

IPhO 2013

理论题与解答 · 丹麦哥本哈根 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/2013/

题目 1: 马里博陨石

引言

流星体是来自彗星或小行星的小颗粒（通常小于 1 m）。撞击地面的流星体称为陨石。

2009 年 1 月 17 日夜間，波罗的海附近的许多人看到了一个流星体穿过地球大气层下落时形成的发光轨迹，即火流星。在瑞典，一台监控摄像机记录下了这一事件的视频，见图 1.1(a)。根据这些图像和目击者的描述，人们得以缩小撞击区域的范围。六周后，在丹麦南部马里博镇附近发现了一块质量为 0.025 kg 的陨石。对这块如今被命名为马里博的陨石及其空中轨迹的测量得出了一些有趣的结果。它进入大气层时的速率异常高。它的年龄为 4.567×10^9 年，表明它在太阳系诞生后不久就已形成。马里博陨石可能是恩克彗星的一部分。

马里博的速率

火流星向西运动，相对于正北方向的航向角为 285° ，朝向后来发现陨石的地点，如图 1.1 所示。陨石发现地点距监控摄像机 195 km，相对于正北方向的方位角为 230° 。

部分	问题	分值
1.1	利用上述信息和图 1.1 中的数据，计算马里博在第 155 帧到第 161 帧之间这段时间内的平均速率。地球的曲率和流星体所受的引力均可忽略。	1.3

穿过大气层时会熔化吗？

流星体在高层大气中运动时所受的空气摩擦力，以复杂的方式取决于流星体的形状和速度，以及大气的温度和密度。作为合理的近似，高层大气中的摩擦力 F 可用表达式 $F = k\rho_{\text{atm}}Av^2$ 给出，其中 k 为常数， ρ_{atm} 为大气密度， A 为陨石的投影截面积， v 为其速率。

为分析流星体，作如下简化假设：进入大气层的物体是一个球体，其质量为 $m_M = 30$ kg，半径为 $R_M = 0.13$ m，温度为 $T_0 = 200$ K，速率为 $v_M = 2.91 \times 10^4$ m/s。大气密度为常量（取地表上方 40 km 处的数值）， $\rho_{\text{atm}} = 4.1 \times 10^{-3}$ kg/m³，摩擦系数为 $k = 0.60$ 。

部分	问题	分值
1.2a	估算流星体进入大气层后，需要多长时间才能使其速率降低 10%，即从 v_M 降至 $0.90v_M$ 。可忽略流星体所受的引力，并假设其质量和形状保持不变。	0.7
1.2b	计算流星体进入大气层时的动能 E_{kin} 是使其完全熔化所需能量 E_{melt} 的多少倍（见数据表）。	0.3

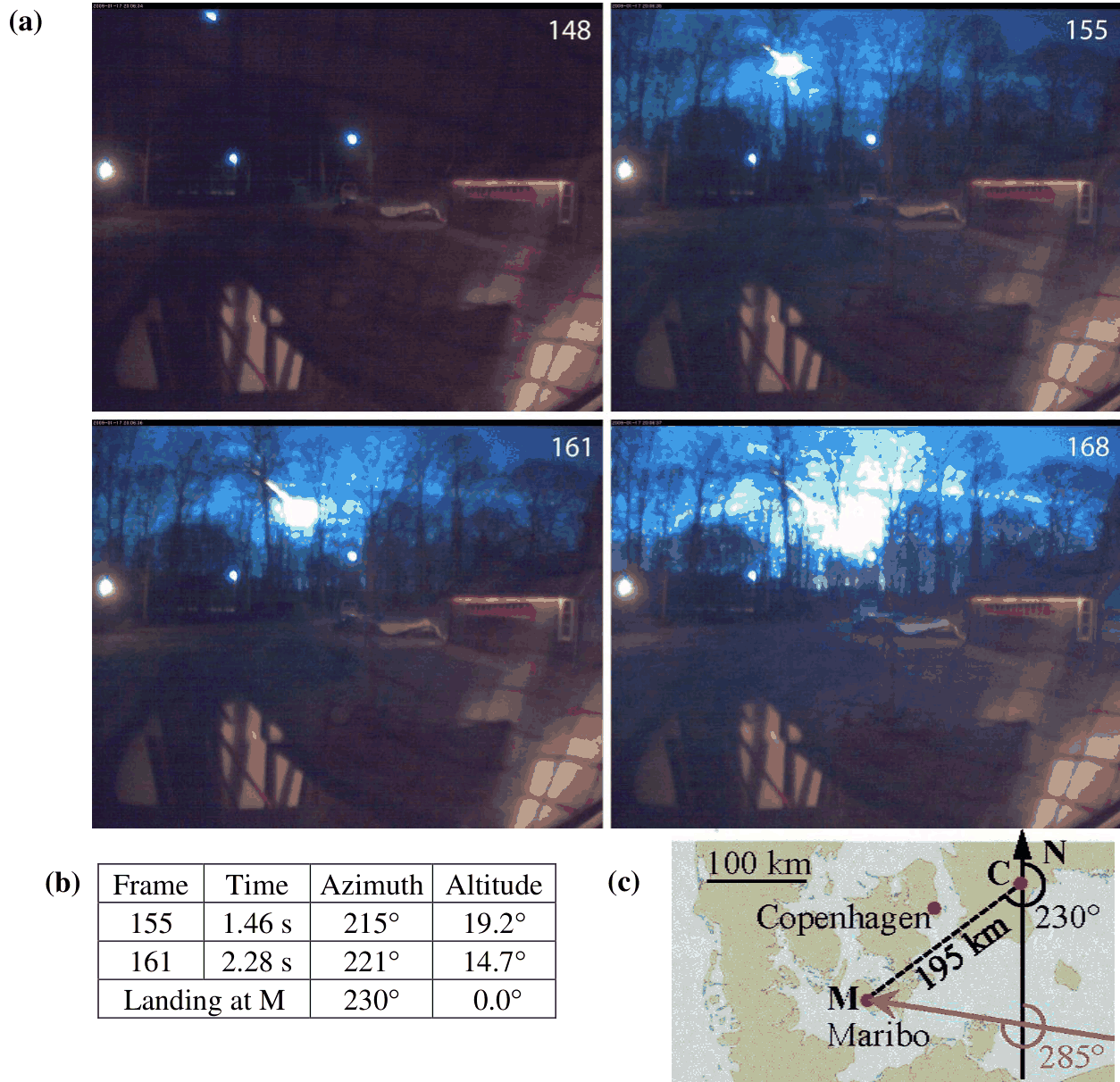


图 1.1 (a) 方位角是在水平面内从正北方向起顺时针量取的角度，高度角是相对于地平线向上量取的角度。瑞典的监控摄像机记录的一系列画面，显示了马里博以火流星的形式穿过大气层下落时的运动。(b) 两帧画面的数据，给出了时间、摄像机 (C) 所见的方向（方位角，以度为单位），以及高出地平线的角度（高度角，以度为单位）。(c) 示意图，表示摄像机 (C) 所见的马里博轨迹（品红色箭头）以及丹麦着陆点 (M) 相对于正北方向 (N) 的方位。

马里博在大气层下落过程中的受热

当石质流星体马里博以超声速进入大气层时，周围空气发光，使其呈现为火流星。然而，马里博只有最外层被加热。假设马里博是一个均匀球体，密度为 ρ_{sm} ，比热容为 c_{sm} ，热导率为 k_{sm} （数值见数据表）。此外，它进入大气层时的温度为 $T_0 = 200 \text{ K}$ 。在穿过大气层下落的过程中，由于空气摩擦，其表面温度恒为 $T_s = 1000 \text{ K}$ ，从而使内部逐渐升温。

在大气层中下落时间 t 后，马里博厚度为 x 的外壳将被加热到显著高于 T_0 的温度。可通过量纲分析，将这一厚度估算为各热力学参数幂的简单乘积： $x \approx t^\alpha \rho_{\text{sm}}^\beta c_{\text{sm}}^\gamma k_{\text{sm}}^\delta$ 。

部分	问题	分值
1.3a	利用量纲（单位）分析，确定四个指数 α, β, γ 和 δ 的值。	0.6

部分	问题	分值
1.3b	计算下落时间 $t = 5 \text{ s}$ 后的厚度 x ，并确定比值 x/R_M 。	0.4

陨石的年龄

放射性元素的化学性质可能不同，因此，在一块陨石中的矿物结晶过程中，某些矿物中的某种放射性元素含量较高，而其他矿物中的含量较低。利用这种差异，可以通过对陨石中放射性矿物进行放射性定年，确定陨石的年龄。

作为一个具体例子，我们研究同位素 ^{87}Rb （第 37 号元素），它衰变为稳定同位素 ^{87}Sr （第 38 号元素），半衰期为 $T_{1/2} = 4.9 \times 10^{10}$ 年，并以稳定同位素 ^{86}Sr 为参照。结晶时，所有矿物中的比值 $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ 均相同，而比值 $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ 各不相同。随着时间推移， ^{87}Rb 的数量因衰变而减少， ^{87}Sr 的数量则相应增加。因此，如今各矿物中的比值 $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ 将有所不同。在图 1.2(a) 中，水平线上的各点对应不同矿物结晶时的比值 $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ 。

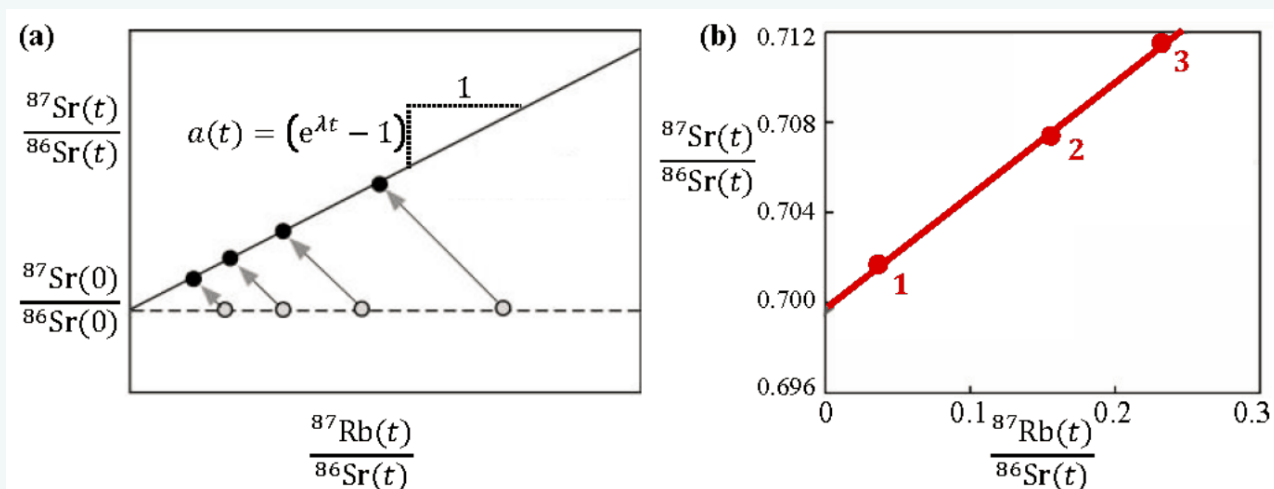


图 1.2 (a) 不同矿物在结晶时刻 $t = 0$ （空心圆）及当前时刻（实心圆）的比值 $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ 。(b) 目前从一块陨石中取得的三种不同矿物样品的等时线。

部分	问题	分值
1.4a	写出 $^{87}_{37}\text{Rb}$ 转变为 $^{87}_{38}\text{Sr}$ 的衰变方程。	0.3
1.4b	证明：对于同一块陨石中的不同矿物样品，以当前的比值 $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ 为纵坐标、当前的比值 $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ 为横坐标作图，所得各点位于一条直线上，即所谓的等时线，其斜率为 $a(t) = (e^{\lambda t} - 1)$ 。其中， t 为矿物形成以来经过的时间， λ 为衰变常数，与半衰期 $T_{1/2}$ 成反比。	0.7
1.4c	利用图 1.2(b) 中的等时线，确定陨石的年龄 τ_M 。	0.4

马里博可能来自的恩克彗星

恩克彗星绕太阳运行时，与太阳之间的最小距离和最大距离分别为 $a_{\min} = 4.95 \times 10^{10} \text{ m}$ 和 $a_{\max} = 6.16 \times 10^{11} \text{ m}$ 。

部分	问题	分值
1.5	计算恩克彗星的公转周期 t_{Encke} 。	0.6

小行星撞击地球的后果

6500 万年前，一颗巨大的小行星撞击了地球，其密度为 $\rho_{\text{ast}} = 3.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ，半径为 $R_{\text{ast}} = 5.0 \text{ km}$ ，最终速率为 $v_{\text{ast}} = 2.5 \times 10^4 \text{ m/s}$ 。这次撞击导致地球上大多数生命灭绝，并形成了巨大的希克苏鲁伯陨石坑。假设今天一颗完全相同的小行星以完全非弹性碰撞的方式撞击地球，并利用以下事实：地球的转动惯量是质量和半径均与地球相同的均匀球体的转动惯量的 0.83 倍。质量为 M 、半径为 R 的均匀球体的转动惯量为 $\frac{2}{5}MR^2$ 。忽略地球轨道的变化。

部分	问题	分值
1.6a	设小行星撞击北极。求撞击后地轴方向的最大角度变化。	0.7
1.6b	设小行星沿径向撞击赤道。求撞击后地球自转一周所需时间的变化 $\Delta\tau_{\text{vrt}}$ 。	0.7
1.6c	设小行星在赤道平面内沿切向撞击赤道。求撞击后地球自转一周所需时间的变化 $\Delta\tau_{\text{tan}}$ 。	0.7

最大撞击速率

考虑一个受引力束缚在太阳系内的天体，它以速率 v_{imp} 撞击地球表面。最初，地球引力场对该天体的影响可以忽略。不考虑大气摩擦、其他天体的影响以及地球自转。

部分	问题	分值
1.7	计算 $v_{\text{imp}}^{\text{max}}$ ，即 v_{imp} 的最大可能值。	1.6

数据表：物理参数表

物理参数	数值
真空中的光速	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
普朗克常量除以 2π	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
万有引力常量	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
重力加速度	$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$
元电荷	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
真空介电常数	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
电子质量	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
阿伏伽德罗常量	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
玻尔兹曼常量	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
石陨石的比热容	$c_{\text{sm}} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
石陨石的热导率	$k_{\text{sm}} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
石陨石的密度	$\rho_{\text{sm}} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
石陨石的熔点	$T_{\text{sm}} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$
石陨石的比熔化热	$L_{\text{sm}} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
银的摩尔质量	$M_{\text{Ag}} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$
银的密度	$\rho_{\text{Ag}} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
银的比热容	$c_{\text{Ag}} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
水的摩尔质量	$M_{\text{wa}} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$
水的密度	$\rho_{\text{wa}} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
水的比热容	$c_{\text{wa}} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

物理参数	数值
水的汽化热	$L_{\text{wa}} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$
水的沸点	$T_{100} = 100^\circ\text{C} = 373.15 \text{ K}$
冰川冰的密度	$\rho_{\text{ice}} = 0.917 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
水蒸气的比热容	$c_{\text{st}} = 2.080 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
地球的质量	$m_{\text{E}} = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
地球的半径	$R_{\text{E}} = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$
太阳的质量	$m_{\text{S}} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
太阳的半径	$R_{\text{S}} = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$
日地平均距离	$a_{\text{E}} = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$

题目译自官方英文原文。

答案

- 1.1: $\bar{v} = 2.86 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 28.6 \text{ km s}^{-1}$ 。
- 1.2a: $t = 0.88 \text{ s}$ 。
- 1.2b: $E_{\text{kin}}/E_{\text{melt}} \approx 2.1 \times 10^2$ 。
- 1.3a: $\alpha = \delta = \frac{1}{2}, \quad \beta = \gamma = -\frac{1}{2}$, 因此 $x \approx \sqrt{k_{\text{sm}} t / (\rho_{\text{sm}} c_{\text{sm}})}$ 。
- 1.3b: $x \approx 1.6 \text{ mm}, \quad x/R_{\text{M}} \approx 0.012 = 1.2\%$ 。
- 1.4a: ${}^{87}_{37}\text{Rb} \rightarrow {}^{87}_{38}\text{Sr} + {}^0_{-1}\text{e} + \bar{\nu}_{\text{e}}$ 。
- 1.4b: $Y(t) = Y_0 + (e^{\lambda t} - 1)X(t)$, 其中 $Y = {}^{87}\text{Sr}/{}^{86}\text{Sr}$, $X = {}^{87}\text{Rb}/{}^{86}\text{Sr}$, 且 $\lambda = \ln 2/T_{\frac{1}{2}}$ 。
- 1.4c: $\tau_{\text{M}} \approx 3.5 \times 10^9 \text{ yr}$, 由图线斜率约为 0.050 得出。
- 1.5: $t_{\text{Encke}} = 1.05 \times 10^8 \text{ s} \approx 3.32 \text{ yr}$ 。
- 1.6a: $\theta_{\text{max}} \approx 4.3 \times 10^{-8} \text{ rad} \approx 2.4 \times 10^{-6} \text{ degree}$ 。
- 1.6b: $\Delta\tau_{\text{vrt}} \approx +6.8 \times 10^{-5} \text{ s}$ 。
- 1.6c: 顺行撞击时, $\Delta\tau_{\text{tan}} \approx -3.6 \times 10^{-3} \text{ s}$; 逆行撞击时, $\Delta\tau_{\text{tan}} \approx +3.8 \times 10^{-3} \text{ s}$ 。
- 1.7: $v_{\text{imp}}^{\text{max}} \approx 7.27 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 72.7 \text{ km s}^{-1}$, 应理解为受引力束缚的天体所能趋近的上限。

解答

1.1

设 C 表示摄像机, M 表示着陆点, P_i 表示第 i 帧中流星体位置在水平面上的投影。记

$$CM = D = 195 \text{ km}, \quad CP_i = r_i, \quad MP_i = s_i.$$

观测量如下:

帧	时间 t_i	方位角 ϕ_i	高度角 h_i
155	1.46 s	215°	19.2°
161	2.28 s	221°	14.7°

水平轨迹的航向角为 285°。从 M 看，摄像机的方位角为 50°，而流星体先前位置的方位角为 105°。因此，三角形 CMP_i 在 M 处的内角为 55°。在 C 处的内角为 $230^\circ - \phi_i$ 。

由正弦定理可得

$$r_i = D \frac{\sin 55^\circ}{\sin(285^\circ - \phi_i)}, \quad s_i = D \frac{\sin(230^\circ - \phi_i)}{\sin(285^\circ - \phi_i)}.$$

由于忽略地球曲率，流星体的高度为

$$z_i = r_i \tan h_i.$$

数值为

帧	r_i (km)	s_i (km)	z_i (km)
155	169.986	53.709	59.195
161	177.721	33.940	46.624

因此，水平和竖直方向上运动的距离分别为

$$\Delta s = 19.769 \text{ km}, \quad |\Delta z| = 12.571 \text{ km}.$$

将这一短时间间隔内的轨迹视为直线，

$$\Delta \ell = \sqrt{(\Delta s)^2 + (\Delta z)^2} = 23.428 \text{ km}.$$

经过的时间为 $2.28 - 1.46 = 0.82 \text{ s}$ ，因此

$$\bar{v} = \frac{23.428 \text{ km}}{0.82 \text{ s}} = 28.6 \text{ km s}^{-1}.$$

在后续各问中，使用另行给定的初始速率 $v_M = 2.91 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ 。

1.2a

球体的投影面积为 $A = \pi R_M^2$ 。忽略重力，由牛顿第二定律得

$$m_M \frac{dv}{dt} = -k \rho_{\text{atm}} \pi R_M^2 v^2.$$

分离变量，并从 v_M 到 v 积分，得

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_M} = \frac{k \rho_{\text{atm}} \pi R_M^2}{m_M} t.$$

当 $v = 0.90 v_M$ 时，

$$t = \frac{m_M}{k \rho_{\text{atm}} \pi R_M^2 v_M} \left(\frac{1}{0.90} - 1 \right).$$

代入数值得

$$t = \frac{30}{(0.60)(4.1 \times 10^{-3})\pi(0.13)^2(2.91 \times 10^4)} \left(\frac{1}{0.90} - 1 \right) = 0.877 \text{ s}.$$

因此，

$$t \approx 0.88 \text{ s.}$$

1.2b

要使物质完全熔化，既需要将其从 T_0 加热至熔点，又需要提供熔化潜热。采用数据表中给出的恒定比热容，

$$E_{\text{melt}} = m_{\text{M}} [c_{\text{sm}}(T_{\text{sm}} - T_0) + L_{\text{sm}}].$$

因此

$$E_{\text{melt}} = 30 [(1.2 \times 10^3)(1700 - 200) + 2.6 \times 10^5] = 6.18 \times 10^7 \text{ J.}$$

初始动能为

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_{\text{M}} v_{\text{M}}^2 = \frac{1}{2} (30)(2.91 \times 10^4)^2 = 1.2702 \times 10^{10} \text{ J.}$$

所以，

$$\frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{melt}}} = \frac{v_{\text{M}}^2}{2[c_{\text{sm}}(T_{\text{sm}} - T_0) + L_{\text{sm}}]} = 205.5 \approx 2.1 \times 10^2.$$

这一能量比较并不意味着会完全熔化：动能未必会以热的形式沉积到整个流星体中。

1.3a

用 M, L, T, Θ 分别表示质量、长度、时间和温度的量纲。相关量纲为

$$[\rho_{\text{sm}}] = ML^{-3}, \quad [c_{\text{sm}}] = L^2\text{T}^{-2}\Theta^{-1}, \quad [k_{\text{sm}}] = ML\text{T}^{-3}\Theta^{-1}.$$

因此，

$$[t^\alpha \rho_{\text{sm}}^\beta c_{\text{sm}}^\gamma k_{\text{sm}}^\delta] = M^{\beta+\delta} L^{-3\beta+2\gamma+\delta} \text{T}^{\alpha-2\gamma-3\delta} \Theta^{-\gamma-\delta}.$$

令其等于 x 的量纲 L ，得

$$\begin{aligned} \beta + \delta &= 0, \\ -3\beta + 2\gamma + \delta &= 1, \\ \alpha - 2\gamma - 3\delta &= 0, \\ -\gamma - \delta &= 0. \end{aligned}$$

第一个和第四个方程给出 $\beta = \gamma = -\delta$ 。于是，长度量纲对应的方程给出 $2\delta = 1$ ，时间量纲对应的方程给出 $\alpha = \delta$ 。因此

$$\alpha = \delta = \frac{1}{2}, \quad \beta = \gamma = -\frac{1}{2}.$$

所得估算式为

$$x \approx \sqrt{\frac{k_{\text{sm}} t}{\rho_{\text{sm}} c_{\text{sm}}}}.$$

量纲分析确定了各个指数，但仍有一个无量纲系数无法确定。题目要求的估算将这一系数取为 1。

1.3b

热扩散率为

$$\chi = \frac{k_{\text{sm}}}{\rho_{\text{sm}} c_{\text{sm}}} = \frac{2.0}{(3.3 \times 10^3)(1.2 \times 10^3)} = 5.05 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

在 $t = 5 \text{ s}$ 时,

$$x \approx \sqrt{\chi t} = \sqrt{(5.05 \times 10^{-7})(5)} = 1.589 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

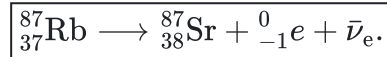
因此

$$\boxed{x \approx 1.6 \text{ mm}}, \quad \boxed{\frac{x}{R_M} = \frac{1.589 \times 10^{-3}}{0.13} \approx 0.012 = 1.2\%}.$$

受热深度远小于半径, 这与下落过程中只有外层显著升温相一致。

1.4a

原子序数增加 1, 而质量数保持不变。这是负贝塔衰变:



衰变时放出一个电子和一个电子反中微子。

1.4b

将一个矿物样品视为结晶后的封闭系统。设 $N_{\text{Rb}}(t)$ 、 $N_{87}(t)$ 和 N_{86} 分别为 ${}^{87}\text{Rb}$ 、 ${}^{87}\text{Sr}$ 和 ${}^{86}\text{Sr}$ 的原子核数。作为稳定参照的核数 N_{86} 保持不变。

由放射性衰变规律得

$$N_{\text{Rb}}(t) = N_{\text{Rb}}(0)e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}}.$$

每个衰变的铷原子核都会产生一个锶-87 原子核, 因此

$$\begin{aligned} N_{87}(t) &= N_{87}(0) + N_{\text{Rb}}(0) - N_{\text{Rb}}(t) \\ &= N_{87}(0) + N_{\text{Rb}}(0)(e^{\lambda t} - 1). \end{aligned}$$

除以 N_{86} , 并定义

$$Y(t) = \frac{N_{87}(t)}{N_{86}}, \quad X(t) = \frac{N_{\text{Rb}}(t)}{N_{86}}, \quad Y_0 = \frac{N_{87}(0)}{N_{86}}.$$

则有

$$\boxed{Y(t) = Y_0 + (e^{\lambda t} - 1)X(t).}$$

所有样品具有相同的初始锶同位素比值 Y_0 和相同的年龄 t 。因此, 它们的当前数值位于一条直线上, 其纵轴截距为 Y_0 , 斜率为

$$\boxed{a(t) = e^{\lambda t} - 1.}$$

结晶时斜率为零; 此后随年龄增加而增大。

1.4c

图 1.2(b) 中的直线近似经过

$$(X, Y) \approx (0.05, 0.702) \quad \text{和} \quad (0.25, 0.712).$$

因此, 其斜率近似为

$$a \approx \frac{0.712 - 0.702}{0.25 - 0.05} = 0.050.$$

由 1.4b 的结果反解得

$$\tau_M = \frac{\ln(1+a)}{\lambda} = \frac{T_{\frac{1}{2}}}{\ln 2} \ln(1+a).$$

因此

$$\tau_M \approx \frac{4.9 \times 10^{10} \text{ yr}}{\ln 2} \ln(1.050) = 3.45 \times 10^9 \text{ yr}.$$

考虑图像读数的精度,

$$\tau_M \approx 3.5 \times 10^9 \text{ yr}.$$

图 1.2(b) 所指的是取自“一块陨石”的样品; 由其推得的年龄不必等于引言中给出的马里博年龄。

1.5

对于椭圆轨道, 近日点距离与远日点距离之和等于半长轴的两倍:

$$a = \frac{a_{\min} + a_{\max}}{2} = \frac{4.95 \times 10^{10} + 6.16 \times 10^{11}}{2} = 3.3275 \times 10^{11} \text{ m}.$$

相对于太阳质量, 忽略彗星质量, 由开普勒第三定律得

$$t_{\text{Encke}}^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm_S}.$$

因此

$$t_{\text{Encke}} = 2\pi \sqrt{\frac{(3.3275 \times 10^{11})^3}{(6.67 \times 10^{-11})(1.99 \times 10^{30})}} = 1.0468 \times 10^8 \text{ s}.$$

利用 $1 \text{ yr} \approx 3.156 \times 10^7 \text{ s}$,

$$t_{\text{Encke}} \approx 1.05 \times 10^8 \text{ s} \approx 3.32 \text{ yr}.$$

1.6a

首先计算三个撞击问题都要用到的物理量。小行星的质量为

$$m_{\text{ast}} = \frac{4}{3}\pi R_{\text{ast}}^3 \rho_{\text{ast}} = \frac{4}{3}\pi (5.0 \times 10^3)^3 (3.0 \times 10^3) = 1.571 \times 10^{15} \text{ kg}.$$

地球的转动惯量为

$$I_E = 0.83 \frac{2}{5} m_E R_E^2 = 8.068 \times 10^{37} \text{ kg m}^2.$$

取其初始自转周期为 $\tau_E = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$,

$$\omega_E = \frac{2\pi}{\tau_E} = 7.272 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

其自转角动量为

$$L_E = I_E \omega_E = 5.867 \times 10^{33} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

将撞击后附着的小行星视为地球表面上的质点。其尺寸以及共同质心的位移所带来的修正均可忽略。

在北极, 小行星的位置矢量平行于地球的初始自转轴。因此, 其角动量

$$\mathbf{L}_{\text{ast}} = \mathbf{r} \times m_{\text{ast}} \mathbf{v}_{\text{ast}}$$

垂直于地球的初始自转角动量。切向撞击时, 其大小最大:

$$L_{\text{ast}}^{\max} = m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}} = 2.505 \times 10^{26} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

由角动量守恒，在小行星与地球质量比这一小量的最低阶近似下，有

$$\tan \theta_{\max} \simeq \frac{L_{\text{ast}}^{\max}}{L_E}.$$

该角度极小，因此

$$\theta_{\max} \simeq \frac{m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}}}{I_E \omega_E} = 4.27 \times 10^{-8} \text{ rad} \approx 2.4 \times 10^{-6} \text{ degree}.$$

惯性张量的变化对这一微小倾角仅产生高阶修正。

1.6b

对于径向撞击，入射小行星相对于地心的角动量为零。当它附着在赤道后，转动惯量增大为

$$I' = I_E + m_{\text{ast}} R_E^2.$$

由角动量守恒，必须满足

$$I_E \omega_E = (I_E + m_{\text{ast}} R_E^2) \omega'.$$

由于周期与角速度成反比，

$$\tau' = \tau_E \left(1 + \frac{m_{\text{ast}} R_E^2}{I_E} \right).$$

因此，

$$\Delta \tau_{\text{vrt}} = \tau_E \frac{m_{\text{ast}} R_E^2}{I_E} = \tau_E \frac{m_{\text{ast}}}{0.332 m_E}.$$

代入数值得

$$\Delta \tau_{\text{vrt}} = 6.85 \times 10^{-5} \text{ s} \approx +6.8 \times 10^{-5} \text{ s}.$$

一天的时长增加约 $68 \mu\text{s}$ 。

1.6c

切向撞击的方向会影响结果。令顺行撞击时 $\sigma = +1$ ，这种撞击增加自转角动量；逆行撞击时 $\sigma = -1$ 。

由角动量守恒得

$$I_E \omega_E + \sigma m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}} = (I_E + m_{\text{ast}} R_E^2) \omega'.$$

定义以下无量纲小量

$$\epsilon = \frac{m_{\text{ast}} R_E^2}{I_E} = 7.925 \times 10^{-10}, \quad \eta = \frac{m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}}}{I_E \omega_E} = 4.270 \times 10^{-8}.$$

新的周期及其变化量为

$$\tau' = \tau_E \frac{1 + \epsilon}{1 + \sigma \eta},$$

$$\Delta \tau_{\text{tan}} = \tau_E \frac{\epsilon - \sigma \eta}{1 + \sigma \eta}.$$

由于 ϵ 和 η 都很小，下式也是精确的近似：

$$\Delta \tau_{\text{tan}} \approx \tau_E (\epsilon - \sigma \eta).$$

因此：

- 顺行撞击：

$$\Delta\tau_{\text{tan}} = -3.621 \times 10^{-3} \text{ s} \approx -3.6 \text{ ms.}$$

- 逆行撞击：

$$\Delta\tau_{\text{tan}} = +3.758 \times 10^{-3} \text{ s} \approx +3.8 \text{ ms.}$$

两种情况下，转动惯量的增加都会使一天变长。入射角动量产生的影响更大，并决定变化量的正负。

1.7

首先考虑地球引力变得显著之前，天体相对于太阳的运动。在地球轨道距离处，受引力束缚的天体具有负的单位质量轨道能量：

$$\mathcal{E} = \frac{u^2}{2} - \frac{Gm_S}{a_E} < 0.$$

因此，其日心速率受当地太阳逃逸速度的限制：

$$u < u_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2Gm_S}{a_E}}.$$

极限情况对应于束缚能趋于零的轨道。

将地球轨道近似为半径等于给定平均距离的圆，其公转速率为

$$v_E = \sqrt{\frac{Gm_S}{a_E}}.$$

当天体的运动方向与地球公转方向恰好相反时，相对接近速率最大。因此

$$v_{\infty}^{\text{max}} = u_{\text{max}} + v_E = (1 + \sqrt{2})\sqrt{\frac{Gm_S}{a_E}}.$$

代入数值得

$$v_E = 29.75 \text{ km s}^{-1}, \quad u_{\text{max}} = 42.07 \text{ km s}^{-1},$$

因此

$$v_{\infty}^{\text{max}} = 71.82 \text{ km s}^{-1}.$$

地球引力进一步加速该天体。在接近地球的过程中，由机械能守恒得

$$\frac{1}{2}v_{\text{imp}}^2 - \frac{Gm_E}{R_E} = \frac{1}{2}v_{\infty}^2.$$

因此

$$v_{\text{imp}}^{\text{max}} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 \frac{Gm_S}{a_E} + \frac{2Gm_E}{R_E}}.$$

地球表面的逃逸速度为

$$\sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}} = 11.17 \text{ km s}^{-1}.$$

因此，

$$v_{\text{imp}}^{\text{max}} = \sqrt{(71.82)^2 + (11.17)^2} \text{ km s}^{-1} \approx 72.7 \text{ km s}^{-1}.$$

对于严格束缚的轨道，速率严格小于这一数值。当初始太阳引力束缚能趋于零时，速率可以任意接近这一数值。

解答已与官方解答核对。

题目 2：等离激元蒸汽发生器

引言

本题研究一种已通过实验证实可行的高效蒸汽产生过程。用聚焦光束照射一种含有纳米尺度银球（纳米颗粒）的水溶液，每升溶液中仅含约 10^{13} 个颗粒。纳米颗粒吸收一部分光，温度升高，并在其周围局部产生蒸汽，而不使整份水溶液升温。蒸汽以逸出的蒸汽泡的形式离开系统。目前，这一过程的所有细节尚未得到充分理解，但已知其核心过程是金属纳米颗粒通过所谓的电子集体振荡吸收光。这种装置称为等离激元蒸汽发生器。

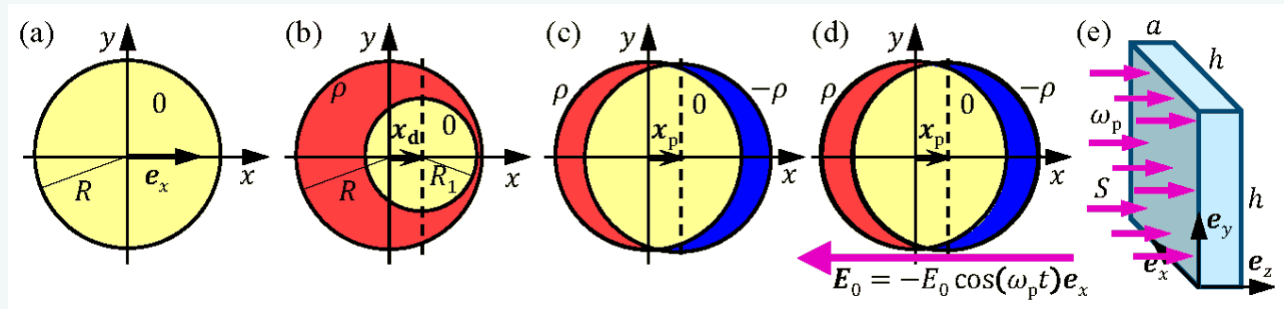


图 2.1 (a) 一个半径为 R 的电中性球形纳米颗粒，位于坐标系中心。(b) 一个具有均匀正电荷密度 ρ 的球体（红色），其内部含有一个半径为 R_1 的较小球形电中性区域（0，黄色），该区域的球心位移为 $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$ 。(c) 纳米颗粒中银离子构成的、具有正电荷密度 ρ 的球体固定在坐标系中心。电子云构成的、具有负电荷密度 $-\rho$ 的球形区域（蓝色）的中心位移为 $\mathbf{x}_p$ ，其中 $x_p \ll R$ 。(d) 外加匀强电场 $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$ 。当 $\mathbf{E}_0$ 随时间变化时，电子云以速度 $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$ 运动。(e) 装有纳米颗粒水溶液的长方体容器 ($h \times h \times a$)，受到沿 z 轴传播、角频率为 ω_p 、光强为 S 的单色光照射。

单个球形银纳米颗粒

本题始终考虑一个半径为 $R = 10.0 \text{ nm}$ 的球形银纳米颗粒，其球心固定在坐标系原点，见图 2.1(a)。所有运动、力和驱动场均平行于水平的 x 轴（单位矢量为 $\mathbf{e}_x$ ）。纳米颗粒中含有自由（传导）电子，它们可以在整个纳米颗粒的体积内运动，而不束缚于任何银原子。每个银原子都贡献了一个这样的自由电子，从而成为正离子。

部分	问题	分值
2.1	求下列各量：纳米颗粒的体积 V 和质量 M ，颗粒中银离子的数目 N 和电荷密度 ρ ，以及自由电子的数密度 n 、总电荷量 Q 和总质量 m_0 。	0.7

带电球体内部电中性区域中的电场

在本题余下部分中，假设所有材料的相对介电常数均为 $\varepsilon = 1$ 。在一个电荷密度均匀、为 ρ ，半径为 R 的带电球体内部，叠加电荷密度为 $-\rho$ 的反号电荷，形成一个半径为 R_1 的小球形电中性区域，其球心相对于半径为 R 的球体中心的位移为 $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$ ，见图 2.1(b)。

部分	问题	分值
2.2	证明电中性区域内部的电场是匀强电场，形式为 $\mathbf{E} = A(\rho/\varepsilon_0) \mathbf{x}_d$ ，并确定系数 A 。	1.2

发生位移的电子云所受的回弹力

下面研究自由电子的集体运动，因此将它们建模为一个电荷密度均匀、为 $-\rho$ 的带负电球体，其中心位置为 $\mathbf{x}_p$ ，可沿 x 轴相对于固定在坐标系原点的带正电球体（银离子）的中心运动，见图 2.1(c)。假设外力 $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ 使电子云移动到新的平衡位置 $\mathbf{x}_p = x_p \mathbf{e}_x$ ，其中 $|x_p| \ll R$ 。除纳米颗粒相对两端的少量净电荷外，其内部大部分区域仍保持电中性。

部分	问题	分值
2.3	用 x_p 和 n 表示以下两个量：电子云所受的回弹力 $\mathbf{F}$ ，以及在位移过程中对电子云所做的功 W_{el} 。	1.0

外加恒定电场中的球形银纳米颗粒

将一个纳米颗粒置于真空中，施加静态匀强电场 $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$ ，使其受到外力 $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ ，电子云因此移动一小段距离 $|x_p|$ ，其中 $|x_p| \ll R$ 。

部分	问题	分值
2.4	用 E_0 和 n 表示电子云的位移 x_p ，并用 n 、 R 和 x_p 表示穿过纳米颗粒中心处 yz 平面的电子电荷量 $-\Delta Q$ 。	0.6

银纳米颗粒的等效电容和电感

无论电场 $\mathbf{E}_0$ 恒定还是随时间变化，都可以用等效电路对纳米颗粒建模。将分离电荷 ΔQ 所做的功 W_{el} 与带有电荷 $\pm \Delta Q$ 的电容器的能量联系起来，即可求得等效电容。电荷分离会在等效电容器两端产生一定的等效电压 V_0 。

部分	问题	分值
2.5a	用 ε_0 和 R 表示系统的等效电容 C ，并求出其数值。	0.7
2.5b	对于这一电容，用 E_0 和 R 表示为使等效电容器积累电荷 ΔQ 而应加在其两端的等效电压 V_0 。	0.4

对于随时间变化的电场 $\mathbf{E}_0$ ，电子云以速度 $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$ 运动，见图 2.1(d)。它具有动能 W_{kin} ，并形成流过固定 yz 平面的电流 I 。电子云的动能可视为一个电感为 L 、通有电流 I 的等效电感器的能量。

部分	问题	分值
2.6a	用速度 v 分别表示 W_{kin} 和 I 。	0.7
2.6b	用颗粒半径 R 、电子电荷量 e 和质量 m_e 、电子数密度 n 表示等效电感 L ，并计算其数值。	0.5

银纳米颗粒的等离激元共振

由上述分析可知，将电子云移离平衡位置后释放所产生的运动，可用在谐振频率下振荡的理想 LC 电路来描述。电子云的这种动力学模式称为等离激元共振，其振荡角频率称为等离激元角频率 ω_p 。

部分	问题	分值
2.7a	用电子电荷量 e 和质量 m_e 、电子数密度 n ，以及真空介电常数 ϵ_0 写出电子云的等离激元角频率 ω_p 的表达式。	0.5
2.7b	计算 ω_p （单位为 rad/s），以及真空中角频率为 $\omega = \omega_p$ 的光的波长 λ_p （单位为 nm）。	0.4

受到等离激元频率的光照射的银纳米颗粒

在本题余下部分中，用角频率为等离激元角频率 ω_p 、入射光强为 $S = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2 = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$ 的单色光照射纳米颗粒。由于波长很长， $\lambda_p \gg R$ ，可认为纳米颗粒处于均匀的简谐振荡电场 $\mathbf{E}_0 = -E_0 \cos(\omega_p t) \mathbf{e}_x$ 中。在 $\mathbf{E}_0$ 的驱动下，电子云的中心 $\mathbf{x}_p(t)$ 以相同频率振荡，速度为 $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$ ，振幅恒为 x_0 。电子的这种振荡运动导致光的吸收。颗粒吸收的能量或者在颗粒内部转化为焦耳热，或者由颗粒以散射光的形式重新发射出去。

焦耳热由随机的非弹性碰撞引起：任意一个自由电子都会不时撞击银离子，并损失其全部动能，这些动能转化为银离子的振动能（热）。两次碰撞之间的平均时间为 $\tau \gg 1/\omega_p$ ，对于银纳米颗粒，取 $\tau = 5.24 \times 10^{-15} \text{ s}$ 。

部分	问题	分值
2.8a	求纳米颗粒中焦耳热的时间平均功率 P_{heat} 以及电流平方的时间平均值 $\langle I^2 \rangle$ 的表达式，式中应显式包含电子云速度平方的时间平均值 $\langle v^2 \rangle$ 。	1.0
2.8b	在纳米颗粒的等效电阻模型中，电子云电流 I 产生焦耳热功率 P_{heat} 。求其等效欧姆电阻 R_{heat} 的表达式，并计算 R_{heat} 的数值。	1.0

入射光束因被振荡的电子云散射（重新发射）而损失一部分时间平均功率 P_{scat} 。 P_{scat} 取决于散射源的振幅 x_0 、电荷量 Q 、角频率 ω_p 以及光的性质（真空中的光速 c 和介电常数 ϵ_0 ）。用这四个变量表示， P_{scat} 为

$$P_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}.$$

部分	问题	分值
2.9	利用 P_{scat} ，求等效电阻模型中的等效散射电阻 R_{scat} （与 R_{heat} 类似）的表达式，并计算其数值。	1.0

将上述等效电路元件组合成银纳米颗粒的 LCR 串联电路模型，由入射光的电场 $\mathbf{E}_0$ 所确定的简谐振荡等效电压 $V = V_0 \cos(\omega_p t)$ 驱动。

部分	问题	分值
2.10a	推导在等离激元共振 $\omega = \omega_p$ 时，含有入射光电场振幅 E_0 的时间平均损耗功率 P_{heat} 和 P_{scat} 的表达式。	1.2
2.10b	计算 E_0 、 P_{heat} 和 P_{scat} 的数值。	0.3

利用光产生蒸汽

配制银纳米颗粒的水溶液，颗粒数密度为 $n_{\text{np}} = 7.3 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$ 。将其置于尺寸为 $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1.0 \text{ cm}^3$ 的透明长方体容器内，用频率为等离子体频率、光强与前面相同，为 $S = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$ 的光垂直照射，见图 2.1(e)。水温为 $T_{\text{wa}} = 20^\circ\text{C}$ ，并假设在稳态下，纳米颗粒产生的全部焦耳热均用于生成温度为 $T_{\text{st}} = 110^\circ\text{C}$ 的蒸汽，而不使水温升高，这一假设与观测结果相当吻合。

等离子体蒸汽发生器的热力学效率 η 定义为功率之比 $\eta = P_{\text{st}}/P_{\text{tot}}$ ，其中 P_{st} 是整个容器内用于产生蒸汽的功率，而 P_{tot} 是进入容器的入射光总功率。

大部分时间里，任意一个纳米颗粒周围包裹的是蒸汽而非水，因此可将其描述为处于真空中。

部分	问题	分值
2.11a	计算等离子体蒸汽发生器在频率为等离子体频率、光强为 S 的光照射下，每秒产生的蒸汽总质量 μ_{st} 。	0.6
2.11b	计算等离子体蒸汽发生器的热力学效率 η 的数值。	0.2

数据表：物理参数表

物理参数	数值
真空中的光速	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
普朗克常量除以 2π	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
万有引力常量	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
重力加速度	$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$
元电荷	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
真空介电常数	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
电子质量	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
阿伏伽德罗常量	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
玻尔兹曼常量	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
石陨石的比热容	$c_{\text{sm}} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
石陨石的导热率	$k_{\text{sm}} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
石陨石的密度	$\rho_{\text{sm}} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
石陨石的熔点	$T_{\text{sm}} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$
石陨石的比熔化热	$L_{\text{sm}} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
银的摩尔质量	$M_{\text{Ag}} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$
银的密度	$\rho_{\text{Ag}} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
银的比热容	$c_{\text{Ag}} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
水的摩尔质量	$M_{\text{wa}} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$
水的密度	$\rho_{\text{wa}} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
水的比热容	$c_{\text{wa}} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
水的汽化热	$L_{\text{wa}} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$
水的沸点	$T_{100} = 100^\circ\text{C} = 373.15 \text{ K}$

物理参数	数值
冰川冰的密度	$\rho_{\text{ice}} = 0.917 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
蒸汽的比热容	$c_{\text{st}} = 2.080 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
地球的质量	$m_{\text{E}} = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
地球的半径	$R_{\text{E}} = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$
太阳的质量	$m_{\text{S}} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
太阳的半径	$R_{\text{S}} = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$
日地平均距离	$a_{\text{E}} = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$

题目译自官方英文原文。

答案

这里 $e > 0$ 、 $Q < 0$ ，且 W_{el} 表示为分离电荷而从外部提供的正功。选取电路电流的方向，使得 $I = d(\Delta Q)/dt$ ，当电子沿 $+x$ 方向运动时，电流为正。

• 2.1

$$V = 4.19 \times 10^{-24} \text{ m}^3, \quad M = 4.39 \times 10^{-20} \text{ kg},$$

$$N = 2.45 \times 10^5, \quad \rho = +9.38 \times 10^9 \text{ C m}^{-3},$$

$$n = 5.85 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}, \quad Q = -3.93 \times 10^{-14} \text{ C}, \quad m_0 = 2.23 \times 10^{-25} \text{ kg}.$$

• 2.2

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_d, \quad \boxed{A = \frac{1}{3}}.$$

• 2.3

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} \mathbf{x}_p, \quad W_{\text{el}} = \frac{2\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} x_p^2.$$

• 2.4

$$x_p = \frac{3\epsilon_0 E_0}{ne}, \quad -\Delta Q = -ne\pi R^2 x_p.$$

• 2.5a

$$C = \frac{9}{4}\pi\epsilon_0 R = 6.26 \times 10^{-19} \text{ F}.$$

• 2.5b

$$V_0 = \frac{4}{3}RE_0.$$

• 2.6a

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m_0 v^2 = \frac{2\pi}{3}nm_e R^3 v^2, \quad I = ne\pi R^2 v.$$

• 2.6b

$$L = \frac{4m_e}{3\pi ne^2 R} = 2.57 \times 10^{-14} \text{ H}.$$

• 2.7a

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{3\varepsilon_0 m_e}}.$$

• 2.7b

$$\omega_p = 7.88 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}, \quad \lambda_p = 239 \text{ nm}.$$

• 2.8a

$$P_{\text{heat}} = \frac{m_0}{2\tau} \langle v^2 \rangle, \quad \langle I^2 \rangle = (ne\pi R^2)^2 \langle v^2 \rangle.$$

• 2.8b

$$R_{\text{heat}} = \frac{L}{2\tau} = \frac{2m_e}{3\pi ne^2 R \tau} = 2.46 \, \Omega.$$

• 2.9

$$R_{\text{scat}} = \frac{8R^2 \omega_p^2}{27\pi \varepsilon_0 c^3} = 2.45 \, \Omega.$$

• 2.10a

$$P_{\text{heat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{heat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}, \quad P_{\text{scat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{scat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}.$$

• 2.10b

$$E_0 = 2.74 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}, \quad P_{\text{heat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}, \quad P_{\text{scat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}.$$

• 2.11a, 采用整个容器内光照均匀的假设:

$$\mu_{\text{st}} \simeq 1.9 \times 10^{-3} \text{ kg s}^{-1} = 1.9 \text{ g s}^{-1}.$$

• 2.11b, 采用同样的近似:

$$\eta \simeq 0.50 = 50\%.$$

解答

以下所有静电学和电路结果均采用题目规定的刚性、均匀带电电子云模型。与位移有关的结果仅保留 $|x_p|/R \ll 1$ 时的最低阶项。

2.1

颗粒是球体, 因此

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} (1.00 \times 10^{-8})^3 = 4.19 \times 10^{-24} \text{ m}^3.$$

其质量为

$$M = \rho_{\text{Ag}} V = 4.39 \times 10^{-20} \text{ kg}.$$

银原子的数目, 也就是带一个单位正电荷的银离子的数目, 为

$$N = \frac{M}{M_{\text{Ag}}} N_A = 2.45 \times 10^5.$$

每个离子对应一个传导电子。因此

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\rho_{\text{Ag}} N_A}{M_{\text{Ag}}} = 5.85 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

离子的正电荷密度为

$$\rho = ne = +9.38 \times 10^9 \text{ C m}^{-3}.$$

对于电子,

$$Q = -Ne = -3.93 \times 10^{-14} \text{ C}, \quad m_0 = Nm_e = 2.23 \times 10^{-25} \text{ kg}.$$

2.2

在均匀带电球体内, 取半径为 r 的同心高斯球面, 应用高斯定律:

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho(4\pi r^3/3)}{\epsilon_0}.$$

因此, 球体内部的电场为

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}.$$

叠加一个电荷密度为 $-\rho$ 、中心位于 $\mathbf{x}_d$ 的球体, 即形成电中性区域。在这个较小球体内的一点, 其电场为

$$\mathbf{E}_-(\mathbf{r}) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{x}_d).$$

将两个电场相加, 得到

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_d.$$

位置 $\mathbf{r}$ 消去, 因此电场均匀, 且

$$\boxed{A = \frac{1}{3}}.$$

2.3

发生位移的电子云的电荷密度为 $-ne$, 而固定离子的电荷密度为 $+ne$ 。由 2.2, 它们重叠的电中性内部区域中的电场为

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = \frac{ne}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_p.$$

保留位移的一阶项, 该电场给出电子云所受的回弹力:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}_{\text{int}} = -\frac{Nne^2}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_p.$$

小的非重叠区域仅影响更高阶项。利用 $N = 4\pi nR^3/3$,

$$\boxed{\mathbf{F} = -\frac{4\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} \mathbf{x}_p}.$$

定义等效劲度系数

$$k = \frac{Nne^2}{3\epsilon_0}.$$

从零准静态移动至 x_p 时, 外界提供的功为

$$W_{\text{el}} = - \int_0^{x_p} F_x(x) \, dx = \int_0^{x_p} kx \, dx = \frac{1}{2} kx_p^2.$$

因此

$$W_{\text{el}} = \frac{Nne^2}{6\epsilon_0} x_p^2 = \frac{2\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} x_p^2.$$

这就是 2.5 中使用的储存的静电能。回复力本身所做的功为 $-W_{\text{el}}$ 。

2.4

外电场指向 $-x$ 方向，因此带负电的电子云所受的力指向 $+x$ 方向：

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = Q\mathbf{E}_0 = NeE_0\mathbf{e}_x.$$

在平衡时，

$$NeE_0 - \frac{Nne^2}{3\epsilon_0} x_p = 0.$$

所以

$$x_p = \frac{3\epsilon_0 E_0}{ne}.$$

对于小的平移 x_p ，穿过中心平面的电子云体积在最低阶近似下为

$$\Delta V = \pi R^2 x_p.$$

乘以其电荷密度，得到

$$-\Delta Q = -ne\pi R^2 x_p.$$

因此，取正值的电荷分离变量为

$$\Delta Q = ne\pi R^2 x_p = 3\pi\epsilon_0 R^2 E_0.$$

2.5a

令静电能等于等效电容器的能量：

$$W_{\text{el}} = \frac{(\Delta Q)^2}{2C}.$$

利用上述结果，

$$C = \frac{(ne\pi R^2 x_p)^2}{2(2\pi n^2 e^2 R^3 x_p^2 / (9\epsilon_0))} = \frac{9}{4} \pi \epsilon_0 R.$$

因此

$$C = 6.26 \times 10^{-19} \, \text{F}.$$

2.5b

等效电压为

$$V_0 = \frac{\Delta Q}{C}.$$

代入得到

$$V_0 = \frac{3\pi\epsilon_0 R^2 E_0}{(9/4)\pi\epsilon_0 R},$$

所以

$$V_0 = \frac{4}{3} R E_0.$$

2.6a

全部 N 个电子都参与集体运动。它们的动能为

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} N m_e v^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{2\pi}{3} n m_e R^3 v^2.$$

对电荷分离关系求导，得到

$$I = \frac{d(\Delta Q)}{dt} = n e \pi R^2 v.$$

这里，正的电路电流对应于沿 $-x$ 方向的常规电流。如果将穿过该平面的常规电流改为定义沿 $+x$ 方向为正，则有 $I_x = -n e \pi R^2 v$ 。能量和电阻的结果取决于 I^2 ，因此方向的这一选取不会影响这些结果。

2.6b

将动能视为等效电感器的能量：

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

于是

$$L = \frac{m_0}{(n e \pi R^2)^2}.$$

利用 $m_0 = (4\pi R^3/3) n m_e$,

$$L = \frac{4m_e}{3\pi n e^2 R} = 2.57 \times 10^{-14} \text{ H}.$$

2.7a

对于自由振荡的理想 LC 电路，

$$L \frac{d^2(\Delta Q)}{dt^2} + \frac{\Delta Q}{C} = 0,$$

所以

$$\omega_p^2 = \frac{1}{LC}.$$

由于

$$LC = \frac{4m_e}{3\pi n e^2 R} \frac{9\pi\epsilon_0 R}{4} = \frac{3\epsilon_0 m_e}{n e^2},$$

得到

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{3\epsilon_0 m_e}}.$$

由 $\omega_p^2 = k/m_0$ 也可直接得到相同结果。

2.7b

代入给定常量，得到

$$\omega_p = 7.88 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}.$$

由于 $\omega = 2\pi c/\lambda$,

$$\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} = 2.39 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

因此

$$\lambda_p = 239 \text{ nm}.$$

2.8a

在题设的碰撞模型中，每个电子在一次碰撞中损失其全部集体运动动能。每次碰撞中能量损失的时间平均值为

$$\frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle.$$

所有电子平均每秒共发生 N/τ 次碰撞。由于碰撞时刻是随机的，可以采用一个周期内的平均动能，从而得到

$$P_{\text{heat}} = \frac{Nm_e}{2\tau} \langle v^2 \rangle = \frac{m_0}{2\tau} \langle v^2 \rangle.$$

由电流与速度的关系，

$$\langle I^2 \rangle = (ne\pi R^2)^2 \langle v^2 \rangle.$$

2.8b

等效电阻由下式定义：

$$P_{\text{heat}} = R_{\text{heat}} \langle I^2 \rangle.$$

因此，

$$R_{\text{heat}} = \frac{m_0}{2\tau(ne\pi R^2)^2} = \frac{L}{2\tau}.$$

于是

$$R_{\text{heat}} = \frac{2m_e}{3\pi ne^2 R \tau} = 2.46 \, \Omega.$$

因子 $1/2$ 来自题目所给特定模型中每次碰撞损失的动能 $\frac{1}{2} m_e v^2$ 。

2.9

对于振幅为 x_0 的简谐运动，

$$x_p(t) = x_0 \cos(\omega_p t + \phi),$$

因而

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega_p^2 x_0^2.$$

因此

$$\langle I^2 \rangle = \frac{1}{2} (ne\pi R^2)^2 \omega_p^2 x_0^2.$$

通过下式定义散射电阻：

$$P_{\text{scat}} = R_{\text{scat}} \langle I^2 \rangle.$$

利用给定的辐射公式，

$$R_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \frac{2}{(ne\pi R^2)^2 \omega_p^2 x_0^2}.$$

由于

$$Q = -\frac{4}{3}\pi R^3 ne, \quad \frac{Q^2}{(ne\pi R^2)^2} = \frac{16R^2}{9},$$

得到

$$R_{\text{scat}} = \frac{8R^2 \omega_p^2}{27\pi\epsilon_0 c^3} = 2.45 \, \Omega.$$

等价地，

$$R_{\text{scat}} = \frac{8ne^2 R^2}{81\pi\epsilon_0^2 m_e c^3}.$$

2.10a

发热和散射都从同一振荡电流中带走能量。因此，它们的等效电阻在串联电路中相加：

$$R_{\Sigma} = R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}}.$$

当 $\omega = \omega_p = 1/\sqrt{LC}$ 时，感抗与容抗相互抵消：

$$\omega_p L - \frac{1}{\omega_p C} = 0.$$

因此，电流与驱动电压同相，振幅为

$$I_0 = \frac{V_0}{R_{\Sigma}} = \frac{4RE_0}{3R_{\Sigma}}.$$

对于正弦电流，

$$\langle I^2 \rangle = \frac{I_0^2}{2} = \frac{8R^2 E_0^2}{9R_{\Sigma}^2}.$$

因此，两种平均功率分别为

$$P_{\text{heat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{heat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}$$

和

$$P_{\text{scat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{scat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}.$$

2.10b

由给定的入射光强,

$$S = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2,$$

所以

$$E_0 = \sqrt{\frac{2S}{c\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2(1.00 \times 10^6)}{(2.998 \times 10^8)(8.854 \times 10^{-12})}}.$$

因此

$$E_0 = 2.74 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}.$$

使用未经舍入的中间值,

$$V_0 = 3.66 \times 10^{-4} \text{ V}, \quad R_\Sigma = 4.910 \, \Omega, \quad I_0 = 7.45 \times 10^{-5} \text{ A}.$$

因此,

$$P_{\text{heat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}, \quad P_{\text{scat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}.$$

两者近乎相等, 是因为两个电阻近乎相等。

还可以检验位移振幅:

$$x_0 = \frac{I_0}{ne\pi R^2 \omega_p} = 3.21 \times 10^{-15} \text{ m},$$

所以 $x_0/R = 3.21 \times 10^{-7} \ll 1$ 。此外, $\omega_p \tau = 41.3$, 与振荡和碰撞时间尺度相互分离的假设一致。

2.11a

将 2.10 中每个颗粒的发热功率应用于整个受光照的体积。这里采用均匀光照的假设, 不另行引入衰减或多重散射模型。

容器的体积为

$$V_{\text{vessel}} = h^2 a = (0.10)^2 (0.010) = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3.$$

其中含有

$$N_{\text{np}} = n_{\text{np}} h^2 a = 7.3 \times 10^{11}$$

个纳米颗粒。假设它们产生的全部焦耳热都用于生成蒸汽, 因此

$$P_{\text{st}} = N_{\text{np}} P_{\text{heat}} = 4.98 \times 10^3 \text{ W}.$$

每千克变成蒸汽的水都必须先从 20°C 加热至 100°C , 然后汽化, 最后加热至 110°C 。单位质量所需的能量为

$$q_{\text{st}} = c_{\text{wa}}(T_{100} - T_{\text{wa}}) + L_{\text{wa}} + c_{\text{st}}(T_{\text{st}} - T_{100}).$$

代入数值,

$$\begin{aligned} q_{\text{st}} &= (4.181 \times 10^3)(80) + 2.260 \times 10^6 + (2.080 \times 10^3)(10) \\ &= 2.61528 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}. \end{aligned}$$

主体水温保持在 20°C , 并不意味着可以省去对蒸发部分加热所需的能量。

由能量守恒,

$$\mu_{\text{st}} q_{\text{st}} = P_{\text{st}}.$$

因此

$$\mu_{\text{st}} = \frac{n_{\text{np}} h^2 a P_{\text{heat}}}{c_{\text{wa}}(T_{100} - T_{\text{wa}}) + L_{\text{wa}} + c_{\text{st}}(T_{\text{st}} - T_{100})} = 1.904 \times 10^{-3} \text{ kg s}^{-1}.$$

按容器尺寸和数密度数据的精度,

$$\boxed{\mu_{\text{st}} \simeq 1.9 \text{ g s}^{-1}}.$$

2.11b

光束垂直入射到面积为 h^2 的表面, 因此

$$P_{\text{tot}} = S h^2 = (1.00 \times 10^6)(0.10)^2 = 1.00 \times 10^4 \text{ W}.$$

因此

$$\eta = \frac{P_{\text{st}}}{P_{\text{tot}}} = \frac{n_{\text{np}} h^2 a P_{\text{heat}}}{S h^2} = \frac{n_{\text{np}} a P_{\text{heat}}}{S}.$$

代入数值,

$$\eta = 0.4979,$$

或作合理舍入,

$$\boxed{\eta \simeq 0.50 = 50\%}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 3: 格陵兰冰盖

引言

本题研究格陵兰冰盖的物理性质。它是世界第二大冰川, 如图 3.1(a) 所示。作为理想化处理, 将格陵兰岛建模为一个宽为 $2L$ 、长为 $5L$ 的矩形岛屿, 其地面位于海平面上, 并完全被不可压缩的冰 (密度 ρ_{ice} 为常量) 覆盖, 见图 3.1(b)。冰盖的高度剖面 $H(x)$ 与 y 坐标无关, 从海岸 $x = \pm L$ 处的零高度逐渐增大, 在中央南北轴线 (y 轴) 上达到最大高度 H_m 。这条轴线称为冰分水岭, 见图 3.1(c)。

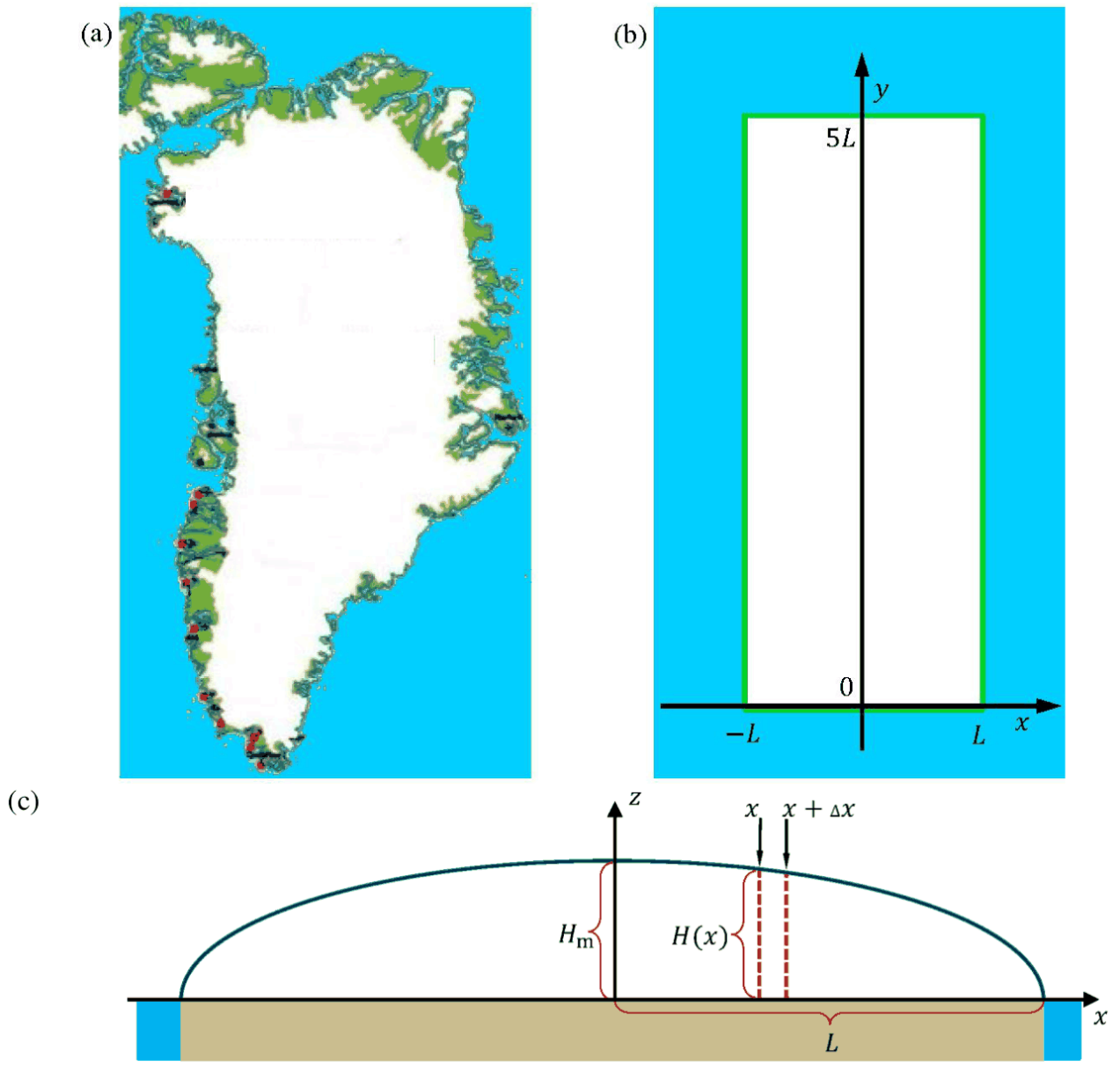


图 3.1 (a) 格陵兰地图，显示了冰盖的范围（白色）、无冰的沿海地区（绿色）和周围的海洋（蓝色）。(b) 格陵兰冰盖的粗略模型：冰盖覆盖 xy 平面内一个边长为 $2L$ 和 $5L$ 的矩形区域。冰分水岭，即冰盖高度达到最大值 H_m 的连线，沿 y 轴延伸。(c) 冰盖的竖直截面 (xz 平面)，显示其高度剖面 $H(x)$ (蓝线)。在 $0 < y < 5L$ 范围内， $H(x)$ 与 y 坐标无关，而在 $y = 0$ 和 $y = 5L$ 处高度突然降为零。 z 轴标示冰分水岭的位置。为使图示清晰，竖直尺寸相对于水平尺寸作了放大。冰的密度 ρ_{ice} 为常量。

两个有用的公式

本题中可以使用以下积分：

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx = \frac{2}{3}$$

以及在 $|\alpha x| \ll 1$ 时成立的近似式 $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ 。

冰盖的高度剖面

在较短的时间尺度上，冰川是一个不可压缩的流体静力学系统，具有固定的高度剖面 $H(x)$ 。

3.1	写出冰盖内部压强 $p(x, z)$ 随离地竖直高度 z 和距冰分水岭的距离 x 变化的表达式。忽略大气压强。	0.3
-----	---	-----

考虑冰盖中处于平衡状态的一块竖直薄片，其底面为位于 x 与 $x + \Delta x$ 之间的小水平面积 $\Delta x \Delta y$ ，见图 3.1(c) 中的红色虚线。 Δy 的大小无关紧要。由于薄片靠近中心的一侧与靠近海岸的一侧高度不同，两个竖直侧面上的合力具有水平分量 ΔF 。地面对底面积 $\Delta x \Delta y$ 施加的摩擦力 $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$ 与之平衡，其中 $S_b = 100 \text{ kPa}$ 。

3.2a	对于给定的 x 值，证明在 $\Delta x \rightarrow 0$ 的极限下， $S_b = kH \text{d}H/\text{d}x$ ，并求出 k 。	0.9
3.2b	用 ρ_{ice} 、 g 、 L 、 S_b 以及距冰分水岭的距离 x ，求出高度剖面 $H(x)$ 的表达式。结果将表明，冰川的最大高度 H_m 与半宽 L 满足标度关系 $H_m \propto L^{1/2}$ 。	0.8
3.2c	冰盖的总体积 V_{ice} 与矩形岛屿的面积 A 满足标度关系 $V_{\text{ice}} \propto A^\gamma$ ，求指数 γ 。	0.5

流动的冰盖

在较长的时间尺度上，冰是一种黏性不可压缩流体，在重力作用下从中央区域流向海岸。在此模型中，冰盖处于稳态，其高度剖面 $H(x)$ 保持不变，中央区域降雪所导致的冰积累与海岸处的融化相平衡。除采用图 3.1(b) 和 (c) 中的冰盖几何形状外，还作以下模型假设：

1) 冰在 xz 平面内流动，远离冰分水岭 (y 轴)。2) 中央区域的积累速率 c (米/年) 为常量。3) 冰只能通过位于 $x = \pm L$ 处的海岸附近融化而离开冰川。4) 冰流速度的水平 (x 方向) 分量 $v_x(x) = \text{d}x/\text{d}t$ 与 z 无关。5) 冰流速度的竖直 (z 方向) 分量 $v_z(z) = \text{d}z/\text{d}t$ 与 x 无关。

只考虑靠近冰盖中部的中央区域 $|x| \ll L$ ，此处冰盖的高度变化很小，可以完全忽略，即 $H(x) \approx H_m$ 。

3.3	利用质量守恒，用 c 、 x 和 H_m 求出水平冰流速度 $v_x(x)$ 的表达式。	0.6
-----	--	-----

由不可压缩假设，即冰的密度 ρ_{ice} 为常量，可知质量守恒要求冰流速度分量满足以下约束：

$$\frac{\text{d}v_x}{\text{d}x} + \frac{\text{d}v_z}{\text{d}z} = 0.$$

3.4	写出冰流速度的竖直分量 $v_z(z)$ 随 z 变化的表达式。	0.6
-----	------------------------------------	-----

一个初始位于表面位置 (x_i, H_m) 的微小冰粒，随着时间推移，将作为冰盖的一部分，沿竖直 xz 平面内的流动轨迹 $z(x)$ 运动。

3.5	推导这种流动轨迹 $z(x)$ 的表达式。	0.9
-----	-----------------------	-----

流动冰盖中的冰龄与气候指标

根据冰流速度分量 $v_x(x)$ 和 $v_z(z)$ ，可以估算距冰盖表面某一深度 $H_m - z$ 处的冰龄 $\tau(z)$ 。

3.6	求出恰好位于冰分水岭 $x = 0$ 处的冰龄 $\tau(z)$ 随离地高度 z 变化的表达式。	1.0
-----	---	-----

在格陵兰冰盖内部钻取的冰芯会穿过过去形成的积雪层，对冰芯进行分析可以揭示过去的气候变化。其中最好的指标之一是所谓的 $\delta^{18}\text{O}$ ，其定义为

$$\delta^{18}\text{O} = \frac{R_{\text{ice}} - R_{\text{ref}}}{R_{\text{ref}}} 1000 \text{ ‰},$$

其中， $R = [^{18}\text{O}]/[^{16}\text{O}]$ 表示氧的两种稳定同位素 ^{18}O 与 ^{16}O 的相对丰度比。参考值 R_{ref} 以赤道附近海洋的同位素组成为依据。

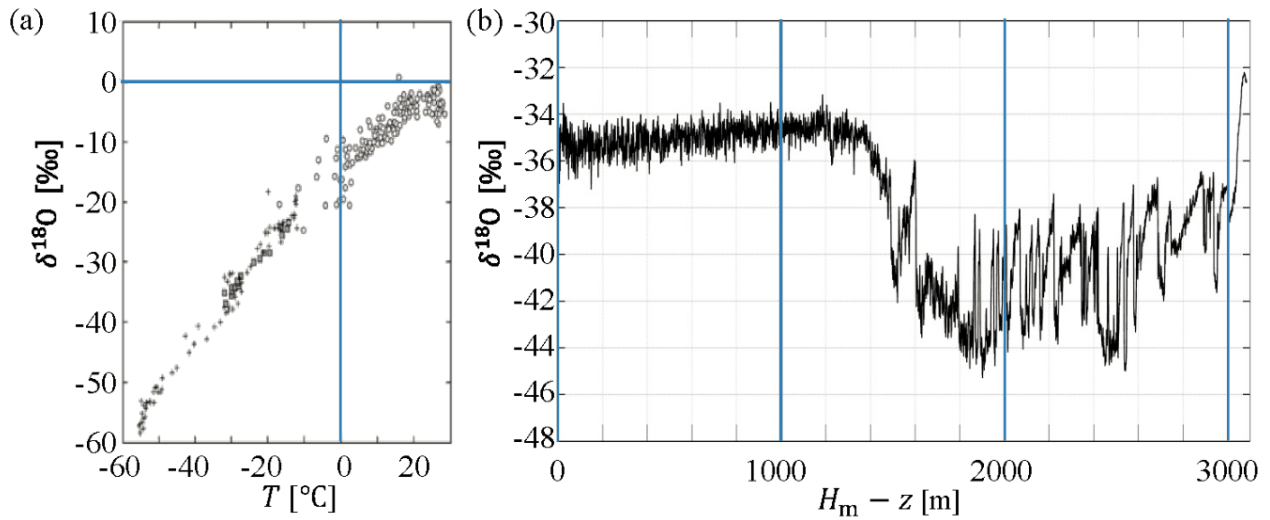


图 3.2 (a) 观测到的雪中 $\delta^{18}\text{O}$ 与年平均地表温度 T 之间的关系。**(b)** $\delta^{18}\text{O}$ 随距表面深度 $H_m - z$ 变化的测量结果，取自沿格陵兰冰分水岭某处从表面一直钻至基岩的冰芯，该处 $H_m = 3060 \text{ m}$ 。

对格陵兰冰盖的观测表明，雪中的 $\delta^{18}\text{O}$ 随温度近似线性变化，如图 3.2(a) 所示。假设这种关系始终成立，则由冰芯深度 $H_m - z$ 处获得的 $\delta^{18}\text{O}$ ，可以估算距今 $\tau(z)$ 时格陵兰附近的温度 T 。

对一根长 3060 米的格陵兰冰芯进行的 $\delta^{18}\text{O}$ 测量表明，在深度 1492 米处， $\delta^{18}\text{O}$ 发生突变，如图 3.2(b) 所示，标志着末次冰期的结束。该冰期开始于 120,000 年前，对应深度为 3040 米；当前的间冰期开始于 11,700 年前，对应深度为 1492 米。假设这两个时期可分别用两个不同的积累速率 c_{ia} （冰期）和 c_{ig} （间冰期）描述。可以假设在这 120,000 年中， H_m 始终保持不变。

3.7a	求积累速率 c_{ia} 和 c_{ig} 。	0.8
3.7b	利用图 3.2 中的数据，求从冰期过渡到间冰期时的温度变化。	0.2

格陵兰冰盖融化引起的海平面上升

格陵兰冰盖完全融化将导致全球海洋的海平面上升。为粗略估算海平面上升量，可以简单地认为，面积恒为 $A_O = 3.61 \times 10^{14} \text{ m}^2$ 的全球海洋各处均匀上升。

3.8	已知格陵兰冰盖目前的面积为 $A_G = 1.71 \times 10^{12} \text{ m}^2$ ，且 $S_b = 100 \text{ kPa}$ ，计算其完全融化所引起的全球平均海平面上升量。	0.6
-----	--	-----

质量巨大的格陵兰冰盖对周围海洋施加引力。如果冰盖融化，这种局部的海面隆起将消失，格陵兰附近的海平面会下降，从而部分抵消上面计算的海平面上升。

为了估算这种对海水的引力大小，现在将格陵兰冰盖建模为一个位于地面高度的质点，其质量等于格陵兰冰盖的总质量。哥本哈根沿地球表面距该质点中心的距离为 3500 千米。可以认为，除去该质点后的地球具有球对称性，并且全球海洋覆盖整个地球表面，面积为 $A_E = 5.10 \times 10^{14} \text{ m}^2$ 。可以忽略地球自转的所有影响。

3.9	在此模型下，求哥本哈根的海平面 (h_{CPH}) 与格陵兰在地球上的对跖点处的海平面 (h_{OPP}) 之差 $h_{CPH} - h_{OPP}$ 。	1.8
-----	--	-----

数据表：物理参数表

真空中的光速	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
普朗克常量除以 2π	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
万有引力常量	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

重力加速度	$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$
元电荷	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
真空介电常量	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
电子质量	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
阿伏伽德罗常量	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
玻尔兹曼常量	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
石陨石的比热容	$c_{\text{sm}} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
石陨石的导热率	$k_{\text{sm}} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
石陨石的密度	$\rho_{\text{sm}} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
石陨石的熔点	$T_{\text{sm}} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$
石陨石的比熔化潜热	$L_{\text{sm}} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
银的摩尔质量	$M_{\text{Ag}} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$
银的密度	$\rho_{\text{Ag}} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
银的比热容	$c_{\text{Ag}} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
水的摩尔质量	$M_{\text{wa}} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$
水的密度	$\rho_{\text{wa}} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
水的比热容	$c_{\text{wa}} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
水的汽化潜热	$L_{\text{wa}} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$
水的沸点	$T_{100} = 100^\circ \text{C} = 373.15 \text{ K}$
冰川冰的密度	$\rho_{\text{ice}} = 0.917 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
水蒸气的比热容	$c_{\text{st}} = 2.080 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
地球质量	$m_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
地球半径	$R_E = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$
太阳质量	$m_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
太阳半径	$R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$
日地平均距离	$a_E = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$

题目译自官方英文原文。

答案

- **3.1:** $p(x, z) = \rho_{\text{ice}} g [H(x) - z]$, 适用于 $0 \leq z \leq H(x)$ 。
- **3.2a:** $S_b = -\rho_{\text{ice}} g H \frac{dH}{dx}$, 因此 $k = -\rho_{\text{ice}} g$, 适用于 $x > 0$ 的半侧。
- **3.2b:** $H(x) = \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{\text{ice}} g} (L - |x|)}$, 其中 $H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}} g}}$ 。
- **3.2c:** $\gamma = \frac{5}{4}$; 具体地, $V_{\text{ice}} = \frac{2}{3} A H_m$ 。
- **3.3:** $v_x(x) = \frac{c}{H_m} x$ 。

- 3.4: $v_z(z) = -\frac{c}{H_m}z$ 。
- 3.5: $z(x) = H_m \frac{x_i}{x}$ ，适用于 $x_i \neq 0$ 。当 $x_i = 0$ 时，轨迹为沿 $x = 0$ 的竖直线。
- 3.6: $\tau(z) = \frac{H_m}{c} \ln \frac{H_m}{z}$ 。
- 3.7a: $c_{ia} = 0.123 \text{ m/year}$, $c_{ig} = 0.175 \text{ m/year}$ 。
- 3.7b: $\Delta T \approx +10 \text{ K}$ ，即升温约 10°C 。
- 3.8: $\Delta h_{\text{mean}} \approx 8.8 \text{ m}$ 。
- 3.9: $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} \approx 4.5 \text{ m}$ ，哥本哈根处较高。

解答

3.1

竖直方向的流体静力平衡给出

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_{\text{ice}}g.$$

忽略大气压强时，表面处的压强为零：

$$p(x, H(x)) = 0.$$

因此，从表面向下积分可得

$$p(x, z) = \rho_{\text{ice}}g[H(x) - z].$$

3.2a

考虑冰盖的右半侧，即 $x > 0$ 。作用在高度为 $H(x)$ 、宽度为 Δy 的竖直面上的压力为

$$F(x) = \Delta y \int_0^{H(x)} \rho_{\text{ice}}g[H(x) - z] dz = \frac{1}{2} \rho_{\text{ice}}gH(x)^2 \Delta y.$$

靠近中心一侧面上的力指向 x 增大的方向，而靠近海岸一侧面上的力指向 x 减小的方向。两者的合力为

$$\Delta F = \frac{1}{2} \rho_{\text{ice}}g [H(x)^2 - H(x + \Delta x)^2] \Delta y.$$

保留到 Δx 的一阶项，

$$\Delta F = -\rho_{\text{ice}}gH(x) \frac{dH}{dx} \Delta x \Delta y.$$

此向外的力与底部摩擦力 $S_b \Delta x \Delta y$ 平衡，得到

$$S_b = -\rho_{\text{ice}}gH \frac{dH}{dx}, \quad k = -\rho_{\text{ice}}g.$$

这一半侧的导数为负，因此 $S_b > 0$ ，符合要求。在任意一半侧，相应的大小关系均为 $S_b = \rho_{\text{ice}}gH |dH/dx|$ 。

3.2b

在 $0 \leq x \leq L$ 范围内，上述结果可写为

$$\frac{d(H^2)}{dx} = -\frac{2S_b}{\rho_{\text{ice}}g}.$$

利用海岸处的边界条件 $H(L) = 0$,

$$H(x)^2 = \frac{2S_b}{\rho_{\text{ice}}g}(L - x).$$

关于冰分水岭作镜像反射，即得完整的高度剖面：

$$\boxed{H(x) = \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{\text{ice}}g}(L - |x|)}, \quad -L \leq x \leq L.}$$

在冰分水岭处，

$$\boxed{H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}}g}},}$$

因此，当底部摩擦力、密度和重力加速度固定时， $H_m \propto L^{1/2}$ 。

3.2c

岛屿面积为

$$A = (2L)(5L) = 10L^2.$$

由于高度剖面与 y 无关，冰的体积为

$$V_{\text{ice}} = 5L \int_{-L}^L H(x) dx = 10LH_m \int_0^L \sqrt{1 - \frac{x}{L}} dx.$$

令 $u = x/L$ ，利用题目给出的积分可得

$$V_{\text{ice}} = 10L^2 H_m \int_0^1 \sqrt{1 - u} du = \frac{20}{3} L^2 H_m = \boxed{\frac{2}{3} A H_m}.$$

因此

$$V_{\text{ice}} \propto L^{2+1/2} = L^{5/2} \propto A^{5/4},$$

从而

$$\boxed{\gamma = \frac{5}{4}}.$$

3.3

在中央区域内，取冰分水岭与位置 $x > 0$ 之间、宽度为 Δy 的控制体。在稳态下，其表面的积累量必须等于水平流出量。

单位时间内积累的质量为

$$\dot{m}_{\text{in}} = \rho_{\text{ice}} c x \Delta y.$$

由对称性可知，没有水平流动穿过冰分水岭。由于 v_x 与高度无关，通过 x 处截面的流出质量流率为

$$\dot{m}_{\text{out}} = \rho_{\text{ice}} v_x(x) H_m \Delta y.$$

令两者相等可得

$$v_x(x) = \frac{c}{H_m}x.$$

同一个带符号的表达式也适用于 $x < 0$ ，此处流动沿 x 负方向。该结果采用了中央区域近似 $H(x) \approx H_m$ 。

3.4

不可压缩性要求

$$\frac{dv_z}{dz} = -\frac{dv_x}{dx} = -\frac{c}{H_m}.$$

积分得

$$v_z(z) = -\frac{c}{H_m}z + C.$$

没有流动穿过地面，因此 $v_z(0) = 0$ ，这意味着 $C = 0$ 。于是，

$$v_z(z) = -\frac{c}{H_m}z.$$

特别地， $v_z(H_m) = -c$ ：表面处的向下运动与新冰的加入相平衡。

3.5

对于 $x_i \neq 0$ 的冰粒，其轨迹满足

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz/dt}{dx/dt} = \frac{v_z}{v_x} = -\frac{z}{x}.$$

分离变量并应用初始条件 $z(x_i) = H_m$ ，

$$\int_{H_m}^z \frac{dz'}{z'} = -\int_{x_i}^x \frac{dx'}{x'},$$

因此

$$\ln \frac{z}{H_m} = -\ln \left| \frac{x}{x_i} \right|.$$

冰粒始终位于冰分水岭原来的一侧，故 $x/x_i > 0$ ，于是

$$xz = x_i H_m, \quad z(x) = H_m \frac{x_i}{x}.$$

轨迹为等轴双曲线的一支，冰粒沿此轨迹向外、向下运动。等价地，

$$x(t) = x_i e^{ct/H_m}, \quad z(t) = H_m e^{-ct/H_m}.$$

当 $x_i = 0$ 时，冰粒始终位于 $x = 0$ ，并按照相同的 $z(t)$ 表达式竖直下降。这些轨迹适用于冰粒仍处在中央区域内的阶段。

3.6

在冰分水岭处，水平速度为零。冰龄就是冰粒自沉积在 $z = H_m$ 处以来经过的时间：

$$\tau(z) = \int_{H_m}^z \frac{dz'}{v_z(z')} = -\frac{H_m}{c} \int_{H_m}^z \frac{dz'}{z'}.$$

因此，

$$\tau(z) = \frac{H_m}{c} \ln \frac{H_m}{z}.$$

表面处的冰龄为零，并随深度增加而增大。在此理想化模型中，当 $z \rightarrow 0$ 时，冰龄发散，因为在冰床处竖直速度趋于零。

3.7a

对于这根冰芯， $H_m = 3060$ m。两个已确定年代的冰层目前在冰床以上的高度分别为

$$\begin{aligned} z_1 &= 3060 - 1492 = 1568 \text{ m}, \\ z_2 &= 3060 - 3040 = 20 \text{ m}. \end{aligned}$$

过渡层仅经历了 11 700 年的间冰期流动。因此

$$\ln \frac{3060}{1568} = \frac{c_{ig}(11\,700 \text{ year})}{3060 \text{ m}},$$

得到

$$c_{ig} = \frac{3060}{11\,700} \ln \frac{3060}{1568} = 0.175 \text{ m/year}.$$

对于较老的冰层，积累速率在其下降过程中发生过变化。由于 H_m 为常量，

$$\frac{d \ln z}{dt} = -\frac{c(t)}{H_m}.$$

它经历的冰期流动时间为

$$120\,000 - 11\,700 = 108\,300 \text{ years},$$

随后又经历了 11 700 年的间冰期流动。因此，

$$\ln \frac{3060}{20} = \frac{c_{ia}(108\,300 \text{ year}) + c_{ig}(11\,700 \text{ year})}{3060 \text{ m}}.$$

减去过渡层所满足的方程，消去间冰期的贡献：

$$\ln \frac{1568}{20} = \frac{c_{ia}(108\,300 \text{ year})}{3060 \text{ m}}.$$

故

$$c_{ia} = \frac{3060}{108\,300} \ln \frac{1568}{20} = 0.123 \text{ m/year}.$$

必须考虑较老的冰在间冰期受到的压缩。

3.7b

图 3.2(b) 给出的代表性同位素值约为

$$\delta_{ia}^{18}\text{O} \approx -42 \text{ ‰}, \quad \delta_{ig}^{18}\text{O} \approx -35 \text{ ‰}.$$

因此，该过渡对应于约 7 ‰ 的增加。

图 3.2(a) 在相关温度范围内呈近似线性变化，其斜率约为

$$\frac{\Delta(\delta^{18}\text{O})}{\Delta T} \approx 0.7 \text{ ‰ K}^{-1}.$$

因此，

$$\Delta T \approx \frac{7 \text{ ‰}}{0.7 \text{ ‰ K}^{-1}} \approx 10 \text{ K}.$$

这一变化为升温：

$$\boxed{T_{\text{ig}} - T_{\text{ia}} \approx +10 \text{ K}}.$$

精度受图上读数的限制。

3.8

利用岛屿的几何形状和高度剖面求出模型中目前的体积。由于 $A_G = 10L^2$,

$$L = \sqrt{\frac{A_G}{10}} = \sqrt{\frac{1.71 \times 10^{12}}{10}} = 4.14 \times 10^5 \text{ m}.$$

模型预测的最大高度为

$$H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}} g}} = \sqrt{\frac{2(1.00 \times 10^5)(4.1352 \times 10^5)}{(917)(9.82)}} = 3.03 \times 10^3 \text{ m}.$$

利用 3.2c 小题的结果,

$$V_{\text{ice}} = \frac{2}{3} A_G H_m = 3.45 \times 10^{15} \text{ m}^3.$$

融化过程质量守恒, 因此所得水的体积为

$$V_{\text{water}} = \frac{\rho_{\text{ice}}}{\rho_{\text{wa}}} V_{\text{ice}}.$$

将这些水均匀分布在面积恒定的海洋上, 得到

$$\Delta h_{\text{mean}} = \frac{V_{\text{water}}}{A_O} = \frac{\rho_{\text{ice}}}{\rho_{\text{wa}}} \frac{2A_G H_m}{3A_O}.$$

代入数值得

$$\Delta h_{\text{mean}} = \frac{917}{998} \frac{3.4548 \times 10^{15}}{3.61 \times 10^{14}} = 8.79 \text{ m}.$$

因此

$$\boxed{\Delta h_{\text{mean}} \approx 8.8 \text{ m}}.$$

3.9

静止海洋的自由表面是等势面。因此, 我们比较哥本哈根与格陵兰对跖点处的引力势。

代表冰盖的质点质量为

$$M = \rho_{\text{ice}} V_{\text{ice}} = (917)(3.4548 \times 10^{15}) = 3.17 \times 10^{18} \text{ kg}.$$

设 R 为地球半径, h 为海面相对于参考球面的微小位移。地球对单位质量引力势的贡献为

$$\Phi_E(R+h) = -\frac{Gm_E}{R+h} \approx -\frac{Gm_E}{R} + gh,$$

其中 $h \ll R$ 。冰盖质量的贡献为

$$\Phi_{\text{ice}} = -\frac{GM}{d},$$

其中 d 是到冰盖质点的直线距离。

在一阶近似下，可以在参考球面上计算 d ：与数百万米的距离相比，几米的变化可以忽略。因此，表面引力势相等要求

$$gh_{\text{CPH}} - \frac{GM}{d_{\text{CPH}}} = gh_{\text{OPP}} - \frac{GM}{d_{\text{OPP}}}.$$

于是

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = \frac{GM}{g} \left(\frac{1}{d_{\text{CPH}}} - \frac{1}{d_{\text{OPP}}} \right).$$

给定的 3500 km 是弧长 s ，因此地心角和弦长为

$$\theta = \frac{s}{R}, \quad d_{\text{CPH}} = 2R \sin \frac{\theta}{2} = 2R \sin \frac{s}{2R}.$$

在对跖点处，

$$d_{\text{OPP}} = 2R.$$

因此，

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = \frac{GM}{2gR} \left[\frac{1}{\sin(s/(2R))} - 1 \right].$$

由题目给出的地球表面积可得 $R = \sqrt{A_{\text{E}}/(4\pi)} \approx 6.37 \times 10^6$ m，与所给半径一致。取 $R = 6.38 \times 10^6$ m，

$$\theta = 0.5486, \quad d_{\text{CPH}} = 3.456 \times 10^6 \text{ m}, \quad d_{\text{OPP}} = 1.276 \times 10^7 \text{ m}.$$

故

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = \frac{(6.67 \times 10^{-11})(3.168 \times 10^{18})}{9.82} \left(\frac{1}{3.456 \times 10^6} - \frac{1}{1.276 \times 10^7} \right) = 4.54 \text{ m}.$$

因此，

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} \approx 4.5 \text{ m}.$$

正号表示，格陵兰的引力使哥本哈根处的平衡海面相对于地球另一侧升高。为保持海洋体积守恒而需要的任何共同高度偏移，都会在这一差值中抵消。

解答已与官方解答核对。