86.$$

• B4 :

$$V_L = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4abRT}}{2RT} = \frac{2b}{1 + \sqrt{1 - \frac{4bRT}{a}}}.$$

• B5 :

$$\rho_L \simeq \frac{\mu}{b} \simeq 5.9 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}.$$

• B6 :

$$\alpha \simeq \frac{bR}{a} \simeq 4.6 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}.$$

• B7 :

$$L \simeq \frac{a}{\mu b} \simeq 1.0 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}.$$

• B8 : يعطي تقدير قائم على طبقة أحادية الجزيئات، مع فقدان نصف مساهمة التماسك في باطن السائل،

$$\sigma \sim \frac{1}{2} \rho_L L d_w = \frac{a d_w}{2b^2} \simeq 8.6 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}.$$

وتقتصر دقته الموثوقة على تقدير رتبة المقدار، $\sigma \sim 10^{-1} \text{ N m}^{-1}$.

• C1 : لسطح السائل المحدب الموضح،

$$\Delta p_T = \frac{2\sigma\rho_s}{r(\rho_L - \rho_s)} \simeq \frac{2\sigma\rho_s}{r\rho_L} > 0.$$

• C2 : عند $T_e = 293 \text{ K}$ و $\Delta T = 5.0 \text{ K}$ ،

$$r_{\min} \simeq \frac{2\sigma T_e}{\rho_L L \Delta T} = \frac{2\sigma b^2 T_e}{a \Delta T} \simeq 1.4 \times 10^{-8} \text{ m} = 14 \text{ nm}.$$

يمكن للقطيرات الأكبر من نصف القطر الحرج هذا أن تنمو.

الحل

A1. حجم الجزيئات والحجم المستبعد

نمثل الجزيئات بكرات صلبة قطرها d . لا يستطيع مركز أحد الجزيئات دخول كرة نصف قطرها d حول مركز جزيء آخر. ومن ثم يكون الحجم المستبعد المرتبط بزوج من الجزيئات

$$v_{\text{ex}} = \frac{4\pi d^3}{3}.$$

في الحساب القياسي للحجم المستبعد لغاز مخفف من الكرات الصلبة، يُعدّ كل زوج مرة واحدة، مما يعطي معامل حجم مستبعد لكل جزيء مقداره $v_{\text{ex}}/2$ ، ولول واحد،

$$b = \frac{1}{2} N_A v_{\text{ex}} = \frac{2\pi}{3} N_A d^3.$$

إذن، يساوي ثابت فان دير فالس المعتاد b أربعة أمثال الحجم الهندسي الكلي للجزيئات الكروية. وبصرف النظر عن هذا المعامل الهندسي، فإن رتبة المقدار المطلوبة هي $b \sim N_A d^3$.

A2. شروط النقطة الحرجة

نكتب معادلة الحالة على الصورة

$$P(V, T) = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}.$$

عند النقطة الحرجة، تندمج نقطتا القيمتين القصويتين لمنحنى تساوي درجة الحرارة دون الحرجة في نقطة انعطاف ذات مماس أفقي. ومن ثم

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T_c, V_c} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_{T_c, V_c} = 0.$$

تعطي هذه الشروط

$$\frac{RT_c}{(V_c - b)^2} = \frac{2a}{V_c^3}, \quad \frac{RT_c}{(V_c - b)^3} = \frac{3a}{V_c^4}.$$

بقسمة المعادلة الثانية على الأولى،

$$\frac{1}{V_c - b} = \frac{3}{2V_c},$$

فنحصل على

$$V_c = 3b.$$

بالتعويض في شرط المشتقة الأولى ومعادلة الحالة، نحصل على

$$RT_c = \frac{8a}{27b}, \quad P_c = \frac{a}{27b^2}.$$

وبحل المعادلتين لإيجاد الثابتين،

$$\boxed{b = \frac{RT_c}{8P_c}, \quad a = \frac{27R^2T_c^2}{64P_c}}.$$

A3. ثابتا الماء

باستخدام القيم الحرجة المعطاة،

$$b_w = \frac{8.31(647)}{8(2.2 \times 10^7)} = 3.055 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1},$$

و

$$a_w = \frac{27(8.31)^2(647)^2}{64(2.2 \times 10^7)} = 0.5543 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}.$$

إلى رقمين معنويين،

$$\boxed{a_w \simeq 0.55 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}, \quad b_w \simeq 3.1 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}}.$$

نحتفظ بالقيم غير المقربة في الحسابات اللاحقة.

A4. القطر الجزيئي

من A1،

$$d_w = \left(\frac{3b_w}{2\pi N_A}\right)^{1/3}.$$

وبالتالي،

$$\boxed{d_w \simeq 2.9 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.29 \text{ nm}}.$$

هذا قطر فعال في إطار نموذج الكرات الصلبة.

B1. حجم البخار المشبع

نطبق التقريب المحدد $V_G \gg b$:

$$\left(p_0 + \frac{a}{V_G^2}\right)V_G = RT.$$

بالضرب في V_G نحصل على

$$p_0 V_G^2 - RT V_G + a = 0.$$

تقابل الحالة الغازية الجذر الأكبر، الذي يقترب من RT/p_0 عندما $a \rightarrow 0$:

$$V_G = \frac{RT + \sqrt{R^2 T^2 - 4ap_0}}{2p_0}.$$

عند $T = 373 \text{ K}$

$$V_G = 0.0308164 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1} \simeq 3.08 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

عندما يكون التجاذب ضعيفاً، يعطي توسيع الجذر التربيعي أيضاً

$$V_G \simeq \frac{RT}{p_0} - \frac{a}{RT}.$$

B2. النقص النسبي في الحجم

حجم الغاز المثالي هو

$$V_{G0} = \frac{RT}{p_0} = 0.0309963 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

باستخدام B1،

$$\frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2 T^2}} \right).$$

عددياً،

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = 5.803 \times 10^{-3},$$

ومن ثم

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} \simeq 0.58\%.$$

إلى الرتبة الأولى، تساوي هذه النسبة $ap_0/(R^2 T^2)$.

B3. حد الانضغاط في الحالة شبه المستقرة

ضمن التقريب نفسه للغاز،

$$P(V) = \frac{RT}{V} - \frac{a}{V^2}.$$

يتطلب الاستقرار الميكانيكي

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{RT}{V^2} + \frac{2a}{V^3} = \frac{2a - RTV}{V^3} < 0.$$

إن بقي الغاز مستقرًا ميكانيكيًا تجاه الاضطرابات الصغيرة في الحجم عندما

$$V > \frac{2a}{RT}.$$

وعليه، فإن الحجم الحدي، الذي يكون عنده الاستقرار هامشيًا، هو

$$V_{G \min} = \frac{2a}{RT} = 3.58 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

عامل الانضغاط هو

$$\frac{V_G}{V_{G \min}} = \frac{RT}{2a} \frac{RT + \sqrt{R^2 T^2 - 4ap_0}}{2p_0} \simeq 86.2.$$

ومن ثم

$$\frac{V_G}{V_{G \min}} \simeq 86.$$

عند الحجم الحدي، $V_{G \min}/b \simeq 12$ ، لذا فالنتيجة تقدير ضمن التقريب المحدد الذي يهمل b .

B4. حجم السائل

بالنسبة إلى السائل، نهمل P بالمقارنة مع a/V_L^2 :

$$\frac{a}{V_L^2}(V_L - b) = RT.$$

وعليه

$$RTV_L^2 - aV_L + ab = 0.$$

يقابل السائل الجذر ذا الحجم الأصغر، الذي يقترب من b عندما $T \rightarrow 0$:

$$V_L = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4abRT}}{2RT} = \frac{2b}{1 + \sqrt{1 - 4bRT/a}}.$$

عند 373 K، يعطي هذا التعبير تقريبًا

$$V_L = 3.91 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

للأسئلة المتبقية، نعرف العامل الصغير المفترض

$$\varepsilon = \frac{bRT}{a} \ll 1.$$

بتوسيع الجذر المقابل للسائل،

$$V_L = b \left(1 + \frac{bRT}{a} + O(\varepsilon^2) \right).$$

بالنسبة إلى معاملات الماء المعطاة، $\varepsilon \simeq 0.17$ ، لذا فالنتائج الآتية، التي نقتصر فيها على الرتبة الرئيسية، تقريبية.

B5. كثافة السائل

إلى الرتبة الرئيسية، $V_L \simeq b$. وبما أن كتلة مول واحد هي μ ،

$$\rho_L = \frac{\mu}{V_L} \simeq \frac{\mu}{b}.$$

عدديًا،

$$\rho_L \simeq \frac{1.8 \times 10^{-2}}{3.055 \times 10^{-5}} = 5.9 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}.$$

هذه هي الكثافة التي يتنبأ بها التقريب المحدد.

B6. معامل التمدد الحراري

بالاحتفاظ بأول حد يعتمد على درجة الحرارة من B4،

$$V_L \simeq b + \frac{b^2 RT}{a}.$$

إذن، عند ضغط خارجي ثابت ضمن التقريب المستخدم،

$$\frac{\partial V_L}{\partial T} \simeq \frac{b^2 R}{a}.$$

باستخدام $V_L \simeq b$ في المقام،

$$\alpha = \frac{1}{V_L} \left(\frac{\partial V_L}{\partial T} \right)_P \simeq \frac{bR}{a}.$$

عددياً،

$$\alpha \simeq 4.6 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}.$$

B7. الحرارة الكامنة النوعية للتبخّر

تربط المتطابقة الديناميكية الحرارية

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P$$

الطاقة الداخلية بمعادلة الحالة. بالنسبة إلى مائع فان دير فالس،

$$T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P = \frac{RT}{V-b} - \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) = \frac{a}{V^2}.$$

ومن ثم تكون الطاقة الداخلية المولية على الصورة

$$U(T, V) = U_0(T) - \frac{a}{V}.$$

عند درجة الحرارة نفسها، تكون الزيادة في الطاقة الداخلية عند التبخر

$$U_G - U_L = a \left(\frac{1}{V_L} - \frac{1}{V_G} \right).$$

يتطلب التبخر عند ضغط ثابت أيضاً شغل تمدد، لذا تكون الحرارة المقدمة لكل مول

$$\mu L = a \left(\frac{1}{V_L} - \frac{1}{V_G} \right) + p_0(V_G - V_L).$$

بما أن $V_G \gg V_L \simeq b$ ، وأن $RT \ll a/b$ ، فإن المساهمة الرئيسية هي a/b . وعليه

$$L \simeq \frac{a}{\mu b}.$$

عددياً،

$$L \simeq 1.0 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}.$$

إن إهمال التصحيحات الحرارية متسق: فاحتفاظ بـ $V_L \simeq b(1 + bRT/a)$ يعطي $a/V_L \simeq a/b - RT$ ، حيث يلغي التصحيح

$-RT$ الحد الرئيسي لشغل التمدد $p_0 V_G \simeq RT$.

B8. التوتر السطحي انطلاقاً من طبقة أحادية الجزيئات

التوتر السطحي هو الطاقة الحرة السطحية لكل وحدة مساحة. للحصول على تقدير طاقي، نهمل مساهمة إنتروبيا السطح ونستخدم طاقة التماسك التي أوجدناها في B7.

طاقة التماسك لكل جزيء في باطن السائل تساوي تقريباً

$$E_{\text{coh}} \simeq \frac{\mu L}{N_A} \simeq \frac{a}{b N_A}.$$

يفتقر الجزيء القريب من سطح حر إلى جيران من جهة البخار. وفي تقدير بسيط، تنخفض طاقة ارتباط التماسك المنسوبة إليه بمقدار النصف تقريباً، مما يعطي طاقة سطحية زائدة من رتبة $E_{\text{coh}}/2$.

تحتوي طبقة سطحية مساحتها S وسُمكها d_w على عدد تقريبي من الجزيئات مقداره

$$N_{\text{layer}} \simeq \frac{\rho_L S d_w}{\mu} N_A$$

ومن ثم تكون طاقتها الزائدة

$$E_{\text{surface}} \sim \frac{1}{2} E_{\text{coh}} N_{\text{layer}} = \frac{1}{2} \rho_L L d_w S.$$

بمساواة هذه الطاقة مع σS .

$$\sigma \sim \frac{1}{2} \rho_L L d_w = \frac{a d_w}{2 b^2}.$$

باستخدام التقديرات السابقة،

$$\sigma \sim 8.6 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}.$$

يحدد نموذج الطبقة أحادية الجزيئات رتبة المقدار، $\sigma \sim 10^{-1} \text{ N m}^{-1}$ ؛ أما المعامل العددي فيعتمد على الترتيب الجزيئي المفترض والتفاعلات المفقودة.

C1. ضغط الإشباع فوق سطح منحنٍ

ليكن p_s ضغط البخار المشبع فوق سطح السائل المستوي. يكون السطح الهلالي للسائل غير المبَلِّل محدباً نحو البخار، ويقع على عمق h أسفل ذلك السطح.

عندما يكون فرق الارتفاع صغيراً، يعطي الاتزان الهيدروستاتيكي الضغطين عند مستوى السطح الهلالي:

$$p_\ell = p_s + \rho_L g h, \quad p_v = p_s + \rho_s g h.$$

يخضع السطح الهلالي الكروي لعلاقة لابلاس للضغط

$$p_\ell - p_v = \frac{2\sigma}{r}.$$

وبالتالي،

$$(\rho_L - \rho_s) g h = \frac{2\sigma}{r}.$$

التغير في ضغط بخار الاتزان هو

$$\Delta p_T = p_v - p_s = \rho_s g h.$$

بحذف h ،

$$\Delta p_T = \frac{2\sigma\rho_s}{r(\rho_L - \rho_s)} \simeq \frac{2\sigma\rho_s}{r\rho_L}.$$

تستخدم الخطوة الأخيرة $\rho_s \ll \rho_L$. التغير موجب: يتطلب سطح السائل المحدب ضغط بخار اتران أعلى مما يتطلبه السطح المستوي.

C2. أصغر نصف قطر لقطيرة نامية

ليكن $p_s(T)$ ضغط الإشباع فوق سطح مستوي. في البداية، يكون ضغط البخار الفعلي

$$p = p_s(T_e), \quad T_e = 293 \text{ K}.$$

بعد التبريد بمقدار $\Delta T = 5.0 \text{ K}$ ، يبقى الضغط الفعلي ثابتاً، بينما ينخفض ضغط الإشباع فوق السطح المستوي. إلى الرتبة الأولى،

$$\Delta p_{\text{cool}} = p_s(T_e) - p_s(T_e - \Delta T) \simeq \left. \frac{dp_s}{dT} \right|_{T_e} \Delta T.$$

من المعادلة (3)،

$$\frac{1}{p_s} \frac{dp_s}{dT} = -\frac{B}{T^2} = \frac{a}{bRT^2}.$$

إذن

$$\Delta p_{\text{cool}} \simeq p_s \frac{a\Delta T}{bRT_e^2}.$$

يمكن للقطيرة أن تنمو إذا تجاوز ضغط البخار المحيط ضغط انزائها المعتمد على التقوس. عند نصف القطر الحرج، يتساوى التغيران في الضغط:

$$p_s \frac{a\Delta T}{bRT_e^2} = \frac{2\sigma\rho_s}{\rho_L r_{\min}}.$$

بمعاملة البخار المخفف على أنه مثالي،

$$\rho_s \simeq \frac{\mu p_s}{RT_e}.$$

بالتعويض واختزال p_s ،

$$r_{\min} \simeq \frac{2\sigma\mu b T_e}{\rho_L a \Delta T}.$$

باستخدام نتيجتي الجزء B، $\rho_L \simeq \mu/b$ و $L \simeq a/(\mu b)$ ،

$$r_{\min} \simeq \frac{2\sigma b^2 T_e}{a \Delta T} = \frac{2\sigma T_e}{\rho_L L \Delta T}.$$

باستخدام القيمة الجدولية المعطاة للتوتر السطحي،

$$r_{\min} \simeq \frac{2(7.3 \times 10^{-2})(3.055 \times 10^{-5})^2(293)}{(0.5543)(5.0)} = \boxed{1.4 \times 10^{-8} \text{ m} \approx 14 \text{ nm}.}$$

عند نصف القطر هذا تكون القطيرة في اتزان غير مستقر. ويمكن للقطيرات الأكبر أن تنمو؛ أما القطيرات الأصغر فتتميل إلى التبخر.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: أبسط نموذج للتفريغ الغازي

يُسمى مرور تيار كهربائي عبر غاز تفريغاً غازياً. وهناك أنواع عديدة من التفريغ الغازي، منها التفريغ التوهجي في مصابيح الإضاءة، والتفريغ القوسي في اللحام، والتفريغ الشراري المعروف الذي يحدث بين السحب والأرض على هيئة برق.

الجزء A. التفريغ الغازي غير المستدام ذاتياً (4.8 نقاط)

يُدرس في هذا الجزء من المسألة ما يُسمى بالتفريغ الغازي غير المستدام ذاتياً. وللحفاظ عليه، يلزم تشغيل مؤين خارجي باستمرار، يولد Z_{ext} زوجاً من الأيونات أحادية التآين والإلكترونات الحرة لكل وحدة حجم ولكل وحدة زمن، بانتظام في الحجم كله.

عند تشغيل مؤين خارجي، يبدأ عدد الإلكترونات والأيونات بالازدياد. وتمنع عملية إعادة الاتحاد الزيادة غير المحدودة في الكثافتين العدديتين للإلكترونات والأيونات في الغاز؛ ففي هذه العملية يتحد إلكترون حر من جديد مع أيون ليشكل ذرة متعادلة. ويُعطى عدد أحداث إعادة الاتحاد Z_{rec} التي تحدث في الغاز لكل وحدة حجم ولكل وحدة زمن بالعلاقة

$$Z_{\text{rec}} = r n_e n_i,$$

حيث r ثابت يُسمى معامل إعادة الاتحاد، ويبدل n_e, n_i على الكثافتين العدديتين للإلكترونات والأيونات، على الترتيب.

لنفترض أن المؤين الخارجي يُشغل عند الزمن $t = 0$ ، وأن الكثافتين العدديتين الابتدائيتين للإلكترونات والأيونات في الغاز تساويان صفرًا. عندئذ تعتمد الكثافة العددية للإلكترونات $n_e(t)$ على الزمن t وفقًا للعلاقة الآتية:

$$n_e(t) = n_0 + a \tanh bt,$$

حيث a, n_0, b ثوابت، وترمز $\tanh x$ إلى الظل الزائدي.

A1 أوجد a, b, n_0 وعبر عنها بدلالة Z_{ext} و r . (1.8 نقاط)

افترض توافر مؤينين خارجيين. عند تشغيل الأول، تصل الكثافة العددية للإلكترونات في الغاز إلى قيمتها عند الاتزان، وهي $n_{e1} = 12 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. وعند تشغيل المؤين الخارجي الثاني، تصل الكثافة العددية للإلكترونات إلى قيمتها عند الاتزان، وهي $n_{e2} = 16 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$.

A2 أوجد الكثافة العددية للإلكترونات n_e عند الاتزان عندما يُشغل المؤينان الخارجيان معًا. (0.6 نقطة)

تنبيه! يُفترض فيما يأتي أن المؤين الخارجي قد ظل قيد التشغيل مدة طويلة بما يكفي لتصبح جميع العمليات مستقرة وغير معتمدة على الزمن. أهمل تمامًا المجال الكهربائي الناشئ عن حاملات الشحنة.

افترض أن الغاز يملأ الأنبوب بين لوحين موصلين متوازيين مساحة كل منهما S ، تفصل بينهما مسافة $\sqrt{S} \ll L$. يُطبق فرق الجهد U بين اللوحين لتوليد مجال كهربائي بينهما. وافترض أن الكثافتين العدديتين لكلا نوعي حاملات الشحنة تبقيان ثابتتين تقريبًا على طول الأنبوب.

افترض أن الإلكترونات (التي يُشار إليها بالدليل السفلي e) والأيونات (التي يُشار إليها بالدليل السفلي i) تكتسب جميعها مقدار سرعة الانجراف نفسه v بفعل شدة المجال الكهربائي E ، ويُعطى بالعلاقة

$$v = \beta E,$$

حيث b ثابت يُسمى حركية الشحنة.

A3 عبر عن التيار الكهربائي I في الأنبوب بدلالة $r, Z_{\text{ext}}, L, S, \beta, U, e$ ، حيث تمثل الأخيرة الشحنة الأولية. (1.7 نقاط)

A4 أوجد المقاومة ρ_{gas} للغاز عند قيم صغيرة بما يكفي لفرق الجهد المطبق، وعبر عنها بدلالة $r, Z_{\text{ext}}, L, \beta, e$. (0.7 نقطة)

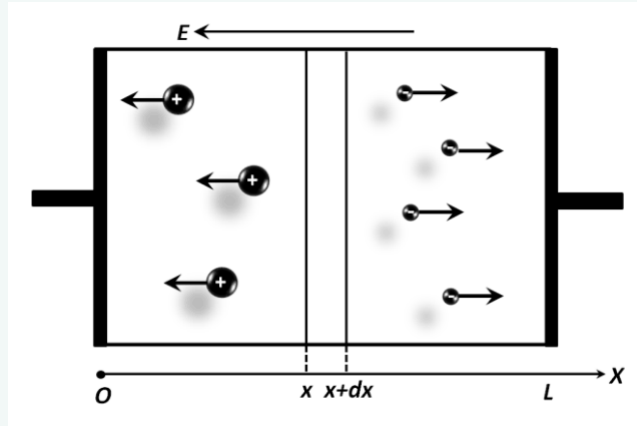
الجزء B. التفريغ الغازي المستدام ذاتيًا (5.2 نقاط)

نتناول في هذا الجزء من المسألة بدء التفريغ الغازي المستدام ذاتيًا لتوضيح كيف يصبح التيار الكهربائي في الأنبوب قادرًا على الاستمرار ذاتيًا.

تنبيه! افترض فيما يأتي أن المؤين الخارجي يستمر في العمل بالمعدل نفسه Z_{ext} ، وأهمل المجال الكهربائي الناشئ عن حاملات الشحنة بحيث يكون المجال الكهربائي منتظمًا على طول الأنبوب، وأنه يمكن إهمال إعادة الاتحاد تمامًا.

هناك عمليتان مهمتان في التفريغ الغازي المستدام ذاتيًا لم تُؤخذ في الحسبان أعلاه. العملية الأولى هي الانبعاث الإلكتروني الثانوي، والثانية هي تشكل انهيار إلكتروني. يحدث الانبعاث الإلكتروني الثانوي عندما تصطدم الأيونات بالقطب السالب، الذي يُسمى المهبط، فتقتلع منه إلكترونات تتحرك نحو القطب الموجب، الذي يُسمى المصعد. وتُسمى نسبة عدد الإلكترونات المقتلعة $\dot{N}_e$ في وحدة الزمن إلى عدد الأيونات $\dot{N}_i$ التي تصطدم بالمهبط في وحدة الزمن معامل الانبعاث الإلكتروني الثانوي، $\gamma = \dot{N}_e / \dot{N}_i$. ويمكن تفسير تشكل الانهيار الإلكتروني كما يأتي. يُسرّع المجال الكهربائي الإلكترونات الحرة، فتكتسب طاقة حركية كافية لتأيين ذرات الغاز بالتصادم معها. ونتيجة لذلك، يزداد عدد الإلكترونات الحرة المتحركة نحو المصعد ازديادًا كبيرًا. وتُوصف هذه العملية بمعامل تاونسند α ، الذي يحدد الزيادة في عدد الإلكترونات dN_e الناجمة عن حركة N_e إلكترونات اجتازت المسافة dl ، أي

$$\frac{dN_e}{dl} = \alpha N_e.$$



يتكوّن التيار الكلي I في أي مقطع عرضي للأنبوب الغازي من تيار الأيونات $I_i(x)$ و تيار الإلكترونات $I_e(x)$ ، اللذين يعتمدان، في الحالة المستقرة، على الإحداثي x المبيّن في الشكل أعلاه. ويتغيّر تيار الإلكترونات $I_e(x)$ على طول المحور x وفقاً للعلاقة

$$I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2,$$

حيث A_1, A_2, C_1 ثوابت.

B1 أوجد A_1, A_2 وعبر عنهما بدلالة $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S$. (2 نقطة)

يتغيّر تيار الأيونات $I_i(x)$ على طول المحور x وفقاً للعلاقة

$$I_i(x) = C_2 + B_1 e^{B_2 x},$$

حيث B_1, B_2, C_2 ثوابت.

B2 أوجد B_1, B_2 وعبر عنهما بدلالة $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S, C_1$. (0.6 نقطة)

B3 اكتب الشرط الذي يحققه $I_i(x)$ عند $x = L$. (0.3 نقطة)

B4 اكتب الشرط الذي يحققه $I_e(x)$ و $I_i(x)$ عند $x = 0$. (0.6 نقطة)

B5 أوجد التيار الكلي I وعبر عنه بدلالة $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$. افترض أنه يبقى محدوداً. (1.2 نقاط)

ليكن معامل تاونسند α ثابتاً. عندما يصبح طول الأنبوب أكبر من قيمة حرجة معينة، أي $L > L_{\text{cr}}$ ، يمكن إيقاف المؤيّن الخارجي ويصبح التفريغ مستداماً ذاتياً.

B6 أوجد L_{cr} وعبر عنه بدلالة $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$. (0.5 نقطة)

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

تمثّل التيارات أدناه مقادير التيارات، و $U \geq 0$.

A1 •

$$n_0 = 0, \quad a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}, \quad b = \sqrt{r Z_{\text{ext}}}.$$

A2 •

$$n_e = 2.0 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3} = 2.0 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}.$$

• **A3**، باستخدام تقريب الجمع عند الأقطاب ذي الكثافة المنتظمة المذكور:

$$I = \frac{e\beta SU}{rL} \left[\sqrt{\frac{\beta^2 U^2}{L^4} + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{\beta U}{L^2} \right].$$

• **A4**

$$\rho_{\text{gas}} = \frac{1}{2e\beta} \sqrt{\frac{r}{Z_{\text{ext}}}}.$$

• **B1**

$$A_1 = \alpha, \quad A_2 = -\frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}.$$

• **B2**

$$B_1 = -C_1, \quad B_2 = \alpha.$$

• **B3**

$$I_i(L) = 0.$$

• **B4**

$$I_e(0) = \gamma I_i(0).$$

• **B5**

$$I = \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha} \frac{(1 + \gamma)(e^{\alpha L} - 1)}{1 - \gamma(e^{\alpha L} - 1)}.$$

يتطلب وجود حل مستقر محدود ومقبول فيزيائياً، مع $Z_{\text{ext}} > 0$ ، أن يتحقق

$$\gamma(e^{\alpha L} - 1) < 1.$$

• **B6**، من أجل $\alpha > 0, \gamma > 0$:

$$L_{\text{cr}} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right).$$

الحل

A1. نمو كثافة حاملات الشحنة

يُولد التأين إلكترونًا واحدًا وأيونًا واحدًا في كل حدث، بينما تزيل إعادة الاتحاد واحدًا من كل منهما. وبما أن كثافتهما الابتدائيتين متساويتان، فإنهما تبقىان متساويتين:

$$n_e(t) = n_i(t) = n(t).$$

لذلك تكون معادلة موازنة الجسيمات لكل وحدة حجم

$$\frac{dn}{dt} = Z_{\text{ext}} - rn^2, \quad n(0) = 0.$$

يعطي التعبير المعطى $n(0) = n_0$ ، ومن ثم

$$n_0 = 0.$$

بالتعويض بـ $n = a \tanh(bt)$ في معادلة الموازنة،

$$ab [1 - \tanh^2(bt)] = Z_{\text{ext}} - ra^2 \tanh^2(bt).$$

بمطابقة الحدود الثابتة ومعاملات $\tanh^2(bt)$ ، نحصل على

$$ab = Z_{\text{ext}}, \quad ab = ra^2.$$

باختيار a, b موجبين،

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}, \quad b = \sqrt{rZ_{\text{ext}}}.$$

إذن

$$n_e(t) = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}} \tanh\left(\sqrt{rZ_{\text{ext}}} t\right).$$

ميلها الابتدائي هو Z_{ext} ، وكثافتها الحدية هي $\sqrt{Z_{\text{ext}}/r}$ ، كما تقتضي موازنة التوليد وإعادة الاتحاد. ويؤدي عكس إشارتي a و b معاً إلى وصف الدالة نفسها.

A2. مؤيَّنان

ليكن معدلا التوليد المنفردان Z_1 و Z_2 . عند الاتزان،

$$Z_1 = rn_{e1}^2, \quad Z_2 = rn_{e2}^2.$$

تُجمع معدلات التوليد المستقلة عندما يعمل المؤيَّنان معاً:

$$rn_e^2 = Z_1 + Z_2 = r(n_{e1}^2 + n_{e2}^2).$$

وعليه،

$$n_e = \sqrt{n_{e1}^2 + n_{e2}^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}.$$

ومن ثم،

$$\boxed{n_e = 2.0 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3} = 2.0 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}.$$

لا تُجمع الكثافات نفسها لأن معدل إعادة الاتحاد يتناسب مع مربع الكثافة.

A3. التيار المستقر مع إعادة الاتحاد والجمع عند الأقطاب

بإهمال تأثيرات الحواف ومجال حاملات الشحنة،

$$E = \frac{U}{L}, \quad v = \frac{\beta U}{L}.$$

نطبق تقريب الكثافة المنتظمة المفروض على الحجم SL . خلال زمن dt ، يزيل أحد القطبين الجامعين $n_e Sv dt$ إلكترونات؛ ويزيل القطب المقابل $n_i Sv dt$ أيونات. وتكون معادلتا موازنة الجسيمات في الحالة المستقرة

$$Z_{\text{ext}}SL - rn_en_iSL - n_eSv = 0,$$

$$Z_{\text{ext}}SL - rn_en_iSL - n_iSv = 0.$$

من أجل $v > 0$ ، يعطي الطرح $n_e = n_i = n$. ومن ثم

$$rn^2 + \frac{v}{L}n - Z_{\text{ext}} = 0.$$

الجذر غير السالب وحده مقبول فيزيائياً:

$$n = \frac{1}{2r} \left[\sqrt{\left(\frac{v}{L}\right)^2 + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{v}{L} \right].$$

على الرغم من أن الإلكترونات والأيونات تتحرك في اتجاهين متعاكسين، فإن شحناتها أيضاً ذات إشارتين متعاكستين. ولذلك يُجمع تياراهما الاصطلاحيان:

$$I = eSn_e v + eSn_i v = 2eS n v.$$

يعطي التعويض

$$I = \frac{eSv}{r} \left[\sqrt{\left(\frac{v}{L}\right)^2 + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{v}{L} \right].$$

باستخدام $v = \beta U/L$

$$I = \frac{e\beta SU}{rL} \left[\sqrt{\frac{\beta^2 U^2}{L^4} + 4rZ_{\text{ext}}} - \frac{\beta U}{L^2} \right].$$

هذه هي نتيجة التطبيق الحرفي لنموذج الجمع عند الأقطاب ذي الكثافة المنتظمة مكانياً. وعلى وجه الدقة، لا يمكن أن تبقى الكثافتان منتظمتين حتى اللوحين: إذ يجب أن تنعدم كثافة الإلكترونات عند المهبط وكثافة الأيونات عند المصدر. لذلك تكون الصيغة موثوقة ما دامت طبقتا الاستنزاف هاتان رقيقتين مقارنةً بـ L ، كما في حالة فرق الجهد الصغير في A4؛ أما عند فرق جهد كبير فتؤول إلى $2eZ_{\text{ext}}SL$ ، أي ضعف تيار الإشباع الفعلي $eZ_{\text{ext}}SL$.

A4. المقاومة عند فرق جهد صغير

عند فرق جهد صغير بما يكفي،

$$\frac{\beta U}{L^2} \ll \sqrt{rZ_{\text{ext}}},$$

لا يُحدث الجمع عند الأقطاب إلا اضطراباً طفيفاً في اتزان التوليد وإعادة الاتحاد. وفي الرتبة الرئيسية من التقريب،

$$n \simeq \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}.$$

لذلك يصبح التيار متناسباً مع فرق الجهد:

$$I \simeq 2e\beta \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}} \frac{S}{L} U.$$

بمقارنة ذلك بالعلاقة

$$I = \frac{S}{\rho_{\text{gas}} L} U$$

نحصل على

$$\rho_{\text{gas}} = \frac{1}{2e\beta} \sqrt{\frac{r}{Z_{\text{ext}}}}.$$

يُختزل الطول L . وعند استخدام كميات بوحدات النظام الدولي، تكون النتيجة بوحدة $\Omega \text{ m}$.

B1. معادلة تيار الإلكترونات

في الجزء B، تُهمل إعادة الاتحاد. نأخذ I_e و I_i مقدارين غير سالبين للتيار، بحيث

$$I = I_e(x) + I_i(x).$$

لننظر في شريحة رقيقة سمكها dx . يُولد المؤيّن الخارجي

$$Z_{\text{ext}} S dx$$

إلكتروناً في وحدة الزمن داخل الشريحة. ويُولد التكاثر بالانهيال عدداً إضافياً قدره

$$\propto \frac{I_e(x)}{e} dx$$

من الإلكترونات في وحدة الزمن. ويضيف كل إلكترون جديد إلى تيار الإلكترونات الخارج من الشريحة مقداراً يساوي e مضروباً في معدل توليده. لذلك،

$$I_e(x + dx) - I_e(x) = [eSZ_{\text{ext}} + \alpha I_e(x)]dx.$$

بالصيغة التفاضلية،

$$\frac{dI_e}{dx} = \alpha I_e + eSZ_{\text{ext}}.$$

عندما يكون $\alpha > 0$ ثابتاً، يكون حلها العام

$$I_e(x) = C_1 e^{\alpha x} - \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}.$$

بالمقارنة مع التعبير المعطى، نحصل على

$$A_1 = \alpha, \quad A_2 = -\frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}.$$

B2. معادلة تيار الأيونات

يولد كل حدث تأين أيضاً أيوناً واحداً. وتتحرك الأيونات نحو تناقص x ، لذا يكون تيار الأيونات الخارج من الشريحة عبر وجهها الأيسر أكبر من التيار الداخل عبر وجهها الأيمن:

$$I_i(x) - I_i(x + dx) = [eSZ_{\text{ext}} + \alpha I_e(x)]dx.$$

إذن

$$\frac{dI_i}{dx} = -eSZ_{\text{ext}} - \alpha I_e(x).$$

باستخدام حل تيار الإلكترونات،

$$\frac{dI_i}{dx} = -\alpha C_1 e^{\alpha x},$$

ويعطي التكامل

$$I_i(x) = C_2 - C_1 e^{\alpha x}.$$

وعليه،

$$B_1 = -C_1, \quad B_2 = \alpha.$$

وتبين المعادلتان التفاضليتان أيضاً أن

$$\frac{d}{dx}(I_e + I_i) = 0,$$

وهو ما يعبر عن انحفاظ الشحنة في الحالة المستقرة.

B3. الشرط الحدّي عند المصعد

يقع المصعد عند $x = L$. لا تدخل أيونات إلى الغاز من هذا القطب، وتنجرّف الأيونات المتولّدة داخل الغاز مبتعدة عنه. لذلك،

$$I_i(L) = 0.$$

وبصورة مكافئة،

$$C_2 = C_1 e^{\alpha L}.$$

B4. الشرط الحدّي عند المهبط

عند $x = 0$ ، يكون معدل وصول الأيونات $I_i(0)/e$. ويحرّر كل أيون يصل، في المتوسط، γ إلكترونات. ومن ثم

$$\frac{I_e(0)}{e} = \gamma \frac{I_i(0)}{e},$$

أو

$$I_e(0) = \gamma I_i(0).$$

B5. التيار الكلي المستقر

للاختصار، نعرّف

$$K = \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha}, \quad T = e^{\alpha L}.$$

عندئذ

$$I_e(x) = C_1 e^{\alpha x} - K, \quad I_i(x) = C_2 - C_1 e^{\alpha x}.$$

يعطي الشرط عند المصدر

$$C_2 = C_1 T.$$

ويصبح الشرط عند المهبط

$$C_1 - K = \gamma(C_2 - C_1) = \gamma C_1(T - 1).$$

لذلك،

$$C_1 = \frac{K}{1 - \gamma(T - 1)}.$$

بجمع تيارَي الإلكترونات والأيونات،

$$I = C_2 - K = C_1 T - K.$$

بالتعويض عن C_1 والتبسيط،

$$I = K \frac{T - 1 + \gamma(T - 1)}{1 - \gamma(T - 1)}.$$

إذن

$$I = \frac{eSZ_{\text{ext}}}{\alpha} \frac{(1 + \gamma)(e^{\alpha L} - 1)}{1 - \gamma(e^{\alpha L} - 1)}.$$

مع وجود معدل تأين خارجي موجب، يتطلب وجود تيار مستقر محدود ومقبول فيزيائياً أن يتحقق

$$1 - \gamma(e^{\alpha L} - 1) > 0.$$

عندما يكون المقام صفراً، يتنبأ النموذج الخطي المستقر بتباعد التيار؛ أما المقام السالب فيعطي مقدار تيار سالباً غير مقبول فيزيائياً.

B6. الطول الحرج للتفريغ المستدام ذاتياً

يتكاثر إلكترون واحد منبعث من المهبط ليصبح عدد الإلكترونات

$$e^{\alpha L}$$

بحلول وصول الانهيار إلى المصدر. وبما أن الإلكترون الأصلي كان موجوداً بالفعل، فإن الانهيار يولد

$$e^{\alpha L} - 1$$

زوجاً جديداً من الإلكترونات والأيونات.

بإهمال إعادة الاتحاد، تصل جميع هذه الأيونات إلى المهبط. وتحرر، في المتوسط،

$$\mathcal{R} = \gamma(e^{\alpha L} - 1)$$

إلكتروناً ثانوياً. وهذا هو عدد إلكترونات المهبط التي يولدها إلكترون مهبط واحد من الجيل السابق.

إذا كان $\mathcal{R} < 1$ ، تتناقص الأجيال المتعاقبة ويكون التأين الخارجي ضرورياً. وتُبلغ العتبة عندما يعوّض كل جيل نفسه تماماً:

$$\gamma(e^{\alpha L_{\text{cr}}} - 1) = 1.$$

$$L_{\text{cr}} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right).$$

من أجل $L > L_{\text{cr}}$ ، تضخم التغذية الراجعة تفريغاً أولياً حتى بعد إزالة المؤيّن الخارجي. ويحدّد النموذج الخطي الحالي عتبة بدء التفريغ؛ ويلزم أخذ تأثيرات فيزيائية إضافية في الحسبان لتحديد تيار تشغيل محدود فوق العتبة.

لا يدخل أيّ من Z_{ext} أو e أو S في العتبة. وإذا كان $\alpha = 0$ أو $\gamma = 0$ ، فلا تستطيع هذه الآلية الحفاظ على تفريغ عند أي طول محدود.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.