

IPhO 2013

Теоретические задачи и решения · Копенгаген, Дания · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/2013/

Задача 1: Метеорит Марибо

Введение

Метеороид — это небольшая частица (обычно размером менее 1 м), происходящая из кометы или астероида. Метеороид, достигший поверхности Земли, называется метеоритом.

В ночь на 17 января 2009 года многие люди вблизи Балтийского моря наблюдали светящийся след, или болид, метеороида, падавшего сквозь атмосферу Земли. В Швеции камера наблюдения записала это событие на видео, см. рис. 1.1(a). По этим кадрам и свидетельствам очевидцев удалось сузить область падения, и через шесть недель в окрестностях города Марибо на юге Дании был найден метеорит массой 0.025 кг. Исследования метеорита, получившего название Марибо, и его небесной орбиты дали интересные результаты. Его скорость при входе в атмосферу была исключительно высокой. Его возраст, 4.567×10^9 лет, показывает, что он образовался вскоре после рождения Солнечной системы. Возможно, метеорит Марибо является частью кометы Энке.

Скорость Марибо

Болид двигался в западном направлении, с курсом 285° относительно севера, к месту, где впоследствии был найден метеорит, как схематически показано на рис. 1.1. Метеорит был найден на расстоянии 195 км от камеры наблюдения в направлении 230° относительно севера.

Часть	Вопрос	Баллы
1.1	Используя эту информацию и данные на рис. 1.1, вычислите среднюю скорость Марибо в промежутке времени между кадрами 155 и 161. Кривизной Земли и силой тяжести, действующей на метеороид, можно пренебречь.	1.3

Полёт через атмосферу и плавление?

Сила сопротивления воздуха, действующая на метеороид, движущийся в высоких слоях атмосферы, сложным образом зависит от формы и скорости метеороида, а также от температуры и плотности атмосферы. В качестве разумного приближения сила сопротивления F в верхних слоях атмосферы задаётся выражением $F = k\rho_{\text{atm}}Av^2$, где k — постоянная, ρ_{atm} — плотность атмосферы, A — площадь поперечного сечения метеорита в проекции на плоскость, перпендикулярную скорости, а v — его скорость.

Для анализа движения метеороида примем следующие упрощающие предположения. Тело, вошедшее в атмосферу, представляло собой шар массой $m_M = 30 \text{ kg}$, радиусом $R_M = 0.13 \text{ m}$, с температурой $T_0 = 200 \text{ K}$ и скоростью $v_M = 2.91 \times 10^4 \text{ m/s}$. Плотность

атмосферы постоянно и равна её значению на высоте 40 км над поверхностью Земли: $\rho_{\text{atm}} = 4.1 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$, а коэффициент сопротивления равен $k = 0.60$.

Часть	Вопрос	Баллы
1.2a	Оцените, за какое время после входа в атмосферу скорость метеороида уменьшится на 10 %: от v_M до $0.90v_M$. Можно пренебречь силой тяжести, действующей на метеороид, и считать, что он сохраняет свою массу и форму.	0.7
1.2b	Вычислите, во сколько раз кинетическая энергия E_{kin} метеороида при входе в атмосферу превышает энергию E_{melt} , необходимую для его полного плавления (см. таблицу справочных данных).	0.3

(a)



(b)

Frame	Time	Azimuth	Altitude
155	1.46 s	215°	19.2°
161	2.28 s	221°	14.7°
Landing at M		230°	0.0°

(c)

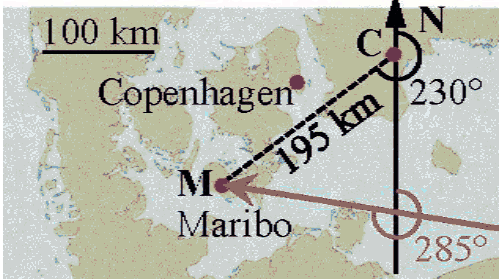


Рисунок 1.1 (a) Азимут — это угол в горизонтальной плоскости, отсчитываемый по часовой стрелке от направления на север, а угловая высота — угол над горизонтом. Последовательность кадров, снятых камерой наблюдения в Швеции и показывающих движение Марибо в виде болида при его падении сквозь атмосферу. (b) Данные двух кадров: время, направление (азимут) в градусах при наблюдении камерой (C) и высота над

горизонтом (угловая высота) в градусах. (с) Схема направлений траектории Марибо (пурпурная стрелка) относительно севера (N) и на место падения (M) в Дании при наблюдении камерой (C).

Нагрев Марибо при падении в атмосфере

Когда каменный метеороид Марибо вошёл в атмосферу со сверхзвуковой скоростью, он наблюдался как болид из-за свечения окружающего воздуха. Тем не менее нагрелся только самый внешний слой Марибо. Считайте, что Марибо — однородный шар с плотностью ρ_{sm} , удельной теплоёмкостью c_{sm} и коэффициентом теплопроводности k_{sm} (значения приведены в таблице справочных данных). Кроме того, при входе в атмосферу его температура была равна $T_0 = 200 \text{ K}$. Во время падения сквозь атмосферу из-за трения о воздух температура его поверхности оставалась постоянной и равной $T_s = 1000 \text{ K}$, вследствие чего внутренняя область постепенно нагревалась.

После падения в атмосфере в течение времени t внешний слой Марибо толщиной x нагреется до температуры, значительно превышающей T_0 . Эту толщину можно оценить методом анализа размерностей как простое произведение степеней термодинамических параметров: $x \approx t^\alpha \rho_{\text{sm}}^\beta c_{\text{sm}}^\gamma k_{\text{sm}}^\delta$.

Часть	Вопрос	Баллы
1.3a	Методом анализа размерностей (единиц измерения) определите значения четырёх показателей степени α , β , γ , и δ .	0.6
1.3b	Вычислите толщину x после падения в течение времени $t = 5 \text{ s}$ и определите отношение x/R_M .	0.4

Возраст метеорита

Химические свойства радиоактивных элементов могут различаться, поэтому при кристаллизации минералов в данном метеорите одни минералы будут иметь высокое содержание определённого радиоактивного элемента, а другие — низкое. Это различие можно использовать для определения возраста метеорита методом радиометрического датирования его радиоактивных минералов.

В качестве конкретного примера рассмотрим изотоп ^{87}Rb (элемент № 37), который распадается с образованием стабильного изотопа ^{87}Sr (элемент № 38) с периодом полураспада $T_{1/2} = 4.9 \times 10^{10}$ лет, используя стабильный изотоп ^{86}Sr в качестве эталона. В момент кристаллизации отношение $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ было одинаковым для всех минералов, тогда как отношение $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ различалось. С течением времени количество ^{87}Rb уменьшается вследствие распада, а количество ^{87}Sr соответственно увеличивается. В результате к настоящему времени отношение $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ будет различным. На рис. 1.2(a) точки на горизонтальной прямой соответствуют отношению $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ в различных минералах в момент их кристаллизации.

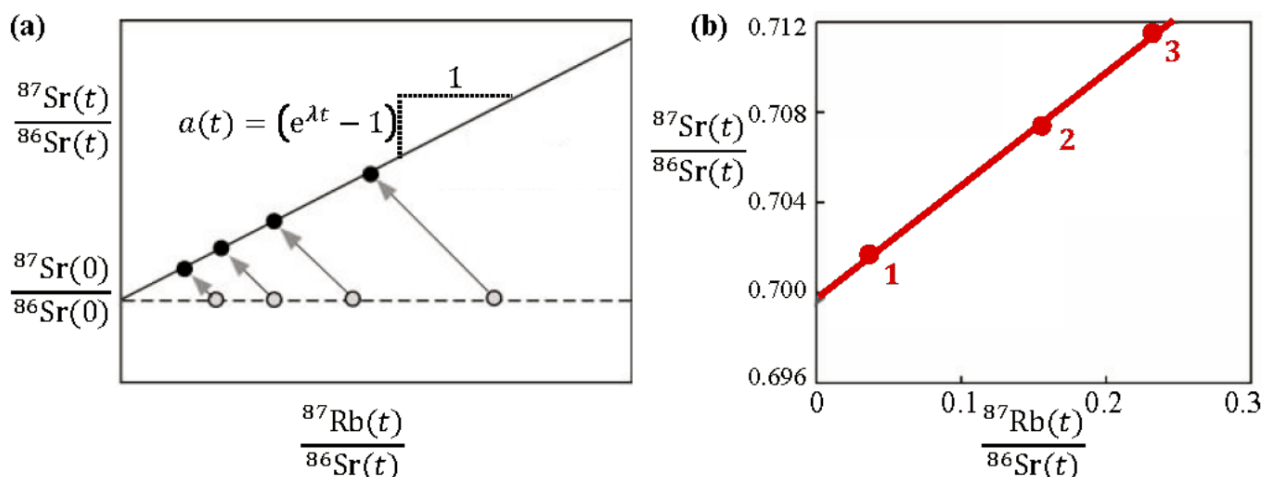


Рисунок 1.2 (а) Отношение $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ в различных минералах в момент кристаллизации $t = 0$ (незакрашенные кружки) и в настоящее время (закрашенные кружки). (б) Изохрона для трёх различных образцов минералов, взятых из метеорита в настоящее время.

Часть	Вопрос	Баллы
1.4а	Запишите схему распада при превращении $^{87}_{37}\text{Rb}$ в $^{87}_{38}\text{Sr}$.	0.3
1.4b	Покажите, что график зависимости современного отношения $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ от современного отношения $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ в различных образцах минералов из одного и того же метеорита представляет собой прямую, так называемую изохрону, с угловым коэффициентом $a(t) = (e^{\lambda t} - 1)$. Здесь t — время, прошедшее с момента образования минералов, а λ — постоянная распада, обратно пропорциональная периоду полураспада $T_{1/2}$.	0.7
1.4с	Определите возраст τ_M метеорита, используя изохрону на рис. 1.2(б).	0.4

Комета Энке, от которой, возможно, происходит Марибо

При движении кометы Энке по орбите вокруг Солнца минимальное и максимальное расстояния между ней и Солнцем равны соответственно $a_{\min} = 4.95 \times 10^{10} \text{ m}$ и $a_{\max} = 6.16 \times 10^{11} \text{ m}$.

Часть	Вопрос	Баллы
1.5	Вычислите период обращения t_{Encke} кометы Энке по орбите.	0.6

Последствия столкновения астероида с Землёй

65 миллионов лет назад с Землёй столкнулся огромный астероид плотностью $\rho_{\text{ast}} = 3.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, радиусом $R_{\text{ast}} = 5.0 \text{ km}$ и конечной скоростью $v_{\text{ast}} = 2.5 \times 10^4 \text{ m/s}$. Этот удар привёл к гибели большей части жизни на Земле и образованию огромного кратера Чиксулуб. Предположите, что такой же астероид столкнулся бы с Землёй сегодня, причём столкновение было бы абсолютно неупругим, и используйте тот факт, что момент инерции Земли составляет 0.83 от момента инерции однородного шара той же массы и радиуса. Момент инерции однородного шара массой M и радиусом R равен $\frac{2}{5}MR^2$. Изменениями орбиты Земли пренебрегите.

Часть	Вопрос	Баллы
1.6a	Пусть астероид ударит в Северный полюс. Найдите максимальное изменение угловой ориентации оси Земли после удара.	0.7
1.6b	Пусть астероид ударит в экватор в радиальном направлении. Найдите изменение $\Delta\tau_{\text{vrt}}$ продолжительности одного оборота Земли после удара.	0.7
1.6c	Пусть астероид ударит в экватор по касательной в экваториальной плоскости. Найдите изменение $\Delta\tau_{\text{tan}}$ продолжительности одного оборота Земли после удара.	0.7

Максимальная скорость столкновения

Рассмотрим небесное тело, гравитационно связанное с Солнечной системой, которое сталкивается с поверхностью Земли со скоростью v_{imp} . Вначале влиянием гравитационного поля Земли на тело можно пренебречь. Не учитывайте трение в атмосфере, влияние других небесных тел и вращение Земли.

Часть	Вопрос	Баллы
1.7	Вычислите $v_{\text{imp}}^{\text{max}}$ — наибольшее возможное значение v_{imp} .	1.6

Справочные данные: таблица физических параметров

Физический параметр	Значение
Скорость света в вакууме	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Постоянная Планка, делённая на 2π	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Гравитационная постоянная	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Ускорение свободного падения	$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$
Элементарный заряд	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Масса электрона	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Постоянная Авогадро	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Удельная теплоёмкость каменного метеорита	$c_{\text{sm}} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Коэффициент теплопроводности каменного метеорита	$k_{\text{sm}} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Плотность каменного метеорита	$\rho_{\text{sm}} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Температура плавления каменного метеорита	$T_{\text{sm}} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$
Удельная теплота плавления каменного метеорита	$L_{\text{sm}} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
Молярная масса серебра	$M_{\text{Ag}} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$
Плотность серебра	$\rho_{\text{Ag}} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
Удельная теплоёмкость серебра	$c_{\text{Ag}} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Молярная масса воды	$M_{\text{wa}} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$
Плотность воды	$\rho_{\text{wa}} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Удельная теплоёмкость воды	$c_{\text{wa}} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Удельная теплота парообразования воды	$L_{\text{wa}} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$

Физический параметр	Значение
Температура кипения воды	$T_{100} = 100^\circ\text{C} = 373.15\text{ K}$
Плотность ледникового льда	$\rho_{\text{ice}} = 0.917 \times 10^3\text{ kg m}^{-3}$
Удельная теплоёмкость водяного пара	$c_{\text{st}} = 2.080 \times 10^3\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$
Масса Земли	$m_{\text{E}} = 5.97 \times 10^{24}\text{ kg}$
Радиус Земли	$R_{\text{E}} = 6.38 \times 10^6\text{ m}$
Масса Солнца	$m_{\text{S}} = 1.99 \times 10^{30}\text{ kg}$
Радиус Солнца	$R_{\text{S}} = 6.96 \times 10^8\text{ m}$
Среднее расстояние от Солнца до Земли	$a_{\text{E}} = 1.50 \times 10^{11}\text{ m}$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- 1.1: $\bar{v} = 2.86 \times 10^4\text{ m s}^{-1} = 28.6\text{ km s}^{-1}$.
- 1.2a: $t = 0.88\text{ s}$.
- 1.2b: $E_{\text{kin}}/E_{\text{melt}} \approx 2.1 \times 10^2$.
- 1.3a: $\alpha = \delta = \frac{1}{2}, \quad \beta = \gamma = -\frac{1}{2}$, поэтому $x \approx \sqrt{k_{\text{sm}}t/(\rho_{\text{sm}}c_{\text{sm}})}$.
- 1.3b: $x \approx 1.6\text{ mm}, \quad x/R_{\text{M}} \approx 0.012 = 1.2\%$.
- 1.4a: ${}^{87}_{37}\text{Rb} \rightarrow {}^{87}_{38}\text{Sr} + {}^0_{-1}\text{e} + \bar{\nu}_{\text{e}}$.
- 1.4b: $Y(t) = Y_0 + (e^{\lambda t} - 1)X(t)$, где $Y = {}^{87}\text{Sr}/{}^{86}\text{Sr}$, $X = {}^{87}\text{Rb}/{}^{86}\text{Sr}$ и $\lambda = \ln 2/T_{\frac{1}{2}}$.
- 1.4c: $\tau_{\text{M}} \approx 3.5 \times 10^9\text{ yr}$, при угловом коэффициенте графика, приблизительно равном 0.050.
- 1.5: $t_{\text{Encke}} = 1.05 \times 10^8\text{ s} \approx 3.32\text{ yr}$.
- 1.6a: $\theta_{\text{max}} \approx 4.3 \times 10^{-8}\text{ rad} \approx 2.4 \times 10^{-6}\text{ degree}$.
- 1.6b: $\Delta\tau_{\text{vrt}} \approx +6.8 \times 10^{-5}\text{ s}$.
- 1.6c: $\Delta\tau_{\text{tan}} \approx -3.6 \times 10^{-3}\text{ s}$ для удара по направлению вращения;
 $\Delta\tau_{\text{tan}} \approx +3.8 \times 10^{-3}\text{ s}$ для удара против направления вращения.
- 1.7: $v_{\text{imp}}^{\text{max}} \approx 7.27 \times 10^4\text{ m s}^{-1} = 72.7\text{ km s}^{-1}$, понимаемое как предельная верхняя граница для гравитационно связанного тела.

Решение

1.1

Обозначим через C камеру, через M — место падения, а через P_i — горизонтальную проекцию положения метеороида в кадре i . Запишем

$$CM = D = 195\text{ km}, \quad CP_i = r_i, \quad MP_i = s_i.$$

Наблюдаемые величины:

Кадр	Время t_i	Азимут ϕ_i	Угловая высота h_i
155	1.46 s	215°	19.2°
161	2.28 s	221°	14.7°

Горизонтальная проекция траектории имеет направление 285°. При наблюдении из M азимут камеры равен 50°, а азимут предыдущих положений метеороида равен 105°. Следовательно, угол при вершине M треугольника $CM P_i$ равен 55°. Угол при вершине C равен $230^\circ - \phi_i$.

Поэтому по теореме синусов

$$r_i = D \frac{\sin 55^\circ}{\sin(285^\circ - \phi_i)}, \quad s_i = D \frac{\sin(230^\circ - \phi_i)}{\sin(285^\circ - \phi_i)}.$$

Поскольку кривизной Земли пренебрегаем, высота метеороида равна

$$z_i = r_i \tan h_i.$$

Численно получаем:

Кадр	r_i (км)	s_i (км)	z_i (км)
155	169.986	53.709	59.195
161	177.721	33.940	46.624

Таким образом, пройденные расстояния по горизонтали и вертикали равны

$$\Delta s = 19.769 \text{ km}, \quad |\Delta z| = 12.571 \text{ km}.$$

Считая траекторию на этом коротком интервале прямолинейной, получаем

$$\Delta \ell = \sqrt{(\Delta s)^2 + (\Delta z)^2} = 23.428 \text{ km}.$$

Прошедшее время равно $2.28 - 1.46 = 0.82$ s, поэтому

$$\bar{v} = \frac{23.428 \text{ km}}{0.82 \text{ s}} = 28.6 \text{ km s}^{-1}.$$

В последующих пунктах используем отдельно заданную начальную скорость

$$v_M = 2.91 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

1.2a

Площадь проекции шара равна $A = \pi R_M^2$. Пренебрегая силой тяжести, из второго закона Ньютона получаем

$$m_M \frac{dv}{dt} = -k \rho_{\text{atm}} \pi R_M^2 v^2.$$

Разделяя переменные и интегрируя от v_M до v , получаем

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_M} = \frac{k \rho_{\text{atm}} \pi R_M^2}{m_M} t.$$

При $v = 0.90 v_M$

$$t = \frac{m_M}{k \rho_{\text{atm}} \pi R_M^2 v_M} \left(\frac{1}{0.90} - 1 \right).$$

Подстановка даёт

$$t = \frac{30}{(0.60)(4.1 \times 10^{-3})\pi(0.13)^2(2.91 \times 10^4)} \left(\frac{1}{0.90} - 1 \right) = 0.877 \text{ s.}$$

Следовательно,

$$t \approx 0.88 \text{ s.}$$

1.2b

Для полного плавления необходимо как нагреть вещество от T_0 до температуры плавления, так и сообщить ему теплоту плавления. Используя постоянную удельную теплоёмкость из таблицы справочных данных, получаем

$$E_{\text{melt}} = m_{\text{M}} [c_{\text{sm}}(T_{\text{sm}} - T_0) + L_{\text{sm}}].$$

Таким образом,

$$E_{\text{melt}} = 30 [(1.2 \times 10^3)(1700 - 200) + 2.6 \times 10^5] = 6.18 \times 10^7 \text{ J.}$$

Начальная кинетическая энергия равна

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_{\text{M}} v_{\text{M}}^2 = \frac{1}{2} (30)(2.91 \times 10^4)^2 = 1.2702 \times 10^{10} \text{ J.}$$

Следовательно,

$$\frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{melt}}} = \frac{v_{\text{M}}^2}{2[c_{\text{sm}}(T_{\text{sm}} - T_0) + L_{\text{sm}}]} = 205.5 \approx 2.1 \times 10^2.$$

Это сравнение энергий не означает полного плавления: кинетическая энергия не обязательно превращается в теплоту, распределённую по всему объёму метеороида.

1.3a

Обозначим размерности массы, длины, времени и температуры через M, L, T, Θ .

Соответствующие размерности равны

$$[\rho_{\text{sm}}] = ML^{-3}, \quad [c_{\text{sm}}] = L^2 T^{-2} \Theta^{-1}, \quad [k_{\text{sm}}] = ML T^{-3} \Theta^{-1}.$$

Следовательно,

$$[t^\alpha \rho_{\text{sm}}^\beta c_{\text{sm}}^\gamma k_{\text{sm}}^\delta] = M^{\beta+\delta} L^{-3\beta+2\gamma+\delta} T^{\alpha-2\gamma-3\delta} \Theta^{-\gamma-\delta}.$$

Приравнявая это выражение размерности L величины x , получаем

$$\begin{aligned} \beta + \delta &= 0, \\ -3\beta + 2\gamma + \delta &= 1, \\ \alpha - 2\gamma - 3\delta &= 0, \\ -\gamma - \delta &= 0. \end{aligned}$$

Из первого и четвёртого уравнений следует $\beta = \gamma = -\delta$. Тогда уравнение для размерности длины даёт $2\delta = 1$, а уравнение для размерности времени — $\alpha = \delta$. Следовательно,

$$\alpha = \delta = \frac{1}{2}, \quad \beta = \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Полученная оценка имеет вид

$$x \approx \sqrt{\frac{k_{\text{sm}} t}{\rho_{\text{sm}} c_{\text{sm}}}}.$$

Анализ размерностей определяет показатели степеней, но оставляет неопределённым безразмерный коэффициент. В требуемой оценке этот коэффициент принимается равным единице.

1.3b

Коэффициент температуропроводности равен

$$\chi = \frac{k_{\text{sm}}}{\rho_{\text{sm}} c_{\text{sm}}} = \frac{2.0}{(3.3 \times 10^3)(1.2 \times 10^3)} = 5.05 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

При $t = 5 \text{ s}$

$$x \approx \sqrt{\chi t} = \sqrt{(5.05 \times 10^{-7})(5)} = 1.589 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

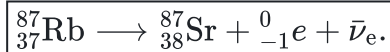
Таким образом,

$$x \approx 1.6 \text{ mm}, \quad \frac{x}{R_{\text{M}}} = \frac{1.589 \times 10^{-3}}{0.13} \approx 0.012 = 1.2\%.$$

Глубина прогрева мала по сравнению с радиусом, что согласуется с тем, что во время падения заметно нагревается лишь внешний слой.

1.4a

Атомный номер увеличивается на единицу, а массовое число остаётся неизменным. Это бета-минус-распад:



Испускаются электрон и электронное антинейтрино.

1.4b

Рассмотрим один образец минерала как замкнутую систему после кристаллизации. Пусть $N_{\text{Rb}}(t)$, $N_{87}(t)$ и N_{86} — числа ядер ${}^{87}\text{Rb}$, ${}^{87}\text{Sr}$ и ${}^{86}\text{Sr}$. Число ядер стабильного эталонного изотопа N_{86} постоянно.

Закон радиоактивного распада даёт

$$N_{\text{Rb}}(t) = N_{\text{Rb}}(0)e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}}.$$

Каждое распавшееся ядро рубидия образует одно ядро стронция-87, поэтому

$$\begin{aligned} N_{87}(t) &= N_{87}(0) + N_{\text{Rb}}(0) - N_{\text{Rb}}(t) \\ &= N_{87}(0) + N_{\text{Rb}}(0)(e^{\lambda t} - 1). \end{aligned}$$

Разделив на N_{86} , введём обозначения

$$Y(t) = \frac{N_{87}(t)}{N_{86}}, \quad X(t) = \frac{N_{\text{Rb}}(t)}{N_{86}}, \quad Y_0 = \frac{N_{87}(0)}{N_{86}}.$$

Тогда

$$Y(t) = Y_0 + (e^{\lambda t} - 1)X(t).$$

Все образцы имеют одинаковое начальное отношение изотопов стронция Y_0 и одинаковый возраст t . Поэтому точки, соответствующие их современным значениям, лежат на прямой, пересекающей вертикальную ось в точке Y_0 и имеющей угловой коэффициент

$$a(t) = e^{\lambda t} - 1.$$

В момент кристаллизации угловой коэффициент равен нулю; затем он увеличивается с возрастом.

1.4с

Прямая на рис. 1.2(b) проходит приблизительно через точки

$$(X, Y) \approx (0.05, 0.702) \quad \text{и} \quad (0.25, 0.712).$$

Поэтому её угловой коэффициент приблизительно равен

$$a \approx \frac{0.712 - 0.702}{0.25 - 0.05} = 0.050.$$

Выражая время из результата пункта 1.4b, получаем

$$\tau_M = \frac{\ln(1 + a)}{\lambda} = \frac{T_{\frac{1}{2}}}{\ln 2} \ln(1 + a).$$

Следовательно,

$$\tau_M \approx \frac{4.9 \times 10^{10} \text{ yr}}{\ln 2} \ln(1.050) = 3.45 \times 10^9 \text{ yr}.$$

С учётом точности считывания с графика

$$\tau_M \approx 3.5 \times 10^9 \text{ yr}.$$

Рисунок 1.2(b) относится к образцам из «некоторого метеорита»; полученный для него возраст не обязательно совпадает с возрастом Марибо, указанным во введении.

1.5

Для эллиптической орбиты сумма расстояний в перигелии и афелии равна удвоенной большой полуоси:

$$a = \frac{a_{\min} + a_{\max}}{2} = \frac{4.95 \times 10^{10} + 6.16 \times 10^{11}}{2} = 3.3275 \times 10^{11} \text{ m}.$$

Пренебрегая массой кометы по сравнению с массой Солнца, из третьего закона Кеплера получаем

$$t_{\text{Encke}}^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm_S}.$$

Таким образом,

$$t_{\text{Encke}} = 2\pi \sqrt{\frac{(3.3275 \times 10^{11})^3}{(6.67 \times 10^{-11})(1.99 \times 10^{30})}} = 1.0468 \times 10^8 \text{ s}.$$

Используя $1 \text{ yr} \approx 3.156 \times 10^7 \text{ s}$, получаем

$$t_{\text{Encke}} \approx 1.05 \times 10^8 \text{ s} \approx 3.32 \text{ yr.}$$

1.6a

Сначала вычислим величины, используемые во всех трёх вопросах о столкновении. Масса астероида равна

$$m_{\text{ast}} = \frac{4}{3}\pi R_{\text{ast}}^3 \rho_{\text{ast}} = \frac{4}{3}\pi (5.0 \times 10^3)^3 (3.0 \times 10^3) = 1.571 \times 10^{15} \text{ kg.}$$

Момент инерции Земли равен

$$I_E = 0.83 \frac{2}{5} m_E R_E^2 = 8.068 \times 10^{37} \text{ kg m}^2.$$

Принимая начальный период её вращения равным $\tau_E = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$, получаем

$$\omega_E = \frac{2\pi}{\tau_E} = 7.272 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

а её момент импульса собственного вращения равен

$$L_E = I_E \omega_E = 5.867 \times 10^{33} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Будем считать присоединившийся астероид точечной массой на поверхности Земли. Его размеры и смещение общего центра масс дают пренебрежимо малые поправки.

На Северном полюсе радиус-вектор астероида параллелен начальной оси вращения Земли. Следовательно, его момент импульса

$$\mathbf{L}_{\text{ast}} = \mathbf{r} \times m_{\text{ast}} \mathbf{v}_{\text{ast}}$$

перпендикулярен начальному моменту импульса собственного вращения Земли. Его величина максимальна при ударе по касательной:

$$L_{\text{ast}}^{\text{max}} = m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}} = 2.505 \times 10^{26} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Тогда закон сохранения момента импульса в ведущем порядке по малому отношению массы астероида к массе Земли даёт

$$\tan \theta_{\text{max}} \simeq \frac{L_{\text{ast}}^{\text{max}}}{L_E}.$$

Угол чрезвычайно мал, поэтому

$$\theta_{\text{max}} \simeq \frac{m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}}}{I_E \omega_E} = 4.27 \times 10^{-8} \text{ rad} \approx 2.4 \times 10^{-6} \text{ degree.}$$

Изменение тензора инерции вносит в этот малый наклон лишь поправку более высокого порядка.

1.6b

При радиальном ударе налетающий астероид имеет нулевой момент импульса относительно центра Земли. После его прилипания на экваторе момент инерции увеличивается до

$$I' = I_E + m_{\text{ast}} R_E^2.$$

Закон сохранения момента импульса требует

$$I_E \omega_E = (I_E + m_{\text{ast}} R_E^2) \omega'.$$

Поскольку период обратно пропорционален угловой скорости,

$$\tau' = \tau_E \left(1 + \frac{m_{\text{ast}} R_E^2}{I_E} \right).$$

Следовательно,

$$\Delta\tau_{\text{vrt}} = \tau_E \frac{m_{\text{ast}} R_E^2}{I_E} = \tau_E \frac{m_{\text{ast}}}{0.332 m_E}.$$

Численно получаем

$$\Delta\tau_{\text{vrt}} = 6.85 \times 10^{-5} \text{ s} \approx +6.8 \times 10^{-5} \text{ s}.$$

Сутки становятся длиннее приблизительно на $68 \mu\text{s}$.

1.6с

Направление удара по касательной имеет значение. Положим $\sigma = +1$ для удара по направлению вращения, увеличивающего момент импульса собственного вращения, и $\sigma = -1$ для удара против направления вращения.

Закон сохранения момента импульса даёт

$$I_E \omega_E + \sigma m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}} = (I_E + m_{\text{ast}} R_E^2) \omega'.$$

Введём малые безразмерные величины

$$\epsilon = \frac{m_{\text{ast}} R_E^2}{I_E} = 7.925 \times 10^{-10}, \quad \eta = \frac{m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}}}{I_E \omega_E} = 4.270 \times 10^{-8}.$$

Новый период и его изменение равны

$$\tau' = \tau_E \frac{1 + \epsilon}{1 + \sigma \eta},$$

$$\Delta\tau_{\text{tan}} = \tau_E \frac{\epsilon - \sigma \eta}{1 + \sigma \eta}.$$

Поскольку ϵ , и η очень малы, с высокой точностью можно также записать

$$\Delta\tau_{\text{tan}} \approx \tau_E (\epsilon - \sigma \eta).$$

Таким образом:

- **Удар по направлению вращения:**

$$\Delta\tau_{\text{tan}} = -3.621 \times 10^{-3} \text{ s} \approx -3.6 \text{ ms}.$$

- **Удар против направления вращения:**

$$\Delta\tau_{\text{tan}} = +3.758 \times 10^{-3} \text{ s} \approx +3.8 \text{ ms}.$$

Добавленный момент инерции увеличивает продолжительность суток в обоих случаях. Момент импульса налетающего астероида оказывает более сильное влияние и определяет знак изменения.

1.7

Сначала рассмотрим движение тела относительно Солнца, прежде чем притяжение Земли становится существенным. На расстоянии земной орбиты гравитационно связанное тело имеет отрицательную удельную орбитальную энергию:

$$\mathcal{E} = \frac{u^2}{2} - \frac{Gm_S}{a_E} < 0.$$

Поэтому его гелиоцентрическая скорость ограничена сверху местной скоростью убегания из поля Солнца:

$$u < u_{\max} = \sqrt{\frac{2Gm_S}{a_E}}.$$

Предельному случаю соответствует орбита, энергия связи на которой стремится к нулю.

Считая орбиту Земли круговой с радиусом, равным заданному среднему расстоянию, получаем её орбитальную скорость

$$v_E = \sqrt{\frac{Gm_S}{a_E}}.$$

Наибольшая относительная скорость сближения достигается, когда тело движется точно против направления орбитального движения Земли. Следовательно,

$$v_{\infty}^{\max} = u_{\max} + v_E = (1 + \sqrt{2})\sqrt{\frac{Gm_S}{a_E}}.$$

Численно получаем

$$v_E = 29.75 \text{ km s}^{-1}, \quad u_{\max} = 42.07 \text{ km s}^{-1},$$

поэтому

$$v_{\infty}^{\max} = 71.82 \text{ km s}^{-1}.$$

Притяжение Земли дополнительно ускоряет тело. При сближении с Землёй закон сохранения механической энергии даёт

$$\frac{1}{2}v_{\text{imp}}^2 - \frac{Gm_E}{R_E} = \frac{1}{2}v_{\infty}^2.$$

Таким образом,

$$v_{\text{imp}}^{\max} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 \frac{Gm_S}{a_E} + \frac{2Gm_E}{R_E}}.$$

Скорость убегания с поверхности Земли равна

$$\sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}} = 11.17 \text{ km s}^{-1}.$$

Следовательно,

$$v_{\text{imp}}^{\max} = \sqrt{(71.82)^2 + (11.17)^2} \text{ km s}^{-1} \approx 72.7 \text{ km s}^{-1}.$$

Для строго связанной орбиты скорость строго меньше этого значения. Она может приближаться к нему сколь угодно близко по мере того, как начальная энергия связи с Солнцем стремится к нулю.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Плазмонный парогенератор

Введение

В этой задаче мы изучим эффективный процесс получения пара, работоспособность которого была продемонстрирована экспериментально. Водный раствор сферических частиц серебра нанометрового размера (наночастиц), содержащий всего около 10^{13} частиц на литр, освещается сфокусированным световым пучком. Часть света поглощается наночастицами, которые нагреваются и локально образуют вокруг себя пар без нагревания всего водного раствора. Пар выводится из системы в виде выходящих пузырьков пара. В настоящее время не все детали этого процесса хорошо изучены, однако известно, что в его основе лежит поглощение света посредством так называемых коллективных колебаний электронов металлических наночастиц. Такое устройство называется плазмонным парогенератором.

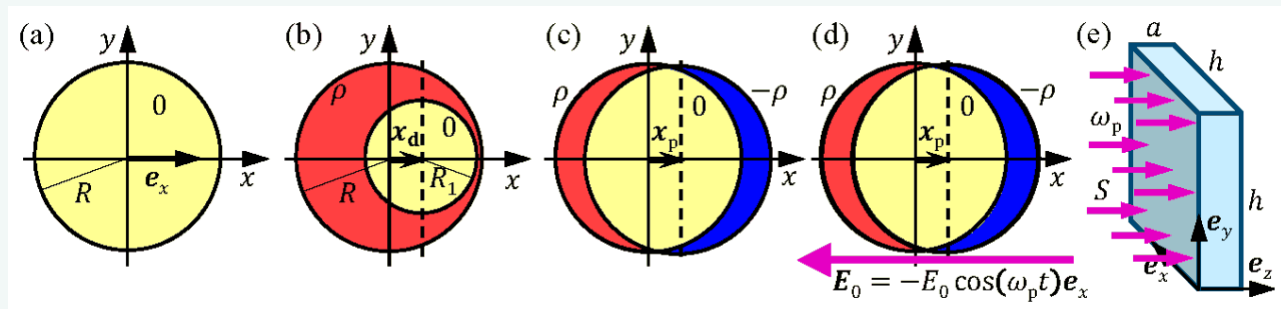


Рисунок 2.1 (а) Сферическая электронейтральная наночастица радиуса R , расположенная в начале координат. **(б)** Шар с однородной положительной плотностью заряда ρ (красный), содержащий меньшую сферическую электронейтральную область (0, жёлтая) радиуса R_1 , центр которой смещён на $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$. **(в)** Шар с положительной плотностью заряда ρ , образованный ионами серебра наночастицы, закреплён в начале координат. Центр сферической области электронного облака с отрицательной сферически симметричной плотностью заряда $-\rho$ (синяя) смещён на $\mathbf{x}_p$, где $x_p \ll R$. **(д)** Внешнее однородное электрическое поле $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$. При зависящем от времени E_0 электронное облако движется со скоростью $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$. **(е)** Прямоугольный сосуд ($h \times h \times a$), содержащий водный раствор наночастиц, который освещается монохроматическим светом, распространяющимся вдоль оси z , с угловой частотой ω_p и интенсивностью S .

Одиночная сферическая наночастица серебра

Во всей задаче мы рассматриваем сферическую наночастицу серебра радиуса $R = 10,0 \text{ nm}$, центр которой закреплён в начале координат, см. рис. 2.1(а). Все перемещения, силы и возбуждающие поля параллельны горизонтальной оси x (с единичным вектором $\mathbf{e}_x$). Наночастица содержит свободные электроны (электроны

проводимости), которые движутся по всему её объёму, не будучи связанными с каким-либо атомом серебра. Каждый атом серебра представляет собой положительный ион, отдавший один такой свободный электрон.

Часть	Вопрос	Баллы
2.1	Найдите следующие величины: объём V и массу M наночастицы, число N и плотность заряда ρ ионов серебра в частице, а для свободных электронов — их концентрацию n , полный заряд Q и полную массу m_0 .	0.7

Электрическое поле в электронейтральной области внутри заряженного шара

В оставшейся части задачи считайте, что относительная диэлектрическая проницаемость всех материалов равна $\epsilon = 1$. Внутри заряженного шара с однородной плотностью заряда ρ и радиусом R путём добавления противоположной плотности заряда $-\rho$ создана небольшая сферическая электронейтральная область радиуса R_1 , центр которой смещён на $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$ относительно центра шара радиуса R , см. рис. 2.1(b).

Часть	Вопрос	Баллы
2.2	Покажите, что электрическое поле внутри электронейтральной области однородно и имеет вид $\mathbf{E} = A(\rho/\epsilon_0) \mathbf{x}_d$, и определите коэффициент A .	1.2

Возвращающая сила, действующая на смещённое электронное облако

Далее мы изучаем коллективное движение свободных электронов и поэтому моделируем их единым отрицательно заряженным шаром с однородной плотностью заряда $-\rho$ и положением центра $\mathbf{x}_p$, который может двигаться вдоль оси x относительно центра положительно заряженного шара (ионов серебра), закреплённого в начале координат, см. рис. 2.1(c). Предположим, что внешняя сила $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ смещает электронное облако в новое положение равновесия $\mathbf{x}_p = x_p \mathbf{e}_x$, причём $|x_p| \ll R$. За исключением малых нескомпенсированных зарядов на противоположных краях наночастицы, большая часть её внутреннего объёма остаётся электронейтральной.

Часть	Вопрос	Баллы
2.3	Выразите через x_p и n следующие две величины: возвращающую силу $\mathbf{F}$, действующую на электронное облако, и работу W_{el} , совершённую над электронным облаком при его смещении.	1.0

Сферическая наночастица серебра во внешнем постоянном электрическом поле

Наночастица находится в вакууме и испытывает действие внешней силы $\mathbf{F}_{\text{ext}}$, обусловленной приложенным постоянным однородным электрическим полем $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$, которое смещает электронное облако на малое расстояние $|x_p|$, где $|x_p| \ll R$.

Часть	Вопрос	Баллы
2.4	Найдите смещение x_p электронного облака через E_0 и n и определите величину $-\Delta Q$ электронного заряда, перенесённого через плоскость yz , проходящую через центр наночастицы, через n , R и x_p .	0.6

Эквивалентные ёмкость и индуктивность наночастицы серебра

Как для постоянного, так и для зависящего от времени поля $\mathbf{E}_0$ наночастицу можно моделировать эквивалентной электрической цепью. Эквивалентную ёмкость можно найти, сопоставив работу W_{el} , затраченную на разделение зарядов ΔQ , с энергией конденсатора, несущего заряды $\pm \Delta Q$. Разделение зарядов создаёт определённое эквивалентное напряжение V_0 на эквивалентном конденсаторе.

Часть	Вопрос	Баллы
2.5a	Выразите эквивалентную ёмкость системы C через ε_0 и R и найдите её значение.	0.7
2.5b	Для этой ёмкости определите через E_0 и R эквивалентное напряжение V_0 , которое следует приложить к эквивалентному конденсатору, чтобы накопить заряд ΔQ .	0.4

При зависящем от времени поле $\mathbf{E}_0$ электронное облако движется со скоростью $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$, рис. 2.1(d). Оно обладает кинетической энергией W_{kin} и создаёт электрический ток I , протекающий через неподвижную плоскость yz . Кинетическую энергию электронного облака можно сопоставить с энергией эквивалентной катушки индуктивности L , по которой протекает ток I .

Часть	Вопрос	Баллы
2.6a	Выразите W_{kin} и I через скорость v .	0.7
2.6b	Выразите эквивалентную индуктивность L через радиус частицы R , заряд e и массу m_e электрона, концентрацию электронов n и вычислите её значение.	0.5

Плазмонный резонанс наночастицы серебра

Из приведённого выше анализа следует, что движение, возникающее после смещения электронного облака из положения равновесия и последующего его освобождения, можно моделировать идеальным LC -контуром, совершающим колебания на резонансной частоте. Этот динамический режим электронного облака известен как плазмонный резонанс; колебания происходят на так называемой угловой плазмонной частоте ω_p .

Часть	Вопрос	Баллы
2.7a	Найдите выражение для угловой плазмонной частоты ω_p электронного облака через заряд e и массу m_e электрона, концентрацию электронов n и диэлектрическую проницаемость вакуума ε_0 .	0.5
2.7b	Вычислите ω_p в рад/с и длину волны λ_p в нм для света в вакууме с угловой частотой $\omega = \omega_p$.	0.4

Наночастица серебра, освещённая светом на плазмонной частоте

В оставшейся части задачи наночастица освещается монохроматическим светом на угловой плазмонной частоте ω_p с интенсивностью падающего света $S = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2 = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$. Поскольку длина волны велика, $\lambda_p \gg R$, можно считать, что наночастица находится в однородном гармонически изменяющемся поле $\mathbf{E}_0 = -E_0 \cos(\omega_p t)\mathbf{e}_x$. Под действием $\mathbf{E}_0$ центр $\mathbf{x}_p(t)$ электронного облака колеблется с той же частотой, со скоростью $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$ и постоянной амплитудой x_0 . Это

колебательное движение электронов приводит к поглощению света. Энергия, захваченная частицей, либо превращается в джоулево тепло внутри частицы, либо переизлучается частицей в виде рассеянного света.

Джоулево тепловыделение обусловлено случайными неупругими столкновениями, при которых каждый свободный электрон время от времени сталкивается с ионом серебра и теряет всю свою кинетическую энергию, которая превращается в энергию колебаний ионов серебра (тепло). Среднее время между столкновениями равно $\tau \gg 1/\omega_p$; для наночастицы серебра будем использовать $\tau = 5.24 \times 10^{-15}$ s.

Часть	Вопрос	Баллы
2.8a	Найдите выражения для усреднённой по времени мощности джоулева тепловыделения P_{heat} в наночастице, а также для среднего по времени квадрата тока $\langle I^2 \rangle$, явно содержащие средний по времени квадрат скорости $\langle v^2 \rangle$ электронного облака.	1.0
2.8b	Найдите выражение для эквивалентного омического сопротивления R_{heat} в модели наночастицы в виде эквивалентного резистора с мощностью джоулева тепловыделения P_{heat} , обусловленного током электронного облака I . Вычислите численное значение R_{heat} .	1.0

Падающий световой пучок теряет некоторую среднюю по времени мощность P_{scat} вследствие рассеяния на колеблющемся электронном облаке (переизлучения). P_{scat} зависит от амплитуды x_0 , заряда Q и угловой частоты ω_p источника рассеяния, а также от свойств света (скорости света c и диэлектрической проницаемости ϵ_0 в вакууме). Через эти четыре переменные P_{scat} выражается как

$$P_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}.$$

Часть	Вопрос	Баллы
2.9	Используя P_{scat} , найдите выражение для эквивалентного сопротивления рассеяния R_{scat} (по аналогии с R_{heat}) в модели эквивалентного резистора и вычислите его значение.	1.0

Приведённые выше элементы эквивалентной цепи объединяются в последовательный LCR -контур, моделирующий наночастицу серебра, который возбуждается гармонически изменяющимся эквивалентным напряжением $V = V_0 \cos(\omega_p t)$, определяемым электрическим полем E_0 падающего света.

Часть	Вопрос	Баллы
2.10a	Выведите выражения для средних по времени мощностей потерь P_{heat} и P_{scat} , содержащие амплитуду E_0 электрического поля падающего света при плазмонном резонансе $\omega = \omega_p$.	1.2
2.10b	Вычислите численные значения E_0 , P_{heat} и P_{scat} .	0.3

Получение пара с помощью света

Приготовлен водный раствор наночастиц серебра с концентрацией $n_{\text{np}} = 7.3 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$. Он помещён в прямоугольный прозрачный сосуд размером $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1.0 \text{ cm}^3$ и освещается светом на плазмонной частоте с той же интенсивностью $S = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$,

что и выше, при нормальном падении, см. рис. 2.1(е). Температура воды равна $T_{\text{wa}} = 20^\circ\text{C}$, и мы предполагаем, в удовлетворительном согласии с наблюдениями, что в стационарном режиме всё джоулево тепло наночастицы идёт на получение пара с температурой $T_{\text{st}} = 110^\circ\text{C}$, не повышая температуру воды.

Термодинамический КПД η плазмонного парогенератора определяется отношением мощностей $\eta = P_{\text{st}}/P_{\text{tot}}$, где P_{st} — мощность, идущая на получение пара во всём сосуде, а P_{tot} — полная мощность падающего света, входящего в сосуд.

Большую часть времени каждая наночастица окружена паром, а не водой, поэтому её можно описывать как находящуюся в вакууме.

Часть	Вопрос	Баллы
2.11a	Вычислите полную массу пара в секунду μ_{st} , производимого плазмонным парогенератором при освещении светом на плазмонной частоте с интенсивностью S .	0.6
2.11b	Вычислите численное значение термодинамического КПД η плазмонного парогенератора.	0.2

Справочные данные: таблица физических параметров

Физический параметр	Значение
Скорость света в вакууме	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Постоянная Планка, делённая на 2π	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Гравитационная постоянная	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Ускорение свободного падения	$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$
Элементарный заряд	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Диэлектрическая проницаемость вакуума	$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Масса электрона	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Постоянная Авогадро	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Каменный метеорит, удельная теплоёмкость	$c_{\text{sm}} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Каменный метеорит, теплопроводность	$k_{\text{sm}} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Каменный метеорит, плотность	$\rho_{\text{sm}} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Каменный метеорит, температура плавления	$T_{\text{sm}} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$
Каменный метеорит, удельная теплота плавления	$L_{\text{sm}} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
Серебро, молярная масса	$M_{\text{Ag}} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$
Серебро, плотность	$\rho_{\text{Ag}} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
Серебро, удельная теплоёмкость	$c_{\text{Ag}} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Вода, молярная масса	$M_{\text{wa}} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$
Вода, плотность	$\rho_{\text{wa}} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Вода, удельная теплоёмкость	$c_{\text{wa}} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Вода, удельная теплота парообразования	$L_{\text{wa}} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$

Физический параметр	Значение
Вода, температура кипения	$T_{100} = 100\text{ }^{\circ}\text{C} = 373.15\text{ K}$
Лёд, плотность ледникового льда	$\rho_{\text{ice}} = 0.917 \times 10^3\text{ kg m}^{-3}$
Пар, удельная теплоёмкость	$c_{\text{st}} = 2.080 \times 10^3\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$
Земля, масса	$m_{\text{E}} = 5.97 \times 10^{24}\text{ kg}$
Земля, радиус	$R_{\text{E}} = 6.38 \times 10^6\text{ m}$
Солнце, масса	$m_{\text{S}} = 1.99 \times 10^{30}\text{ kg}$
Солнце, радиус	$R_{\text{S}} = 6.96 \times 10^8\text{ m}$
Среднее расстояние от Солнца до Земли	$a_{\text{E}} = 1.50 \times 10^{11}\text{ m}$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Здесь $e > 0$, $Q < 0$, а W_{el} обозначает положительную работу, затраченную на разделение зарядов. Выберем направление тока в цепи так, чтобы $I = d(\Delta Q)/dt$, причём ток положителен, когда электроны движутся в направлении $+x$.

• 2.1

$$V = 4.19 \times 10^{-24}\text{ m}^3, \quad M = 4.39 \times 10^{-20}\text{ kg},$$

$$N = 2.45 \times 10^5, \quad \rho = +9.38 \times 10^9\text{ C m}^{-3},$$

$$n = 5.85 \times 10^{28}\text{ m}^{-3}, \quad Q = -3.93 \times 10^{-14}\text{ C}, \quad m_0 = 2.23 \times 10^{-25}\text{ kg}.$$

• 2.2

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{x}_d, \quad \boxed{A = \frac{1}{3}}.$$

• 2.3

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi n^2 e^2 R^3}{9\varepsilon_0} \mathbf{x}_p, \quad W_{\text{el}} = \frac{2\pi n^2 e^2 R^3}{9\varepsilon_0} x_p^2.$$

• 2.4

$$x_p = \frac{3\varepsilon_0 E_0}{ne}, \quad -\Delta Q = -ne\pi R^2 x_p.$$

• 2.5a

$$C = \frac{9}{4}\pi\varepsilon_0 R = 6.26 \times 10^{-19}\text{ F}.$$

• 2.5b

$$V_0 = \frac{4}{3}RE_0.$$

• 2.6a

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m_0 v^2 = \frac{2\pi}{3}nm_e R^3 v^2, \quad I = ne\pi R^2 v.$$

- 2.6b

$$L = \frac{4m_e}{3\pi ne^2 R} = 2.57 \times 10^{-14} \text{ H}.$$

- 2.7a

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{3\varepsilon_0 m_e}}.$$

- 2.7b

$$\omega_p = 7.88 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}, \quad \lambda_p = 239 \text{ nm}.$$

- 2.8a

$$P_{\text{heat}} = \frac{m_0}{2\tau} \langle v^2 \rangle, \quad \langle I^2 \rangle = (ne\pi R^2)^2 \langle v^2 \rangle.$$

- 2.8b

$$R_{\text{heat}} = \frac{L}{2\tau} = \frac{2m_e}{3\pi ne^2 R\tau} = 2.46 \Omega.$$

- 2.9

$$R_{\text{scat}} = \frac{8R^2 \omega_p^2}{27\pi \varepsilon_0 c^3} = 2.45 \Omega.$$

- 2.10a

$$P_{\text{heat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{heat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}, \quad P_{\text{scat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{scat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}.$$

- 2.10b

$$E_0 = 2.74 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}, \quad P_{\text{heat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}, \quad P_{\text{scat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}.$$

- 2.11a, при равномерном освещении по всему объёму сосуда:

$$\mu_{\text{st}} \simeq 1.9 \times 10^{-3} \text{ kg s}^{-1} = 1.9 \text{ g s}^{-1}.$$

- 2.11b, в том же приближении:

$$\eta \simeq 0.50 = 50\%.$$

Решение

Все приведённые ниже результаты электростатического анализа и анализа цепи получены в рамках заданной модели жёсткого, равномерно заряженного электронного облака. В результатах, зависящих от смещения, сохранены главные члены при $|x_p|/R \ll 1$.

2.1

Частица имеет форму шара, поэтому

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} (1.00 \times 10^{-8})^3 = 4.19 \times 10^{-24} \text{ m}^3.$$

Её масса равна

$$M = \rho_{\text{Ag}} V = 4.39 \times 10^{-20} \text{ kg}.$$

Число атомов серебра, а значит, и однозарядных ионов серебра равно

$$N = \frac{M}{M_{\text{Ag}}} N_A = 2.45 \times 10^5.$$

На каждый ион приходится один электрон проводимости. Таким образом,

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\rho_{\text{Ag}} N_A}{M_{\text{Ag}}} = 5.85 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

Плотность положительного заряда ионов равна

$$\rho = ne = +9.38 \times 10^9 \text{ C m}^{-3}.$$

Для электронов

$$Q = -Ne = -3.93 \times 10^{-14} \text{ C}, \quad m_0 = Nm_e = 2.23 \times 10^{-25} \text{ kg}.$$

2.2

Применим теорему Гаусса к концентрической сферической гауссовой поверхности радиуса r внутри равномерно заряженного шара:

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho(4\pi r^3/3)}{\epsilon_0}.$$

Следовательно, поле внутри шара равно

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}.$$

Нейтральная область образуется наложением шара с плотностью заряда $-\rho$, центр которого находится в точке $\mathbf{x}_d$. В точке внутри этого меньшего шара его поле равно

$$\mathbf{E}_-(\mathbf{r}) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{x}_d).$$

Сложение двух полей даёт

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_d.$$

Зависимость от положения $\mathbf{r}$ сокращается, поэтому поле однородно и

$$\boxed{A = \frac{1}{3}}.$$

2.3

Смещённое электронное облако имеет плотность заряда $-ne$, а неподвижные ионы — плотность заряда $+ne$. Согласно 2.2, поле в их общей нейтральной внутренней области равно

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = \frac{ne}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_p.$$

В первом порядке по смещению это поле создаёт возвращающую силу, действующую на облако:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}_{\text{int}} = -\frac{Nne^2}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_p.$$

Малые неперекрывающиеся области влияют лишь на члены более высоких порядков. С учётом $N = 4\pi nR^3/3$,

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} \mathbf{x}_p.$$

Определим эффективный коэффициент жёсткости

$$k = \frac{Nne^2}{3\epsilon_0}.$$

Работа, затраченная при квазистатическом смещении от нуля до x_p , равна

$$W_{\text{el}} = -\int_0^{x_p} F_x(x) dx = \int_0^{x_p} kx dx = \frac{1}{2} kx_p^2.$$

Следовательно,

$$W_{\text{el}} = \frac{Nne^2}{6\epsilon_0} x_p^2 = \frac{2\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} x_p^2.$$

Это запасённая электростатическая энергия, используемая в 2.5. Работа самой возвращающей силы равна $-W_{\text{el}}$.

2.4

Внешнее поле направлено вдоль $-x$, поэтому сила, действующая на отрицательно заряженное электронное облако, направлена вдоль $+x$:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = Q\mathbf{E}_0 = NeE_0\mathbf{e}_x.$$

В равновесии

$$NeE_0 - \frac{Nne^2}{3\epsilon_0} x_p = 0.$$

Отсюда

$$x_p = \frac{3\epsilon_0 E_0}{ne}.$$

При малом поступательном смещении x_p объём электронного облака, перенесённый через центральную плоскость, в главном порядке равен

$$\Delta V = \pi R^2 x_p.$$

Умножение на плотность его заряда даёт

$$-\Delta Q = -ne\pi R^2 x_p.$$

Таким образом, положительная величина, характеризующая разделение зарядов, равна

$$\Delta Q = ne\pi R^2 x_p = 3\pi\epsilon_0 R^2 E_0.$$

2.5a

Приравняем электростатическую энергию к энергии эквивалентного конденсатора:

$$W_{\text{el}} = \frac{(\Delta Q)^2}{2C}.$$

Используя полученные выше результаты,

$$C = \frac{(ne\pi R^2 x_p)^2}{2(2\pi n^2 e^2 R^3 x_p^2 / (9\epsilon_0))} = \frac{9}{4} \pi \epsilon_0 R.$$

Следовательно,

$$C = 6.26 \times 10^{-19} \text{ F}.$$

2.5b

Эквивалентное напряжение равно

$$V_0 = \frac{\Delta Q}{C}.$$

Подстановка даёт

$$V_0 = \frac{3\pi\epsilon_0 R^2 E_0}{(9/4)\pi\epsilon_0 R},$$

поэтому

$$V_0 = \frac{4}{3} R E_0.$$

2.6a

Все N электронов участвуют в коллективном движении. Их кинетическая энергия равна

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} N m_e v^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{2\pi}{3} n m_e R^3 v^2.$$

Дифференцирование соотношения для разделения зарядов даёт

$$I = \frac{d(\Delta Q)}{dt} = ne\pi R^2 v.$$

Здесь положительный ток в цепи соответствует условному направлению тока вдоль $-x$. Если бы положительным условным направлением тока через плоскость было выбрано направление $+x$, то было бы $I_x = -ne\pi R^2 v$. Результаты для энергии и сопротивления зависят от I^2 , поэтому выбор направления на них не влияет.

2.6b

Сопоставим кинетическую энергию с энергией эквивалентной катушки индуктивности:

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Отсюда следует, что

$$L = \frac{m_0}{(ne\pi R^2)^2}.$$

Используя $m_0 = (4\pi R^3/3) n m_e$,

$$L = \frac{4m_e}{3\pi n e^2 R} = 2.57 \times 10^{-14} \text{ H}.$$

2.7a

Для свободных колебаний идеального LC -контура

$$L \frac{d^2(\Delta Q)}{dt^2} + \frac{\Delta Q}{C} = 0,$$

поэтому

$$\omega_p^2 = \frac{1}{LC}.$$

Поскольку

$$LC = \frac{4m_e}{3\pi n e^2 R} \frac{9\pi \varepsilon_0 R}{4} = \frac{3\varepsilon_0 m_e}{n e^2},$$

получаем

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{3\varepsilon_0 m_e}}.$$

Тот же результат непосредственно следует из $\omega_p^2 = k/m_0$.

2.7b

Подстановка заданных постоянных даёт

$$\omega_p = 7.88 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}.$$

Поскольку $\omega = 2\pi c/\lambda$,

$$\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} = 2.39 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

Таким образом,

$$\lambda_p = 239 \text{ nm}.$$

2.8a

В заданной модели столкновений каждый электрон при столкновении теряет всю свою кинетическую энергию коллективного движения. Его средняя по времени потеря энергии за одно столкновение равна

$$\frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle.$$

В среднем среди всех электронов происходит N/τ столкновений в секунду. Случайность моментов столкновений позволяет использовать усреднённую за период кинетическую энергию, что даёт

$$P_{\text{heat}} = \frac{N m_e}{2\tau} \langle v^2 \rangle = \frac{m_0}{2\tau} \langle v^2 \rangle.$$

Из соотношения между током и скоростью

$$\langle I^2 \rangle = (n e \pi R^2)^2 \langle v^2 \rangle.$$

2.8b

Эквивалентное сопротивление определяется соотношением

$$P_{\text{heat}} = R_{\text{heat}} \langle I^2 \rangle.$$

Следовательно,

$$R_{\text{heat}} = \frac{m_0}{2\tau(ne\pi R^2)^2} = \frac{L}{2\tau}.$$

Таким образом,

$$R_{\text{heat}} = \frac{2m_e}{3\pi ne^2 R\tau} = 2.46 \, \Omega.$$

Множитель $1/2$ возникает из выражения для кинетической энергии $\frac{1}{2}m_e v^2$, теряемой при каждом столкновении в конкретной модели, заданной в условии.

2.9

Для гармонического движения с амплитудой x_0

$$x_p(t) = x_0 \cos(\omega_p t + \phi),$$

и, следовательно,

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega_p^2 x_0^2.$$

Поэтому

$$\langle I^2 \rangle = \frac{1}{2} (ne\pi R^2)^2 \omega_p^2 x_0^2.$$

Определим сопротивление рассеяния соотношением

$$P_{\text{scat}} = R_{\text{scat}} \langle I^2 \rangle.$$

Используя приведённую формулу излучения,

$$R_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \frac{2}{(ne\pi R^2)^2 \omega_p^2 x_0^2}.$$

Поскольку

$$Q = -\frac{4}{3} \pi R^3 ne, \quad \frac{Q^2}{(ne\pi R^2)^2} = \frac{16R^2}{9},$$

получаем

$$R_{\text{scat}} = \frac{8R^2 \omega_p^2}{27\pi \epsilon_0 c^3} = 2.45 \, \Omega.$$

Эквивалентная запись:

$$R_{\text{scat}} = \frac{8ne^2 R^2}{81\pi \epsilon_0^2 m_e c^3}.$$

2.10a

И тепловыделение, и рассеяние отбирают энергию у одного и того же колеблющегося тока.

Поэтому их эквивалентные сопротивления складываются в последовательной цепи:

$$R_{\Sigma} = R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}}.$$

При $\omega = \omega_p = 1/\sqrt{LC}$ индуктивное и ёмкостное реактивные сопротивления компенсируют друг друга:

$$\omega_p L - \frac{1}{\omega_p C} = 0.$$

Таким образом, ток совпадает по фазе с возбуждающим напряжением и имеет амплитуду

$$I_0 = \frac{V_0}{R_\Sigma} = \frac{4RE_0}{3R_\Sigma}.$$

Для синусоидального тока

$$\langle I^2 \rangle = \frac{I_0^2}{2} = \frac{8R^2 E_0^2}{9R_\Sigma^2}.$$

Следовательно, две средние мощности равны

$$P_{\text{heat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{heat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}$$

и

$$P_{\text{scat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{scat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}.$$

2.10b

Из заданной интенсивности падающего света

$$S = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2,$$

поэтому

$$E_0 = \sqrt{\frac{2S}{c\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2(1.00 \times 10^6)}{(2.998 \times 10^8)(8.854 \times 10^{-12})}}.$$

Таким образом,

$$E_0 = 2.74 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}.$$

Используя неокруглённые промежуточные значения,

$$V_0 = 3.66 \times 10^{-4} \text{ V}, \quad R_\Sigma = 4.910 \, \Omega, \quad I_0 = 7.45 \times 10^{-5} \text{ A}.$$

Следовательно,

$$P_{\text{heat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}, \quad P_{\text{scat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}.$$

Их приближённое равенство следует из приближённого равенства двух сопротивлений.

Можно также проверить амплитуду смещения:

$$x_0 = \frac{I_0}{ne\pi R^2 \omega_p} = 3.21 \times 10^{-15} \text{ m},$$

так что $x_0/R = 3.21 \times 10^{-7} \ll 1$. Кроме того, $\omega_p \tau = 41.3$, что согласуется с предполагаемым разделением характерных времён колебаний и столкновений.

2.11a

Применим мощность тепловыделения одной частицы из 2.10 ко всему освещённому объёму. При этом используется предположение о равномерном освещении и не вводится дополнительная модель ослабления света или многократного рассеяния.

Объём сосуда равен

$$V_{\text{vessel}} = h^2 a = (0.10)^2 (0.010) = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3.$$

Он содержит

$$N_{\text{np}} = n_{\text{np}} h^2 a = 7.3 \times 10^{11}$$

наночастиц. Предполагается, что всё выделяемое ими джоулево тепло идёт на получение пара, поэтому

$$P_{\text{st}} = N_{\text{np}} P_{\text{heat}} = 4.98 \times 10^3 \text{ W}.$$

Каждый килограмм воды, превращающийся в пар, сначала должен быть нагрет от 20°C до 100°C , затем испарён и, наконец, нагрет до 110°C . Необходимая энергия на единицу массы равна

$$q_{\text{st}} = c_{\text{wa}}(T_{100} - T_{\text{wa}}) + L_{\text{wa}} + c_{\text{st}}(T_{\text{st}} - T_{100}).$$

Численно

$$\begin{aligned} q_{\text{st}} &= (4.181 \times 10^3)(80) + 2.260 \times 10^6 + (2.080 \times 10^3)(10) \\ &= 2.61528 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}. \end{aligned}$$

То, что основная масса воды остаётся при 20°C , не устраняет необходимости нагревать ту часть воды, которая испаряется.

Закон сохранения энергии даёт

$$\mu_{\text{st}} q_{\text{st}} = P_{\text{st}}.$$

Таким образом,

$$\mu_{\text{st}} = \frac{n_{\text{np}} h^2 a P_{\text{heat}}}{c_{\text{wa}}(T_{100} - T_{\text{wa}}) + L_{\text{wa}} + c_{\text{st}}(T_{\text{st}} - T_{100})} = 1.904 \times 10^{-3} \text{ kg s}^{-1}.$$

С точностью, соответствующей данным о размерах сосуда и концентрации,

$$\boxed{\mu_{\text{st}} \simeq 1.9 \text{ g s}^{-1}}.$$

2.11b

Пучок входит перпендикулярно грани площадью h^2 , поэтому

$$P_{\text{tot}} = S h^2 = (1.00 \times 10^6)(0.10)^2 = 1.00 \times 10^4 \text{ W}.$$

Следовательно,

$$\eta = \frac{P_{\text{st}}}{P_{\text{tot}}} = \frac{n_{\text{np}} h^2 a P_{\text{heat}}}{S h^2} = \frac{n_{\text{np}} a P_{\text{heat}}}{S}.$$

Численно

$$\eta = 0.4979,$$

или, с разумным округлением,

$$\eta \simeq 0.50 = 50\%.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Гренландский ледниковый щит

Введение

Эта задача посвящена физике Гренландского ледникового щита — второго по величине ледника в мире, рис. 3.1(a). В идеализированной модели Гренландия представляет собой прямоугольный остров шириной $2L$ и длиной $5L$, поверхность суши которого находится на уровне моря и полностью покрыта несжимаемым льдом (с постоянной плотностью ρ_{ice}), см. рис. 3.1(b). Профиль высоты $H(x)$ ледникового щита не зависит от координаты y ; высота увеличивается от нуля у берегов $x = \pm L$ до максимальной высоты H_m вдоль центральной оси, направленной с севера на юг (оси y), которая называется ледоразделом, см. рис. 3.1(c).

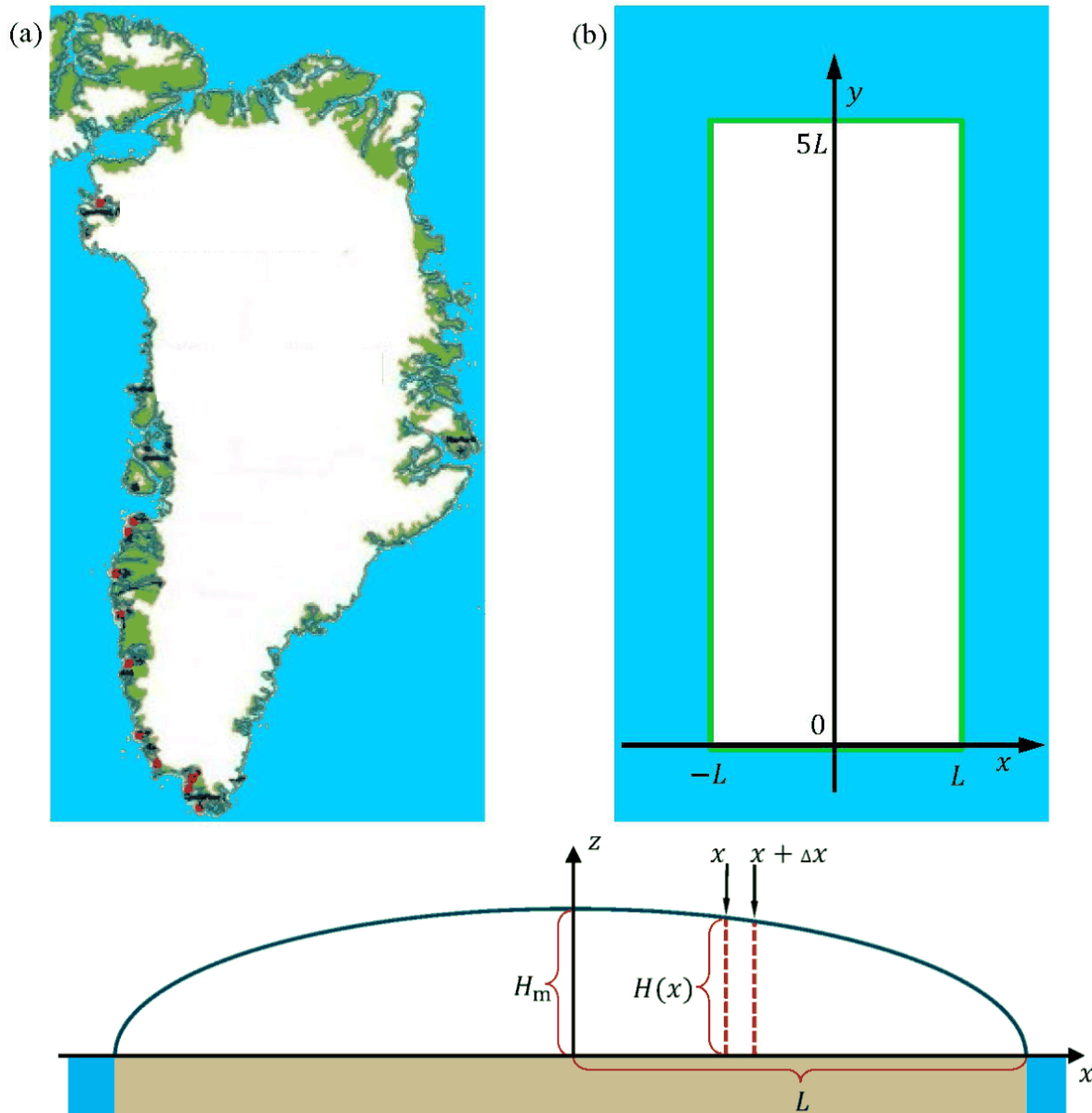


Рисунок 3.1 (а) Карта Гренландии, на которой показаны ледниковый щит (белым), свободные ото льда прибрежные области (зелёным) и окружающий океан (синим). **(b)** Упрощённая модель Гренландского ледникового щита, покрывающего прямоугольную область в плоскости xy со сторонами $2L$ и $5L$. Ледораздел — линия максимальной высоты ледникового щита H_m — проходит вдоль оси y . **(c)** Вертикальный разрез (плоскость xz) ледникового щита, показывающий профиль высоты $H(x)$ (синяя линия). $H(x)$ не зависит от координаты y при $0 < y < 5L$, но резко падает до нуля при $y = 0$ и $y = 5L$. Ось z отмечает положение ледораздела. Для наглядности вертикальные размеры увеличены по сравнению с горизонтальными. Плотность льда ρ_{ice} постоянна.

Две полезные формулы

В этой задаче можно воспользоваться интегралом:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{3}$$

и приближением $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, справедливым при $|\alpha x| \ll 1$.

Профиль высоты ледникового щита

На малых временных масштабах ледник представляет собой несжимаемую гидростатическую систему с неизменным профилем высоты $H(x)$.

3.1	Запишите выражение для давления $p(x, z)$ внутри ледникового щита как функции высоты z над поверхностью суши и расстояния x от ледораздела. Пренебрегите атмосферным давлением.	0.3
-----	---	-----

Рассмотрим находящийся в равновесии вертикальный слой ледникового щита с малой площадью горизонтального основания $\Delta x \Delta y$, расположенный между x и $x + \Delta x$, см. красные штриховые линии на рис. 3.1(c). Величина Δy не имеет значения. Результирующая горизонтальная составляющая силы ΔF , действующей на две вертикальные грани слоя и возникающей из-за разницы высот со стороны центра и со стороны берега, уравнивается силой трения $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$, действующей со стороны грунта на основание площадью $\Delta x \Delta y$, где $S_b = 100 \text{ kPa}$.

3.2a	Для заданного значения x покажите, что в пределе $\Delta x \rightarrow 0$ выполняется $S_b = kH dH/dx$, и определите k .	0.9
3.2b	Найдите выражение для профиля высоты $H(x)$ через ρ_{ice} , g , L , S_b и расстояние x от ледораздела. Полученный результат покажет, что максимальная высота ледника H_m зависит от его полуширины L по закону $H_m \propto L^{1/2}$.	0.8
3.2c	Определите показатель степени γ в зависимости полного объёма V_{ice} ледникового щита от площади A прямоугольного острова, $V_{\text{ice}} \propto A^\gamma$.	0.5

Динамика ледникового щита

На больших временных масштабах лёд представляет собой вязкую несжимаемую жидкость, которая под действием силы тяжести течёт из центральной части к берегу. В этой модели лёд сохраняет профиль высоты $H(x)$ в стационарном состоянии, при котором накопление льда вследствие снегопадов в центральной области уравнивается таянием у берега. В дополнение к геометрии ледникового щита, показанной на рис. 3.1(b) и (c), примите следующие модельные предположения:

1) Лёд течёт в плоскости xz в направлении от ледораздела (оси y). 2) Скорость накопления c (м/год) в центральной области постоянна. 3) Лёд может покидать ледник только за счёт таяния вблизи берегов при $x = \pm L$. 4) Горизонтальная (x -)составляющая $v_x(x) = dx/dt$ скорости течения льда не зависит от z . 5) Вертикальная (z -)составляющая $v_z(z) = dz/dt$ скорости течения льда не зависит от x .

Рассматривайте только центральную область $|x| \ll L$ вблизи середины ледникового щита, где изменения его высоты очень малы и ими можно полностью пренебречь, т. е.

$$H(x) \approx H_m.$$

3.3	Используя закон сохранения массы, найдите выражение для горизонтальной скорости течения льда $v_x(x)$ через c , x и H_m .	0.6
-----	---	-----

Из предположения о несжимаемости, т. е. о постоянстве плотности льда ρ_{ice} , следует, что закон сохранения массы накладывает следующее ограничение на составляющие скорости течения льда

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

3.4	Запишите выражение для зависимости вертикальной составляющей $v_z(z)$ скорости течения льда от z .	0.6
-----	--	-----

Малая частица льда, первоначально находившаяся на поверхности в точке (x_i, H_m) , с течением времени будет перемещаться вместе с ледниковым щитом вдоль траектории $z(x)$ в вертикальной плоскости xz .

3.5	Выведите выражение для такой траектории течения $z(x)$.	0.9
-----	--	-----

Возраст льда и климатические индикаторы в движущемся ледниковом щите

По составляющим скорости течения льда $v_x(x)$ и $v_z(z)$ можно оценить возраст $\tau(z)$ льда на определённой глубине $H_m - z$ от поверхности ледникового щита.

3.6	Найдите выражение для возраста льда $\tau(z)$ как функции высоты z над грунтом непосредственно на ледоразделе $x = 0$.	1.0
-----	---	-----

Ледяной керн, полученный при бурении во внутренней части Гренландского ледникового щита, проходит через слои снега, выпавшего в прошлом; анализ керна позволяет выявить прошлые изменения климата. Одним из лучших индикаторов является так называемая величина $\delta^{18}\text{O}$, определяемая как

$$\delta^{18}\text{O} = \frac{R_{\text{ice}} - R_{\text{ref}}}{R_{\text{ref}}} 1000 \text{‰},$$

где $R = [^{18}\text{O}]/[^{16}\text{O}]$ обозначает отношение содержаний двух стабильных изотопов кислорода ^{18}O и ^{16}O . Эталонное значение R_{ref} основано на изотопном составе океанов вблизи экватора.

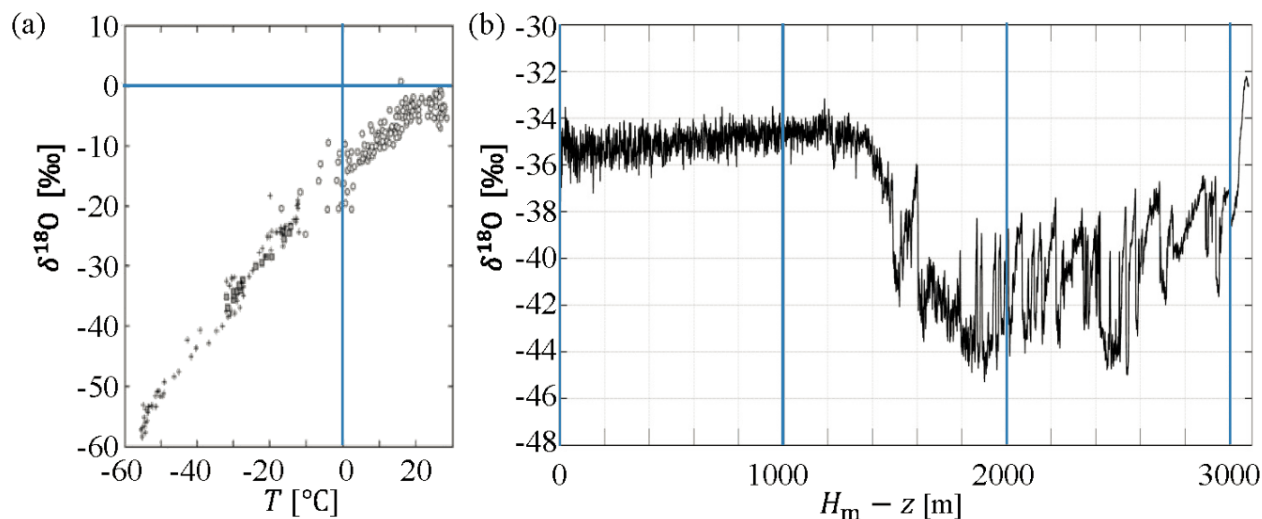


Рисунок 3.2 (а) Наблюдаемая зависимость $\delta^{18}\text{O}$ в снеге от среднегодовой температуры поверхности T . **(б)** Измеренные значения $\delta^{18}\text{O}$ в зависимости от глубины $H_m - z$ от поверхности для ледяного керна, полученного бурением от поверхности до коренного ложа в определённой точке Гренландского ледораздела, где $H_m = 3060$ м.

Наблюдения на Гренландском ледниковом щите показывают, что $\delta^{18}\text{O}$ в снеге изменяется с температурой приблизительно линейно, рис. 3.2(а). Если предположить, что так было всегда, то значение $\delta^{18}\text{O}$, полученное из ледяного керна на глубине $H_m - z$, позволяет оценить температуру T вблизи Гренландии $\tau(z)$ лет назад.

Измерения $\delta^{18}\text{O}$ в гренландском ледяном керне длиной 3060 м показывают резкое изменение $\delta^{18}\text{O}$ на глубине 1492 м, рис. 3.2(б), отмечающее конец последнего ледникового периода. Ледниковый период начался 120 000 лет назад, что соответствует глубине 3040 м, а нынешний межледниковый период начался 11 700 лет назад, что соответствует глубине 1492 м. Предположите, что эти два периода можно описать двумя различными скоростями накопления: c_{ia} (ледниковый период) и c_{ig} (межледниковый период) соответственно. Можно считать H_m постоянной на протяжении этих 120 000 лет.

3.7a	Определите скорости накопления c_{ia} и c_{ig} .	0.8
3.7b	Используя данные рис. 3.2, найдите изменение температуры при переходе от ледникового периода к межледниковому.	0.2

Повышение уровня моря вследствие таяния Гренландского ледникового щита

Полное таяние Гренландского ледникового щита приведёт к повышению уровня Мирового океана. Для грубой оценки этого повышения можно просто рассмотреть равномерный подъём уровня Мирового океана с постоянной площадью $A_O = 3.61 \times 10^{14} \text{ m}^2$.

3.8	Рассчитайте среднее повышение уровня Мирового океана, которое произошло бы при полном таянии Гренландского ледникового щита, если его нынешняя площадь равна $A_G = 1.71 \times 10^{12} \text{ m}^2$, а $S_b = 100 \text{ kPa}$.	0.6
-----	--	-----

Массивный Гренландский ледниковый щит гравитационно притягивает воду окружающего океана. Если ледниковый щит растает, это локальное приливное повышение исчезнет и уровень моря вблизи Гренландии понизится; данный эффект частично компенсирует рассчитанное выше повышение уровня моря.

Чтобы оценить величину этого гравитационного притяжения воды, теперь представим Гренландский ледниковый щит точечной массой, расположенной на уровне грунта и равной полной массе Гренландского ледникового щита. Копенгаген расположен на расстоянии 3500 км по поверхности Земли от центра этой точечной массы. Землю без точечной массы можно считать сферически симметричной, а Мировой океан — покрывающим всю поверхность Земли площадью $A_E = 5.10 \times 10^{14} \text{ м}^2$. Всеми эффектами вращения Земли можно пренебречь.

3.9	В рамках этой модели определите разность $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}}$ между уровнями моря в Копенгагене (h_{CPH}) и в точке, диаметрально противоположной Гренландии (h_{OPP}).	1.8
-----	--	-----

Справочные данные: таблица физических параметров

Скорость света в вакууме	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ м с}^{-1}$
Постоянная Планка, делённая на 2π	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ Дж с}$
Гравитационная постоянная	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$
Ускорение свободного падения	$g = 9.82 \text{ м с}^{-2}$
Элементарный заряд	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ Кл}$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ Кл}^2 \text{ Дж}^{-1} \text{ м}^{-1}$
Масса электрона	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ кг}$
Постоянная Авогадро	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ мол}^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ Дж К}^{-1}$
Каменный метеорит, удельная теплоёмкость	$c_{\text{sm}} = 1.2 \times 10^3 \text{ Дж кг}^{-1} \text{ К}^{-1}$
Каменный метеорит, теплопроводность	$k_{\text{sm}} = 2.0 \text{ Вт м}^{-1} \text{ К}^{-1}$
Каменный метеорит, плотность	$\rho_{\text{sm}} = 3.3 \times 10^3 \text{ кг м}^{-3}$
Каменный метеорит, температура плавления	$T_{\text{sm}} = 1.7 \times 10^3 \text{ К}$
Каменный метеорит, удельная теплота плавления	$L_{\text{sm}} = 2.6 \times 10^5 \text{ Дж кг}^{-1}$
Серебро, молярная масса	$M_{\text{Ag}} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ кг мол}^{-1}$
Серебро, плотность	$\rho_{\text{Ag}} = 1.049 \times 10^4 \text{ кг м}^{-3}$
Серебро, удельная теплоёмкость	$c_{\text{Ag}} = 2.40 \times 10^2 \text{ Дж кг}^{-1} \text{ К}^{-1}$
Вода, молярная масса	$M_{\text{wa}} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ кг мол}^{-1}$
Вода, плотность	$\rho_{\text{wa}} = 0.998 \times 10^3 \text{ кг м}^{-3}$
Вода, удельная теплоёмкость	$c_{\text{wa}} = 4.181 \times 10^3 \text{ Дж кг}^{-1} \text{ К}^{-1}$
Вода, удельная теплота парообразования	$L_{\text{wa}} = 2.260 \times 10^6 \text{ Дж кг}^{-1}$
Вода, температура кипения	$T_{100} = 100 \text{ °C} = 373.15 \text{ К}$
Лёд, плотность ледникового льда	$\rho_{\text{ice}} = 0.917 \times 10^3 \text{ кг м}^{-3}$
Пар, удельная теплоёмкость	$c_{\text{st}} = 2.080 \times 10^3 \text{ Дж кг}^{-1} \text{ К}^{-1}$
Земля, масса	$m_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ кг}$
Земля, радиус	$R_E = 6.38 \times 10^6 \text{ м}$
Солнце, масса	$m_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ кг}$
Солнце, радиус	$R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ м}$

Ответы

- **3.1:** $p(x, z) = \rho_{\text{ice}} g [H(x) - z]$, при $0 \leq z \leq H(x)$.
- **3.2a:** $S_b = -\rho_{\text{ice}} g H \frac{dH}{dx}$, поэтому $k = -\rho_{\text{ice}} g$ на половине $x > 0$.
- **3.2b:** $H(x) = \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{\text{ice}} g} (L - |x|)}$, где $H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}} g}}$.
- **3.2c:** $\gamma = \frac{5}{4}$; в частности, $V_{\text{ice}} = \frac{2}{3} A H_m$.
- **3.3:** $v_x(x) = \frac{c}{H_m} x$.
- **3.4:** $v_z(z) = -\frac{c}{H_m} z$.
- **3.5:** $z(x) = H_m \frac{x_i}{x}$ при $x_i \neq 0$. При $x_i = 0$ траектория вертикальна и проходит вдоль $x = 0$.
- **3.6:** $\tau(z) = \frac{H_m}{c} \ln \frac{H_m}{z}$.
- **3.7a:** $c_{\text{ia}} = 0.123 \text{ m/year}$, $c_{\text{ig}} = 0.175 \text{ m/year}$.
- **3.7b:** $\Delta T \approx +10 \text{ K}$, потепление приблизительно на 10°C .
- **3.8:** $\Delta h_{\text{mean}} \approx 8.8 \text{ m}$.
- **3.9:** $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} \approx 4.5 \text{ m}$, причём в Копенгагене уровень выше.

Решение

3.1

Условие гидростатического равновесия в вертикальном направлении даёт

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_{\text{ice}} g.$$

Если пренебречь атмосферным давлением, давление на поверхности равно нулю:

$$p(x, H(x)) = 0.$$

Поэтому интегрирование вниз от поверхности даёт

$$p(x, z) = \rho_{\text{ice}} g [H(x) - z].$$

3.2a

Рассмотрим правую половину ледникового щита, $x > 0$. Сила давления на вертикальную грань высотой $H(x)$ и шириной Δy равна

$$F(x) = \Delta y \int_0^{H(x)} \rho_{\text{ice}} g [H(x) - z] dz = \frac{1}{2} \rho_{\text{ice}} g H(x)^2 \Delta y.$$

Сила на грани со стороны центра направлена в сторону увеличения x , а на грани со стороны берега — в сторону уменьшения x . Их равнодействующая равна

$$\Delta F = \frac{1}{2} \rho_{\text{ice}} g [H(x)^2 - H(x + \Delta x)^2] \Delta y.$$

В первом порядке по Δx

$$\Delta F = -\rho_{\text{ice}} g H(x) \frac{dH}{dx} \Delta x \Delta y.$$

Приравнявая эту направленную наружу силу силе трения о ложе $S_b \Delta x \Delta y$, получаем

$$\boxed{S_b = -\rho_{\text{ice}} g H \frac{dH}{dx}}, \quad \boxed{k = -\rho_{\text{ice}} g}.$$

На этой половине производная отрицательна, поэтому $S_b > 0$, как и требуется. На любой из половин соответствующее соотношение для модулей имеет вид $S_b = \rho_{\text{ice}} g H |dH/dx|$.

3.2b

При $0 \leq x \leq L$ полученный выше результат можно записать как

$$\frac{d(H^2)}{dx} = -\frac{2S_b}{\rho_{\text{ice}} g}.$$

Используя граничное условие на берегу $H(L) = 0$, получаем

$$H(x)^2 = \frac{2S_b}{\rho_{\text{ice}} g} (L - x).$$

Отражение относительно ледораздела даёт полный профиль:

$$\boxed{H(x) = \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{\text{ice}} g} (L - |x|)}, \quad -L \leq x \leq L.}$$

На ледоразделе

$$\boxed{H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}} g}}},$$

так что $H_m \propto L^{1/2}$ при неизменных трении о ложе, плотности и ускорении свободного падения.

3.2c

Площадь острова равна

$$A = (2L)(5L) = 10L^2.$$

Поскольку профиль не зависит от y , объём льда равен

$$V_{\text{ice}} = 5L \int_{-L}^L H(x) dx = 10LH_m \int_0^L \sqrt{1 - \frac{x}{L}} dx.$$

С заменой $u = x/L$ приведённый в условии интеграл даёт

$$V_{\text{ice}} = 10L^2 H_m \int_0^1 \sqrt{1-u} du = \frac{20}{3} L^2 H_m = \boxed{\frac{2}{3} A H_m}.$$

Таким образом,

$$V_{\text{ice}} \propto L^{2+1/2} = L^{5/2} \propto A^{5/4},$$

и

$$\boxed{\gamma = \frac{5}{4}}.$$

3.3

Выделим в центральной области контрольный объём между ледоразделом и точкой $x > 0$, шириной Δy . В стационарном состоянии накопление на его поверхности должно равняться горизонтальному оттоку.

Масса, накапливающаяся в единицу времени, равна

$$\dot{m}_{\text{in}} = \rho_{\text{ice}} c x \Delta y.$$

В силу симметрии горизонтального течения через ледораздел нет. Поскольку v_x не зависит от высоты, отток через грань в точке x равен

$$\dot{m}_{\text{out}} = \rho_{\text{ice}} v_x(x) H_m \Delta y.$$

Приравнявая эти величины, получаем

$$\boxed{v_x(x) = \frac{c}{H_m} x}.$$

То же выражение с учётом знака справедливо при $x < 0$, где течение направлено в сторону отрицательных x . Этот результат получен в приближении центральной области $H(x) \approx H_m$.

3.4

Условие несжимаемости требует

$$\frac{dv_z}{dz} = -\frac{dv_x}{dx} = -\frac{c}{H_m}.$$

Интегрирование даёт

$$v_z(z) = -\frac{c}{H_m} z + C.$$

Через грунт течения нет, поэтому $v_z(0) = 0$, откуда $C = 0$. Следовательно,

$$\boxed{v_z(z) = -\frac{c}{H_m} z}.$$

В частности, $v_z(H_m) = -c$: движение вниз на поверхности уравнивает поступление нового льда.

3.5

Для частицы с $x_i \neq 0$ траектория удовлетворяет уравнению

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz/dt}{dx/dt} = \frac{v_z}{v_x} = -\frac{z}{x}.$$

Разделяя переменные и учитывая начальное условие $z(x_i) = H_m$, получаем

$$\int_{H_m}^z \frac{dz'}{z'} = - \int_{x_i}^x \frac{dx'}{x'},$$

так что

$$\ln \frac{z}{H_m} = - \ln \left| \frac{x}{x_i} \right|.$$

Частица остаётся на той же стороне ледораздела, где находилась первоначально; следовательно, $x/x_i > 0$, и

$$\boxed{xz = x_i H_m}, \quad \boxed{z(x) = H_m \frac{x_i}{x}}.$$

Траектория представляет собой ветвь равносторонней гиперболы, вдоль которой частица движется наружу и вниз. Эквивалентная запись:

$$x(t) = x_i e^{ct/H_m}, \quad z(t) = H_m e^{-ct/H_m}.$$

При $x_i = 0$ частица остаётся при $x = 0$ и опускается вертикально в соответствии с тем же выражением для $z(t)$. Эти траектории применимы, пока частица остаётся в центральной области.

3.6

На ледоразделе горизонтальная скорость равна нулю. Возраст — это время, прошедшее с момента отложения частицы при $z = H_m$:

$$\tau(z) = \int_{H_m}^z \frac{dz'}{v_z(z')} = - \frac{H_m}{c} \int_{H_m}^z \frac{dz'}{z'}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\tau(z) = \frac{H_m}{c} \ln \frac{H_m}{z}}.$$

На поверхности возраст равен нулю и увеличивается с глубиной. В этой идеализированной модели он стремится к бесконечности при $z \rightarrow 0$, поскольку вертикальная скорость у ложа стремится к нулю.

3.7a

Для данного ледяного керна $H_m = 3060$ m. Нынешние высоты двух датированных слоёв над ложем равны

$$\begin{aligned} z_1 &= 3060 - 1492 = 1568 \text{ m}, \\ z_2 &= 3060 - 3040 = 20 \text{ m}. \end{aligned}$$

Переходный слой подвергался течению только в течение 11 700 лет межледникового периода. Поэтому

$$\ln \frac{3060}{1568} = \frac{c_{ig}(11\,700 \text{ year})}{3060 \text{ m}},$$

откуда

$$c_{ig} = \frac{3060}{11\,700} \ln \frac{3060}{1568} = 0.175 \text{ m/year}.$$

Для более древнего слоя скорость накопления изменилась в процессе его опускания. При постоянной H_m

$$\frac{d \ln z}{dt} = -\frac{c(t)}{H_m}.$$

Он подвергался течению в условиях ледникового периода в течение

$$120\,000 - 11\,700 = 108\,300 \text{ years},$$

а затем — течению в условиях межледникового периода в течение 11 700 лет. Следовательно,

$$\ln \frac{3060}{20} = \frac{c_{ia}(108\,300 \text{ year}) + c_{ig}(11\,700 \text{ year})}{3060 \text{ m}}.$$

Вычитание уравнения для переходного слоя исключает вклад межледникового периода:

$$\ln \frac{1568}{20} = \frac{c_{ia}(108\,300 \text{ year})}{3060 \text{ m}}.$$

Отсюда

$$c_{ia} = \frac{3060}{108\,300} \ln \frac{1568}{20} = 0.123 \text{ m/year}.$$

Необходимо учитывать сжатие более древнего льда в течение межледникового периода.

3.7b

На рис. 3.2(b) характерные значения изотопного показателя приблизительно равны

$$\delta_{ia}^{18}\text{O} \approx -42 \text{ ‰}, \quad \delta_{ig}^{18}\text{O} \approx -35 \text{ ‰}.$$

Таким образом, переходу соответствует увеличение примерно на 7 ‰.

Приблизительно линейная зависимость на рис. 3.2(a) в соответствующем диапазоне температур имеет наклон около

$$\frac{\Delta(\delta^{18}\text{O})}{\Delta T} \approx 0.7 \text{ ‰ K}^{-1}.$$

Следовательно,

$$\Delta T \approx \frac{7 \text{ ‰}}{0.7 \text{ ‰ K}^{-1}} \approx 10 \text{ K}.$$

Изменение представляет собой потепление:

$$T_{ig} - T_{ia} \approx +10 \text{ K}.$$

Точность ограничена считыванием значений с графиков.

3.8

Используем геометрию острова и профиль высоты для определения нынешнего объёма льда в модели. Поскольку $A_G = 10L^2$,

$$L = \sqrt{\frac{A_G}{10}} = \sqrt{\frac{1.71 \times 10^{12}}{10}} = 4.14 \times 10^5 \text{ m.}$$

Максимальная высота, предсказываемая моделью, равна

$$H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}} g}} = \sqrt{\frac{2(1.00 \times 10^5)(4.1352 \times 10^5)}{(917)(9.82)}} = 3.03 \times 10^3 \text{ m.}$$

Используя пункт 3.2с, получаем

$$V_{\text{ice}} = \frac{2}{3} A_G H_m = 3.45 \times 10^{15} \text{ m}^3.$$

При таянии масса сохраняется, поэтому объём образующейся воды равен

$$V_{\text{water}} = \frac{\rho_{\text{ice}}}{\rho_{\text{wa}}} V_{\text{ice}}.$$

Равномерное распределение этой воды по постоянной площади океана даёт

$$\Delta h_{\text{mean}} = \frac{V_{\text{water}}}{A_O} = \frac{\rho_{\text{ice}}}{\rho_{\text{wa}}} \frac{2A_G H_m}{3A_O}.$$

Численно

$$\Delta h_{\text{mean}} = \frac{917}{998} \frac{3.4548 \times 10^{15}}{3.61 \times 10^{14}} = 8.79 \text{ m.}$$

Таким образом,

$$\boxed{\Delta h_{\text{mean}} \approx 8.8 \text{ m}.}$$

3.9

Свободная поверхность покоящегося океана является эквипотенциальной. Поэтому сравним гравитационные потенциалы в Копенгагене и в точке, противоположной Гренландии.

Точечная масса, представляющая ледниковый щит, равна

$$M = \rho_{\text{ice}} V_{\text{ice}} = (917)(3.4548 \times 10^{15}) = 3.17 \times 10^{18} \text{ kg.}$$

Пусть R обозначает радиус Земли, а h — малое смещение поверхности моря относительно опорной сферы. Вклад Земли в гравитационный потенциал на единицу массы равен

$$\Phi_E(R+h) = -\frac{Gm_E}{R+h} \approx -\frac{Gm_E}{R} + gh,$$

где $h \ll R$. Масса льда даёт вклад

$$\Phi_{\text{ice}} = -\frac{GM}{d},$$

где d — расстояние по прямой до массы льда.

В первом порядке d можно вычислять на опорной сфере: изменения на несколько метров пренебрежимо малы по сравнению с расстояниями в миллионы метров. Поэтому равенство потенциалов на поверхности требует

$$gh_{\text{CPH}} - \frac{GM}{d_{\text{CPH}}} = gh_{\text{OPP}} - \frac{GM}{d_{\text{OPP}}}.$$

Таким образом,

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = \frac{GM}{g} \left(\frac{1}{d_{\text{CPH}}} - \frac{1}{d_{\text{OPP}}} \right).$$

Указанное расстояние 3500 km является длиной дуги s , поэтому центральный угол и длина хорды равны

$$\theta = \frac{s}{R}, \quad d_{\text{CPH}} = 2R \sin \frac{\theta}{2} = 2R \sin \frac{s}{2R}.$$

В противоположной точке

$$d_{\text{OPP}} = 2R.$$

Следовательно,

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = \frac{GM}{2gR} \left[\frac{1}{\sin(s/(2R))} - 1 \right].$$

Из указанной площади Земли следует $R = \sqrt{A_E/(4\pi)} \approx 6.37 \times 10^6 \text{ m}$, что согласуется с приведённым радиусом. Используя $R = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$, получаем

$$\theta = 0.5486, \quad d_{\text{CPH}} = 3.456 \times 10^6 \text{ m}, \quad d_{\text{OPP}} = 1.276 \times 10^7 \text{ m}.$$

Отсюда

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = \frac{(6.67 \times 10^{-11})(3.168 \times 10^{18})}{9.82} \left(\frac{1}{3.456 \times 10^6} - \frac{1}{1.276 \times 10^7} \right) = 4.54 \text{ m}.$$

Следовательно,

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} \approx 4.5 \text{ m}.$$

Положительный знак означает, что гравитационное притяжение Гренландии повышает равновесную поверхность океана в Копенгагене относительно противоположной стороны Земли. Любое общее смещение, необходимое для сохранения объёма океана, сокращается в этой разности.

Решение проверено по официальному решению.