

IPhO 2013

Teorik sorular ve çözümler · Kopenhag, Danimarka · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2013/

Soru 1: Maribo Gök Taşı

Giriş

Meteorit, bir kuyruklu yıldızdan veya asteroitten gelen küçük bir parçacıktır (genellikle 1 m'den küçüktür). Yere çarpan bir meteoride gök taşı denir.

17 Ocak 2009 gecesi Baltık Denizi yakınlarında birçok kişi, Dünya atmosferinden geçerek düşen bir meteoroidin ışıklılığını, yani ateş topunu gördü. İsveç'te bir güvenlik kamerası olayın videosunu kaydetti; bkz. Şekil 1.1(a). Bu görüntüler ve görgü tanıklarının anlatımları sayesinde çarpma bölgesi daraltılabildi ve altı hafta sonra Danimarka'nın güneyindeki Maribo kasabası yakınlarında 0.025 kg kütleli bir gök taşı bulundu. Artık Maribo adı verilen gök taşı ve gökyüzündeki yörüngesi üzerinde yapılan ölçümler ilginç sonuçlar ortaya koydu. Atmosfere girerken sürati olağanüstü yüksekti. 4.567×10^9 yıllık yaşı, Güneş sisteminin doğuşundan kısa bir süre sonra oluştuğunu göstermektedir. Maribo gök taşı, Encke Kuyruklu Yıldızı'nın bir parçası olabilir.

Maribo'nun sürati

Ateş topu, Şekil 1.1'de çizildiği gibi, kuzeye göre 285° doğrultusunda batıya doğru, gök taşının daha sonra bulunduğu konuma yönelerek ilerliyordu. Gök taşı, güvenlik kamerasından 195 km uzaklıkta, kuzeye göre 230° doğrultusunda bulundu.

Kısım	Soru	Puan
1.1	Bu bilgileri ve Şekil 1.1'deki verileri kullanarak Maribo'nun 155 ve 161 numaralı kareler arasındaki zaman aralığında ortalama süratini hesaplayınız. Hem Dünya'nın eğriliği hem de meteoride etki eden kütle çekim kuvveti ihmal edilebilir.	1.3

Atmosferden geçiş ve erime?

Üst atmosferde hareket eden bir meteoride havanın uyguladığı sürtünme, meteoroidin şekline ve hızına, ayrıca atmosferin sıcaklığına ve yoğunluğuna karmaşık bir biçimde bağlıdır. Makul bir yaklaşımla, üst atmosferdeki sürtünme kuvveti F , $F = k\rho_{\text{atm}}Av^2$ ifadesiyle verilir; burada k bir sabit, ρ_{atm} atmosferin yoğunluğu, A gök taşının izdüşüm kesit alanı ve v süratidir.

Meteoroidi incelemek için şu basitleştirici varsayımlar yapılmaktadır: Atmosfere giren cisim, kütlesi $m_M = 30$ kg, yarıçapı $R_M = 0.13$ m, sıcaklığı $T_0 = 200$ K ve sürati $v_M = 2.91 \times 10^4$ m/s olan bir küreydi. Atmosferin yoğunluğu sabittir (Dünya yüzeyinin 40 km üzerindeki değerindedir), $\rho_{\text{atm}} = 4.1 \times 10^{-3}$ kg/m³, ve sürtünme katsayısı $k = 0.60$ 'tır.

Kısım	Soru	Puan
1.2a	Atmosfere girdikten ne kadar süre sonra meteoroidin süratinin %10 azalarak v_M 'den $0.90v_M$ 'ye düşeceğini tahmin ediniz. Meteoride etki eden kütle çekim kuvvetini ihmal edebilir, kütlesini ve şeklini koruduğunu varsayabilirsiniz.	0.7

Kısım	Soru	Puan
1.2b	Atmosfere giren meteoroidin kinetik enerjisinin E_{kin} , onu tamamen eritmek için gereken enerjinin E_{melt} kaç katı olduğunu hesaplayınız (veri çizelgesine bakınız).	0.3

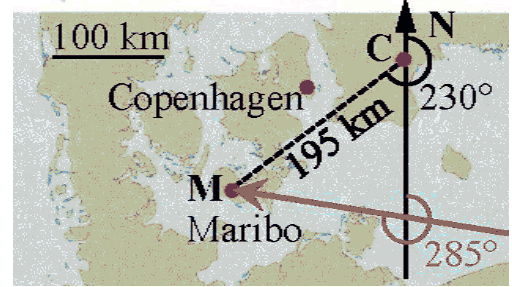
(a)



(b)

Frame	Time	Azimuth	Altitude
155	1.46 s	215°	19.2°
161	2.28 s	221°	14.7°
Landing at M		230°	0.0°

(c)



Şekil 1.1 (a) Azimut, yatay düzlemde kuzeyden başlayarak saat yönünde ölçülen açısal konumdur; yükseklik açısı ise ufkun üzerindeki açısal konumdur. İsveç'teki güvenlik kamerasının kaydettiği bir dizi kare, Maribo'nun atmosferden aşağı inerken bir ateş topu olarak hareketini göstermektedir. (b) İki kareye ait veriler; zamanı, kameradan (C) görülen doğrultuyu (azimut) derece cinsinden ve ufkun üzerindeki yüksekliği (yükseklik açısı) derece cinsinden göstermektedir. (c) Maribo'nun izlediği yolun (macenta ok) kuzeye (N) göre doğrultusunun ve Danimarka'daki düşme yerinin (M) kameradan (C) görülen doğrultusunun şematik gösterimi.

Maribo'nun atmosferde düşerken ısınması

Taşlı meteorit Maribo atmosfere ses üstü süratle girdiğinde, çevresindeki hava ışık yaydığı için bir ateş topu olarak görünüyordu. Buna rağmen Maribo'nun yalnızca en dış katmanı ısındı. Maribo'nun yoğunluğu ρ_{sm} , öz ısı kapasitesi c_{sm} ve ısı iletkenliği k_{sm} olan homojen bir küre olduğunu

varsayınız (değerler için veri çizelgesine bakınız). Ayrıca, atmosfere girerken sıcaklığı $T_0 = 200$ K idi. Atmosferden düşerken hava sürtünmesi nedeniyle yüzey sıcaklığı sabit $T_s = 1000$ K değerindeydi; böylece iç kısmı giderek ısınıyordu.

Atmosferde t süresi boyunca düştükten sonra, Maribo'nun x kalınlığındaki dış kabuğu T_0 'dan belirgin biçimde daha yüksek bir sıcaklığa kadar ısınmış olacaktır. Bu kalınlık, boyut analiziyle termodinamik parametrelerin kuvvetlerinin basit bir çarpımı olarak tahmin edilebilir:

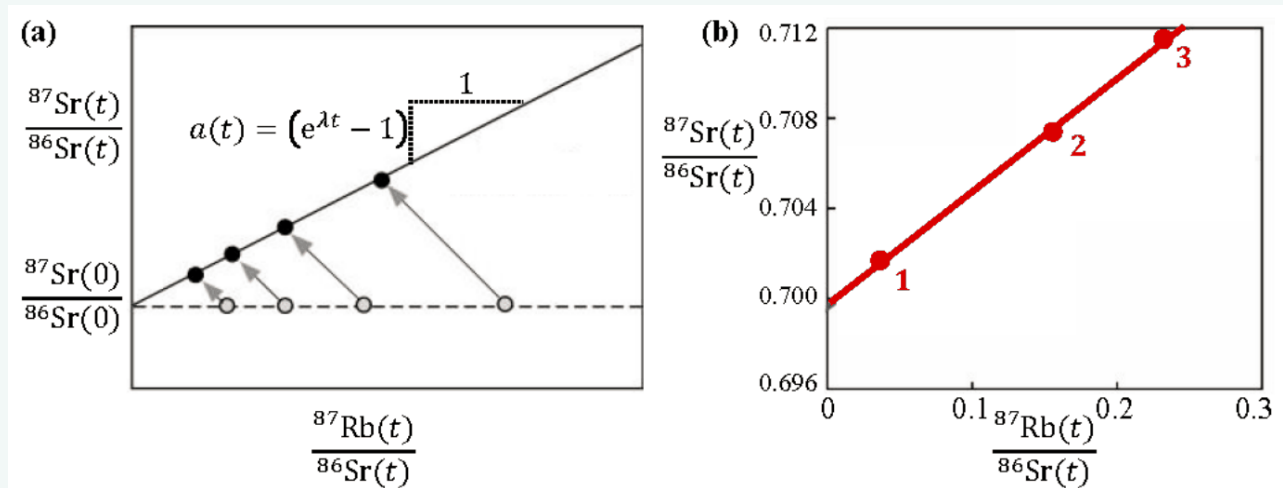
$$x \approx t^\alpha \rho_{\text{sm}}^\beta c_{\text{sm}}^\gamma k_{\text{sm}}^\delta.$$

Kısım	Soru	Puan
1.3a	Boyut (birim) analiziyle α , β , γ , ve δ üslerinin değerlerini belirleyiniz.	0.6
1.3b	$t = 5$ s düşme süresinden sonraki x kalınlığını hesaplayınız ve x/R_M oranını belirleyiniz.	0.4

Bir gök taşının yaşı

Radyoaktif elementlerin kimyasal özellikleri farklı olabilir; bu nedenle belirli bir gök taşıdaki mineraller kristalleşirken, bazı mineraller belirli bir radyoaktif elementi yüksek oranda, diğerleri ise düşük oranda içerir. Bu fark, gök taşının radyoaktif minerallerine radyometrik tarihleme uygulanarak yaşını belirlemek için kullanılabilir.

Somut bir örnek olarak, kararlı ^{86}Sr izotopunu referans alarak, $T_{1/2} = 4.9 \times 10^{10}$ yıl yarı ömürle kararlı ^{87}Sr izotopuna (element no. 38) bozunan ^{87}Rb izotopunu (element no. 37) inceliyoruz. Kristalleşme anında $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ oranı tüm minerallerde aynıken, $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ oranı farklıydı. Zaman geçtikçe ^{87}Rb miktarı bozunma nedeniyle azalırken, buna bağlı olarak ^{87}Sr miktarı artar. Sonuç olarak, $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ oranları bugün farklı olacaktır. Şekil 1.2(a)'da yatay doğru üzerindeki noktalar, farklı minerallerde kristalleştikleri andaki $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ oranını göstermektedir.



Şekil 1.2 (a) Farklı minerallerde kristalleşme anındaki $t = 0$ (boş daireler) ve günümüzdeki (dolu daireler) $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ oranı. (b) Günümüzde bir gök taşından alınan üç farklı mineral örneğinin izokron doğrusu.

Kısım	Soru	Puan
1.4a	^{87}Rb 'nin ^{87}Sr 'ye dönüşümünün bozunma şemasını yazınız.	0.3
1.4b	Aynı gök taşından alınan farklı mineral örneklerinde, günümüzdeki $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ oranı günümüzdeki $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ oranına karşı çizildiğinde, eğimi $a(t) = (e^{\lambda t} - 1)$ olan ve	0.7

Kısım	Soru	Puan
	izokron doğrusu adı verilen bir doğru oluştuğunu gösteriniz. Burada t , minerallerin oluşumundan bu yana geçen süre, λ ise yarı ömür $T_{\frac{1}{2}}$ ile ters orantılı olan bozunma sabitidir.	
1.4c	Şekil 1.2(b)'deki izokron doğrusunu kullanarak gök taşının yaşını τ_M belirleyiniz.	0.4

Maribo'nun kaynağı olabilecek Encke Kuyruklu Yıldızı

Encke Kuyruklu Yıldızı'nın Güneş çevresindeki yörüngesinde, Güneş'e olan en küçük ve en büyük uzaklıkları sırasıyla $a_{\min} = 4.95 \times 10^{10} \text{ m}$ ve $a_{\max} = 6.16 \times 10^{11} \text{ m}$ 'dir.

Kısım	Soru	Puan
1.5	Encke Kuyruklu Yıldızı'nın yörünge periyodunu t_{Encke} hesaplayınız.	0.6

Bir asteroidin Dünya'ya çarpmasının sonuçları

65 milyon yıl önce Dünya'ya, yoğunluğu $\rho_{\text{ast}} = 3.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, yarıçapı $R_{\text{ast}} = 5.0 \text{ km}$ ve son sürati $v_{\text{ast}} = 2.5 \times 10^4 \text{ m/s}$ olan dev bir asteroit çarptı. Bu çarpma, Dünya'daki canlıların çoğunun yok olmasına ve devasa Chicxulub Krateri'nin oluşmasına yol açtı. Özdeş bir asteroidin bugün Dünya'ya tamamen esnek olmayan bir çarpışmayla çarptığını varsayınız ve Dünya'nın eylemsizlik momentinin, aynı kütle ve yarıçapa sahip homojen bir küreninkinin 0.83 katı olduğunu kullanınız. Kütle M ve yarıçapı R olan homojen bir kürenin eylemsizlik momenti $\frac{2}{5}MR^2$ 'dir. Dünya'nın yörüngesindeki değişimleri ihmal ediniz.

Kısım	Soru	Puan
1.6a	Asteroit Kuzey Kutbu'na çarpsın. Çarpışmadan sonra Dünya'nın ekseninin açısızal yönelimindeki en büyük değişimi bulunuz.	0.7
1.6b	Asteroit Ekvator'a radyal doğrultuda çarpsın. Çarpışmadan sonra Dünya'nın bir tam dönüş süresindeki değişimi $\Delta\tau_{\text{vt}}$ bulunuz.	0.7
1.6c	Asteroit Ekvator'a, ekvator düzleminde teğetsel doğrultuda çarpsın. Çarpışmadan sonra Dünya'nın bir tam dönüş süresindeki değişimi $\Delta\tau_{\text{tan}}$ bulunuz.	0.7

En büyük çarpma sürati

Güneş sistemine kütle çekimiyle bağlı olan ve Dünya yüzeyine v_{imp} süratiyle çarpan bir gök cismini ele alınız. Başlangıçta Dünya'nın kütle çekim alanının cisim üzerindeki etkisi ihmal edilebilir. Atmosferdeki sürtünmeyi, diğer gök cisimlerinin etkisini ve Dünya'nın dönmesini ihmal ediniz.

Kısım	Soru	Puan
1.7	v_{imp} 'nin mümkün olan en büyük değeri $v_{\text{imp}}^{\text{max}}$ 'ı hesaplayınız.	1.6

Veri çizelgesi: Fiziksel parametreler tablosu

Fiziksel parametre	Değer
Işığın boşluktaki sürati	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Planck sabitinin 2π 'ye bölümü	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Kütle çekim sabiti	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Yer çekimi ivmesi	$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$
Temel yük	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$

Fiziksel parametre	Değer
Boşluğun elektriksel geçirgenliği	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Elektron kütlesi	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Avogadro sabiti	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmann sabiti	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Taşsı gök taşı, öz ısı	$c_{\text{sm}} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Taşsı gök taşı, ısı iletkenlik	$k_{\text{sm}} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Taşsı gök taşı, yoğunluk	$\rho_{\text{sm}} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Taşsı gök taşı, erime noktası	$T_{\text{sm}} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$
Taşsı gök taşı, özgül erime ısı	$L_{\text{sm}} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
Gümüş, molar kütle	$M_{\text{Ag}} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$
Gümüş, yoğunluk	$\rho_{\text{Ag}} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
Gümüş, öz ısı kapasitesi	$c_{\text{Ag}} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Su, molar kütle	$M_{\text{wa}} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$
Su, yoğunluk	$\rho_{\text{wa}} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Su, öz ısı kapasitesi	$c_{\text{wa}} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Su, buharlaşma ısı	$L_{\text{wa}} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$
Su, kaynama sıcaklığı	$T_{100} = 100^\circ \text{C} = 373.15 \text{ K}$
Buz, buzul yoğunluğu	$\rho_{\text{ice}} = 0.917 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Su buharı, öz ısı kapasitesi	$c_{\text{st}} = 2.080 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Dünya'nın kütlesi	$m_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Dünya'nın yarıçapı	$R_E = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$
Güneş'in kütlesi	$m_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Güneş'in yarıçapı	$R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$
Ortalama Güneş-Dünya uzaklığı	$a_E = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- 1.1: $\bar{v} = 2.86 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 28.6 \text{ km s}^{-1}$.
- 1.2a: $t = 0.88 \text{ s}$.
- 1.2b: $E_{\text{kin}}/E_{\text{melt}} \approx 2.1 \times 10^2$.
- 1.3a: $\alpha = \delta = \frac{1}{2}$, $\beta = \gamma = -\frac{1}{2}$, dolayısıyla $x \approx \sqrt{k_{\text{sm}} t / (\rho_{\text{sm}} c_{\text{sm}})}$.
- 1.3b: $x \approx 1.6 \text{ mm}$, $x/R_M \approx 0.012 = 1.2\%$.
- 1.4a: ${}^{87}_{37}\text{Rb} \rightarrow {}^{87}_{38}\text{Sr} + {}^0_{-1}e + \bar{\nu}_e$.

- **1.4b:** $Y(t) = Y_0 + (e^{\lambda t} - 1)X(t)$; burada $Y = {}^{87}\text{Sr}/{}^{86}\text{Sr}$, $X = {}^{87}\text{Rb}/{}^{86}\text{Sr}$ ve $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$.
- **1.4c:** $\tau_M \approx 3.5 \times 10^9 \text{ yr}$; grafiğin yaklaşık 0.050 olan eğiminden elde edilir.
- **1.5:** $t_{\text{Encke}} = 1.05 \times 10^8 \text{ s} \approx 3.32 \text{ yr}$.
- **1.6a:** $\theta_{\text{max}} \approx 4.3 \times 10^{-8} \text{ rad} \approx 2.4 \times 10^{-6} \text{ degree}$.
- **1.6b:** $\Delta\tau_{\text{vrt}} \approx +6.8 \times 10^{-5} \text{ s}$.
- **1.6c:** Dönme yönündeki bir çarpma için $\Delta\tau_{\text{tan}} \approx -3.6 \times 10^{-3} \text{ s}$; dönmeye ters yöndeki bir çarpma için $\Delta\tau_{\text{tan}} \approx +3.8 \times 10^{-3} \text{ s}$.
- **1.7:** $v_{\text{imp}}^{\text{max}} \approx 7.27 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 72.7 \text{ km s}^{-1}$; bu değer, kütle çekimiyle bağlı bir cisim için limitte yaklaşılan bir üst sınır olarak anlaşılmalıdır.

Çözüm

1.1

C kamerayı, M düşme yerini ve P_i , meteoroidin i numaralı karedeki konumunun yatay izdüşümünü gösterebilir. Şöyle yazalım:

$$CM = D = 195 \text{ km}, \quad CP_i = r_i, \quad MP_i = s_i.$$

Gözlenen büyüklükler şunlardır:

Kare	Zaman t_i	Azimut ϕ_i	Yükseklik açısı h_i
155	1.46 s	215°	19.2°
161	2.28 s	221°	14.7°

Yatay yörüngenin doğrultusu 285°'dir. M 'den bakıldığında kamera 50° kerterizinde, meteoroidin önceki konumları ise 105° kerterizindedir. Dolayısıyla $CM P_i$ üçgeninin M köşesindeki açı 55°'dir. C köşesindeki açı $230^\circ - \phi_i$ 'dir.

Bu nedenle sinüs teoremi şu sonucu verir:

$$r_i = D \frac{\sin 55^\circ}{\sin(285^\circ - \phi_i)}, \quad s_i = D \frac{\sin(230^\circ - \phi_i)}{\sin(285^\circ - \phi_i)}.$$

Dünya'nın eğriliği ihmal edildiğinden meteoroidin yüksekliği şöyledir:

$$z_i = r_i \tan h_i.$$

Sayısal olarak,

Kare	r_i (km)	s_i (km)	z_i (km)
155	169.986	53.709	59.195
161	177.721	33.940	46.624

Böylece yatay ve düşey doğrultularda alınan yollar şunlardır:

$$\Delta s = 19.769 \text{ km}, \quad |\Delta z| = 12.571 \text{ km}.$$

Bu kısa aralıkta yörüngeyi doğrusal kabul edersek,

$$\Delta\ell = \sqrt{(\Delta s)^2 + (\Delta z)^2} = 23.428 \text{ km.}$$

Geçen süre $2.28 - 1.46 = 0.82 \text{ s}$ olduğundan,

$$\bar{v} = \frac{23.428 \text{ km}}{0.82 \text{ s}} = 28.6 \text{ km s}^{-1}.$$

Sonraki kısımlarda, ayrıca belirtilen $v_M = 2.91 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ başlangıç süratini kullanacağız.

1.2a

Kürenin izdüşüm alanı $A = \pi R_M^2$ 'dir. Kütle çekimi ihmal edildiğinde Newton'un ikinci yasası şu sonucu verir:

$$m_M \frac{dv}{dt} = -k\rho_{\text{atm}}\pi R_M^2 v^2.$$

Değişkenleri ayırıp v_M 'den v 'ye kadar integral alırsak,

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_M} = \frac{k\rho_{\text{atm}}\pi R_M^2}{m_M} t.$$

$v = 0.90v_M$ için,

$$t = \frac{m_M}{k\rho_{\text{atm}}\pi R_M^2 v_M} \left(\frac{1}{0.90} - 1 \right).$$

Değerleri yerine koyunca,

$$t = \frac{30}{(0.60)(4.1 \times 10^{-3})\pi(0.13)^2(2.91 \times 10^4)} \left(\frac{1}{0.90} - 1 \right) = 0.877 \text{ s.}$$

Dolayısıyla,

$$t \approx 0.88 \text{ s.}$$

1.2b

Tam erime için hem malzemenin T_0 'dan erime noktasına kadar ısıtılması hem de gizli erime ısısının sağlanması gerekir. Veri çizelgesinde verilen sabit öz ısıyı kullanırsak,

$$E_{\text{melt}} = m_M [c_{\text{sm}}(T_{\text{sm}} - T_0) + L_{\text{sm}}].$$

Böylece,

$$E_{\text{melt}} = 30 [(1.2 \times 10^3)(1700 - 200) + 2.6 \times 10^5] = 6.18 \times 10^7 \text{ J.}$$

Başlangıçtaki kinetik enerji şöyledir:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m_M v_M^2 = \frac{1}{2}(30)(2.91 \times 10^4)^2 = 1.2702 \times 10^{10} \text{ J.}$$

Sonuç olarak,

$$\frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{melt}}} = \frac{v_M^2}{2[c_{\text{sm}}(T_{\text{sm}} - T_0) + L_{\text{sm}}]} = 205.5 \approx 2.1 \times 10^2.$$

Bu enerji karşılaştırması tam erime olacağını göstermez: kinetik enerjinin meteoroidin tamamına ısı olarak aktarılması gerekmez.

1.3a

Kütle, uzunluk, zaman ve sıcaklık boyutları için M, L, T, Θ sembollerini kullanalım. İlgili boyutlar şunlardır:

$$[\rho_{\text{sm}}] = ML^{-3}, \quad [c_{\text{sm}}] = L^2T^{-2}\Theta^{-1}, \quad [k_{\text{sm}}] = MLT^{-3}\Theta^{-1}.$$

Dolayısıyla,

$$[t^\alpha \rho_{\text{sm}}^\beta c_{\text{sm}}^\gamma k_{\text{sm}}^\delta] = M^{\beta+\delta} L^{-3\beta+2\gamma+\delta} T^{\alpha-2\gamma-3\delta} \Theta^{-\gamma-\delta}.$$

Bunu x 'in boyutu olan L 'ye eşitleyince,

$$\begin{aligned} \beta + \delta &= 0, \\ -3\beta + 2\gamma + \delta &= 1, \\ \alpha - 2\gamma - 3\delta &= 0, \\ -\gamma - \delta &= 0. \end{aligned}$$

Birinci ve dördüncü denklemler $\beta = \gamma = -\delta$ sonucunu verir. Ardından uzunluk denklemi $2\delta = 1$, zaman denklemi ise $\alpha = \delta$ sonucunu verir. Dolayısıyla,

$$\alpha = \delta = \frac{1}{2}, \quad \beta = \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Elde edilen tahmin şöyledir:

$$x \approx \sqrt{\frac{k_{\text{sm}} t}{\rho_{\text{sm}} c_{\text{sm}}}}.$$

Boyut analizi üsleri belirler, ancak boyutsuz bir katsayıyı belirsiz bırakır. İstenen tahminde bu katsayı bir alınmaktadır.

1.3b

Isıl yayılım katsayısı şöyledir:

$$\chi = \frac{k_{\text{sm}}}{\rho_{\text{sm}} c_{\text{sm}}} = \frac{2.0}{(3.3 \times 10^3)(1.2 \times 10^3)} = 5.05 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

$t = 5$ s anında,

$$x \approx \sqrt{\chi t} = \sqrt{(5.05 \times 10^{-7})(5)} = 1.589 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

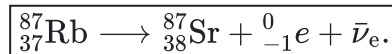
Böylece,

$$x \approx 1.6 \text{ mm}, \quad \frac{x}{R_M} = \frac{1.589 \times 10^{-3}}{0.13} \approx 0.012 = 1.2\%.$$

Isınan derinlik yarıçapa göre küçüktür; bu, düşüş sırasında yalnızca dış katmanın kayda değer ölçüde ısınmasıyla tutarlıdır.

1.4a

Atom numarası bir artarken kütle numarası değişmeden kalır. Bu, beta eksi bozunmasıdır:



Bir elektron ve bir elektron antinötrinosu yayılır.

1.4b

Bir mineral örneğini kristalleşmeden sonra kapalı bir sistem olarak ele alalım. $N_{\text{Rb}}(t)$, $N_{87}(t)$ ve N_{86} , sırasıyla ^{87}Rb , ^{87}Sr ve ^{86}Sr çekirdeklerinin sayıları olsun. Kararlı referans çekirdeklerinin sayısı N_{86} sabittir.

Radyoaktif bozunma şu sonucu verir:

$$N_{\text{Rb}}(t) = N_{\text{Rb}}(0)e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}}.$$

Bozunan her rubidyum çekirdeği bir stronsiyum-87 çekirdeği oluşturduğundan,

$$\begin{aligned} N_{87}(t) &= N_{87}(0) + N_{\text{Rb}}(0) - N_{\text{Rb}}(t) \\ &= N_{87}(0) + N_{\text{Rb}}(0)(e^{\lambda t} - 1). \end{aligned}$$

N_{86} 'ya bölerek şu tanımları yapalım:

$$Y(t) = \frac{N_{87}(t)}{N_{86}}, \quad X(t) = \frac{N_{\text{Rb}}(t)}{N_{86}}, \quad Y_0 = \frac{N_{87}(0)}{N_{86}}.$$

O hâlde,

$$Y(t) = Y_0 + (e^{\lambda t} - 1)X(t).$$

Tüm örnekler aynı başlangıç stronsiyum izotop oranına Y_0 ve aynı yaşa t sahiptir. Dolayısıyla günümüzdeki değerleri, düşey eksen Y_0 'da kesen ve eğimi aşağıdaki gibi olan bir doğru üzerinde yer alır:

$$a(t) = e^{\lambda t} - 1.$$

Kristalleşme anında eğim sıfırdır; daha sonra yaşla birlikte artar.

1.4c

Şekil 1.2(b)'deki doğru yaklaşık olarak şu noktalardan geçer:

$$(X, Y) \approx (0.05, 0.702) \quad \text{ve} \quad (0.25, 0.712).$$

Dolayısıyla eğimi yaklaşık olarak şöyledir:

$$a \approx \frac{0.712 - 0.702}{0.25 - 0.05} = 0.050.$$

1.4b kısmındaki sonucu yaş için çözersek,

$$\tau_M = \frac{\ln(1 + a)}{\lambda} = \frac{T_{\frac{1}{2}}}{\ln 2} \ln(1 + a).$$

Böylece,

$$\tau_M \approx \frac{4.9 \times 10^{10} \text{ yr}}{\ln 2} \ln(1.050) = 3.45 \times 10^9 \text{ yr}.$$

Grafikten okumanın hassasiyetini göz önünde bulundurarak,

$$\tau_M \approx 3.5 \times 10^9 \text{ yr}.$$

Şekil 1.2(b), "bir gök taşından" alınan örneklerle ilgilidir; buradan çıkarılan yaşın, girişte belirtilen Maribo'nun yaşına eşit olması gerekmez.

1.5

Eliptik bir yörüngede günberi ve günöte uzaklıklarının toplamı, yarı büyük eksenin iki katına eşittir:

$$a = \frac{a_{\min} + a_{\max}}{2} = \frac{4.95 \times 10^{10} + 6.16 \times 10^{11}}{2} = 3.3275 \times 10^{11} \text{ m.}$$

Kuyruklu yıldızın kütesini Güneş'in kütesine göre ihmal edersek, Kepler'in üçüncü yasası şu sonucu verir:

$$t_{\text{Encke}}^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm_S}.$$

Böylece,

$$t_{\text{Encke}} = 2\pi \sqrt{\frac{(3.3275 \times 10^{11})^3}{(6.67 \times 10^{-11})(1.99 \times 10^{30})}} = 1.0468 \times 10^8 \text{ s.}$$

1 yr $\approx 3.156 \times 10^7$ s kullanılarak,

$$t_{\text{Encke}} \approx 1.05 \times 10^8 \text{ s} \approx 3.32 \text{ yr.}$$

1.6a

Önce üç çarpma sorusunda da kullanılan büyüklükleri hesaplayalım. Asteroidin kütlesi şöyledir:

$$m_{\text{ast}} = \frac{4}{3}\pi R_{\text{ast}}^3 \rho_{\text{ast}} = \frac{4}{3}\pi (5.0 \times 10^3)^3 (3.0 \times 10^3) = 1.571 \times 10^{15} \text{ kg.}$$

Dünya'nın eylemsizlik momenti şöyledir:

$$I_E = 0.83 \frac{2}{5} m_E R_E^2 = 8.068 \times 10^{37} \text{ kg m}^2.$$

Başlangıçtaki dönme periyodunu $\tau_E = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$ alırsak,

$$\omega_E = \frac{2\pi}{\tau_E} = 7.272 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

ve kendi eksenini etrafındaki dönme açısal momentumu şöyledir:

$$L_E = I_E \omega_E = 5.867 \times 10^{33} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Dünya'ya katılan asteroidi, Dünya yüzeyinde bir noktasal kütle olarak ele alıyoruz. Asteroidin boyutu ve ortak kütle merkezinin yer değiştirmesi ihmal edilebilir düzeltmeler getirir.

Kuzey Kutbu'nda asteroidin konum vektörü, Dünya'nın başlangıçtaki dönme eksenine paraleldir.

Dolayısıyla açısal momentumu

$$\mathbf{L}_{\text{ast}} = \mathbf{r} \times m_{\text{ast}} \mathbf{v}_{\text{ast}}$$

Dünya'nın başlangıçtaki dönme açısal momentumuna diktir. Büyüklüğü, teğetsel bir çarpmada en yüksek değerini alır:

$$L_{\text{ast}}^{\max} = m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}} = 2.505 \times 10^{26} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Açısal momentumun korunumu, küçük olan asteroit kütesinin Dünya kütesine oranında başat mertebede şu sonucu verir:

$$\tan \theta_{\max} \simeq \frac{L_{\text{ast}}^{\max}}{L_E}.$$

Açı son derece küçük olduğundan,

$$\theta_{\max} \simeq \frac{m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}}}{I_E \omega_E} = 4.27 \times 10^{-8} \text{ rad} \approx 2.4 \times 10^{-6} \text{ degree.}$$

Eylemsizlik tensöründeki değişim, bu küçük eğilmeye yalnızca daha yüksek mertebeden bir düzeltme getirir.

1.6b

Radyal bir çarpmada, gelen asteroidin Dünya'nın merkezine göre açısal momentumu sıfırdır. Ekvator'a yapıştıktan sonra eylemsizlik momenti şu değere yükselir:

$$I' = I_E + m_{\text{ast}} R_E^2.$$

Açısal momentumun korunumu şunu gerektirir:

$$I_E \omega_E = (I_E + m_{\text{ast}} R_E^2) \omega'.$$

Periyot açısal süratle ters orantılı olduğundan,

$$\tau' = \tau_E \left(1 + \frac{m_{\text{ast}} R_E^2}{I_E} \right).$$

Dolayısıyla,

$$\Delta \tau_{\text{vrt}} = \tau_E \frac{m_{\text{ast}} R_E^2}{I_E} = \tau_E \frac{m_{\text{ast}}}{0.332 m_E}.$$

Sayısal olarak,

$$\Delta \tau_{\text{vrt}} = 6.85 \times 10^{-5} \text{ s} \approx +6.8 \times 10^{-5} \text{ s.}$$

Gün yaklaşık $68 \mu\text{s}$ uzar.

1.6c

Teğetsel çarpmanın yönü önemlidir. Dönme açısal momentumunu artıran, dönme yönündeki bir çarpma için $\sigma = +1$, dönmeye ters yöndeki bir çarpma için ise $\sigma = -1$ olsun.

Açısal momentumun korunumu şu sonucu verir:

$$I_E \omega_E + \sigma m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}} = (I_E + m_{\text{ast}} R_E^2) \omega'.$$

Şu küçük boyutsuz büyüklükleri tanımlayalım:

$$\epsilon = \frac{m_{\text{ast}} R_E^2}{I_E} = 7.925 \times 10^{-10}, \quad \eta = \frac{m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}}}{I_E \omega_E} = 4.270 \times 10^{-8}.$$

Yeni periyot ve periyottaki değişim şöyledir:

$$\tau' = \tau_E \frac{1 + \epsilon}{1 + \sigma \eta},$$

$$\Delta \tau_{\text{tan}} = \tau_E \frac{\epsilon - \sigma \eta}{1 + \sigma \eta}.$$

Hem ϵ hem de η çok küçük olduğundan, bu ifade iyi bir doğrulukla şöyle de yazılabilir:

$$\Delta \tau_{\text{tan}} \approx \tau_E (\epsilon - \sigma \eta).$$

Böylece:

- Dönme yönündeki çarpma:

$$\Delta\tau_{\text{tan}} = -3.621 \times 10^{-3} \text{ s} \approx -3.6 \text{ ms.}$$

- Dönmeye ters yöndeki çarpma:

$$\Delta\tau_{\text{tan}} = +3.758 \times 10^{-3} \text{ s} \approx +3.8 \text{ ms.}$$

Eklenen eylemsizlik momenti her iki durumda da günü uzatır. Gelen açısal momentum daha büyük etkiyi oluşturur ve işareti belirler.

1.7

Önce, Dünya'nın kütle çekimi önem kazanmadan önce cismin Güneş'e göre hareketini ele alalım. Dünya'nın yörünge uzaklığında, kütle çekimiyle bağlı bir cismin birim kütle başına yörünge enerjisi negatiftir:

$$\mathcal{E} = \frac{u^2}{2} - \frac{Gm_S}{a_E} < 0.$$

Dolayısıyla Güneş merkezli sürati, bulunduğu konumdaki Güneş'ten kaçış süratiyle sınırlıdır:

$$u < u_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2Gm_S}{a_E}}.$$

Sınır durum, bağlanma enerjisi sıfıra yaklaşan bir yörüngedir.

Dünya'nın yörüngesini verilen ortalama uzaklıkta dairesel kabul edersek, yörünge sürati şöyledir:

$$v_E = \sqrt{\frac{Gm_S}{a_E}}.$$

En büyük bağıl yaklaşma sürati, cisim Dünya'nın yörünge hareketine tam zıt yönde hareket ettiğinde ortaya çıkar. Dolayısıyla,

$$v_{\infty}^{\text{max}} = u_{\text{max}} + v_E = (1 + \sqrt{2})\sqrt{\frac{Gm_S}{a_E}}.$$

Sayısal olarak,

$$v_E = 29.75 \text{ km s}^{-1}, \quad u_{\text{max}} = 42.07 \text{ km s}^{-1},$$

dolayısıyla,

$$v_{\infty}^{\text{max}} = 71.82 \text{ km s}^{-1}.$$

Dünya'nın kütle çekimi cismi daha da hızlandırır. Dünya ile karşılaşma sırasında mekanik enerjinin korunumu şu sonucu verir:

$$\frac{1}{2}v_{\text{imp}}^2 - \frac{Gm_E}{R_E} = \frac{1}{2}v_{\infty}^2.$$

Böylece,

$$v_{\text{imp}}^{\text{max}} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 \frac{Gm_S}{a_E} + \frac{2Gm_E}{R_E}}.$$

Dünya yüzeyinden kaçış sürati şöyledir:

$$\sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}} = 11.17 \text{ km s}^{-1}.$$

Dolayısıyla,

$$v_{\text{imp}}^{\text{max}} = \sqrt{(71.82)^2 + (11.17)^2} \text{ km s}^{-1} \approx 72.7 \text{ km s}^{-1}.$$

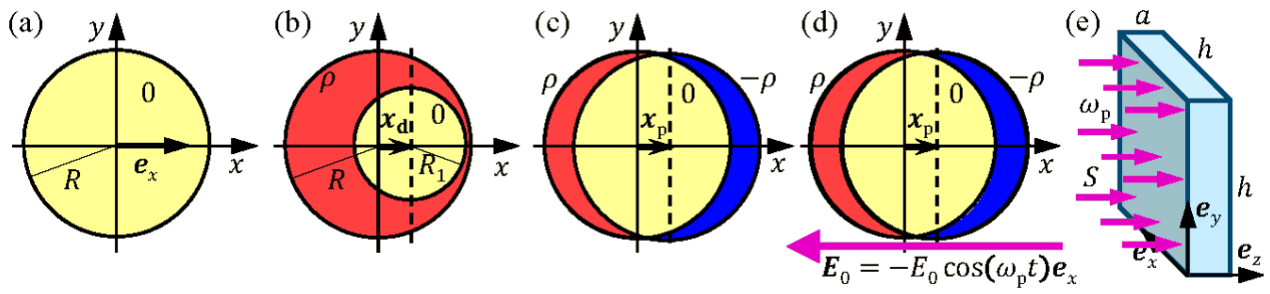
Kesin olarak bağlı bir yörünge için sürat bu değerden kesin olarak küçüktür. Başlangıçtaki Güneş'e bağlanma enerjisi sıfıra yaklaşırken sürat bu değere istenildiği kadar yaklaşabilir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Plazmonik Buhar Üretici

Giriş

Bu soruda, çalıştığı deneysel olarak gösterilmiş verimli bir buhar üretim sürecini inceliyoruz. Litre başına yalnızca yaklaşık 10^{13} parçacık içeren, nanometre boyutundaki küresel gümüş parçacıklarının (nanoparçacıkların) sulu çözeltisi, odaklanmış bir ışık demetiyle aydınlatılır. Işığın bir bölümü nanoparçacıklar tarafından soğurulur; ısınan nanoparçacıklar, sulu çözeltinin tamamını ısıtmadan, kendi çevrelerinde yerel olarak buhar üretir. Buhar, sistemden ayrılan buhar kabarcıkları biçiminde dışarı çıkar. Sürecin tüm ayrıntıları günümüzde tam olarak anlaşılmış değildir; ancak temel sürecin, metal nanoparçacıklardaki kolektif elektron salınımları olarak adlandırılan salınımlar yoluyla ışığın soğurulması olduğu bilinmektedir. Bu aygıt, plazmonik buhar üretici olarak bilinir.



Şekil 2.1 (a) Koordinat sisteminin merkezine yerleştirilmiş, yarıçapı R olan, elektriksel olarak nötr küresel bir nanoparçacık. **(b)** Homojen pozitif yük yoğunluğu ρ olan (kırmızı) ve içinde yarıçapı R_1 olan, merkezi $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$ kadar yer değiştirmiş, elektriksel olarak nötr daha küçük bir küresel bölge (0, sarı) bulunan bir küre. **(c)** Nanoparçacıktaki gümüş iyonlarının oluşturduğu, pozitif yük yoğunluğu ρ olan küre, koordinat sisteminin merkezinde sabittir. Elektron bulutunun oluşturduğu, negatif yük yoğunluğu $-\rho$ olan küresel bölgenin (mavi) merkezi $\mathbf{x}_p$ kadar yer değiştirmiştir; burada $x_p \ll R$ 'dir. **(d)** Homojen bir dış elektrik alan $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$. Zamana bağlı $\mathbf{E}_0$ için elektron bulutu $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$ hızıyla hareket eder. **(e)** Nanoparçacıkların sulu çözeltisini içeren, z eksenini boyunca yayılan, açısal frekansı ω_p ve şiddeti S olan tek renkli ışıkla aydınlatılan dikdörtgenler prizması biçimindeki kap ($h \times h \times a$).

Tek bir küresel gümüş nanoparçacık

Bu soru boyunca, yarıçapı $R = 10,0 \text{ nm}$ olan ve merkezi koordinat sisteminin başlangıç noktasında sabit tutulan küresel bir gümüş nanoparçacığı ele alıyoruz; bkz. Şekil 2.1(a). Tüm hareketler, kuvvetler ve sürücü alanlar, birim vektörü $\mathbf{e}_x$ olan yatay x eksenine paraleldir. Nanoparçacık, herhangi bir gümüş atomuna bağlı olmaksızın nanoparçacığın tüm hacmi içinde hareket eden serbest (iletim) elektronları içerir. Her gümüş atomu, böyle bir serbest elektron vermiş olan pozitif bir iyondur.

Kısım	Soru	Puan
2.1	Şu nicelikleri bulunuz: Nanoparçacığın hacmi V ve kütlesi M , parçacıktaki gümüş iyonlarının sayısı N ve yük yoğunluğu ρ ile serbest elektronların sayı yoğunluğu n , toplam yükü Q ve toplam kütlesi m_0 .	0.7

Yüklü bir kürenin içindeki elektriksel olarak nötr bir bölgede elektrik alan

Sorunun geri kalanında, tüm malzemelerin bağıl dielektrik geçirgenliğinin $\epsilon = 1$ olduğunu varsayınız. Homojen yük yoğunluğu ρ ve yarıçapı R olan yüklü bir kürenin içinde, ters işaretli $-\rho$ yük yoğunluğu eklenerek yarıçapı R_1 olan küçük, elektriksel olarak nötr bir küresel bölge oluşturulur. Bu bölgenin merkezi, R yarıçaplı kürenin merkezinden $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$ kadar ötelenmiştir; bkz. Şekil 2.1(b).

Kısım	Soru	Puan
2.2	Elektriksel olarak nötr bölgenin içindeki elektrik alanın $\mathbf{E} = A(\rho/\epsilon_0) \mathbf{x}_d$ biçiminde homojen olduğunu gösteriniz ve A katsayısını belirleyiniz.	1.2

Yer değiştirmiş elektron bulutuna etki eden geri çağırıcı kuvvet

Aşağıda serbest elektronların kolektif hareketini inceliyoruz. Bu nedenle elektronları, homojen yük yoğunluğu $-\rho$ ve merkez konumu $\mathbf{x}_p$ olan, negatif yüklü tek bir küre olarak modelliyoruz. Bu küre, koordinat sisteminin başlangıç noktasında sabit tutulan pozitif yüklü kürenin (gümüş iyonlarının) merkezine göre x eksen boyunca hareket edebilir; bkz. Şekil 2.1(c). Bir dış kuvvetin, $\mathbf{F}_{\text{ext}}$, elektron bulutunu $\mathbf{x}_p = x_p \mathbf{e}_x$ yeni denge konumuna getirdiğini ve $|x_p| \ll R$ olduğunu varsayınız. Nanoparçacığın karşılıklı uçlarındaki çok küçük net yükler dışında, iç kısmının büyük bölümü elektriksel olarak nötr kalır.

Kısım	Soru	Puan
2.3	Şu iki niceliği x_p ve n cinsinden ifade ediniz: Elektron bulutuna etki eden geri çağırıcı kuvvet $\mathbf{F}$ ve yer değiştirme sırasında elektron bulutu üzerinde yapılan iş W_{el} .	1.0

Sabit bir dış elektrik alan içindeki küresel gümüş nanoparçacık

Bir nanoparçacık boşluğa yerleştirilir ve uygulanan statik, homojen $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$ elektrik alanından kaynaklanan bir $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ dış kuvvetinin etkisinde kalır. Bu kuvvet, elektron bulutunu $|x_p|$ kadar küçük bir mesafe öteler; burada $|x_p| \ll R$ 'dir.

Kısım	Soru	Puan
2.4	Elektron bulutunun yer değiştirmesi x_p 'yi E_0 ve n cinsinden bulunuz. Nanoparçacığın merkezindeki yz düzleminde geçen elektron yükü miktarı $-\Delta Q$ 'yu n , R ve x_p cinsinden belirleyiniz.	0.6

Gümüş nanoparçacığın eşdeğer kapasitansı ve endüktansı

Hem sabit hem de zamana bağlı E_0 alanı için nanoparçacık, eşdeğer bir elektrik devresi olarak modellenebilir. Eşdeğer kapasitans, ΔQ yüklerinin ayrılması için yapılan W_{el} işi ile $\pm \Delta Q$ yükü taşıyan bir kondansatörün enerjisi ilişkilendirilerek bulunabilir. Yüklerin ayrılması, eşdeğer kondansatörün uçları arasında belirli bir V_0 eşdeğer gerilimine yol açar.

Kısım	Soru	Puan
2.5a	Sistemin eşdeğer kapasitansı C 'yi ϵ_0 ve R cinsinden ifade ediniz ve değerini bulunuz.	0.7
2.5b	Bu kapasitans için, ΔQ yükünü biriktirmek amacıyla eşdeğer kondansatöre uygulanması gereken V_0 eşdeğer gerilimini E_0 ve R cinsinden belirleyiniz.	0.4

Zamana bağlı bir E_0 alanı için elektron bulutu $v = ve_x$ hızıyla hareket eder; Şekil 2.1(d). Bulutun kinetik enerjisi W_{kin} 'dir ve sabit yz düzleminde geçen bir I elektrik akımı oluşturur. Elektron bulutunun kinetik enerjisi, üzerinden I akımı geçen, endüktansı L olan eşdeğer bir bobinin enerjisi olarak ele alınabilir.

Kısım	Soru	Puan
2.6a	Hem W_{kin} 'i hem de I 'yı v hızı cinsinden ifade ediniz.	0.7
2.6b	Eşdeğer endüktans L 'yi parçacığın yarıçapı R , elektron yükü e ve kütlesi m_e ile elektron sayı yoğunluğu n cinsinden ifade ediniz ve değerini hesaplayınız.	0.5

Gümüş nanoparçacığın plazmon rezonansı

Yukarıdaki analizden, elektron bulutunun denge konumundan uzaklaştırılıp serbest bırakılmasıyla ortaya çıkan hareketin, rezonansta salınan ideal bir LC devresiyle modellenebileceği sonucu çıkar. Elektron bulutunun bu dinamik modu, plazmon rezonansı olarak bilinir ve açıl plazmon frekansı ω_p olarak adlandırılan frekansta salınır.

Kısım	Soru	Puan
2.7a	Elektron bulutunun açıl plazmon frekansı ω_p için elektron yükü e ve kütlesi m_e , elektron sayı yoğunluğu n ve elektriksel geçirgenlik ϵ_0 cinsinden bir ifade bulunuz.	0.5
2.7b	ω_p 'yi rad/s cinsinden ve boşlukta açıl frekansı $\omega = \omega_p$ olan ışığın dalga boyu λ_p 'yi nm cinsinden hesaplayınız.	0.4

Plazmon frekansındaki ışıkla aydınlatılan gümüş nanoparçacık

Sorunun geri kalanında nanoparçacık, açıl plazmon frekansı ω_p 'de, gelen ışık şiddeti $S = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2 = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$ olan tek renkli ışıkla aydınlatılmaktadır. Dalga boyu büyük olduğundan, $\lambda_p \gg R$, nanoparçacığın homojen, harmonik olarak salınan bir $E_0 = -E_0 \cos(\omega_p t)e_x$ alanına yerleştirildiği kabul edilebilir. E_0 tarafından sürülen elektron bulutunun merkezi $x_p(t)$, aynı frekansta, $v = dx_p/dt$ hızıyla ve sabit x_0 genliğiyle salınır. Elektronların bu salınım hareketi, ışığın soğurulmasına yol açar. Parçacığın aldığı enerji ya parçacık içinde Joule ısınmasına dönüşür ya da parçacık tarafından saçılan ışık olarak yeniden yayılır.

Joule ısınması, rastgele gerçekleşen esnek olmayan çarpışmalardan kaynaklanır. Bu çarpışmalarda herhangi bir serbest elektron zaman zaman bir gümüş iyonuna çarpar ve kinetik enerjisinin tamamını kaybeder; bu enerji gümüş iyonlarının titreşimlerine (ısıya) dönüşür. Çarpışmalar arasındaki ortalama süre $\tau \gg 1/\omega_p$ 'dir; gümüş nanoparçacık için $\tau = 5.24 \times 10^{-15}$ s değerini kullanıyoruz.

Kısım	Soru	Puan
2.8a	Nanoparçacıkta zaman ortalamalı Joule ısınma gücü P_{heat} ve akımın karesinin zaman ortalaması $\langle I^2 \rangle$ için, elektron bulutunun hızının karesinin zaman ortalamasını $\langle v^2 \rangle$ açıkça içeren ifadeler bulunuz.	1.0
2.8b	Elektron bulutunun I akımı nedeniyle P_{heat} Joule ısınma gücüne sahip nanoparçacığın eşdeğer direnç modelindeki eşdeğer ohmik direnç R_{heat} için bir ifade bulunuz. R_{heat} 'in sayısal değerini hesaplayınız.	1.0

Gelen ışık demeti, salınan elektron bulutundan saçılma (yeniden yayılma) yoluyla zaman ortalamalı P_{scat} gücünü kaybeder. P_{scat} , saçılma kaynağının genliği x_0 , yükü Q , açısal frekansı ω_p ve ışığın özelliklerine (ışığın boşluktaki hızı c ve boşluğun elektriksel geçirgenliği ϵ_0) bağlıdır. Bu dört değişken cinsinden P_{scat} şu şekilde verilir:

$$P_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}.$$

Kısım	Soru	Puan
2.9	P_{scat} 'ı kullanarak, eşdeğer bir direnç modelindeki eşdeğer saçılma direnci R_{scat} için (R_{heat} 'e benzer biçimde) bir ifade bulunuz ve değerini hesaplayınız.	1.0

Yukarıdaki eşdeğer devre elemanları, gümüş nanoparçacığın bir seri LCR devre modelinde birleştirilir. Bu devre, gelen ışığın E_0 elektrik alanının belirlediği, harmonik olarak salınan $V = V_0 \cos(\omega_p t)$ eşdeğer gerilimiyle sürülür.

Kısım	Soru	Puan
2.10a	Plazmon rezonansında, $\omega = \omega_p$, gelen ışığın elektrik alanının E_0 genliğini içeren, zaman ortalamalı güç kayıpları P_{heat} ve P_{scat} için ifadeler türetiniz.	1.2
2.10b	E_0 , P_{heat} ve P_{scat} 'in sayısal değerlerini hesaplayınız.	0.3

Işıklı buhar üretimi

Gümüş nanoparçacıkların, sayı yoğunluğu $n_{\text{np}} = 7.3 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$ olan sulu bir çözeltisi hazırlanır. Çözelti, boyutları $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1.0 \text{ cm}^3$ olan dikdörtgenler prizması biçimindeki saydam bir kaba konur ve yukarıdakiyle aynı $S = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$ şiddetinde, plazmon frekansındaki ışıqla dik gelişte aydınlatılır; bkz. Şekil 2.1(e). Suyun sıcaklığı $T_{\text{wa}} = 20^\circ \text{C}$ 'dir. Gözlemlerle makul ölçüde uyumlu olarak, kararlı durumda nanoparçacıktaki Joule ısınmasının tamamının, suyun sıcaklığını artırmadan, $T_{\text{st}} = 110^\circ \text{C}$ sıcaklığında buhar üretimine harcadığını varsayıyoruz.

Plazmonik buhar üreticinin termodinamik verimi η , $\eta = P_{\text{st}}/P_{\text{tot}}$ güç oranıyla tanımlanır. Burada P_{st} , kabın tamamında buhar üretimine harcanan güç; P_{tot} ise kaba giren ışığın toplam gücüdür.

Herhangi bir nanoparçacık, zamanın büyük bölümünde su yerine buharla çevrilidir; dolayısıyla boşluktaymış gibi betimlenebilir.

Kısım	Soru	Puan
2.11a	Plazmon frekansında ve S şiddetindeki ışıqla aydınlatılırken, plazmonik buhar üreticinin saniyede ürettiği toplam buhar kütlesi μ_{st} 'yi hesaplayınız.	0.6
2.11b	Plazmonik buhar üreticinin termodinamik verimi η 'nin sayısal değerini hesaplayınız.	0.2

Veri sayfası: Fiziksel parametreler tablosu

Fiziksel parametre	Değer
Işığın boşluktaki hızı	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Planck sabitinin 2π 'ye bölümü	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Evrensel kütleçekim sabiti	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Yerçekimi ivmesi	$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$
Temel yük	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Boşluğun elektriksel geçirgenliği	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Elektron kütlesi	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Avogadro sabiti	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmann sabiti	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Taşı göktaşının özgül ısı	$c_{\text{sm}} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Taşı göktaşının ısı iletkenliği	$k_{\text{sm}} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Taşı göktaşının yoğunluğu	$\rho_{\text{sm}} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Taşı göktaşının erime noktası	$T_{\text{sm}} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$
Taşı göktaşının özgül erime ısı	$L_{\text{sm}} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
Gümüşün molar kütlesi	$M_{\text{Ag}} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$
Gümüşün yoğunluğu	$\rho_{\text{Ag}} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
Gümüşün özgül ısı kapasitesi	$c_{\text{Ag}} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Suyun molar kütlesi	$M_{\text{wa}} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$
Suyun yoğunluğu	$\rho_{\text{wa}} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Suyun özgül ısı kapasitesi	$c_{\text{wa}} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Suyun buharlaşma ısı	$L_{\text{wa}} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$
Suyun kaynama sıcaklığı	$T_{100} = 100^\circ \text{C} = 373.15 \text{ K}$
Buzul buzunun yoğunluğu	$\rho_{\text{ice}} = 0.917 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Buharın özgül ısı kapasitesi	$c_{\text{st}} = 2.080 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Dünya'nın kütlesi	$m_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Dünya'nın yarıçapı	$R_E = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$
Güneş'in kütlesi	$m_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Güneş'in yarıçapı	$R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$
Ortalama Güneş-Dünya uzaklığı	$a_E = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Burada $e > 0$, $Q < 0$ 'dır ve W_{el} , yükleri ayırmak için dışarıdan yapılan pozitif işi gösterir. Devre akımının yönünü, $I = d(\Delta Q)/dt$ olacak ve elektronlar $+x$ yönünde hareket ettiğinde pozitif olacak şekilde seçiniz.

• 2.1

$$\begin{aligned} V &= 4.19 \times 10^{-24} \text{ m}^3, & M &= 4.39 \times 10^{-20} \text{ kg}, \\ N &= 2.45 \times 10^5, & \rho &= +9.38 \times 10^9 \text{ C m}^{-3}, \\ n &= 5.85 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}, & Q &= -3.93 \times 10^{-14} \text{ C}, & m_0 &= 2.23 \times 10^{-25} \text{ kg}. \end{aligned}$$

• 2.2

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{x}_d, \quad \boxed{A = \frac{1}{3}}.$$

• 2.3

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi n^2 e^2 R^3}{9\varepsilon_0} \mathbf{x}_p, \quad W_{\text{el}} = \frac{2\pi n^2 e^2 R^3}{9\varepsilon_0} x_p^2.$$

• 2.4

$$x_p = \frac{3\varepsilon_0 E_0}{ne}, \quad -\Delta Q = -ne\pi R^2 x_p.$$

• 2.5a

$$C = \frac{9}{4} \pi \varepsilon_0 R = 6.26 \times 10^{-19} \text{ F}.$$

• 2.5b

$$V_0 = \frac{4}{3} R E_0.$$

• 2.6a

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{2\pi}{3} n m_e R^3 v^2, \quad I = ne\pi R^2 v.$$

• 2.6b

$$L = \frac{4m_e}{3\pi ne^2 R} = 2.57 \times 10^{-14} \text{ H}.$$

• 2.7a

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{3\varepsilon_0 m_e}}.$$

• 2.7b

$$\omega_p = 7.88 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}, \quad \lambda_p = 239 \text{ nm}.$$

• 2.8a

$$P_{\text{heat}} = \frac{m_0}{2\tau} \langle v^2 \rangle, \quad \langle I^2 \rangle = (ne\pi R^2)^2 \langle v^2 \rangle.$$

• 2.8b

$$R_{\text{heat}} = \frac{L}{2\tau} = \frac{2m_e}{3\pi ne^2 R \tau} = 2.46 \text{ } \Omega.$$

• 2.9

$$R_{\text{scat}} = \frac{8R^2 \omega_p^2}{27\pi \varepsilon_0 c^3} = 2.45 \text{ } \Omega.$$

• 2.10a

$$P_{\text{heat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{heat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}, \quad P_{\text{scat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{scat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}.$$

• 2.10b

$$E_0 = 2.74 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}, \quad P_{\text{heat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}, \quad P_{\text{scat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}.$$

• 2.11a, kabın tamamında düzgün aydınlatma kullanıldığında:

$$\mu_{\text{st}} \simeq 1.9 \times 10^{-3} \text{ kg s}^{-1} = 1.9 \text{ g s}^{-1}.$$

• 2.11b, aynı yaklaşımla:

$$\eta \simeq 0.50 = 50\%.$$

Çözüm

Aşağıdaki tüm elektrostatik ve devre sonuçlarında, belirtilen rijit, düzgün yüklü elektron bulutu modeli kullanılır. Yer değiştirmeye bağlı sonuçlarda, $|x_p|/R \ll 1$ için başat terimler tutulur.

2.1

Parçacık bir küredir; dolayısıyla

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} (1.00 \times 10^{-8})^3 = 4.19 \times 10^{-24} \text{ m}^3.$$

Kütlesi

$$M = \rho_{\text{Ag}} V = 4.39 \times 10^{-20} \text{ kg}.$$

Gümüş atomlarının, dolayısıyla tek yüklü gümüş iyonlarının sayısı

$$N = \frac{M}{M_{\text{Ag}}} N_A = 2.45 \times 10^5.$$

İyon başına bir iletim elektronu vardır. Böylece

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\rho_{\text{Ag}} N_A}{M_{\text{Ag}}} = 5.85 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

Pozitif iyonik yük yoğunluğu

$$\rho = ne = +9.38 \times 10^9 \text{ C m}^{-3}.$$

Elektronlar için

$$Q = -Ne = -3.93 \times 10^{-14} \text{ C}, \quad m_0 = Nm_e = 2.23 \times 10^{-25} \text{ kg}.$$

2.2

Düzgün yüklü bir kürenin içindeki, onunla eş merkezli ve yarıçapı r olan küresel Gauss yüzeyine Gauss yasasını uygulayalım:

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho(4\pi r^3/3)}{\epsilon_0}.$$

Buna göre iç bölgedeki alan

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}.$$

Nötr bölge, merkezi $\mathbf{x}_d$ 'de olan, yük yoğunluğu $-\rho$ olan bir kürenin üst üste bindirilmesiyle oluşturulur. Bu küçük kürenin içindeki bir noktada oluşturduğu alan

$$\mathbf{E}_-(\mathbf{r}) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\mathbf{r} - \mathbf{x}_d).$$

İki alan toplandığında

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{x}_d.$$

$\mathbf{r}$ konumuna bağlı terimler birbirini götürür; dolayısıyla alan homojendir ve

$$\boxed{A = \frac{1}{3}}.$$

2.3

Yer değiştirmiş elektron bulutunun yük yoğunluğu $-ne$, sabit iyonların yük yoğunluğu ise $+ne$ 'dir.

2.2'ye göre, bunların örtüşen nötr iç bölgesindeki alan

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = \frac{ne}{3\varepsilon_0}\mathbf{x}_p.$$

Yer değiştirmede birinci mertebeye kadar, bu alan buluta etki eden geri çağırıcı kuvveti verir:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}_{\text{int}} = -\frac{Nne^2}{3\varepsilon_0}\mathbf{x}_p.$$

Örtüşmeyen küçük bölgeler yalnızca daha yüksek mertebeli terimleri etkiler. $N = 4\pi nR^3/3$ kullanılarak

$$\boxed{\mathbf{F} = -\frac{4\pi n^2 e^2 R^3}{9\varepsilon_0}\mathbf{x}_p}.$$

Etkin yay sabitini şöyle tanımlayalım:

$$k = \frac{Nne^2}{3\varepsilon_0}.$$

Sıfırdan x_p 'ye kadar yarı statik bir yer değiştirmede dışarıdan yapılan iş

$$W_{\text{el}} = -\int_0^{x_p} F_x(x) dx = \int_0^{x_p} kx dx = \frac{1}{2}kx_p^2.$$

Dolayısıyla

$$\boxed{W_{\text{el}} = \frac{Nne^2}{6\varepsilon_0}x_p^2 = \frac{2\pi n^2 e^2 R^3}{9\varepsilon_0}x_p^2}.$$

Bu, 2.5'te kullanılan depolanmış elektrostatik enerjidir. Geri çağırıcı kuvvetin kendisinin yaptığı iş $-W_{\text{el}}$ 'dir.

2.4

Dış alan $-x$ yönündedir; dolayısıyla negatif elektron bulutuna etki eden kuvvet $+x$ yönündedir:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = Q\mathbf{E}_0 = NeE_0\mathbf{e}_x.$$

Dengede

$$NeE_0 - \frac{Nne^2}{3\varepsilon_0}x_p = 0.$$

Böylece

$$x_p = \frac{3\varepsilon_0 E_0}{ne}.$$

Küçük bir x_p ötelemesi için, merkez düzleminden geçen elektron bulutunun hacmi başat mertebede

$$\Delta V = \pi R^2 x_p.$$

Yük yoğunluğuyla çarpıldığında

$$-\Delta Q = -ne\pi R^2 x_p.$$

Böylece pozitif yük ayrışması değişkeni

$$\Delta Q = ne\pi R^2 x_p = 3\pi\varepsilon_0 R^2 E_0.$$

2.5a

Elektrostatik enerjiyi eşdeğer kondansatörün enerjisine eşitleyelim:

$$W_{\text{el}} = \frac{(\Delta Q)^2}{2C}.$$

Yukarıdaki sonuçları kullanarak

$$C = \frac{(ne\pi R^2 x_p)^2}{2(2\pi n^2 e^2 R^3 x_p^2 / (9\varepsilon_0))} = \frac{9}{4}\pi\varepsilon_0 R.$$

Dolayısıyla

$$C = 6.26 \times 10^{-19} \text{ F}.$$

2.5b

Eşdeğer gerilim

$$V_0 = \frac{\Delta Q}{C}.$$

Yerine koyma işlemiyle

$$V_0 = \frac{3\pi\varepsilon_0 R^2 E_0}{(9/4)\pi\varepsilon_0 R},$$

böylece

$$V_0 = \frac{4}{3} R E_0.$$

2.6a

N elektronun tümü kolektif harekete katılır. Bunların kinetik enerjisi

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} N m_e v^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{2\pi}{3} n m_e R^3 v^2.$$

Yük ayrışması bağıntısının türevi alındığında

$$I = \frac{d(\Delta Q)}{dt} = ne\pi R^2 v.$$

Burada pozitif devre akımı, $-x$ yönündeki konvansiyonel akıma karşılık gelir. Bunun yerine düzlemde geçen konvansiyonel akım $+x$ yönünde pozitif tanımlansaydı, $I_x = -ne\pi R^2 v$ olurdu. Enerji ve direnç sonuçları I^2 'ye bağlı olduğundan, bu yön seçimi onları etkilemez.

2.6b

Kinetik enerjiyi eşdeğer bobinin enerjisiyle özdeşleştirelim:

$$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}m_0v^2.$$

Buradan

$$L = \frac{m_0}{(ne\pi R^2)^2}.$$

$m_0 = (4\pi R^3/3)nm_e$ kullanılarak

$$L = \frac{4m_e}{3\pi ne^2 R} = 2.57 \times 10^{-14} \text{ H}.$$

2.7a

Serbestçe salınan ideal bir LC devresi için

$$L \frac{d^2(\Delta Q)}{dt^2} + \frac{\Delta Q}{C} = 0,$$

böylece

$$\omega_p^2 = \frac{1}{LC}.$$

Şu bağıntıdan

$$LC = \frac{4m_e}{3\pi ne^2 R} \frac{9\pi \epsilon_0 R}{4} = \frac{3\epsilon_0 m_e}{ne^2},$$

şunu elde ederiz:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{3\epsilon_0 m_e}}.$$

Aynı sonuç doğrudan $\omega_p^2 = k/m_0$ bağıntısından da elde edilir.

2.7b

Verilen sabitler yerine konduğunda

$$\omega_p = 7.88 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}.$$

$\omega = 2\pi c/\lambda$ olduğundan

$$\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} = 2.39 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

Böylece

$$\lambda_p = 239 \text{ nm}.$$

2.8a

Belirtilen çarpışma modelinde, her elektron bir çarpışmada kolektif harekete ait kinetik enerjisinin tamamını kaybeder. Çarpışma başına zaman ortalama enerji kaybı

$$\frac{1}{2}m_e\langle v^2 \rangle.$$

Tüm elektronlar arasında saniyede ortalama N/τ çarpışma gerçekleşir. Çarpışma zamanlarının rastgele olması, bir periyot üzerinden ortalaması alınmış kinetik enerjiyi kullanmamıza olanak verir; böylece

$$P_{\text{heat}} = \frac{Nm_e}{2\tau}\langle v^2 \rangle = \frac{m_0}{2\tau}\langle v^2 \rangle.$$

Akım-hız bağıntısından

$$\langle I^2 \rangle = (ne\pi R^2)^2 \langle v^2 \rangle.$$

2.8b

Eşdeğer direnç şu bağıntıyla tanımlanır:

$$P_{\text{heat}} = R_{\text{heat}} \langle I^2 \rangle.$$

Buna göre

$$R_{\text{heat}} = \frac{m_0}{2\tau(ne\pi R^2)^2} = \frac{L}{2\tau}.$$

Böylece

$$R_{\text{heat}} = \frac{2m_e}{3\pi ne^2 R\tau} = 2.46 \, \Omega.$$

$1/2$ çarpanı, soruda verilen özel modelde çarpışma başına kaybedilen $\frac{1}{2}m_e v^2$ kinetik enerjisinden kaynaklanır.

2.9

Genliği x_0 olan harmonik hareket için

$$x_p(t) = x_0 \cos(\omega_p t + \phi),$$

ve dolayısıyla

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}\omega_p^2 x_0^2.$$

Bu nedenle

$$\langle I^2 \rangle = \frac{1}{2}(ne\pi R^2)^2 \omega_p^2 x_0^2.$$

Saçılma direncini şu bağıntıyla tanımlayalım:

$$P_{\text{scat}} = R_{\text{scat}} \langle I^2 \rangle.$$

Verilen ışıma formülünü kullanarak

$$R_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \frac{2}{(ne\pi R^2)^2 \omega_p^2 x_0^2}.$$

Şu bağıntılardan

$$Q = -\frac{4}{3}\pi R^3 ne, \quad \frac{Q^2}{(ne\pi R^2)^2} = \frac{16R^2}{9},$$

şunu elde ederiz:

$$R_{\text{scat}} = \frac{8R^2\omega_p^2}{27\pi\epsilon_0 c^3} = 2.45 \, \Omega.$$

Eşdeğer biçimde

$$R_{\text{scat}} = \frac{8ne^2 R^2}{81\pi\epsilon_0^2 m_e c^3}.$$

2.10a

Hem ısınma hem de saçılma, aynı salınımlı akımdan enerji uzaklaştırır. Bu nedenle eşdeğer dirençleri seri devrede toplanır:

$$R_{\Sigma} = R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}}.$$

$\omega = \omega_p = 1/\sqrt{LC}$ olduğunda endüktif ve kapasitif reaktanslar birbirini götürür:

$$\omega_p L - \frac{1}{\omega_p C} = 0.$$

Böylece akım, sürücü gerilimle aynı fazdadır ve genliği

$$I_0 = \frac{V_0}{R_{\Sigma}} = \frac{4RE_0}{3R_{\Sigma}}.$$

Sinüzoidal bir akım için

$$\langle I^2 \rangle = \frac{I_0^2}{2} = \frac{8R^2 E_0^2}{9R_{\Sigma}^2}.$$

Dolayısıyla iki ortalama güç

$$P_{\text{heat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{heat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}$$

ve

$$P_{\text{scat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{scat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}.$$

2.10b

Belirtilen gelen ışık şiddetinden

$$S = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2,$$

böylece

$$E_0 = \sqrt{\frac{2S}{c\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2(1.00 \times 10^6)}{(2.998 \times 10^8)(8.854 \times 10^{-12})}}.$$

Buna göre

$$E_0 = 2.74 \times 10^4 \, \text{V m}^{-1}.$$

Yuvarlanmamış ara değerler kullanılarak

$$V_0 = 3.66 \times 10^{-4} \text{ V}, \quad R_\Sigma = 4.910 \, \Omega, \quad I_0 = 7.45 \times 10^{-5} \text{ A}.$$

Dolayısıyla

$$\boxed{P_{\text{heat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}}, \quad \boxed{P_{\text{scat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}}.$$

Bunların neredeyse eşit olması, iki direncin neredeyse eşit olmasından kaynaklanır.

Yer değiştirme genliği de kontrol edilebilir:

$$x_0 = \frac{I_0}{ne\pi R^2 \omega_p} = 3.21 \times 10^{-15} \text{ m},$$

dolayısıyla $x_0/R = 3.21 \times 10^{-7} \ll 1$. Ayrıca $\omega_p \tau = 41.3$ olup bu, salınım ve çarpışma zaman ölçeklerinin birbirinden ayrık olduğu varsayımıyla tutarlıdır.

2.11a

2.10'daki parçacık başına ısınma gücünü aydınlatılan hacmin tamamına uygulayalım. Burada düzgün aydınlatma kabul edilir; zayıflama veya çoklu saçılma için ek bir model kullanılmaz.

Kabın hacmi

$$V_{\text{vessel}} = h^2 a = (0.10)^2 (0.010) = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3.$$

Kapta

$$N_{\text{np}} = n_{\text{np}} h^2 a = 7.3 \times 10^{11}$$

nanoparçacık bulunur. Bunlardaki Joule ısınmasının tamamının buhar ürettiği varsayılır; dolayısıyla

$$P_{\text{st}} = N_{\text{np}} P_{\text{heat}} = 4.98 \times 10^3 \text{ W}.$$

Buhara dönüşen her kilogram, önce 20°C 'den 100°C 'ye ısıtılmalı, sonra buharlaştırılmalı ve son olarak 110°C 'ye ısıtılmalıdır. Birim kütle başına gerekli enerji

$$q_{\text{st}} = c_{\text{wa}}(T_{100} - T_{\text{wa}}) + L_{\text{wa}} + c_{\text{st}}(T_{\text{st}} - T_{100}).$$

Sayısal olarak

$$\begin{aligned} q_{\text{st}} &= (4.181 \times 10^3)(80) + 2.260 \times 10^6 + (2.080 \times 10^3)(10) \\ &= 2.61528 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}. \end{aligned}$$

Suyun geri kalanının 20°C 'de kalması, buharlaşan kısmın ısıtılması gereğini ortadan kaldırmaz.

Enerjinin korunumu

$$\mu_{\text{st}} q_{\text{st}} = P_{\text{st}}.$$

Böylece

$$\mu_{\text{st}} = \frac{n_{\text{np}} h^2 a P_{\text{heat}}}{c_{\text{wa}}(T_{100} - T_{\text{wa}}) + L_{\text{wa}} + c_{\text{st}}(T_{\text{st}} - T_{100})} = 1.904 \times 10^{-3} \text{ kg s}^{-1}.$$

Kabın boyutları ve sayı yoğunluğu verilerinin duyarlılığına göre

$$\boxed{\mu_{\text{st}} \simeq 1.9 \text{ g s}^{-1}}.$$

2.11b

Demet, alanı h^2 olan yüzeyden dik olarak girer; dolayısıyla

$$P_{\text{tot}} = Sh^2 = (1.00 \times 10^6)(0.10)^2 = 1.00 \times 10^4 \text{ W}.$$

Bu nedenle

$$\eta = \frac{P_{\text{st}}}{P_{\text{tot}}} = \frac{n_{\text{np}} h^2 a P_{\text{heat}}}{Sh^2} = \frac{n_{\text{np}} a P_{\text{heat}}}{S}.$$

Sayısal olarak

$$\eta = 0.4979,$$

ya da uygun biçimde yuvarlandığında

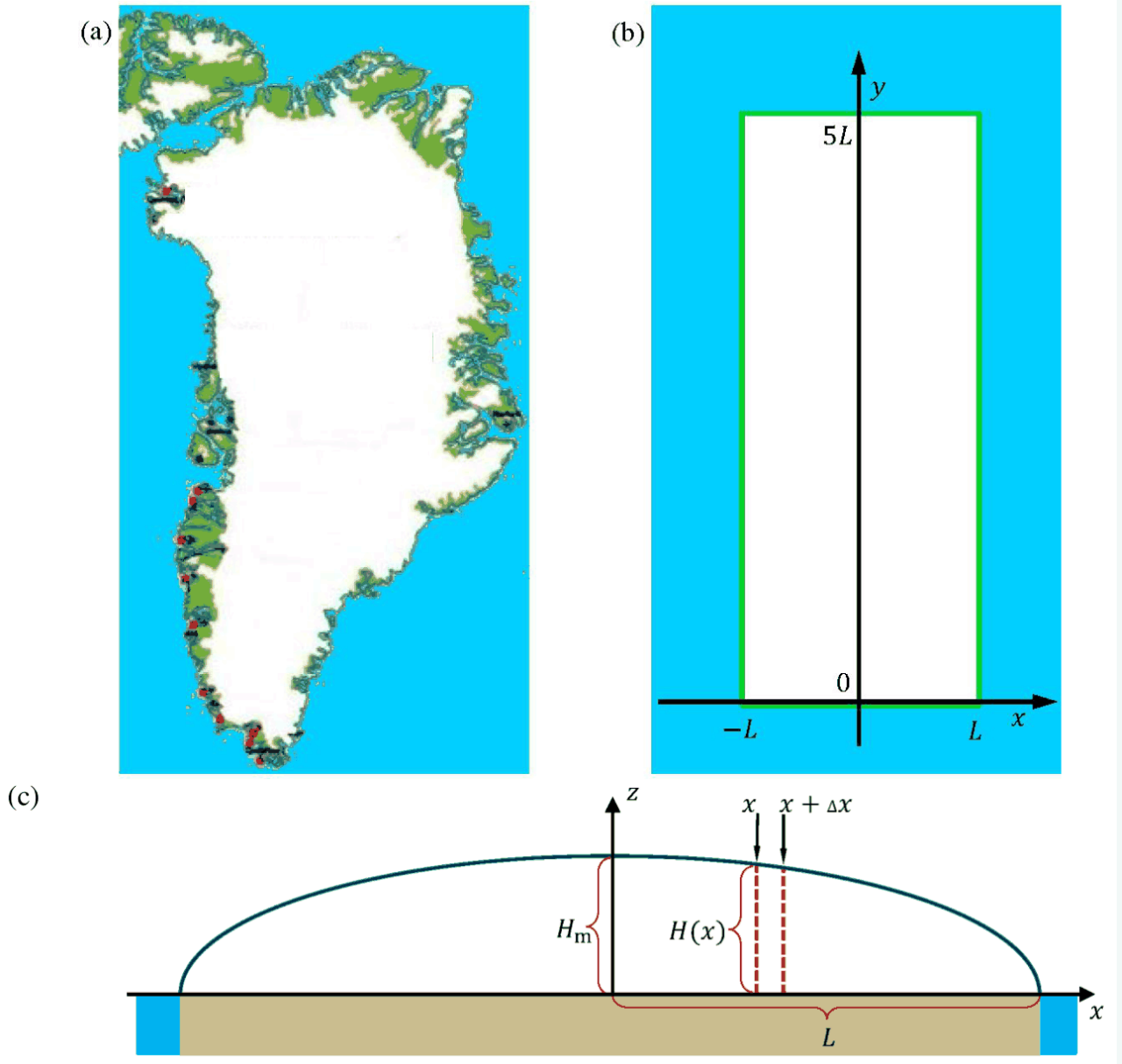
$$\boxed{\eta \simeq 0.50 = 50\%}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Grönland Buz Örtüsü

Giriş

Bu soru, dünyanın en büyük ikinci buzulu olan Grönland buz örtüsünün fiziğiyle ilgilidir, Şekil 3.1(a). İdealleştirilmiş bir modelde Grönland, genişliği $2L$, uzunluğu $5L$ olan, zemini deniz seviyesinde bulunan ve tamamı sıkıştırılmaz buzla (sabit yoğunluk ρ_{ice}) kaplı dikdörtgen bir ada olarak ele alınır; bkz. Şekil 3.1(b). Buz örtüsünün yükseklik profili $H(x)$, y koordinatına bağlı değildir ve $x = \pm L$ kıyılarında sıfırdan başlayarak, buz bölümü çizgisi olarak bilinen ortadaki kuzey-güney eksenini (y eksenini) boyunca en büyük yüksekliği olan H_m 'ye ulaşır; bkz. Şekil 3.1(c).



Şekil 3.1 (a) Buz örtüsünün kapladığı alanı (beyaz), buzla kaplı olmayan kıyı bölgelerini (yeşil) ve çevresindeki okyanusu (mavi) gösteren Grönland haritası. **(b)** Grönland buz örtüsünün, xy düzleminde kenar uzunlukları $2L$ ve $5L$ olan dikdörtgen bir alanı kapladığı kaba model. Buz örtüsünün yüksekliğinin en büyük değeri H_m 'yi aldığı buz bölümü çizgisi, y eksenı boyunca uzanır. **(c)** Buz örtüsünün yükseklik profilini $H(x)$ (mavi çizgi) gösteren düşey kesit (xz düzlemi). $H(x)$, $0 < y < 5L$ için y koordinatından bağımsızdır; $y = 0$ ve $y = 5L$ 'de ise aniden sıfıra düşer. z eksenı, buz bölümü çizgisinin konumunu gösterir. Daha açık görülebilmesi için düşey boyutlar yatay boyutlara göre büyütülmüştür. Buzun yoğunluğu ρ_{ice} sabittir.

İki yararlı formül

Bu soruda şu integralden yararlanabilirsiniz:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx = \frac{2}{3}$$

ve $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ yaklaşımını kullanabilirsiniz; bu yaklaşım $|\alpha x| \ll 1$ için geçerlidir.

Buz örtüsünün yükseklik profili

Kısa zaman ölçeklerinde buzul, yükseklik profili $H(x)$ sabit olan sıkıştırılmaz bir hidrostatik sistemdir.

3.1	Buz örtüsü içindeki basınç $p(x, z)$ için, yerden düşey yükseklik z ve buz bölümü çizgisine uzaklık x 'in fonksiyonu olarak bir ifade yazınız. Atmosfer basıncını ihmal ediniz.	0.3
-----	---	-----

Buz örtüsünün dengede bulunan ve x ile $x + \Delta x$ arasında küçük bir yatay taban alanı $\Delta x \Delta y$ 'yi kaplayan düşey bir dilimini ele alınız; bkz. Şekil 3.1(c)'deki kırmızı kesikli çizgiler. Δy 'nin büyüklüğü önemli değildir. Dilimin merkeze bakan tarafı ile kıyıya bakan tarafı arasındaki yükseklik farkından kaynaklanan, iki düşey yüzüne etkiyen net yatay kuvvet bileşeni ΔF , zeminin $\Delta x \Delta y$ taban alanına uyguladığı $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$ sürtünme kuvvetiyle dengelenir; burada $S_b = 100$ kPa'dır.

3.2a	Verilen bir x değeri için, $\Delta x \rightarrow 0$ limitinde $S_b = kH dH/dx$ olduğunu gösteriniz ve k 'yi belirleyiniz.	0.9
3.2b	Yükseklik profili $H(x)$ için ρ_{ice} , g , L , S_b ve buz bölümü çizgisine uzaklık x cinsinden bir ifade belirleyiniz. Sonuç, en büyük buzul yüksekliği H_m 'nin yarı genişlik L ile $H_m \propto L^{1/2}$ biçiminde ölçeklendiğini gösterecektir.	0.8
3.2c	Buz örtüsünün toplam hacmi V_{ice} 'in dikdörtgen adanın alanı A ile $V_{ice} \propto A^\gamma$ biçiminde ölçeklenmesindeki γ üssünü belirleyiniz.	0.5

Dinamik bir buz örtüsü

Daha uzun zaman ölçeklerinde buz, kütleçekimi etkisiyle orta bölgeden kıyıya doğru akan, viskoz ve sıkıştırılmaz bir akışkandır. Bu modelde buz, orta bölgede kar yağışından kaynaklanan buz birikiminin kıyıdaki erimeyle dengelendiği kararlı durumda yükseklik profilini $H(x)$ korur. Şekil 3.1(b) ve (c)'deki buz örtüsü geometrisine ek olarak model için aşağıdaki varsayımları yapınız:

1) Buz, xz düzleminde buz bölümü çizgisinden (y ekseninden) uzaklaşacak biçimde akar. 2) Orta bölgedeki birikim hızı c (m/yıl) sabittir. 3) Buz, buzuldan yalnızca $x = \pm L$ kıyılarının yakınında eriyerek ayrılabilir. 4) Buzun akış hızının yatay (x) bileşeni $v_x(x) = dx/dt$, z 'den bağımsızdır. 5) Buzun akış hızının düşey (z) bileşeni $v_z(z) = dz/dt$, x 'ten bağımsızdır.

Yalnızca buz örtüsünün ortasına yakın, yükseklik değişimlerinin çok küçük olduğu ve tamamen ihmal edilebildiği, yani $H(x) \approx H_m$ olan $|x| \ll L$ merkez bölgesini ele alınız.

3.3	Kütlenin korunumunu kullanarak yatay buz akış hızı $v_x(x)$ için c , x ve H_m cinsinden bir ifade bulunuz.	0.6
-----	--	-----

Sıkıştırılmazlık, yani buzun yoğunluğunun ρ_{ice} sabit olması varsayımından, kütlenin korunumunun buzun akış hızı bileşenlerine şu kısıtı getirdiği sonucu çıkar:

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

3.4	Buzun akış hızının düşey bileşeni $v_z(z)$ 'nin z 'ye bağımlılığını veren bir ifade yazınız.	0.6
-----	--	-----

Başlangıçta yüzeyde (x_i, H_m) konumunda bulunan küçük bir buz parçacığı, zaman geçtikçe buz örtüsünün bir parçası olarak düşey xz düzlemindeki bir akış yörüngesi $z(x)$ boyunca hareket eder.

3.5	Böyle bir akış yörüngesi $z(x)$ için bir ifade türetiniz.	0.9
-----	---	-----

Dinamik buz örtüsünde yaş ve iklim göstergeleri

Buzun akış hızı bileşenleri $v_x(x)$ ve $v_z(z)$ kullanılarak, buz örtüsünün yüzeyinden belirli bir $H_m - z$ derinliğindeki buzun yaşı $\tau(z)$ tahmin edilebilir.

3.6

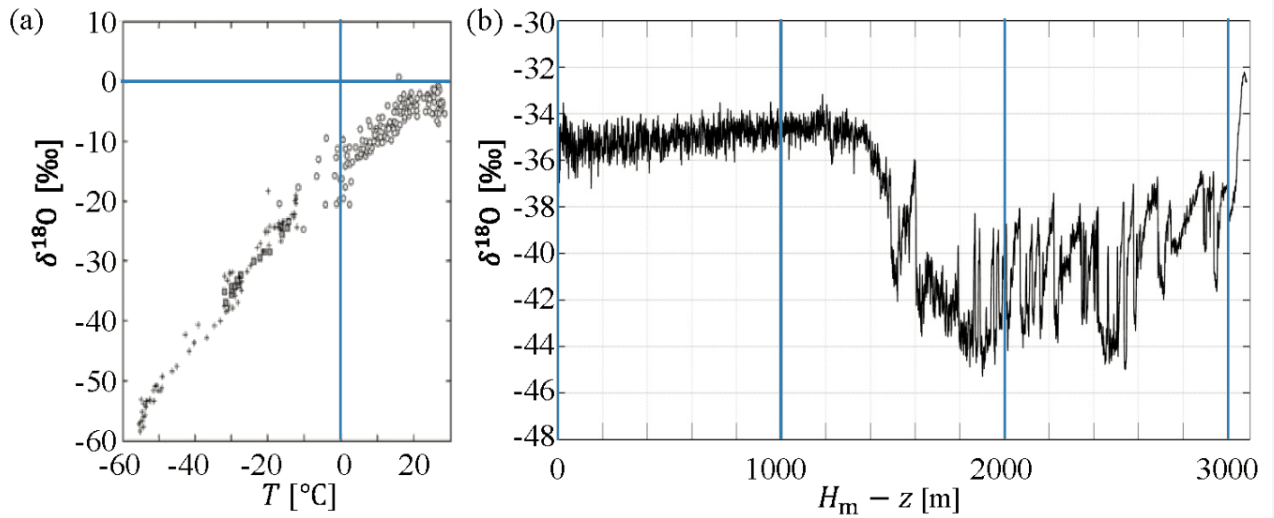
Tam buz bölümü çizgisinde, $x = 0$ 'da, buzun yaşı $\tau(z)$ için yerden yükseklik z 'nin fonksiyonu olarak bir ifade bulunuz.

1.0

Grönland buz örtüsünün iç kesimlerinde sondajla alınan bir buz karotu geçmişten kalan kar katmanlarını içerir ve bu karot analiz edilerek geçmiş iklim değişiklikleri ortaya çıkarılabilir. En iyi göstergelerden biri, şu şekilde tanımlanan $\delta^{18}\text{O}$ değeridir:

$$\delta^{18}\text{O} = \frac{R_{\text{ice}} - R_{\text{ref}}}{R_{\text{ref}}} 1000 \text{ ‰},$$

burada $R = [^{18}\text{O}]/[^{16}\text{O}]$, oksijenin iki kararlı izotopu olan ^{18}O ve ^{16}O 'nun göreceli bolluğunu belirtir. Referans değeri R_{ref} , Ekvator çevresindeki okyanusların izotop bileşimine dayanır.



Şekil 3.2 (a) Kardaki $\delta^{18}\text{O}$ ile yıllık ortalama yüzey sıcaklığı T arasında gözlenen ilişki. **(b)**

Grönland buz bölümü çizgisi üzerinde $H_m = 3060 \text{ m}$ olan belirli bir yerde yüzeyden ana kayaya kadar sondajla alınmış bir buz karotunda, yüzeyden derinlik $H_m - z$ 'ye bağlı $\delta^{18}\text{O}$ ölçümleri.

Grönland buz örtüsündeki gözlemler, kardaki $\delta^{18}\text{O}$ 'nun sıcaklıkla yaklaşık olarak doğrusal değiştiğini göstermektedir, Şekil 3.2(a). Bunun her zaman böyle olduğu varsayılırsa, bir buz karotunun $H_m - z$ derinliğinden elde edilen $\delta^{18}\text{O}$, $\tau(z)$ yaşına karşılık gelen dönemde Grönland yakınındaki sıcaklık T 'nin tahmin edilmesini sağlar.

Grönland'dan alınan 3060 m uzunluğundaki bir buz karotunda yapılan $\delta^{18}\text{O}$ ölçümleri, 1492 m derinlikte $\delta^{18}\text{O}$ 'da son buzul çağıının bitişini gösteren ani bir değişim ortaya koymaktadır, Şekil 3.2(b). Buzul çağı 120,000 yıl önce başlamıştır ve bu, 3040 m derinliğe karşılık gelir; günümüzdeki buzullar arası çağ ise 11,700 yıl önce başlamıştır ve bu, 1492 m derinliğe karşılık gelir. Bu iki dönemin sırasıyla iki farklı birikim hızı, c_{ia} (buzul çağı) ve c_{ig} (buzullar arası çağ) ile betimlenebildiğini varsayınız. Bu 120,000 yıl boyunca H_m 'nin sabit kaldığını varsayabilirsiniz.

3.7a

Birikim hızları c_{ia} ve c_{ig} 'yi belirleyiniz.

0.8

3.7b

Buzul çağından buzullar arası çağa geçişteki sıcaklık değişimini bulmak için Şekil 3.2'deki verileri kullanınız.

0.2

Grönland buz örtüsünün erimesinden kaynaklanan deniz seviyesi yükselmesi

Grönland buz örtüsünün tamamen erimesi, dünya okyanuslarında deniz seviyesinin yükselmesine yol açacaktır. Bu deniz seviyesi yükselmesini kabaca tahmin etmek için, alanı sabit ve $A_O = 3.61 \times 10^{14} \text{ m}^2$ olan dünya okyanuslarının tamamında aynı miktarda bir yükselme olduğu düşünülebilir.

3.8	Grönland buz örtüsünün günümüzdeki alanının $A_G = 1.71 \times 10^{12} \text{ m}^2$ ve $S_b = 100 \text{ kPa}$ olduğu verildiğine göre, buz örtüsünün tamamen erimesi sonucunda dünya genelinde deniz seviyesindeki ortalama yükselmeyi hesaplayınız.	0.6
-----	---	-----

Grönland'ın büyük kütleli buz örtüsü, çevresindeki okyanusa kütleçekim kuvveti uygular. Buz örtüsü erirse bu yerel su kabarması ortadan kalkar ve Grönland yakınında deniz seviyesi düşer; bu etki, yukarıda hesaplanan deniz seviyesi yükselmesini kısmen dengeler.

Su üzerindeki bu kütleçekim kuvvetinin büyüklüğünü tahmin etmek için Grönland buz örtüsü şimdi zemin seviyesinde bulunan ve Grönland buz örtüsünün toplam kütesine sahip bir noktasal kütle olarak modellenmektedir. Kopenhag, noktasal kütlenin merkezinden Dünya yüzeyi boyunca 3500 km uzaklıktadır. Noktasal kütle hariç tutulduğunda Dünya'nın küresel simetrik olduğu ve $A_E = 5.10 \times 10^{14} \text{ m}^2$ alanlı tüm yüzeyine yayılmış bir küresel okyanusa sahip olduğu kabul edilebilir. Dünya'nın dönmesinin bütün etkileri ihmal edilebilir.

3.9	Bu model çerçevesinde, Kopenhag'daki deniz seviyesi (h_{CPH}) ile Grönland'ın çap doğrultusunda tam karşısındaki deniz seviyesi (h_{OPP}) arasındaki $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}}$ farkını belirleyiniz.	1.8
-----	--	-----

Veri sayfası: Fiziksel parametreler tablosu

Işığın boşluktaki hızı	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Planck sabitinin 2π 'ye bölümü	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Evrensel kütleçekim sabiti	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Yerçekimi ivmesi	$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$
Temel yük	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Boşluğun elektriksel geçirgenliği	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Elektron kütlesi	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Avogadro sabiti	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmann sabiti	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Taşı göktaşının özgül ısı	$c_{\text{sm}} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Taşı göktaşının ısı iletkenliği	$k_{\text{sm}} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Taşı göktaşının yoğunluğu	$\rho_{\text{sm}} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Taşı göktaşının erime noktası	$T_{\text{sm}} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$
Taşı göktaşının özgül erime ısı	$L_{\text{sm}} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
Gümüşün mol kütlesi	$M_{\text{Ag}} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$
Gümüşün yoğunluğu	$\rho_{\text{Ag}} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
Gümüşün özgül ısı kapasitesi	$c_{\text{Ag}} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Suyun mol kütlesi	$M_{\text{wa}} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$

Suyun yoğunluğu	$\rho_{\text{wa}} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Suyun özgül ısı kapasitesi	$c_{\text{wa}} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Suyun buharlaşma ısısı	$L_{\text{wa}} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$
Suyun kaynama sıcaklığı	$T_{100} = 100^\circ \text{C} = 373.15 \text{ K}$
Buzul buzunun yoğunluğu	$\rho_{\text{ice}} = 0.917 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Su buharının özgül ısı kapasitesi	$c_{\text{st}} = 2.080 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Dünya'nın kütlesi	$m_{\text{E}} = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Dünya'nın yarıçapı	$R_{\text{E}} = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$
Güneş'in kütlesi	$m_{\text{S}} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Güneş'in yarıçapı	$R_{\text{S}} = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$
Ortalama Güneş-Dünya uzaklığı	$a_{\text{E}} = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **3.1:** $p(x, z) = \rho_{\text{ice}} g [H(x) - z]$, $0 \leq z \leq H(x)$ için.
- **3.2a:** $S_b = -\rho_{\text{ice}} g H \frac{dH}{dx}$, dolayısıyla $k = -\rho_{\text{ice}} g$, $x > 0$ yarısında.
- **3.2b:** $H(x) = \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{\text{ice}} g} (L - |x|)}$, burada $H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}} g}}$.
- **3.2c:** $\gamma = \frac{5}{4}$; daha açık olarak, $V_{\text{ice}} = \frac{2}{3} A H_m$.
- **3.3:** $v_x(x) = \frac{c}{H_m} x$.
- **3.4:** $v_z(z) = -\frac{c}{H_m} z$.
- **3.5:** $z(x) = H_m \frac{x_i}{x}$, $x_i \neq 0$ için. $x_i = 0$ için yörünge $x = 0$ boyunca düşeydir.
- **3.6:** $\tau(z) = \frac{H_m}{c} \ln \frac{H_m}{z}$.
- **3.7a:** $c_{\text{ia}} = 0.123 \text{ m/year}$, $c_{\text{ig}} = 0.175 \text{ m/year}$.
- **3.7b:** $\Delta T \approx +10 \text{ K}$, yaklaşık 10°C ısınma.
- **3.8:** $\Delta h_{\text{mean}} \approx 8.8 \text{ m}$.
- **3.9:** $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} \approx 4.5 \text{ m}$, Kopenhag'daki seviye daha yüksektir.

Çözüm

3.1

Düşey yöndeki hidrostatik denge şu eşitliği verir:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_{\text{ice}}g.$$

Atmosfer basıncı ihmal edildiğinde yüzeydeki basınç sıfırdır:

$$p(x, H(x)) = 0.$$

Dolayısıyla yüzeyden aşağıya doğru integral alınır

$$\boxed{p(x, z) = \rho_{\text{ice}}g[H(x) - z]}.$$

3.2a

Buz örtüsünün sağ yarısını, $x > 0$ bölgesini ele alalım. Yüksekliği $H(x)$, genişliği Δy olan düşey bir yüze etkiyen basınç kuvveti

$$F(x) = \Delta y \int_0^{H(x)} \rho_{\text{ice}}g[H(x) - z] dz = \frac{1}{2}\rho_{\text{ice}}gH(x)^2\Delta y.$$

Merkeze bakan yüzdeki kuvvet artan x yönünde, kıyıya bakan yüzdeki kuvvet ise azalan x yönünde etkir. Bu kuvvetlerin bileşkesi

$$\Delta F = \frac{1}{2}\rho_{\text{ice}}g [H(x)^2 - H(x + \Delta x)^2] \Delta y.$$

Δx 'e göre birinci mertebede,

$$\Delta F = -\rho_{\text{ice}}gH(x) \frac{dH}{dx} \Delta x \Delta y.$$

Dışa doğru yönelmiş bu kuvveti taban sürtünmesi $S_b \Delta x \Delta y$ ile dengelediğimizde

$$\boxed{S_b = -\rho_{\text{ice}}gH \frac{dH}{dx}}, \quad \boxed{k = -\rho_{\text{ice}}g}.$$

Bu yarıda türev negatiftir; dolayısıyla gerektiği gibi $S_b > 0$ olur. Her iki yarı için de büyüklükler arasındaki karşılık gelen bağıntı $S_b = \rho_{\text{ice}}gH |dH/dx|$ 'tir.

3.2b

$0 \leq x \leq L$ aralığında yukarıdaki sonuç şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{d(H^2)}{dx} = -\frac{2S_b}{\rho_{\text{ice}}g}.$$

Kıyıda $H(L) = 0$ sınır koşulu kullanılırsa

$$H(x)^2 = \frac{2S_b}{\rho_{\text{ice}}g} (L - x).$$

Buz bölümü çizgisine göre yansıtma, profilin tamamını verir:

$$\boxed{H(x) = \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{\text{ice}}g} (L - |x|)}}, \quad -L \leq x \leq L.$$

Buz bölümü çizgisinde,

$$\boxed{H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}}g}}},$$

dolayısıyla taban sürtünmesi, yoğunluk ve yerçekimi ivmesi sabit olduğunda $H_m \propto L^{1/2}$ olur.

3.2c

Adanın alanı

$$A = (2L)(5L) = 10L^2.$$

Profil y 'den bağımsız olduğundan buzun hacmi

$$V_{\text{ice}} = 5L \int_{-L}^L H(x) dx = 10LH_m \int_0^L \sqrt{1 - \frac{x}{L}} dx.$$

$u = x/L$ dönüşümüyle, verilen integralden

$$V_{\text{ice}} = 10L^2 H_m \int_0^1 \sqrt{1 - u} du = \frac{20}{3} L^2 H_m = \boxed{\frac{2}{3} A H_m}.$$

Böylece

$$V_{\text{ice}} \propto L^{2+1/2} = L^{5/2} \propto A^{5/4},$$

ve

$$\boxed{\gamma = \frac{5}{4}}.$$

3.3

Merkez bölgesinde, buz bölümü çizgisi ile $x > 0$ konumu arasında genişliği Δy olan bir kontrol hacmi ele alalım. Kararlı durumda yüzeydeki birikim, yatay yöndeki dışarı akışa eşit olmalıdır.

Birim zamanda biriken kütle

$$\dot{m}_{\text{in}} = \rho_{\text{ice}} c x \Delta y.$$

Simetri gereği buz bölümü çizgisinden yatay akış yoktur. v_x yükseklikten bağımsız olduğundan, x konumundaki yüzden dışarıya kütle akış hızı

$$\dot{m}_{\text{out}} = \rho_{\text{ice}} v_x(x) H_m \Delta y.$$

Bunlar eşitlenirse

$$\boxed{v_x(x) = \frac{c}{H_m} x}.$$

Aynı işaretli ifade, akışın negatif x yönünde olduğu $x < 0$ bölgesinde de geçerlidir. Bu sonuç, merkez bölgesi için $H(x) \approx H_m$ yaklaşımını kullanır.

3.4

Sıkıştırılamazlık şu koşulu gerektirir:

$$\frac{dv_z}{dz} = -\frac{dv_x}{dx} = -\frac{c}{H_m}.$$

İntegral alındığında

$$v_z(z) = -\frac{c}{H_m} z + C.$$

Zeminden akış olmadığından $v_z(0) = 0$ 'dır; buradan $C = 0$ bulunur. Dolayısıyla,

$$\boxed{v_z(z) = -\frac{c}{H_m} z}.$$

Özel olarak, $v_z(H_m) = -c$: yüzeydeki aşağı yönlü hareket, yeni buz eklenmesini dengeler.

3.5

$x_i \neq 0$ olan bir parçacığın yörüngesi şu eşitliği sağlar:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz/dt}{dx/dt} = \frac{v_z}{v_x} = -\frac{z}{x}.$$

Değişkenler ayrılıp $z(x_i) = H_m$ başlangıç koşulu uygulanırsa

$$\int_{H_m}^z \frac{dz'}{z'} = - \int_{x_i}^x \frac{dx'}{x'},$$

dolayısıyla

$$\ln \frac{z}{H_m} = - \ln \left| \frac{x}{x_i} \right|.$$

Parçacık, buz bölümü çizgisinin başlangıçta bulunduğu tarafında kalır; bu nedenle $x/x_i > 0$ olur ve

$$\boxed{xz = x_i H_m}, \quad \boxed{z(x) = H_m \frac{x_i}{x}}.$$

Yörünge, parçacığın dışa ve aşağıya doğru hareket ettiği bir eşkenar hiperbol koludur. Eşdeğer olarak,

$$x(t) = x_i e^{ct/H_m}, \quad z(t) = H_m e^{-ct/H_m}.$$

$x_i = 0$ için parçacık $x = 0$ 'da kalır ve aynı $z(t)$ ifadesine göre düşey olarak alçalır. Bu yörüngeler, parçacık merkez bölgesinde kaldığı sürece geçerlidir.

3.6

Buz bölümü çizgisinde yatay hız sıfırdır. Yaş, parçacığın $z = H_m$ 'de birikmesinden bu yana geçen süredir:

$$\tau(z) = \int_{H_m}^z \frac{dz'}{v_z(z')} = -\frac{H_m}{c} \int_{H_m}^z \frac{dz'}{z'}.$$

Dolayısıyla,

$$\boxed{\tau(z) = \frac{H_m}{c} \ln \frac{H_m}{z}}.$$

Bu değer yüzeyde sıfırdır ve derinlikle artar. Bu idealleştirilmiş modelde, tabanda düşey hız sıfıra yaklaştığından $z \rightarrow 0$ iken yaş sonsuza gider.

3.7a

Bu buz karotu için $H_m = 3060$ m'dir. Yaşları belirlenmiş iki katmanın günümüzde tabandan yükseklikleri

$$\begin{aligned} z_1 &= 3060 - 1492 = 1568 \text{ m}, \\ z_2 &= 3060 - 3040 = 20 \text{ m}. \end{aligned}$$

Geçiş katmanı yalnızca 11 700 yıllık buzullar arası dönemin akışına maruz kalmıştır. Dolayısıyla

$$\ln \frac{3060}{1568} = \frac{c_{ig}(11\,700 \text{ year})}{3060 \text{ m}},$$

buradan

$$c_{ig} = \frac{3060}{11\,700} \ln \frac{3060}{1568} = 0.175 \text{ m/year}.$$

Daha yaşlı katmanın alçalması sırasında birikim hızı değişmiştir. H_m sabit olduğunda,

$$\frac{d \ln z}{dt} = -\frac{c(t)}{H_m}.$$

Bu katman, buzul çağı akışına

$$120\,000 - 11\,700 = 108\,300 \text{ years},$$

süreyle, ardından da 11 700 yıl boyunca buzullar arası dönemin akışına maruz kalmıştır. Sonuç olarak,

$$\ln \frac{3060}{20} = \frac{c_{ia}(108\,300 \text{ year}) + c_{ig}(11\,700 \text{ year})}{3060 \text{ m}}.$$

Geçiş katmanına ait denklem çıkarıldığında buzullar arası dönemin katkısı elenir:

$$\ln \frac{1568}{20} = \frac{c_{ia}(108\,300 \text{ year})}{3060 \text{ m}}.$$

Böylece

$$c_{ia} = \frac{3060}{108\,300} \ln \frac{1568}{20} = 0.123 \text{ m/year}.$$

Daha yaşlı buzun buzullar arası dönemde uğradığı sıkışmayı hesaba katmak zorunludur.

3.7b

Şekil 3.2(b), temsili izotop değerlerini yaklaşık olarak şöyle verir:

$$\delta_{ia}^{18}\text{O} \approx -42 \text{ ‰}, \quad \delta_{ig}^{18}\text{O} \approx -35 \text{ ‰}.$$

Dolayısıyla geçiş, yaklaşık 7 ‰'lik bir artışa karşılık gelir.

Şekil 3.2(a)'daki yaklaşık doğrusal eğilimin ilgili sıcaklık aralığındaki eğimi yaklaşık olarak

$$\frac{\Delta(\delta^{18}\text{O})}{\Delta T} \approx 0.7 \text{ ‰ K}^{-1}.$$

Dolayısıyla,

$$\Delta T \approx \frac{7 \text{ ‰}}{0.7 \text{ ‰ K}^{-1}} \approx 10 \text{ K}.$$

Bu değişim bir ısınmadır:

$$T_{ig} - T_{ia} \approx +10 \text{ K}.$$

Hassasiyet, grafikten okunan değerlerin hassasiyetiyle sınırlıdır.

3.8

Modelin günümüzdeki hacmini belirlemek için adanın geometrisini ve yükseklik profilini kullanalım.

$A_G = 10L^2$ olduğundan,

$$L = \sqrt{\frac{A_G}{10}} = \sqrt{\frac{1.71 \times 10^{12}}{10}} = 4.14 \times 10^5 \text{ m.}$$

Modelin öngördüğü en büyük yükseklik

$$H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{ice} g}} = \sqrt{\frac{2(1.00 \times 10^5)(4.1352 \times 10^5)}{(917)(9.82)}} = 3.03 \times 10^3 \text{ m.}$$

3.2c kısmı kullanılırsa

$$V_{ice} = \frac{2}{3} A_G H_m = 3.45 \times 10^{15} \text{ m}^3.$$

Erime sırasında kütle korunduğundan, oluşan suyun hacmi

$$V_{water} = \frac{\rho_{ice}}{\rho_{wa}} V_{ice}.$$

Bu su, sabit okyanus alanına düzgün biçimde yayıldığında

$$\Delta h_{mean} = \frac{V_{water}}{A_O} = \frac{\rho_{ice}}{\rho_{wa}} \frac{2A_G H_m}{3A_O}.$$

Sayısal olarak,

$$\Delta h_{mean} = \frac{917}{998} \frac{3.4548 \times 10^{15}}{3.61 \times 10^{14}} = 8.79 \text{ m.}$$

Böylece

$$\boxed{\Delta h_{mean} \approx 8.8 \text{ m.}}$$

3.9

Durgun bir okyanusun serbest yüzeyi eşpotansiyeldir. Bu nedenle Kopenhag'daki ve Grönland'ın tam karşısındaki noktadaki kütleçekim potansiyellerini karşılaştırırız.

Buz örtüsünü temsil eden noktasal kütle

$$M = \rho_{ice} V_{ice} = (917)(3.4548 \times 10^{15}) = 3.17 \times 10^{18} \text{ kg.}$$

R , Dünya'nın yarıçapını; h ise deniz yüzeyinin bir referans küresine göre küçük yer değiştirmesini gösterebilir. Dünya'nın birim kütle başına kütleçekim potansiyeline katkısı

$$\Phi_E(R + h) = -\frac{Gm_E}{R + h} \approx -\frac{Gm_E}{R} + gh,$$

burada $h \ll R$ 'dir. Buz kütlelerinin katkısı

$$\Phi_{ice} = -\frac{GM}{d},$$

burada d , buz kütlelerine olan doğrusal uzaklıktır.

Birinci mertebede d , referans küresi üzerinde hesaplanabilir: birkaç metrelik değişimler, milyonlarca metrelik uzaklıkların yanında ihmal edilebilir. Bu nedenle yüzey potansiyellerinin eşitliği şu koşulu gerektirir:

$$gh_{CPH} - \frac{GM}{d_{CPH}} = gh_{OPP} - \frac{GM}{d_{OPP}}.$$

Böylece

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = \frac{GM}{g} \left(\frac{1}{d_{\text{CPH}}} - \frac{1}{d_{\text{OPP}}} \right).$$

Verilen 3500 km, s yay uzunluğudur; dolayısıyla merkez açı ve kiriş uzunluğu

$$\theta = \frac{s}{R}, \quad d_{\text{CPH}} = 2R \sin \frac{\theta}{2} = 2R \sin \frac{s}{2R}.$$

Tam karşıdaki noktada,

$$d_{\text{OPP}} = 2R.$$

Sonuç olarak,

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = \frac{GM}{2gR} \left[\frac{1}{\sin(s/(2R))} - 1 \right].$$

Verilen Dünya yüzey alanından $R = \sqrt{A_E/(4\pi)} \approx 6.37 \times 10^6$ m bulunur; bu, verilen yarıçapla uyumludur. $R = 6.38 \times 10^6$ m kullanıldığında,

$$\theta = 0.5486, \quad d_{\text{CPH}} = 3.456 \times 10^6 \text{ m}, \quad d_{\text{OPP}} = 1.276 \times 10^7 \text{ m}.$$

Böylece

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = \frac{(6.67 \times 10^{-11})(3.168 \times 10^{18})}{9.82} \left(\frac{1}{3.456 \times 10^6} - \frac{1}{1.276 \times 10^7} \right) = 4.54 \text{ m}.$$

Dolayısıyla,

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} \approx 4.5 \text{ m}.$$

Pozitif işaret, Grönland'ın kütleçekiminin Kopenhag'daki denge okyanus yüzeyini Dünya'nın karşı tarafına göre yükselttiği anlamına gelir. Okyanus hacmini korumak için gereken ortak bir seviye kayması bu farkta birbirini götürür.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.