

IPhO 2013

Problemas teóricos y soluciones · Copenhague, Dinamarca · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/2013/

Problema 1: El meteorito Maribo

Introducción

Un meteoroide es una pequeña partícula (normalmente de menos de 1 m) procedente de un cometa o de un asteroide. Un meteoroide que impacta contra el suelo se denomina meteorito.

La noche del 17 de enero de 2009, muchas personas cerca del mar Báltico vieron la estela luminosa o bola de fuego de un meteoroide que caía a través de la atmósfera terrestre. En Suecia, una cámara de vigilancia grabó un vídeo del suceso; véase la Fig. 1.1(a). A partir de estas imágenes y de los testimonios de los testigos, fue posible delimitar la zona de impacto y, seis semanas después, se encontró un meteorito de masa 0.025 kg en las proximidades de la localidad de Maribo, en el sur de Dinamarca. Las mediciones del meteorito, ahora denominado Maribo, y de su órbita en el cielo arrojaron resultados interesantes. Su rapidez al entrar en la atmósfera había sido excepcionalmente elevada. Su edad, 4.567×10^9 años, indica que se había formado poco después del nacimiento del sistema solar. Es posible que el meteorito Maribo sea un fragmento del cometa Encke.

La rapidez de Maribo

La bola de fuego se desplazaba hacia el oeste, con un rumbo de 285° respecto al norte, hacia el lugar donde posteriormente se encontró el meteorito, como se representa en la Fig. 1.1. El meteorito se encontró a una distancia de 195 km de la cámara de vigilancia, en la dirección de 230° respecto al norte.

Parte	Pregunta	Puntos
1.1	Utilice esta información y los datos de la Fig. 1.1 para calcular la rapidez media de Maribo en el intervalo de tiempo entre los fotogramas 155 y 161. Se pueden despreciar tanto la curvatura de la Tierra como la fuerza gravitatoria sobre el meteoroide.	1.3

¿Paso por la atmósfera y fusión?

El rozamiento del aire sobre un meteoroide que se desplaza por las capas altas de la atmósfera depende de forma compleja de la forma y la velocidad del meteoroide, así como de la temperatura y la densidad de la atmósfera. Como aproximación razonable, la fuerza de rozamiento F en la atmósfera superior viene dada por la expresión $F = k\rho_{\text{atm}}Av^2$, donde k es una constante, ρ_{atm} es la densidad de la atmósfera, A es el área de la sección transversal proyectada del meteorito y v es su rapidez.

Para analizar el meteoróide se adoptan las siguientes hipótesis simplificadoras: el objeto que entró en la atmósfera era una esfera de masa $m_M = 30 \text{ kg}$, radio $R_M = 0.13 \text{ m}$, temperatura $T_0 = 200 \text{ K}$ y rapidez $v_M = 2.91 \times 10^4 \text{ m/s}$. La densidad de la atmósfera es constante (su valor a 40 km sobre la superficie terrestre), $\rho_{\text{atm}} = 4.1 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$, y el coeficiente de rozamiento es $k = 0.60$.

Parte	Pregunta	Puntos
1.2a	Estime cuánto tiempo tarda el meteoróide, desde su entrada en la atmósfera, en reducir su rapidez un 10 %, de v_M a $0.90v_M$. Puede despreciar la fuerza gravitatoria sobre el meteoróide y suponer que conserva su masa y su forma.	0.7
1.2b	Calcule cuántas veces mayor es la energía cinética E_{kin} del meteoróide al entrar en la atmósfera que la energía E_{melt} necesaria para fundirlo por completo (véase la hoja de datos).	0.3

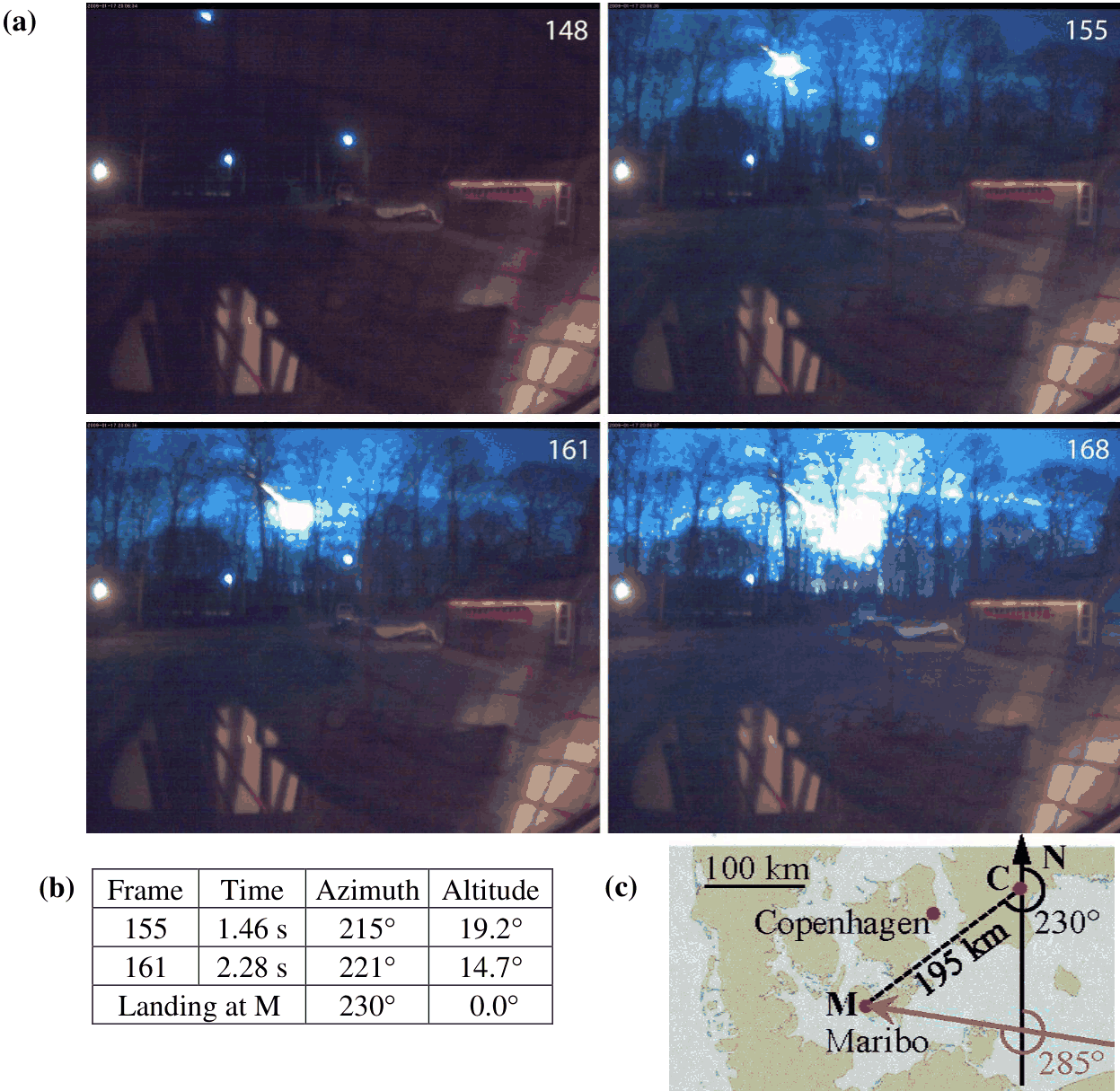


Figura 1.1 (a) El acimut es la posición angular medida en sentido horario desde el norte en el plano horizontal, y la altura angular es la posición angular sobre el horizonte. Secuencia de fotogramas grabados por la cámara de vigilancia en Suecia, que muestra el movimiento de Maribo

como una bola de fuego durante su descenso a través de la atmósfera. (b) Datos de dos fotogramas que indican el tiempo, la dirección (acimut) en grados, vista desde la cámara (C), y la altura sobre el horizonte (altura angular) en grados. (c) Esquema de las direcciones de la trayectoria (flecha magenta) de Maribo respecto al norte (N) y del lugar de caída (M) en Dinamarca, visto desde la cámara (C).

Calentamiento de Maribo durante su caída en la atmósfera

Cuando el meteoróide rocoso Maribo entró en la atmósfera a rapidez supersónica, se observó como una bola de fuego porque el aire que lo rodeaba brillaba. Sin embargo, solo se calentó la capa más externa de Maribo. Suponga que Maribo es una esfera homogénea de densidad ρ_{sm} , capacidad calorífica específica c_{sm} y conductividad térmica k_{sm} (véanse los valores en la hoja de datos). Además, al entrar en la atmósfera tenía una temperatura $T_0 = 200 \text{ K}$. Durante su caída a través de la atmósfera, su temperatura superficial se mantuvo constante en $T_s = 1000 \text{ K}$ debido al rozamiento con el aire, calentando así gradualmente el interior.

Tras caer durante un tiempo t en la atmósfera, una capa externa de Maribo de espesor x se habrá calentado hasta una temperatura significativamente superior a T_0 . Este espesor puede estimarse mediante análisis dimensional como un simple producto de potencias de los parámetros termodinámicos: $x \approx t^\alpha \rho_{\text{sm}}^\beta c_{\text{sm}}^\gamma k_{\text{sm}}^\delta$.

Parte	Pregunta	Puntos
1.3a	Determine mediante análisis dimensional (de unidades) el valor de los cuatro exponentes α, β, γ , y δ .	0.6
1.3b	Calcule el espesor x tras un tiempo de caída $t = 5 \text{ s}$ y determine la razón x/R_M .	0.4

La edad de un meteorito

Las propiedades químicas de los elementos radiactivos pueden ser diferentes, de modo que, durante la cristalización de los minerales de un meteorito dado, algunos minerales tendrán un contenido elevado de un determinado elemento radiactivo y otros un contenido bajo. Esta diferencia puede utilizarse para determinar la edad de un meteorito mediante la datación radiométrica de sus minerales radiactivos.

Como ejemplo concreto, estudiamos el isótopo ^{87}Rb (elemento n.º 37), que se desintegra en el isótopo estable ^{87}Sr (elemento n.º 38) con un período de semidesintegración de $T_{1/2} = 4.9 \times 10^{10}$ años, tomando como referencia el isótopo estable ^{86}Sr . En el momento de la cristalización, la razón $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ era idéntica en todos los minerales, mientras que la razón $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ era diferente. Con el paso del tiempo, la cantidad de ^{87}Rb disminuye por desintegración y, en consecuencia, aumenta la cantidad de ^{87}Sr . Como resultado, la razón $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ será diferente en la actualidad. En la Fig. 1.2(a), los puntos de la línea horizontal corresponden a la razón $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ en distintos minerales en el momento de su cristalización.

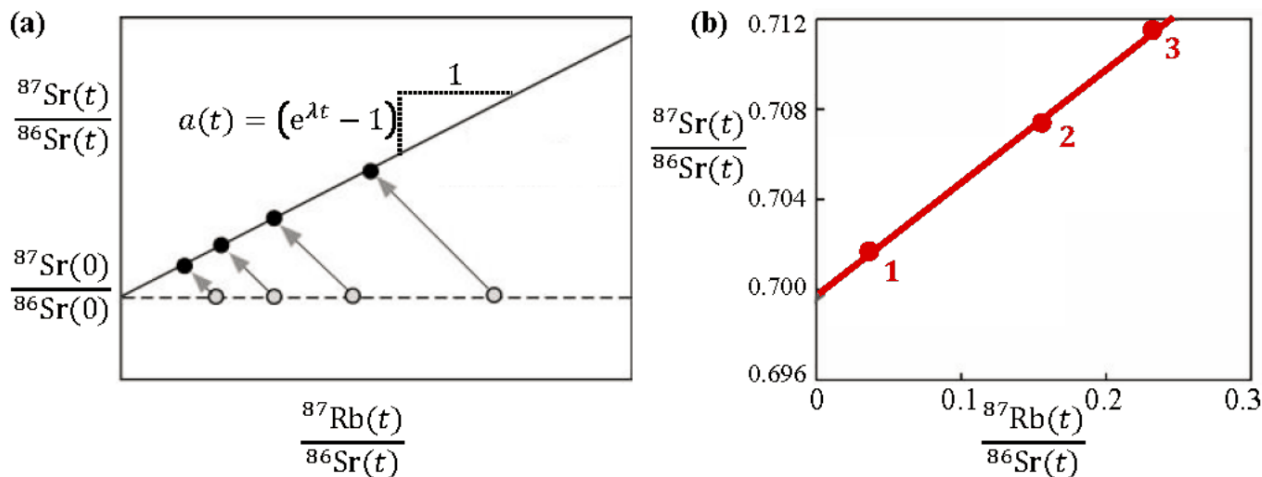


Figura 1.2 (a) La razón $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ en distintos minerales en el instante $t = 0$ de cristalización (círculos vacíos) y en la actualidad (círculos rellenos). (b) La recta isócrona de tres muestras minerales diferentes tomadas de un meteorito en la actualidad.

Parte	Pregunta	Puntos
1.4a	Escriba el esquema de desintegración correspondiente a la transformación de $^{87}_{37}\text{Rb}$ en $^{87}_{38}\text{Sr}$.	0.3
1.4b	Demuestre que, al representar la razón actual $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ frente a la razón actual $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ de distintas muestras minerales del mismo meteorito, se obtiene una línea recta, denominada recta isócrona, de pendiente $a(t) = (e^{\lambda t} - 1)$. Aquí, t es el tiempo transcurrido desde la formación de los minerales y λ es la constante de desintegración, inversamente proporcional al período de semidesintegración $T_{\frac{1}{2}}$.	0.7
1.4c	Determine la edad τ_M del meteorito utilizando la recta isócrona de la Fig. 1.2(b).	0.4

El cometa Encke, del que podría proceder Maribo

En su órbita alrededor del Sol, las distancias mínima y máxima entre el cometa Encke y el Sol son $a_{\min} = 4.95 \times 10^{10} \text{ m}$ y $a_{\max} = 6.16 \times 10^{11} \text{ m}$, respectivamente.

Parte	Pregunta	Puntos
1.5	Calcule el período orbital t_{Encke} del cometa Encke.	0.6

Consecuencias del impacto de un asteroide contra la Tierra

Hace 65 millones de años, la Tierra recibió el impacto de un enorme asteroide de densidad $\rho_{\text{ast}} = 3.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, radio $R_{\text{ast}} = 5.0 \text{ km}$ y rapidez final $v_{\text{ast}} = 2.5 \times 10^4 \text{ m/s}$. Este impacto provocó la extirpación de la mayor parte de la vida en la Tierra y la formación del enorme cráter de Chicxulub. Suponga que un asteroide idéntico impactara hoy contra la Tierra en una colisión completamente inelástica y utilice el hecho de que el momento de inercia de la Tierra es 0.83 veces el de una esfera homogénea de la misma masa y radio. El momento de inercia de una esfera homogénea de masa M y radio R es $\frac{2}{5}MR^2$. Desprecie los cambios en la órbita de la Tierra.

Parte	Pregunta	Puntos
1.6a	Suponga que el asteroide impacta en el polo norte. Halle el cambio máximo en la orientación angular del eje de la Tierra tras el impacto.	0.7

Parte	Pregunta	Puntos
1.6b	Suponga que el asteroide impacta en el ecuador de forma radial. Halle el cambio $\Delta\tau_{\text{vrt}}$ en la duración de una rotación de la Tierra tras el impacto.	0.7
1.6c	Suponga que el asteroide impacta en el ecuador de forma tangencial en el plano ecuatorial. Halle el cambio $\Delta\tau_{\text{tan}}$ en la duración de una rotación de la Tierra tras el impacto.	0.7

Rapidez máxima de impacto

Considere un cuerpo celeste ligado gravitatoriamente al sistema solar que impacta contra la superficie terrestre con una rapidez v_{imp} . Inicialmente puede despreciarse el efecto del campo gravitatorio terrestre sobre el cuerpo. Desprecie el rozamiento en la atmósfera, el efecto de otros cuerpos celestes y la rotación de la Tierra.

Parte	Pregunta	Puntos
1.7	Calcule $v_{\text{imp}}^{\text{max}}$, el mayor valor posible de v_{imp} .	1.6

Hoja de datos: tabla de parámetros físicos

Parámetro físico	Valor
Rapidez de la luz en el vacío	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Constante de Planck dividida por 2π	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Constante de gravitación universal	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Aceleración de la gravedad	$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$
Carga elemental	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Permitividad eléctrica del vacío	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Masa del electrón	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Constante de Avogadro	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Meteorito rocoso, calor específico	$c_{\text{sm}} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Meteorito rocoso, conductividad térmica	$k_{\text{sm}} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Meteorito rocoso, densidad	$\rho_{\text{sm}} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Meteorito rocoso, punto de fusión	$T_{\text{sm}} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$
Meteorito rocoso, calor latente específico de fusión	$L_{\text{sm}} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
Plata, masa molar	$M_{\text{Ag}} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$
Plata, densidad	$\rho_{\text{Ag}} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
Plata, capacidad calorífica específica	$c_{\text{Ag}} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Agua, masa molar	$M_{\text{wa}} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$
Agua, densidad	$\rho_{\text{wa}} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Agua, capacidad calorífica específica	$c_{\text{wa}} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Agua, calor de vaporización	$L_{\text{wa}} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$
Agua, temperatura de ebullición	$T_{100} = 100^\circ \text{C} = 373.15 \text{ K}$

Parámetro físico	Valor
Hielo, densidad del hielo glaciar	$\rho_{\text{ice}} = 0.917 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Vapor de agua, capacidad calorífica específica	$c_{\text{st}} = 2.080 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Tierra, masa	$m_{\text{E}} = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Tierra, radio	$R_{\text{E}} = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$
Sol, masa	$m_{\text{S}} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Sol, radio	$R_{\text{S}} = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$
Distancia media entre el Sol y la Tierra	$a_{\text{E}} = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **1.1:** $\bar{v} = 2.86 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 28.6 \text{ km s}^{-1}$.
- **1.2a:** $t = 0.88 \text{ s}$.
- **1.2b:** $E_{\text{kin}}/E_{\text{melt}} \approx 2.1 \times 10^2$.
- **1.3a:** $\alpha = \delta = \frac{1}{2}$, $\beta = \gamma = -\frac{1}{2}$, por lo que $x \approx \sqrt{k_{\text{sm}} t / (\rho_{\text{sm}} c_{\text{sm}})}$.
- **1.3b:** $x \approx 1.6 \text{ mm}$, $x/R_{\text{M}} \approx 0.012 = 1.2\%$.
- **1.4a:** ${}^{87}_{37}\text{Rb} \rightarrow {}^{87}_{38}\text{Sr} + {}^0_{-1}e + \bar{\nu}_{\text{e}}$.
- **1.4b:** $Y(t) = Y_0 + (e^{\lambda t} - 1)X(t)$, donde $Y = {}^{87}\text{Sr}/{}^{86}\text{Sr}$, $X = {}^{87}\text{Rb}/{}^{86}\text{Sr}$ y $\lambda = \ln 2/T_{\frac{1}{2}}$.
- **1.4c:** $\tau_{\text{M}} \approx 3.5 \times 10^9 \text{ yr}$, a partir de una pendiente de la gráfica de aproximadamente 0.050.
- **1.5:** $t_{\text{Encke}} = 1.05 \times 10^8 \text{ s} \approx 3.32 \text{ yr}$.
- **1.6a:** $\theta_{\text{max}} \approx 4.3 \times 10^{-8} \text{ rad} \approx 2.4 \times 10^{-6} \text{ degree}$.
- **1.6b:** $\Delta\tau_{\text{vrt}} \approx +6.8 \times 10^{-5} \text{ s}$.
- **1.6c:** $\Delta\tau_{\text{tan}} \approx -3.6 \times 10^{-3} \text{ s}$ para un impacto prógrado; $\Delta\tau_{\text{tan}} \approx +3.8 \times 10^{-3} \text{ s}$ para un impacto retrógrado.
- **1.7:** $v_{\text{imp}}^{\text{max}} \approx 7.27 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 72.7 \text{ km s}^{-1}$, entendido como una cota superior límite para un cuerpo ligado gravitatoriamente.

Solución

1.1

Sean C la cámara, M el lugar de caída y P_i la proyección horizontal de la posición del meteoróide en el fotograma i . Escribimos

$$CM = D = 195 \text{ km}, \quad CP_i = r_i, \quad MP_i = s_i.$$

Las magnitudes observadas son:

Fotograma	Tiempo t_i	Acimut ϕ_i	Altura angular h_i
155	1.46 s	215°	19.2°
161	2.28 s	221°	14.7°

La trayectoria horizontal tiene un rumbo de 285°. Vista desde M , la cámara se encuentra en la dirección de 50°, mientras que las posiciones anteriores del meteorode se encuentran en la dirección de 105°. Por tanto, el ángulo en M del triángulo CMP_i es 55°. El ángulo en C es $230^\circ - \phi_i$.

El teorema de los senos da entonces

$$r_i = D \frac{\sin 55^\circ}{\sin(285^\circ - \phi_i)}, \quad s_i = D \frac{\sin(230^\circ - \phi_i)}{\sin(285^\circ - \phi_i)}.$$

Como se desprecia la curvatura terrestre, la altura del meteorode es

$$z_i = r_i \tan h_i.$$

Numéricamente,

Fotograma	r_i (km)	s_i (km)	z_i (km)
155	169.986	53.709	59.195
161	177.721	33.940	46.624

Así, las distancias recorridas en las direcciones horizontal y vertical son

$$\Delta s = 19.769 \text{ km}, \quad |\Delta z| = 12.571 \text{ km}.$$

Suponiendo rectilínea la trayectoria durante este breve intervalo,

$$\Delta \ell = \sqrt{(\Delta s)^2 + (\Delta z)^2} = 23.428 \text{ km}.$$

El tiempo transcurrido es $2.28 - 1.46 = 0.82$ s, por lo que

$$\bar{v} = \frac{23.428 \text{ km}}{0.82 \text{ s}} = 28.6 \text{ km s}^{-1}.$$

En los apartados siguientes utilizamos la rapidez inicial especificada por separado, $v_M = 2.91 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$.

1.2a

El área proyectada de la esfera es $A = \pi R_M^2$. La segunda ley de Newton, despreciando la gravedad, da

$$m_M \frac{dv}{dt} = -k\rho_{\text{atm}}\pi R_M^2 v^2.$$

Separando variables e integrando desde v_M hasta v ,

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_M} = \frac{k\rho_{\text{atm}}\pi R_M^2}{m_M} t.$$

Para $v = 0.90v_M$,

$$t = \frac{m_M}{k\rho_{\text{atm}}\pi R_M^2 v_M} \left(\frac{1}{0.90} - 1 \right).$$

Al sustituir los valores se obtiene

$$t = \frac{30}{(0.60)(4.1 \times 10^{-3})\pi(0.13)^2(2.91 \times 10^4)} \left(\frac{1}{0.90} - 1 \right) = 0.877 \text{ s.}$$

Por tanto,

$$t \approx 0.88 \text{ s.}$$

1.2b

La fusión completa requiere tanto calentar el material desde T_0 hasta su punto de fusión como suministrarle su calor latente de fusión. Utilizando el calor específico constante indicado en la hoja de datos,

$$E_{\text{melt}} = m_{\text{M}} [c_{\text{sm}}(T_{\text{sm}} - T_0) + L_{\text{sm}}].$$

Así,

$$E_{\text{melt}} = 30 [(1.2 \times 10^3)(1700 - 200) + 2.6 \times 10^5] = 6.18 \times 10^7 \text{ J.}$$

La energía cinética inicial es

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_{\text{M}} v_{\text{M}}^2 = \frac{1}{2} (30)(2.91 \times 10^4)^2 = 1.2702 \times 10^{10} \text{ J.}$$

En consecuencia,

$$\frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{melt}}} = \frac{v_{\text{M}}^2}{2[c_{\text{sm}}(T_{\text{sm}} - T_0) + L_{\text{sm}}]} = 205.5 \approx 2.1 \times 10^2.$$

Esta comparación de energías no implica una fusión completa: la energía cinética no tiene por qué depositarse en forma de calor en todo el meteoróide.

1.3a

Utilizamos M, L, T, Θ para las dimensiones de masa, longitud, tiempo y temperatura. Las dimensiones relevantes son

$$[\rho_{\text{sm}}] = ML^{-3}, \quad [c_{\text{sm}}] = L^2\mathsf{T}^{-2}\Theta^{-1}, \quad [k_{\text{sm}}] = ML\mathsf{T}^{-3}\Theta^{-1}.$$

Por tanto,

$$[t^\alpha \rho_{\text{sm}}^\beta c_{\text{sm}}^\gamma k_{\text{sm}}^\delta] = M^{\beta+\delta} L^{-3\beta+2\gamma+\delta} \mathsf{T}^{\alpha-2\gamma-3\delta} \Theta^{-\gamma-\delta}.$$

Al igualar esta expresión a la dimensión L de x , se obtiene

$$\begin{aligned} \beta + \delta &= 0, \\ -3\beta + 2\gamma + \delta &= 1, \\ \alpha - 2\gamma - 3\delta &= 0, \\ -\gamma - \delta &= 0. \end{aligned}$$

La primera y la cuarta ecuaciones dan $\beta = \gamma = -\delta$. La ecuación de la longitud da entonces $2\delta = 1$, y la del tiempo da $\alpha = \delta$. Por tanto,

$$\alpha = \delta = \frac{1}{2}, \quad \beta = \gamma = -\frac{1}{2}.$$

La estimación resultante es

$$x \approx \sqrt{\frac{k_{\text{sm}} t}{\rho_{\text{sm}} c_{\text{sm}}}}.$$

El análisis dimensional determina los exponentes, pero deja sin determinar un coeficiente adimensional. La estimación solicitada toma este coeficiente igual a la unidad.

1.3b

La difusividad térmica es

$$\chi = \frac{k_{\text{sm}}}{\rho_{\text{sm}} c_{\text{sm}}} = \frac{2.0}{(3.3 \times 10^3)(1.2 \times 10^3)} = 5.05 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Para $t = 5 \text{ s}$,

$$x \approx \sqrt{\chi t} = \sqrt{(5.05 \times 10^{-7})(5)} = 1.589 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

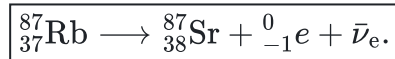
Así,

$$x \approx 1.6 \text{ mm}, \quad \frac{x}{R_M} = \frac{1.589 \times 10^{-3}}{0.13} \approx 0.012 = 1.2\%.$$

La profundidad calentada es pequeña en comparación con el radio, lo que concuerda con que solo una capa externa se caliente apreciablemente durante la caída.

1.4a

El número atómico aumenta en una unidad mientras que el número másico permanece invariable. Se trata de una desintegración beta menos:



Se emiten un electrón y un antineutrino electrónico.

1.4b

Consideremos una muestra mineral como un sistema cerrado tras la cristalización. Sean $N_{\text{Rb}}(t)$, $N_{87}(t)$ y N_{86} los números de núcleos de ${}^{87}\text{Rb}$, ${}^{87}\text{Sr}$ y ${}^{86}\text{Sr}$. La población estable de referencia N_{86} es constante.

La desintegración radiactiva da

$$N_{\text{Rb}}(t) = N_{\text{Rb}}(0)e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}}.$$

Cada núcleo de rubidio que se desintegra produce un núcleo de estroncio-87, por lo que

$$\begin{aligned} N_{87}(t) &= N_{87}(0) + N_{\text{Rb}}(0) - N_{\text{Rb}}(t) \\ &= N_{87}(0) + N_{\text{Rb}}(t)(e^{\lambda t} - 1). \end{aligned}$$

Dividiendo por N_{86} , definimos

$$Y(t) = \frac{N_{87}(t)}{N_{86}}, \quad X(t) = \frac{N_{\text{Rb}}(t)}{N_{86}}, \quad Y_0 = \frac{N_{87}(0)}{N_{86}}.$$

Entonces,

$$Y(t) = Y_0 + (e^{\lambda t} - 1)X(t).$$

Todas las muestras tienen la misma razón isotópica inicial de estroncio Y_0 y la misma edad t . Por ello, sus valores actuales se sitúan sobre una recta con ordenada en el origen Y_0 y pendiente

$$a(t) = e^{\lambda t} - 1.$$

En el momento de la cristalización, la pendiente es cero; posteriormente aumenta con la edad.

1.4c

La recta de la Fig. 1.2(b) pasa aproximadamente por

$$(X, Y) \approx (0.05, 0.702) \quad \text{y} \quad (0.25, 0.712).$$

Su pendiente es, por tanto, aproximadamente

$$a \approx \frac{0.712 - 0.702}{0.25 - 0.05} = 0.050.$$

Despejando el tiempo en el resultado del apartado 1.4b,

$$\tau_M = \frac{\ln(1 + a)}{\lambda} = \frac{T_{\frac{1}{2}}}{\ln 2} \ln(1 + a).$$

Por tanto,

$$\tau_M \approx \frac{4.9 \times 10^{10} \text{ yr}}{\ln 2} \ln(1.050) = 3.45 \times 10^9 \text{ yr}.$$

Teniendo en cuenta la lectura de la gráfica,

$$\tau_M \approx 3.5 \times 10^9 \text{ yr}.$$

La Figura 1.2(b) se refiere a muestras de «un meteorito»; la edad inferida no tiene por qué coincidir con la edad de Maribo citada en la introducción.

1.5

En una órbita elíptica, la suma de las distancias de perihelio y afelio es igual al doble del semieje mayor:

$$a = \frac{a_{\min} + a_{\max}}{2} = \frac{4.95 \times 10^{10} + 6.16 \times 10^{11}}{2} = 3.3275 \times 10^{11} \text{ m}.$$

Despreciando la masa del cometa frente a la del Sol, la tercera ley de Kepler da

$$t_{\text{Encke}}^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm_S}.$$

Así,

$$t_{\text{Encke}} = 2\pi \sqrt{\frac{(3.3275 \times 10^{11})^3}{(6.67 \times 10^{-11})(1.99 \times 10^{30})}} = 1.0468 \times 10^8 \text{ s}.$$

Utilizando $1 \text{ yr} \approx 3.156 \times 10^7 \text{ s}$,

$$t_{\text{Encke}} \approx 1.05 \times 10^8 \text{ s} \approx 3.32 \text{ yr}.$$

1.6a

Primero calculamos las magnitudes utilizadas en las tres preguntas sobre el impacto. La masa del asteroide es

$$m_{\text{ast}} = \frac{4}{3}\pi R_{\text{ast}}^3 \rho_{\text{ast}} = \frac{4}{3}\pi (5.0 \times 10^3)^3 (3.0 \times 10^3) = 1.571 \times 10^{15} \text{ kg}.$$

El momento de inercia de la Tierra es

$$I_E = 0.83 \frac{2}{5} m_E R_E^2 = 8.068 \times 10^{37} \text{ kg m}^2.$$

Tomando como período inicial de rotación $\tau_E = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$,

$$\omega_E = \frac{2\pi}{\tau_E} = 7.272 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

y su momento angular de rotación es

$$L_E = I_E \omega_E = 5.867 \times 10^{33} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Tratamos el asteroide incorporado como una masa puntual en la superficie terrestre. Su tamaño y el desplazamiento del centro de masas común dan lugar a correcciones despreciables.

En el polo norte, el vector de posición del asteroide es paralelo al eje inicial de rotación de la Tierra. En consecuencia, su momento angular

$$\mathbf{L}_{\text{ast}} = \mathbf{r} \times m_{\text{ast}} \mathbf{v}_{\text{ast}}$$

es perpendicular al momento angular inicial de rotación de la Tierra. Su módulo es máximo para un impacto tangencial:

$$L_{\text{ast}}^{\text{max}} = m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}} = 2.505 \times 10^{26} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

La conservación del momento angular da entonces, al orden dominante en la pequeña razón entre la masa del asteroide y la de la Tierra,

$$\tan \theta_{\text{max}} \simeq \frac{L_{\text{ast}}^{\text{max}}}{L_E}.$$

El ángulo es extremadamente pequeño, por lo que

$$\theta_{\text{max}} \simeq \frac{m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}}}{I_E \omega_E} = 4.27 \times 10^{-8} \text{ rad} \approx 2.4 \times 10^{-6} \text{ degree}.$$

El cambio en el tensor de inercia solo aporta una corrección de orden superior a esta pequeña inclinación.

1.6b

En un impacto radial, el momento angular del asteroide incidente respecto al centro de la Tierra es nulo. Tras quedar adherido en el ecuador, el momento de inercia aumenta hasta

$$I' = I_E + m_{\text{ast}} R_E^2.$$

La conservación del momento angular exige

$$I_E \omega_E = (I_E + m_{\text{ast}} R_E^2) \omega'.$$

Como el período es inversamente proporcional a la rapidez angular,

$$\tau' = \tau_E \left(1 + \frac{m_{\text{ast}} R_E^2}{I_E} \right).$$

Por tanto,

$$\Delta\tau_{\text{vrt}} = \tau_E \frac{m_{\text{ast}} R_E^2}{I_E} = \tau_E \frac{m_{\text{ast}}}{0.332 m_E}.$$

Numéricamente,

$$\Delta\tau_{\text{vrt}} = 6.85 \times 10^{-5} \text{ s} \approx +6.8 \times 10^{-5} \text{ s}.$$

El día se alarga aproximadamente $68 \mu\text{s}$.

1.6c

El sentido del impacto tangencial es relevante. Sea $\sigma = +1$ para un impacto prógrado, que añade momento angular de rotación, y $\sigma = -1$ para un impacto retrógrado.

La conservación del momento angular da

$$I_E \omega_E + \sigma m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}} = (I_E + m_{\text{ast}} R_E^2) \omega'.$$

Definimos las pequeñas magnitudes adimensionales

$$\epsilon = \frac{m_{\text{ast}} R_E^2}{I_E} = 7.925 \times 10^{-10}, \quad \eta = \frac{m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}}}{I_E \omega_E} = 4.270 \times 10^{-8}.$$

El nuevo período y su variación son

$$\tau' = \tau_E \frac{1 + \epsilon}{1 + \sigma \eta},$$

$$\Delta\tau_{\text{tan}} = \tau_E \frac{\epsilon - \sigma \eta}{1 + \sigma \eta}.$$

Como tanto ϵ como η son muy pequeños, también se cumple con gran precisión

$$\Delta\tau_{\text{tan}} \approx \tau_E (\epsilon - \sigma \eta).$$

Así:

- **Impacto prógrado:**

$$\Delta\tau_{\text{tan}} = -3.621 \times 10^{-3} \text{ s} \approx -3.6 \text{ ms}.$$

- **Impacto retrógrado:**

$$\Delta\tau_{\text{tan}} = +3.758 \times 10^{-3} \text{ s} \approx +3.8 \text{ ms}.$$

El momento de inercia añadido alarga el día en ambos casos. El momento angular incidente produce el efecto de mayor magnitud y determina el signo.

1.7

Consideremos primero el movimiento del cuerpo respecto al Sol, antes de que la gravedad terrestre sea significativa. A la distancia orbital de la Tierra, un cuerpo ligado gravitatoriamente tiene energía orbital específica negativa:

$$\mathcal{E} = \frac{u^2}{2} - \frac{Gm_S}{a_E} < 0.$$

Su rapidez heliocéntrica está, por tanto, acotada por la rapidez local de escape del Sol:

$$u < u_{\max} = \sqrt{\frac{2Gm_S}{a_E}}.$$

El caso límite es una órbita cuya energía de ligadura tiende a cero.

Aproximando la órbita terrestre por una circunferencia a la distancia media dada, su rapidez orbital es

$$v_E = \sqrt{\frac{Gm_S}{a_E}}.$$

La mayor rapidez relativa de aproximación se produce cuando el cuerpo se mueve en sentido directamente opuesto al movimiento orbital terrestre. Por tanto,

$$v_{\infty}^{\max} = u_{\max} + v_E = (1 + \sqrt{2})\sqrt{\frac{Gm_S}{a_E}}.$$

Numéricamente,

$$v_E = 29.75 \text{ km s}^{-1}, \quad u_{\max} = 42.07 \text{ km s}^{-1},$$

por lo que

$$v_{\infty}^{\max} = 71.82 \text{ km s}^{-1}.$$

La gravedad terrestre acelera aún más el cuerpo. Durante el encuentro con la Tierra, la conservación de la energía mecánica da

$$\frac{1}{2}v_{\text{imp}}^2 - \frac{Gm_E}{R_E} = \frac{1}{2}v_{\infty}^2.$$

Así,

$$v_{\text{imp}}^{\max} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 \frac{Gm_S}{a_E} + \frac{2Gm_E}{R_E}}.$$

La rapidez de escape desde la superficie terrestre es

$$\sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}} = 11.17 \text{ km s}^{-1}.$$

Por tanto,

$$v_{\text{imp}}^{\max} = \sqrt{(71.82)^2 + (11.17)^2} \text{ km s}^{-1} \approx 72.7 \text{ km s}^{-1}.$$

Para una órbita estrictamente ligada, la rapidez es estrictamente inferior a este valor. Puede aproximarse a él tanto como se desee cuando la energía inicial de ligadura al Sol tiende a cero.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Generador plasmónico de vapor

Introducción

En este problema estudiamos un proceso eficiente de producción de vapor cuyo funcionamiento se ha demostrado experimentalmente. Una disolución acuosa de esferas de plata de tamaño nanométrico (nanopartículas), con tan solo unas 10^{13} partículas por litro, se ilumina con un haz de luz enfocado. Las nanopartículas absorben una fracción de la luz, se calientan y generan vapor localmente a su alrededor sin calentar toda la disolución acuosa. El vapor sale del sistema en forma de burbujas de vapor que escapan. Actualmente no se comprenden bien todos los detalles del proceso, pero se sabe que su mecanismo fundamental es la absorción de luz mediante las llamadas oscilaciones colectivas de los electrones de las nanopartículas metálicas. El dispositivo se conoce como generador plasmónico de vapor.

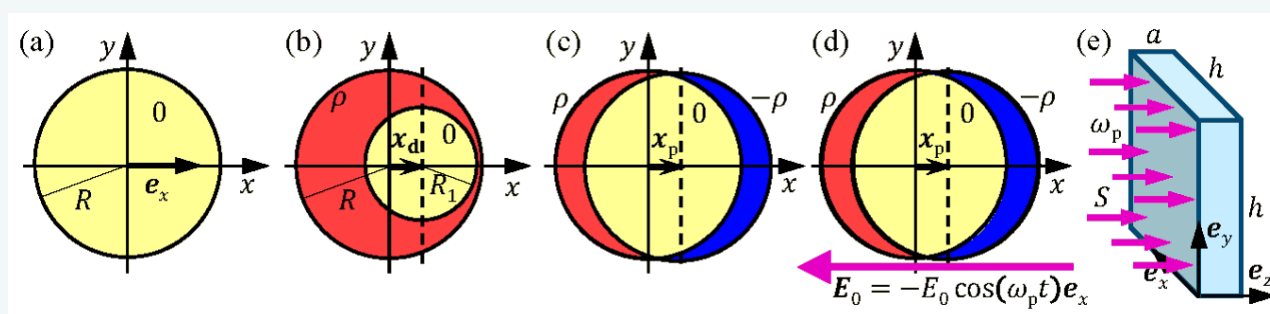


Figura 2.1 (a) Una nanopartícula esférica eléctricamente neutra de radio R_i , situada en el centro del sistema de coordenadas. (b) Una esfera con una densidad de carga positiva homogénea ρ (rojo), que contiene una región esférica más pequeña eléctricamente neutra (0, amarillo) de radio R_1 , cuyo centro está desplazado en $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$. (c) La esfera con densidad de carga positiva ρ de los iones de plata de la nanopartícula está fija en el centro del sistema de coordenadas. El centro de la región esférica con densidad de carga esférica negativa $-\rho$ (azul) de la nube electrónica está desplazado en $\mathbf{x}_p$, donde $x_p \ll R$. (d) Un campo eléctrico externo homogéneo $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$. Para un $\mathbf{E}_0$ dependiente del tiempo, la nube electrónica se mueve con velocidad $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$. (e) El recipiente rectangular ($h \times h \times a$) que contiene la disolución acuosa de nanopartículas iluminada por luz monocromática que se propaga a lo largo del eje z , con frecuencia angular ω_p e intensidad S .

Una única nanopartícula esférica de plata

A lo largo de este problema consideramos una nanopartícula esférica de plata de radio $R = 10,0 \text{ nm}$, cuyo centro está fijo en el origen del sistema de coordenadas; véase la Fig. 2.1(a). Todos los movimientos, fuerzas y campos de excitación son paralelos al eje horizontal x (con vector unitario $\mathbf{e}_x$). La nanopartícula contiene electrones libres (de conducción) que se mueven por todo su volumen sin estar ligados a ningún átomo de plata. Cada átomo de plata es un ion positivo que ha cedido uno de estos electrones libres.

Parte	Pregunta	Puntos
2.1	Halle las siguientes magnitudes: el volumen V y la masa M de la nanopartícula, el número N y la densidad de carga ρ de los iones de plata de la partícula y, para los electrones libres, su concentración n , su carga total Q y su masa total m_0 .	0.7

El campo eléctrico en una región eléctricamente neutra dentro de una esfera cargada

Para el resto del problema, suponga que la permitividad dieléctrica relativa de todos los materiales es $\varepsilon = 1$. Dentro de una esfera cargada de densidad de carga homogénea ρ y radio R , se crea una pequeña región esférica eléctricamente neutra de radio R_1 añadiendo la densidad de carga opuesta $-\rho$, con su centro desplazado en $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$ respecto al centro de la esfera de radio R ; véase la Fig. 2.1(b).

Parte	Pregunta	Puntos
2.2	Demuestre que el campo eléctrico dentro de la región eléctricamente neutra es homogéneo, de la forma $\mathbf{E} = A(\rho/\varepsilon_0)\mathbf{x}_d$, y determine el factor A .	1.2

La fuerza restauradora sobre la nube electrónica desplazada

A continuación estudiamos el movimiento colectivo de los electrones libres y, por tanto, los modelamos como una única esfera cargada negativamente, de densidad de carga homogénea $-\rho$, cuyo centro tiene la posición $\mathbf{x}_p$ y puede moverse a lo largo del eje x respecto al centro de la esfera cargada positivamente (iones de plata), fijo en el origen del sistema de coordenadas; véase la Fig. 2.1(c). Suponga que una fuerza externa $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ desplaza la nube electrónica hasta una nueva posición de equilibrio $\mathbf{x}_p = x_p \mathbf{e}_x$, con $|x_p| \ll R$. Salvo por pequeñas cargas netas en extremos opuestos de la nanopartícula, la mayor parte de su interior permanece eléctricamente neutra.

Parte	Pregunta	Puntos
2.3	Expresé en función de $\mathbf{x}_p$ y n las dos magnitudes siguientes: la fuerza restauradora $\mathbf{F}$ ejercida sobre la nube electrónica y el trabajo W_{el} realizado sobre ella durante el desplazamiento.	1.0

La nanopartícula esférica de plata en un campo eléctrico externo constante

Se coloca una nanopartícula en el vacío y se somete a una fuerza externa $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ debida a un campo eléctrico estático homogéneo aplicado $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$, que desplaza la nube electrónica una pequeña distancia $|x_p|$, donde $|x_p| \ll R$.

Parte	Pregunta	Puntos
2.4	Halle el desplazamiento x_p de la nube electrónica en función de E_0 y n , y determine la cantidad $-\Delta Q$ de carga electrónica desplazada a través del plano yz en el centro de la nanopartícula en función de n , R y x_p .	0.6

La capacidad y la inductancia equivalentes de la nanopartícula de plata

Tanto para un campo $\mathbf{E}_0$ constante como para uno dependiente del tiempo, la nanopartícula puede modelarse mediante un circuito eléctrico equivalente. La capacidad equivalente puede hallarse relacionando el trabajo W_{el} realizado para separar las cargas ΔQ con la energía de un condensador que almacena una carga $\pm \Delta Q$. La separación de cargas producirá una determinada tensión equivalente V_0 entre los terminales del condensador equivalente.

Parte	Pregunta	Puntos
2.5a	Expresé la capacidad equivalente C del sistema en función de ε_0 y R , y halle su valor.	0.7
2.5b	Para esta capacidad, determine en función de E_0 y R la tensión equivalente V_0 que debe aplicarse al condensador equivalente para acumular la carga ΔQ .	0.4

Para un campo $\mathbf{E}_0$ dependiente del tiempo, la nube electrónica se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$, Fig. 2.1(d). Tiene una energía cinética W_{kin} y origina una corriente eléctrica I que atraviesa el plano fijo yz . La energía cinética de la nube electrónica puede atribuirse a la energía de una bobina equivalente de inductancia L por la que circula la corriente I .

Parte	Pregunta	Puntos
2.6a	Expresa tanto W_{kin} como I en función de la velocidad v .	0.7
2.6b	Expresa la inductancia equivalente L en función del radio de la partícula R , de la carga e y la masa m_e del electrón y de la concentración electrónica n , y calcule su valor.	0.5

La resonancia plasmónica de la nanopartícula de plata

Del análisis anterior se deduce que el movimiento que se produce al desplazar la nube electrónica de su posición de equilibrio y soltarla después puede modelarse mediante un circuito LC ideal que oscila en resonancia. Este modo dinámico de la nube electrónica se conoce como resonancia plasmónica y oscila a la llamada frecuencia angular plasmónica ω_p .

Parte	Pregunta	Puntos
2.7a	Halle una expresión para la frecuencia angular plasmónica ω_p de la nube electrónica en función de la carga e y la masa m_e del electrón, de la densidad electrónica n y de la permitividad ϵ_0 .	0.5
2.7b	Calcule ω_p en rad/s y la longitud de onda λ_p en nm de la luz en el vacío con frecuencia angular $\omega = \omega_p$.	0.4

La nanopartícula de plata iluminada con luz a la frecuencia plasmónica

En el resto del problema, la nanopartícula se ilumina con luz monocromática a la frecuencia angular plasmónica ω_p , con una intensidad incidente $S = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2 = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$. Como la longitud de onda es grande, $\lambda_p \gg R$, puede considerarse que la nanopartícula se encuentra en un campo homogéneo que oscila armónicamente, $\mathbf{E}_0 = -E_0 \cos(\omega_p t)\mathbf{e}_x$. Bajo la acción de $\mathbf{E}_0$, el centro $\mathbf{x}_p(t)$ de la nube electrónica oscila a la misma frecuencia, con velocidad $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$ y amplitud constante x_0 . Este movimiento oscilatorio de los electrones da lugar a la absorción de luz. La energía captada por la partícula se convierte en calor por efecto Joule en su interior o es reemitida por la partícula como luz dispersada.

El calentamiento por efecto Joule se debe a colisiones inelásticas aleatorias, en las que un electrón libre cualquiera choca de vez en cuando con un ion de plata y pierde toda su energía cinética, que se transforma en vibraciones de los iones de plata (calor). El tiempo medio entre colisiones es $\tau \gg 1/\omega_p$, y para la nanopartícula de plata utilizamos $\tau = 5.24 \times 10^{-15} \text{ s}$.

Parte	Pregunta	Puntos
2.8a	Halle una expresión para la potencia media temporal de calentamiento por efecto Joule P_{heat} en la nanopartícula, así como para el valor medio temporal del cuadrado de la corriente $\langle I^2 \rangle$, que incluya explícitamente el valor medio temporal del cuadrado de la velocidad $\langle v^2 \rangle$ de la nube electrónica.	1.0
2.8b	Halle una expresión para la resistencia óhmica equivalente R_{heat} en un modelo resistivo equivalente de la nanopartícula cuya potencia de calentamiento por efecto	1.0

Parte	Pregunta	Puntos
	Joule es P_{heat} , debida a la corriente I de la nube electrónica. Calcule el valor numérico de R_{heat} .	

El haz de luz incidente pierde una cierta potencia media temporal P_{scat} por dispersión en la nube electrónica oscilante (reemisión). P_{scat} depende de la amplitud x_0 de la fuente de dispersión, de la carga Q , de la frecuencia angular ω_p y de las propiedades de la luz (la velocidad de la luz c y la permitividad ϵ_0 en el vacío). En función de estas cuatro variables, P_{scat} viene dada por

$$P_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}.$$

Parte	Pregunta	Puntos
2.9	Utilizando P_{scat} , halle una expresión para la resistencia equivalente de dispersión R_{scat} (por analogía con R_{heat}) en un modelo resistivo equivalente, y calcule su valor.	1.0

Los elementos del circuito equivalente anteriores se combinan en un modelo de circuito LCR en serie de la nanopartícula de plata, excitado por una tensión equivalente que oscila armónicamente, $V = V_0 \cos(\omega_p t)$, determinada por el campo eléctrico E_0 de la luz incidente.

Parte	Pregunta	Puntos
2.10a	Deduzca expresiones para las pérdidas de potencia medias temporales P_{heat} y P_{scat} que incluyan la amplitud E_0 del campo eléctrico de la luz incidente en la resonancia plasmónica $\omega = \omega_p$.	1.2
2.10b	Calcule el valor numérico de E_0 , P_{heat} y P_{scat} .	0.3

Generación de vapor mediante luz

Se prepara una disolución acuosa de nanopartículas de plata con una concentración $n_{\text{np}} = 7.3 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$. Se introduce en un recipiente rectangular transparente de dimensiones $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1.0 \text{ cm}^3$ y se ilumina con luz a la frecuencia plasmónica, con la misma intensidad $S = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$ que antes y con incidencia normal; véase la Fig. 2.1(e). La temperatura del agua es $T_{\text{wa}} = 20^\circ\text{C}$ y suponemos, en razonable concordancia con las observaciones, que en régimen estacionario todo el calor generado por efecto Joule en la nanopartícula se destina a producir vapor a una temperatura $T_{\text{st}} = 110^\circ\text{C}$, sin elevar la temperatura del agua.

El rendimiento termodinámico η del generador plasmónico de vapor se define mediante el cociente de potencias $\eta = P_{\text{st}}/P_{\text{tot}}$, donde P_{st} es la potencia destinada a producir vapor en todo el recipiente, mientras que P_{tot} es la potencia total de la luz incidente que entra en él.

Durante la mayor parte del tiempo, una nanopartícula cualquiera está rodeada de vapor en lugar de agua, por lo que puede describirse como si estuviera en el vacío.

Parte	Pregunta	Puntos
2.11a	Calcule la masa total por segundo μ_{st} de vapor producido por el generador plasmónico de vapor durante la iluminación con luz a la frecuencia plasmónica y de intensidad S .	0.6
2.11b	Calcule el valor numérico del rendimiento termodinámico η del generador plasmónico de vapor.	0.2

Hoja de datos: tabla de parámetros físicos

Parámetro físico	Valor
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Constante de Planck dividida por 2π	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Constante de gravitación universal	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Aceleración de la gravedad	$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$
Carga elemental	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Permitividad eléctrica del vacío	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Masa del electrón	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Constante de Avogadro	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Meteorito rocoso, calor específico	$c_{\text{sm}} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Meteorito rocoso, conductividad térmica	$k_{\text{sm}} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Meteorito rocoso, densidad	$\rho_{\text{sm}} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Meteorito rocoso, punto de fusión	$T_{\text{sm}} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$
Meteorito rocoso, calor específico de fusión	$L_{\text{sm}} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
Plata, masa molar	$M_{\text{Ag}} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$
Plata, densidad	$\rho_{\text{Ag}} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
Plata, capacidad calorífica específica	$c_{\text{Ag}} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Agua, masa molar	$M_{\text{wa}} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$
Agua, densidad	$\rho_{\text{wa}} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Agua, capacidad calorífica específica	$c_{\text{wa}} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Agua, calor de vaporización	$L_{\text{wa}} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$
Agua, temperatura de ebullición	$T_{100} = 100^\circ \text{C} = 373.15 \text{ K}$
Hielo, densidad del hielo glaciar	$\rho_{\text{ice}} = 0.917 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Vapor, capacidad calorífica específica	$c_{\text{st}} = 2.080 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Tierra, masa	$m_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Tierra, radio	$R_E = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$
Sol, masa	$m_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Sol, radio	$R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$
Distancia media entre el Sol y la Tierra	$a_E = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Aquí $e > 0$, $Q < 0$, y W_{el} denota el trabajo positivo suministrado para separar las cargas. Se elige el sentido de la corriente del circuito de modo que $I = d(\Delta Q)/dt$, positivo cuando los electrones se mueven en $+x$.

• 2.1

$$\begin{aligned} V &= 4.19 \times 10^{-24} \text{ m}^3, & M &= 4.39 \times 10^{-20} \text{ kg}, \\ N &= 2.45 \times 10^5, & \rho &= +9.38 \times 10^9 \text{ C m}^{-3}, \\ n &= 5.85 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}, & Q &= -3.93 \times 10^{-14} \text{ C}, & m_0 &= 2.23 \times 10^{-25} \text{ kg}. \end{aligned}$$

• 2.2

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{x}_d, \quad \boxed{A = \frac{1}{3}}.$$

• 2.3

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi n^2 e^2 R^3}{9\varepsilon_0} \mathbf{x}_p, \quad W_{\text{el}} = \frac{2\pi n^2 e^2 R^3}{9\varepsilon_0} x_p^2.$$

• 2.4

$$x_p = \frac{3\varepsilon_0 E_0}{ne}, \quad -\Delta Q = -ne\pi R^2 x_p.$$

• 2.5a

$$C = \frac{9}{4} \pi \varepsilon_0 R = 6.26 \times 10^{-19} \text{ F}.$$

• 2.5b

$$V_0 = \frac{4}{3} R E_0.$$

• 2.6a

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{2\pi}{3} n m_e R^3 v^2, \quad I = ne\pi R^2 v.$$

• 2.6b

$$L = \frac{4m_e}{3\pi ne^2 R} = 2.57 \times 10^{-14} \text{ H}.$$

• 2.7a

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{3\varepsilon_0 m_e}}.$$

• 2.7b

$$\omega_p = 7.88 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}, \quad \lambda_p = 239 \text{ nm}.$$

• 2.8a

$$P_{\text{heat}} = \frac{m_0}{2\tau} \langle v^2 \rangle, \quad \langle I^2 \rangle = (ne\pi R^2)^2 \langle v^2 \rangle.$$

• 2.8b

$$R_{\text{heat}} = \frac{L}{2\tau} = \frac{2m_e}{3\pi ne^2 R \tau} = 2.46 \text{ } \Omega.$$

• 2.9

$$R_{\text{scat}} = \frac{8R^2 \omega_p^2}{27\pi \varepsilon_0 c^3} = 2.45 \text{ } \Omega.$$

• **2.10a**

$$P_{\text{heat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{heat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}, \quad P_{\text{scat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{scat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}.$$

• **2.10b**

$$E_0 = 2.74 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}, \quad P_{\text{heat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}, \quad P_{\text{scat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}.$$

• **2.11a**, utilizando iluminación uniforme en todo el recipiente:

$$\mu_{\text{st}} \simeq 1.9 \times 10^{-3} \text{ kg s}^{-1} = 1.9 \text{ g s}^{-1}.$$

• **2.11b**, con la misma aproximación:

$$\eta \simeq 0.50 = 50\%.$$

Solución

Todos los resultados electrostáticos y de circuitos que siguen utilizan el modelo prescrito de nube electrónica rígida y uniformemente cargada. Los resultados que dependen del desplazamiento conservan los términos dominantes para $|x_p|/R \ll 1$.

2.1

La partícula es una esfera, por lo que

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} (1.00 \times 10^{-8})^3 = 4.19 \times 10^{-24} \text{ m}^3.$$

Su masa es

$$M = \rho_{\text{Ag}} V = 4.39 \times 10^{-20} \text{ kg}.$$

El número de átomos de plata y, por tanto, de iones de plata con una sola carga positiva es

$$N = \frac{M}{M_{\text{Ag}}} N_A = 2.45 \times 10^5.$$

Hay un electrón de conducción por ion. Por tanto,

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\rho_{\text{Ag}} N_A}{M_{\text{Ag}}} = 5.85 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

La densidad de carga iónica positiva es

$$\rho = ne = +9.38 \times 10^9 \text{ C m}^{-3}.$$

Para los electrones,

$$Q = -Ne = -3.93 \times 10^{-14} \text{ C}, \quad m_0 = Nm_e = 2.23 \times 10^{-25} \text{ kg}.$$

2.2

Aplicamos la ley de Gauss a una superficie gaussiana esférica concéntrica de radio r situada dentro de una esfera uniformemente cargada:

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho(4\pi r^3/3)}{\epsilon_0}.$$

Por consiguiente, el campo interior es

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}.$$

La región neutra se forma superponiendo una esfera de densidad de carga $-\rho$, centrada en $\mathbf{x}_d$. En un punto situado dentro de esta esfera más pequeña, su campo es

$$\mathbf{E}_-(\mathbf{r}) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0}(\mathbf{r} - \mathbf{x}_d).$$

Al sumar los dos campos se obtiene

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_d.$$

La posición $\mathbf{r}$ se cancela, por lo que el campo es homogéneo y

$$\boxed{A = \frac{1}{3}}.$$

2.3

La nube electrónica desplazada tiene una densidad de carga $-ne$, mientras que los iones fijos tienen una densidad de carga $+ne$. Según 2.2, el campo en la región interior neutra donde se superponen es

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = \frac{ne}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_p.$$

A primer orden en el desplazamiento, este campo proporciona la fuerza restauradora sobre la nube:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}_{\text{int}} = -\frac{Nne^2}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_p.$$

Las pequeñas regiones que no se superponen solo afectan a términos de orden superior. Con $N = 4\pi nR^3/3$,

$$\boxed{\mathbf{F} = -\frac{4\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} \mathbf{x}_p}.$$

Definimos la constante elástica efectiva

$$k = \frac{Nne^2}{3\epsilon_0}.$$

El trabajo suministrado en un desplazamiento cuasiestático desde cero hasta x_p es

$$W_{\text{el}} = -\int_0^{x_p} F_x(x) dx = \int_0^{x_p} kx dx = \frac{1}{2} kx_p^2.$$

Por tanto,

$$\boxed{W_{\text{el}} = \frac{Nne^2}{6\epsilon_0} x_p^2 = \frac{2\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} x_p^2}.$$

Esta es la energía electrostática almacenada que se utiliza en 2.5. El trabajo realizado por la propia fuerza restauradora es $-W_{\text{el}}$.

2.4

El campo externo apunta en $-x$, por lo que la fuerza sobre la nube electrónica negativa apunta en $+x$:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = Q\mathbf{E}_0 = NeE_0 \mathbf{e}_x.$$

En el equilibrio,

$$NeE_0 - \frac{Nne^2}{3\epsilon_0}x_p = 0.$$

De aquí,

$$x_p = \frac{3\epsilon_0 E_0}{ne}.$$

Para una pequeña traslación x_p , el volumen de nube electrónica transportado a través del plano central es, al orden dominante,

$$\Delta V = \pi R^2 x_p.$$

Al multiplicarlo por su densidad de carga se obtiene

$$-\Delta Q = -ne\pi R^2 x_p.$$

Por tanto, la variable positiva de separación de cargas es

$$\Delta Q = ne\pi R^2 x_p = 3\pi\epsilon_0 R^2 E_0.$$

2.5a

Igualemos la energía electrostática a la energía del condensador equivalente:

$$W_{el} = \frac{(\Delta Q)^2}{2C}.$$

Utilizando los resultados anteriores,

$$C = \frac{(ne\pi R^2 x_p)^2}{2(2\pi n^2 e^2 R^3 x_p^2 / (9\epsilon_0))} = \frac{9}{4}\pi\epsilon_0 R.$$

Por tanto,

$$C = 6.26 \times 10^{-19} \text{ F}.$$

2.5b

La tensión equivalente es

$$V_0 = \frac{\Delta Q}{C}.$$

Al sustituir se obtiene

$$V_0 = \frac{3\pi\epsilon_0 R^2 E_0}{(9/4)\pi\epsilon_0 R},$$

por lo que

$$V_0 = \frac{4}{3}RE_0.$$

2.6a

Los N electrones participan en el movimiento colectivo. Su energía cinética es

$$W_{kin} = \frac{1}{2}Nm_e v^2 = \frac{1}{2}m_0 v^2 = \frac{2\pi}{3}nm_e R^3 v^2.$$

Al derivar la relación de separación de cargas se obtiene

$$I = \frac{d(\Delta Q)}{dt} = ne\pi R^2 v.$$

Aquí, una corriente positiva en el circuito corresponde a una corriente convencional en el sentido $-x$. Si, en cambio, se definiera como positiva la corriente convencional a través del plano en el sentido $+x$, sería $I_x = -ne\pi R^2 v$. Los resultados de energía y resistencia dependen de I^2 , por lo que esta elección de orientación no los afecta.

2.6b

Identificamos la energía cinética con la energía de la bobina equivalente:

$$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}m_0v^2.$$

Se deduce que

$$L = \frac{m_0}{(ne\pi R^2)^2}.$$

Utilizando $m_0 = (4\pi R^3/3)nm_e$,

$$L = \frac{4m_e}{3\pi ne^2 R} = 2.57 \times 10^{-14} \text{ H}.$$

2.7a

Para un circuito LC ideal que oscila libremente,

$$L \frac{d^2(\Delta Q)}{dt^2} + \frac{\Delta Q}{C} = 0,$$

por lo que

$$\omega_p^2 = \frac{1}{LC}.$$

Como

$$LC = \frac{4m_e}{3\pi ne^2 R} \frac{9\pi\epsilon_0 R}{4} = \frac{3\epsilon_0 m_e}{ne^2},$$

obtenemos

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{3\epsilon_0 m_e}}.$$

El mismo resultado se deduce directamente de $\omega_p^2 = k/m_0$.

2.7b

Al sustituir las constantes dadas se obtiene

$$\omega_p = 7.88 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}.$$

Como $\omega = 2\pi c/\lambda$,

$$\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} = 2.39 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

Por tanto,

$$\lambda_p = 239 \text{ nm}.$$

2.8a

En el modelo de colisiones indicado, cada electrón pierde en una colisión toda su energía cinética asociada al movimiento colectivo. Su pérdida de energía media temporal por colisión es

$$\frac{1}{2}m_e\langle v^2 \rangle.$$

Entre todos los electrones se producen, en promedio, N/τ colisiones por segundo. La aleatoriedad de los instantes de colisión permite utilizar la energía cinética promediada sobre un ciclo, lo que da

$$P_{\text{heat}} = \frac{Nm_e}{2\tau}\langle v^2 \rangle = \frac{m_0}{2\tau}\langle v^2 \rangle.$$

De la relación entre corriente y velocidad,

$$\langle I^2 \rangle = (ne\pi R^2)^2 \langle v^2 \rangle.$$

2.8b

La resistencia equivalente se define mediante

$$P_{\text{heat}} = R_{\text{heat}}\langle I^2 \rangle.$$

Por consiguiente,

$$R_{\text{heat}} = \frac{m_0}{2\tau(ne\pi R^2)^2} = \frac{L}{2\tau}.$$

Por tanto,

$$R_{\text{heat}} = \frac{2m_e}{3\pi ne^2 R \tau} = 2.46 \Omega.$$

El factor $1/2$ se debe a la energía cinética $\frac{1}{2}m_e v^2$ perdida por colisión en el modelo específico dado en el problema.

2.9

Para un movimiento armónico de amplitud x_0 ,

$$x_p(t) = x_0 \cos(\omega_p t + \phi),$$

y, por tanto,

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}\omega_p^2 x_0^2.$$

Así,

$$\langle I^2 \rangle = \frac{1}{2}(ne\pi R^2)^2 \omega_p^2 x_0^2.$$

Definimos la resistencia de dispersión mediante

$$P_{\text{scat}} = R_{\text{scat}}\langle I^2 \rangle.$$

Utilizando la fórmula de radiación proporcionada,

$$R_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \frac{2}{(ne\pi R^2)^2 \omega_p^2 x_0^2}.$$

Como

$$Q = -\frac{4}{3}\pi R^3 ne, \quad \frac{Q^2}{(ne\pi R^2)^2} = \frac{16R^2}{9},$$

obtenemos

$$R_{\text{scat}} = \frac{8R^2 \omega_p^2}{27\pi\epsilon_0 c^3} = 2.45 \, \Omega.$$

De forma equivalente,

$$R_{\text{scat}} = \frac{8ne^2 R^2}{81\pi\epsilon_0^2 m_e c^3}.$$

2.10a

Tanto el calentamiento como la dispersión extraen energía de la misma corriente oscilante. Por tanto, sus resistencias equivalentes se suman en el circuito en serie:

$$R_{\Sigma} = R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}}.$$

Para $\omega = \omega_p = 1/\sqrt{LC}$, las reactancias inductiva y capacitiva se cancelan:

$$\omega_p L - \frac{1}{\omega_p C} = 0.$$

Así, la corriente está en fase con la tensión de excitación y tiene una amplitud

$$I_0 = \frac{V_0}{R_{\Sigma}} = \frac{4RE_0}{3R_{\Sigma}}.$$

Para una corriente sinusoidal,

$$\langle I^2 \rangle = \frac{I_0^2}{2} = \frac{8R^2 E_0^2}{9R_{\Sigma}^2}.$$

Por tanto, las dos potencias medias son

$$P_{\text{heat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{heat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}$$

y

$$P_{\text{scat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{scat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}.$$

2.10b

A partir de la intensidad incidente especificada,

$$S = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2,$$

se obtiene

$$E_0 = \sqrt{\frac{2S}{c\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2(1.00 \times 10^6)}{(2.998 \times 10^8)(8.854 \times 10^{-12})}}.$$

Por tanto,

$$E_0 = 2.74 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}.$$

Utilizando valores intermedios sin redondear,

$$V_0 = 3.66 \times 10^{-4} \text{ V}, \quad R_\Sigma = 4.910 \, \Omega, \quad I_0 = 7.45 \times 10^{-5} \text{ A}.$$

Por consiguiente,

$$P_{\text{heat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}, \quad P_{\text{scat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}.$$

Su casi igualdad se debe a la casi igualdad de las dos resistencias.

También puede comprobarse la amplitud del desplazamiento:

$$x_0 = \frac{I_0}{ne\pi R^2 \omega_p} = 3.21 \times 10^{-15} \text{ m},$$

por lo que $x_0/R = 3.21 \times 10^{-7} \ll 1$. Además, $\omega_p \tau = 41.3$, en concordancia con la separación supuesta entre las escalas temporales de oscilación y de colisión.

2.11a

Aplicamos la potencia de calentamiento por partícula de 2.10 a todo el volumen iluminado. Esto supone una iluminación uniforme y no introduce un modelo adicional de atenuación ni de dispersión múltiple.

El volumen del recipiente es

$$V_{\text{vessel}} = h^2 a = (0.10)^2 (0.010) = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3.$$

Contiene

$$N_{\text{np}} = n_{\text{np}} h^2 a = 7.3 \times 10^{11}$$

nanopartículas. Se supone que todo su calor generado por efecto Joule produce vapor, por lo que

$$P_{\text{st}} = N_{\text{np}} P_{\text{heat}} = 4.98 \times 10^3 \text{ W}.$$

Cada kilogramo que se convierte en vapor debe calentarse primero desde 20°C hasta 100°C , vaporizarse después y, finalmente, calentarse hasta 110°C . La energía necesaria por unidad de masa es

$$q_{\text{st}} = c_{\text{wa}}(T_{100} - T_{\text{wa}}) + L_{\text{wa}} + c_{\text{st}}(T_{\text{st}} - T_{100}).$$

Numéricamente,

$$\begin{aligned} q_{\text{st}} &= (4.181 \times 10^3)(80) + 2.260 \times 10^6 + (2.080 \times 10^3)(10) \\ &= 2.61528 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}. \end{aligned}$$

Que la masa de agua restante permanezca a 20°C no elimina el calentamiento necesario de la porción que se evapora.

La conservación de la energía da

$$\mu_{\text{st}} q_{\text{st}} = P_{\text{st}}.$$

Por tanto,

$$\mu_{\text{st}} = \frac{n_{\text{np}} h^2 a P_{\text{heat}}}{c_{\text{wa}}(T_{100} - T_{\text{wa}}) + L_{\text{wa}} + c_{\text{st}}(T_{\text{st}} - T_{100})} = 1.904 \times 10^{-3} \text{ kg s}^{-1}.$$

Con la precisión de los datos del recipiente y de la concentración,

$$\boxed{\mu_{\text{st}} \simeq 1.9 \text{ g s}^{-1}}.$$

2.11b

El haz entra perpendicularmente por la cara de área h^2 , por lo que

$$P_{\text{tot}} = S h^2 = (1.00 \times 10^6)(0.10)^2 = 1.00 \times 10^4 \text{ W}.$$

Por tanto,

$$\eta = \frac{P_{\text{st}}}{P_{\text{tot}}} = \frac{n_{\text{np}} h^2 a P_{\text{heat}}}{S h^2} = \frac{n_{\text{np}} a P_{\text{heat}}}{S}.$$

Numéricamente,

$$\eta = 0.4979,$$

o, con un redondeo adecuado,

$$\boxed{\eta \simeq 0.50 = 50\%}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: El manto de hielo de Groenlandia

Introducción

Este problema trata sobre la física del manto de hielo de Groenlandia, el segundo glaciar más grande del mundo, Fig. 3.1(a). Como idealización, Groenlandia se modela como una isla rectangular de anchura $2L$ y longitud $5L$, con el suelo al nivel del mar y completamente cubierta de hielo incompresible (densidad constante ρ_{ice}), véase la Fig. 3.1(b). El perfil de altura $H(x)$ del manto de hielo no depende de la coordenada y y aumenta desde cero en las costas $x = \pm L$ hasta una altura máxima H_m a lo largo del eje central norte-sur (el eje y), conocido como la divisoria de hielo, véase la Fig. 3.1(c).

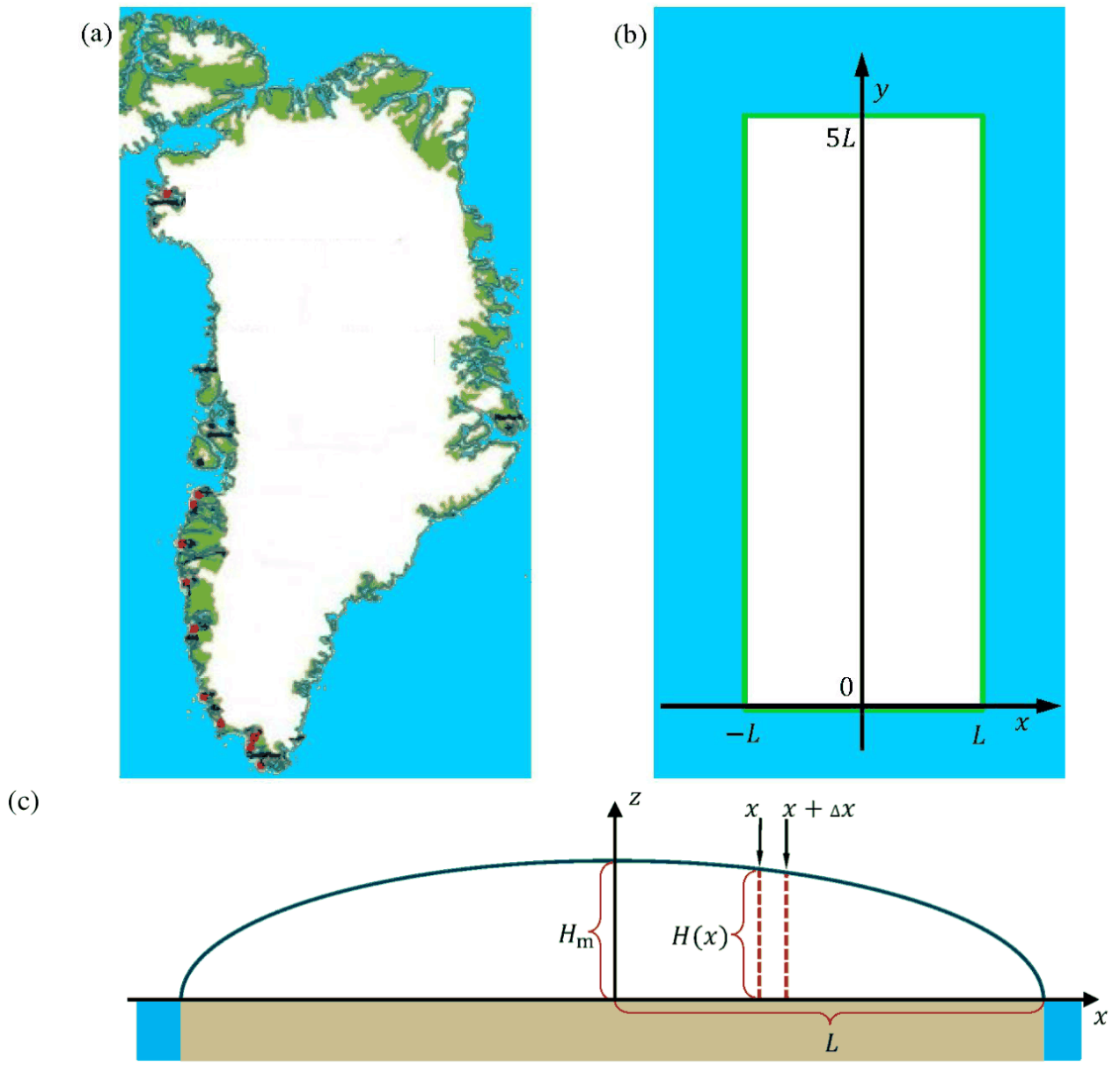


Figura 3.1 (a) Mapa de Groenlandia que muestra la extensión del manto de hielo (blanco), las regiones costeras libres de hielo (verde) y el océano circundante (azul). **(b)** Modelo simplificado del manto de hielo de Groenlandia que cubre un área rectangular en el plano xy , con lados de longitudes $2L$ y $5L$. La divisoria de hielo, la línea de altura máxima del manto de hielo H_m , discurre a lo largo del eje y . **(c)** Corte vertical (plano xz) del manto de hielo que muestra el perfil de altura $H(x)$ (línea azul). $H(x)$ es independiente de la coordenada y para $0 < y < 5L$, mientras que desciende bruscamente a cero en $y = 0$ e $y = 5L$. El eje z marca la posición de la divisoria de hielo. Por claridad, las dimensiones verticales se han ampliado con respecto a las horizontales. La densidad ρ_{ice} del hielo es constante.

Dos fórmulas útiles

En este problema se puede utilizar la integral:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx = \frac{2}{3}$$

y la aproximación $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, válida para $|\alpha x| \ll 1$.

El perfil de altura del manto de hielo

En escalas de tiempo cortas, el glaciar es un sistema hidrostático incompresible con un perfil de altura fijo $H(x)$.

3.1	Escriba una expresión para la presión $p(x, z)$ en el interior del manto de hielo en función de la altura vertical z sobre el suelo y de la distancia x a la divisoria de hielo. Desprecie la presión atmosférica.	0.3
-----	--	-----

Considere una porción vertical del manto de hielo en equilibrio, que cubre una pequeña área horizontal de base $\Delta x \Delta y$ entre x y $x + \Delta x$, véanse las líneas rojas discontinuas de la Fig. 3.1(c). El valor de Δy no importa. La componente horizontal neta de la fuerza ΔF sobre las dos caras verticales de la porción, debida a la diferencia de altura entre la cara orientada hacia el centro y la orientada hacia la costa, se equilibra con una fuerza de rozamiento $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$ ejercida por el suelo sobre el área de base $\Delta x \Delta y$, donde $S_b = 100 \text{ kPa}$.

3.2a	Para un valor dado de x , demuestre que, en el límite $\Delta x \rightarrow 0$, $S_b = kH \, dH/dx$, y determine k .	0.9
3.2b	Determine una expresión para el perfil de altura $H(x)$ en términos de ρ_{ice} , g , L , S_b y la distancia x a la divisoria. El resultado mostrará que la altura máxima del glaciar H_m varía con la semianchura L según $H_m \propto L^{1/2}$.	0.8
3.2c	Determine el exponente γ con el que el volumen total V_{ice} del manto de hielo varía con el área A de la isla rectangular, $V_{\text{ice}} \propto A^\gamma$.	0.5

Un manto de hielo dinámico

En una escala de tiempo más larga, el hielo es un fluido viscoso incompresible que fluye por gravedad desde la zona central hacia la costa. En este modelo, el hielo mantiene su perfil de altura $H(x)$ en un estado estacionario, en el que la acumulación de hielo debida a las nevadas en la región central se equilibra con la fusión en la costa. Además de la geometría del manto de hielo de las Figs. 3.1(b) y (c), adopte las siguientes hipótesis del modelo:

1) El hielo fluye en el plano xz alejándose de la divisoria de hielo (el eje y). 2) La tasa de acumulación c (m/año) en la región central es constante. 3) El hielo solo puede salir del glaciar por fusión cerca de las costas en $x = \pm L$. 4) La componente horizontal (x) $v_x(x) = dx/dt$ de la velocidad de flujo del hielo es independiente de z . 5) La componente vertical (z) $v_z(z) = dz/dt$ de la velocidad de flujo del hielo es independiente de x .

Considere únicamente la región central $|x| \ll L$, próxima al centro del manto de hielo, donde las variaciones de altura del manto de hielo son muy pequeñas y pueden despreciarse por completo, es decir, $H(x) \approx H_m$.

3.3	Utilice la conservación de la masa para hallar una expresión de la velocidad horizontal de flujo del hielo $v_x(x)$ en términos de c , x y H_m .	0.6
-----	--	-----

De la hipótesis de incompresibilidad, es decir, de la densidad constante ρ_{ice} del hielo, se deduce que la conservación de la masa impone la siguiente restricción a las componentes de la velocidad de flujo del hielo

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

3.4	Escriba una expresión para la dependencia con z de la componente vertical $v_z(z)$ de la velocidad de flujo del hielo.	0.6
-----	--	-----

Una pequeña partícula de hielo situada inicialmente en la superficie, en la posición (x_i, H_m) , se desplazará con el tiempo como parte del manto de hielo siguiendo una trayectoria de flujo $z(x)$ en el plano vertical xz .

3.5	Deduzca una expresión para dicha trayectoria de flujo $z(x)$.	0.9
-----	--	-----

Edad e indicadores climáticos en el manto de hielo dinámico

A partir de las componentes de la velocidad de flujo del hielo $v_x(x)$ y $v_z(z)$, se puede estimar la edad $\tau(z)$ del hielo a una profundidad determinada $H_m - z$ bajo la superficie del manto de hielo.

3.6	Halle una expresión para la edad $\tau(z)$ del hielo en función de la altura z sobre el suelo, justo en la divisoria de hielo $x = 0$.	1.0
-----	---	-----

Un testigo de hielo extraído mediante perforación en el interior del manto de hielo de Groenlandia atravesará capas de nieve del pasado, y su análisis permite revelar cambios climáticos pasados. Uno de los mejores indicadores es el denominado $\delta^{18}\text{O}$, definido como

$$\delta^{18}\text{O} = \frac{R_{\text{ice}} - R_{\text{ref}}}{R_{\text{ref}}} 1000 \text{‰},$$

donde $R = [^{18}\text{O}]/[^{16}\text{O}]$ denota la abundancia relativa de los dos isótopos estables ^{18}O y ^{16}O del oxígeno. La referencia R_{ref} se basa en la composición isotópica de los océanos alrededor del ecuador.

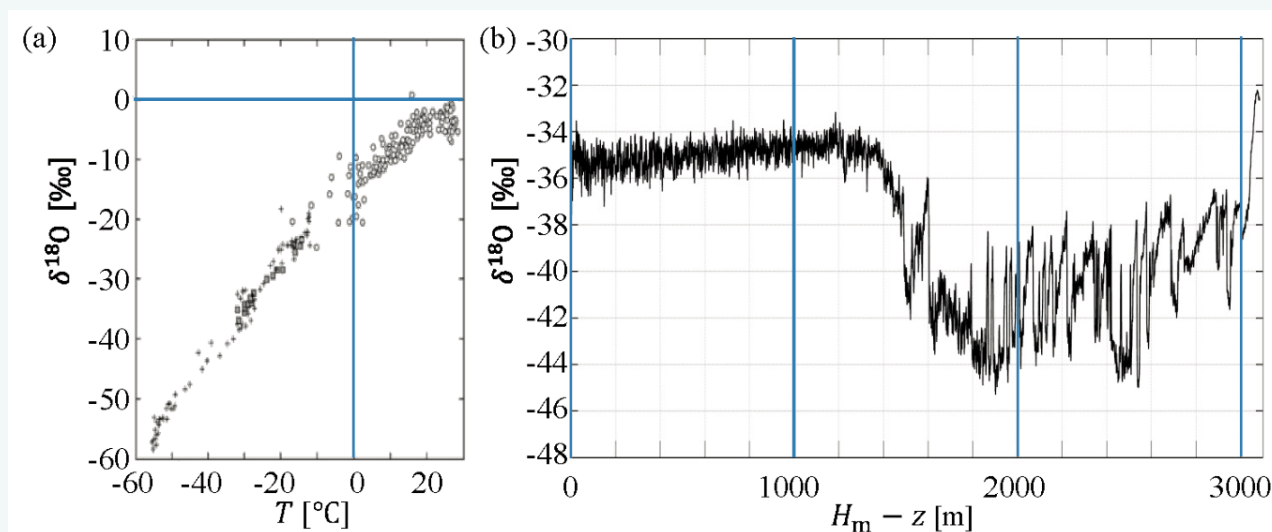


Figura 3.2 (a) Relación observada entre $\delta^{18}\text{O}$ en la nieve y la temperatura media anual de la superficie T . **(b)** Mediciones de $\delta^{18}\text{O}$ en función de la profundidad $H_m - z$ bajo la superficie, obtenidas de un testigo de hielo extraído mediante perforación desde la superficie hasta el lecho rocoso en un lugar concreto de la divisoria de hielo de Groenlandia donde $H_m = 3060$ m.

Las observaciones del manto de hielo de Groenlandia muestran que $\delta^{18}\text{O}$ en la nieve varía de forma aproximadamente lineal con la temperatura, Fig. 3.2(a). Suponiendo que siempre haya sido así, el valor de $\delta^{18}\text{O}$ obtenido de un testigo de hielo a una profundidad $H_m - z$ permite estimar la temperatura T cerca de Groenlandia en la época correspondiente a la edad $\tau(z)$.

Las mediciones de $\delta^{18}\text{O}$ en un testigo de hielo de Groenlandia de 3060 m de longitud muestran un cambio brusco de $\delta^{18}\text{O}$ a una profundidad de 1492 m, Fig. 3.2(b), que marca el final del último período glacial. El período glacial comenzó hace 120 000 años, lo que corresponde a una profundidad de 3040 m, y el período interglacial actual comenzó hace 11 700 años, lo que corresponde a una profundidad de 1492 m. Suponga que estos dos períodos pueden describirse mediante dos tasas de acumulación diferentes, c_{ia} (período glacial) y c_{ig} (período interglacial), respectivamente. Puede suponer que H_{m} se mantuvo constante durante estos 120 000 años.

3.7a	Determine las tasas de acumulación c_{ia} y c_{ig} .	0.8
3.7b	Utilice los datos de la Fig. 3.2 para hallar el cambio de temperatura en la transición del período glacial al período interglacial.	0.2

Aumento del nivel del mar debido a la fusión del manto de hielo de Groenlandia

La fusión completa del manto de hielo de Groenlandia provocará un aumento del nivel del mar en el océano global. Como estimación aproximada de este aumento del nivel del mar, se puede considerar simplemente una subida uniforme en todo un océano global de área constante $A_{\text{O}} = 3.61 \times 10^{14} \text{ m}^2$.

3.8	Calcule el aumento medio global del nivel del mar que resultaría de la fusión completa del manto de hielo de Groenlandia, dadas su área actual de $A_{\text{G}} = 1.71 \times 10^{12} \text{ m}^2$ y $S_{\text{b}} = 100 \text{ kPa}$.	0.6
-----	---	-----

El enorme manto de hielo de Groenlandia ejerce una atracción gravitatoria sobre el océano circundante. Si el manto de hielo se funde, esta elevación local de la marea desaparece y el nivel del mar descenderá cerca de Groenlandia, un efecto que contrarresta parcialmente el aumento del nivel del mar calculado anteriormente.

Para estimar la magnitud de esta atracción gravitatoria sobre el agua, el manto de hielo de Groenlandia se modela ahora como una masa puntual situada al nivel del suelo y cuya masa es la masa total del manto de hielo de Groenlandia. Copenhague se encuentra a una distancia de 3500 km, medida a lo largo de la superficie terrestre, del centro de la masa puntual. Se puede considerar que la Tierra, sin la masa puntual, tiene simetría esférica y un océano global extendido sobre toda su superficie, de área $A_{\text{E}} = 5.10 \times 10^{14} \text{ m}^2$. Se pueden despreciar todos los efectos de la rotación terrestre.

3.9	Dentro de este modelo, determine la diferencia $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}}$ entre los niveles del mar en Copenhague (h_{CPH}) y en el punto diametralmente opuesto a Groenlandia (h_{OPP}).	1.8
-----	--	-----

Hoja de datos: tabla de parámetros físicos

Velocidad de la luz en el vacío	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Constante de Planck dividida por 2π	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Constante de gravitación universal	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Aceleración de la gravedad	$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$
Carga elemental	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Permitividad dieléctrica del vacío	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Masa del electrón	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Constante de Avogadro	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Meteorito rocoso, calor específico	$c_{\text{sm}} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Meteorito rocoso, conductividad térmica	$k_{\text{sm}} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Meteorito rocoso, densidad	$\rho_{\text{sm}} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Meteorito rocoso, punto de fusión	$T_{\text{sm}} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$
Meteorito rocoso, calor latente específico de fusión	$L_{\text{sm}} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
Plata, masa molar	$M_{\text{Ag}} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$
Plata, densidad	$\rho_{\text{Ag}} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
Plata, capacidad calorífica específica	$c_{\text{Ag}} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Agua, masa molar	$M_{\text{wa}} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$
Agua, densidad	$\rho_{\text{wa}} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Agua, capacidad calorífica específica	$c_{\text{wa}} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Agua, calor latente de vaporización	$L_{\text{wa}} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$
Agua, temperatura de ebullición	$T_{100} = 100^\circ \text{C} = 373.15 \text{ K}$
Hielo, densidad del hielo glaciario	$\rho_{\text{ice}} = 0.917 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Vapor de agua, capacidad calorífica específica	$c_{\text{st}} = 2.080 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Tierra, masa	$m_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Tierra, radio	$R_E = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$
Sol, masa	$m_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Sol, radio	$R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$
Distancia media entre el Sol y la Tierra	$a_E = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **3.1:** $p(x, z) = \rho_{\text{ice}} g [H(x) - z]$, para $0 \leq z \leq H(x)$.
- **3.2a:** $S_b = -\rho_{\text{ice}} g H \frac{dH}{dx}$, por lo que $k = -\rho_{\text{ice}} g$ en la mitad $x > 0$.
- **3.2b:** $H(x) = \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{\text{ice}} g} (L - |x|)}$, con $H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}} g}}$.
- **3.2c:** $\gamma = \frac{5}{4}$; en concreto, $V_{\text{ice}} = \frac{2}{3} A H_m$.
- **3.3:** $v_x(x) = \frac{c}{H_m} x$.
- **3.4:** $v_z(z) = -\frac{c}{H_m} z$.

- **3.5:** $z(x) = H_m \frac{x_i}{x}$ para $x_i \neq 0$. Para $x_i = 0$, la trayectoria es vertical a lo largo de $x = 0$.
- **3.6:** $\tau(z) = \frac{H_m}{c} \ln \frac{H_m}{z}$.
- **3.7a:** $c_{ia} = 0.123 \text{ m/year}$, $c_{ig} = 0.175 \text{ m/year}$.
- **3.7b:** $\Delta T \approx +10 \text{ K}$, un calentamiento de aproximadamente 10°C .
- **3.8:** $\Delta h_{\text{mean}} \approx 8.8 \text{ m}$.
- **3.9:** $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} \approx 4.5 \text{ m}$, con un nivel más alto en Copenhague.

Solución

3.1

El equilibrio hidrostático en la dirección vertical da

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_{\text{ice}} g.$$

La presión en la superficie es cero cuando se desprecia la presión atmosférica:

$$p(x, H(x)) = 0.$$

Por tanto, al integrar hacia abajo desde la superficie se obtiene

$$p(x, z) = \rho_{\text{ice}} g [H(x) - z].$$

3.2a

Considérese la mitad derecha del manto de hielo, $x > 0$. La fuerza de presión sobre una cara vertical de altura $H(x)$ y anchura Δy es

$$F(x) = \Delta y \int_0^{H(x)} \rho_{\text{ice}} g [H(x) - z] dz = \frac{1}{2} \rho_{\text{ice}} g H(x)^2 \Delta y.$$

La fuerza sobre la cara orientada hacia el centro actúa en el sentido de x creciente, mientras que la fuerza sobre la cara orientada hacia la costa actúa en el sentido de x decreciente. Su resultante es

$$\Delta F = \frac{1}{2} \rho_{\text{ice}} g [H(x)^2 - H(x + \Delta x)^2] \Delta y.$$

A primer orden en Δx ,

$$\Delta F = -\rho_{\text{ice}} g H(x) \frac{dH}{dx} \Delta x \Delta y.$$

Al equilibrar esta fuerza dirigida hacia el exterior con el rozamiento basal $S_b \Delta x \Delta y$, se obtiene

$$S_b = -\rho_{\text{ice}} g H \frac{dH}{dx}, \quad k = -\rho_{\text{ice}} g.$$

La derivada es negativa en esta mitad, por lo que $S_b > 0$, como corresponde. En cualquiera de las dos mitades, la relación correspondiente entre los módulos es $S_b = \rho_{\text{ice}} g H |dH/dx|$.

3.2b

En $0 \leq x \leq L$, el resultado anterior puede escribirse como

$$\frac{d(H^2)}{dx} = -\frac{2S_b}{\rho_{ice}g}.$$

Utilizando la condición de contorno en la costa $H(L) = 0$,

$$H(x)^2 = \frac{2S_b}{\rho_{ice}g}(L - x).$$

La reflexión respecto a la divisoria de hielo da el perfil completo:

$$H(x) = \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{ice}g}(L - |x|)}, \quad -L \leq x \leq L.$$

En la divisoria,

$$H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{ice}g}},$$

por lo que $H_m \propto L^{1/2}$ cuando el rozamiento basal, la densidad y la aceleración de la gravedad se mantienen fijos.

3.2c

El área de la isla es

$$A = (2L)(5L) = 10L^2.$$

Como el perfil es independiente de y , el volumen de hielo es

$$V_{ice} = 5L \int_{-L}^L H(x) dx = 10LH_m \int_0^L \sqrt{1 - \frac{x}{L}} dx.$$

Con $u = x/L$, la integral proporcionada da

$$V_{ice} = 10L^2 H_m \int_0^1 \sqrt{1 - u} du = \frac{20}{3} L^2 H_m = \boxed{\frac{2}{3} A H_m}.$$

Así,

$$V_{ice} \propto L^{2+1/2} = L^{5/2} \propto A^{5/4},$$

y

$$\boxed{\gamma = \frac{5}{4}}.$$

3.3

Tomemos un volumen de control central entre la divisoria y una posición $x > 0$, con anchura Δy . En estado estacionario, la acumulación sobre su superficie debe ser igual al flujo horizontal saliente.

La masa acumulada por unidad de tiempo es

$$\dot{m}_{in} = \rho_{ice} c x \Delta y.$$

Por simetría, no hay flujo horizontal a través de la divisoria. Como v_x es independiente de la altura, el flujo saliente a través de la cara situada en x es

$$\dot{m}_{out} = \rho_{ice} v_x(x) H_m \Delta y.$$

Al igualarlos se obtiene

$$v_x(x) = \frac{c}{H_m}x.$$

La misma expresión, con su signo, se aplica para $x < 0$, donde el flujo se dirige hacia valores negativos de x . Este resultado utiliza la aproximación de la región central $H(x) \approx H_m$.

3.4

La incompresibilidad exige

$$\frac{dv_z}{dz} = -\frac{dv_x}{dx} = -\frac{c}{H_m}.$$

La integración da

$$v_z(z) = -\frac{c}{H_m}z + C.$$

No hay flujo a través del suelo, por lo que $v_z(0) = 0$, lo que implica $C = 0$. Por tanto,

$$v_z(z) = -\frac{c}{H_m}z.$$

En particular, $v_z(H_m) = -c$: el movimiento descendente en la superficie compensa la incorporación de hielo nuevo.

3.5

Para una partícula con $x_i \neq 0$, su trayectoria satisface

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz/dt}{dx/dt} = \frac{v_z}{v_x} = -\frac{z}{x}.$$

Separando variables y aplicando la condición inicial $z(x_i) = H_m$,

$$\int_{H_m}^z \frac{dz'}{z'} = -\int_{x_i}^x \frac{dx'}{x'},$$

por lo que

$$\ln \frac{z}{H_m} = -\ln \left| \frac{x}{x_i} \right|.$$

La partícula permanece en el lado de la divisoria en el que se encontraba inicialmente; por tanto, $x/x_i > 0$, y

$$xz = x_i H_m, \quad z(x) = H_m \frac{x_i}{x}.$$

La trayectoria es una rama de una hipérbola equilátera, a lo largo de la cual la partícula se desplaza hacia el exterior y hacia abajo. De forma equivalente,

$$x(t) = x_i e^{ct/H_m}, \quad z(t) = H_m e^{-ct/H_m}.$$

Para $x_i = 0$, la partícula permanece en $x = 0$ y desciende verticalmente según la misma expresión para $z(t)$. Estas trayectorias son válidas mientras la partícula permanezca en la región central.

3.6

En la divisoria de hielo, la velocidad horizontal se anula. La edad es el tiempo transcurrido desde que la partícula se depositó en $z = H_m$:

$$\tau(z) = \int_{H_m}^z \frac{dz'}{v_z(z')} = -\frac{H_m}{c} \int_{H_m}^z \frac{dz'}{z'}.$$

Por tanto,

$$\tau(z) = \frac{H_m}{c} \ln \frac{H_m}{z}.$$

Esta edad es cero en la superficie y aumenta con la profundidad. En este modelo idealizado, diverge cuando $z \rightarrow 0$, porque la velocidad vertical tiende a cero en el lecho.

3.7a

Para este testigo de hielo, $H_m = 3060$ m. Las alturas actuales sobre el lecho de las dos capas datadas son

$$\begin{aligned} z_1 &= 3060 - 1492 = 1568 \text{ m}, \\ z_2 &= 3060 - 3040 = 20 \text{ m}. \end{aligned}$$

La capa de transición solo ha experimentado los 11 700 años de flujo interglacial. Así,

$$\ln \frac{3060}{1568} = \frac{c_{ig}(11\,700 \text{ year})}{3060 \text{ m}},$$

lo que da

$$c_{ig} = \frac{3060}{11\,700} \ln \frac{3060}{1568} = 0.175 \text{ m/year}.$$

Para la capa más antigua, la tasa de acumulación cambió durante su descenso. Con H_m constante,

$$\frac{d \ln z}{dt} = -\frac{c(t)}{H_m}.$$

Experimentó flujo glacial durante

$$120\,000 - 11\,700 = 108\,300 \text{ years},$$

seguido de flujo interglacial durante 11 700 años. En consecuencia,

$$\ln \frac{3060}{20} = \frac{c_{ia}(108\,300 \text{ year}) + c_{ig}(11\,700 \text{ year})}{3060 \text{ m}}.$$

Al restar la ecuación de la capa de transición se elimina la contribución interglacial:

$$\ln \frac{1568}{20} = \frac{c_{ia}(108\,300 \text{ year})}{3060 \text{ m}}.$$

Por tanto,

$$c_{ia} = \frac{3060}{108\,300} \ln \frac{1568}{20} = 0.123 \text{ m/year}.$$

Es esencial tener en cuenta la compresión del hielo más antiguo durante el período interglacial.

3.7b

La Figura 3.2(b) da valores isotópicos representativos de aproximadamente

$$\delta_{ia}^{18}\text{O} \approx -42 \text{ ‰}, \quad \delta_{ig}^{18}\text{O} \approx -35 \text{ ‰}.$$

Así, la transición corresponde a un aumento de unos 7 ‰.

La tendencia aproximadamente lineal de la Fig. 3.2(a), en el intervalo de temperaturas pertinente, tiene una pendiente de aproximadamente

$$\frac{\Delta(\delta^{18}\text{O})}{\Delta T} \approx 0.7 \text{ ‰ K}^{-1}.$$

Por tanto,

$$\Delta T \approx \frac{7 \text{ ‰}}{0.7 \text{ ‰ K}^{-1}} \approx 10 \text{ K}.$$

El cambio es un calentamiento:

$$\boxed{T_{ig} - T_{ia} \approx +10 \text{ K}}.$$

La precisión está limitada por las lecturas de las gráficas.

3.8

Utilizamos la geometría de la isla y el perfil de altura para determinar el volumen actual según el modelo. Como $A_G = 10L^2$,

$$L = \sqrt{\frac{A_G}{10}} = \sqrt{\frac{1.71 \times 10^{12}}{10}} = 4.14 \times 10^5 \text{ m}.$$

La altura máxima que predice el modelo es

$$H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{ice} g}} = \sqrt{\frac{2(1.00 \times 10^5)(4.1352 \times 10^5)}{(917)(9.82)}} = 3.03 \times 10^3 \text{ m}.$$

Utilizando el apartado 3.2c,

$$V_{ice} = \frac{2}{3} A_G H_m = 3.45 \times 10^{15} \text{ m}^3.$$

La fusión conserva la masa, por lo que el volumen de agua resultante es

$$V_{water} = \frac{\rho_{ice}}{\rho_{wa}} V_{ice}.$$

Al distribuir esta agua uniformemente sobre el área constante del océano se obtiene

$$\Delta h_{mean} = \frac{V_{water}}{A_O} = \frac{\rho_{ice}}{\rho_{wa}} \frac{2A_G H_m}{3A_O}.$$

Numéricamente,

$$\Delta h_{mean} = \frac{917}{998} \frac{3.4548 \times 10^{15}}{3.61 \times 10^{14}} = 8.79 \text{ m}.$$

Así,

$$\boxed{\Delta h_{mean} \approx 8.8 \text{ m}}.$$

3.9

Un océano en reposo tiene una superficie libre equipotencial. Por ello, comparamos los potenciales gravitatorios en Copenhague y en el punto opuesto a Groenlandia.

La masa puntual que representa el manto de hielo es

$$M = \rho_{\text{ice}} V_{\text{ice}} = (917)(3.4548 \times 10^{15}) = 3.17 \times 10^{18} \text{ kg}.$$

Sea R el radio terrestre y h un pequeño desplazamiento de la superficie del mar respecto a una esfera de referencia. La contribución de la Tierra al potencial gravitatorio por unidad de masa es

$$\Phi_E(R+h) = -\frac{Gm_E}{R+h} \approx -\frac{Gm_E}{R} + gh,$$

donde $h \ll R$. La masa de hielo contribuye con

$$\Phi_{\text{ice}} = -\frac{GM}{d},$$

siendo d la distancia en línea recta a la masa de hielo.

A primer orden, d puede evaluarse sobre la esfera de referencia: los cambios de unos pocos metros son despreciables frente a distancias de millones de metros. Por tanto, la igualdad de los potenciales en la superficie exige

$$gh_{\text{CPH}} - \frac{GM}{d_{\text{CPH}}} = gh_{\text{OPP}} - \frac{GM}{d_{\text{OPP}}}.$$

Así,

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = \frac{GM}{g} \left(\frac{1}{d_{\text{CPH}}} - \frac{1}{d_{\text{OPP}}} \right).$$

La distancia dada de 3500 km es una longitud de arco s , por lo que el ángulo central y la distancia medida a lo largo de la cuerda son

$$\theta = \frac{s}{R}, \quad d_{\text{CPH}} = 2R \sin \frac{\theta}{2} = 2R \sin \frac{s}{2R}.$$

En el punto opuesto,

$$d_{\text{OPP}} = 2R.$$

En consecuencia,

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = \frac{GM}{2gR} \left[\frac{1}{\sin(s/(2R))} - 1 \right].$$

El área terrestre indicada da $R = \sqrt{A_E/(4\pi)} \approx 6.37 \times 10^6 \text{ m}$, coherente con el radio proporcionado. Utilizando $R = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$,

$$\theta = 0.5486, \quad d_{\text{CPH}} = 3.456 \times 10^6 \text{ m}, \quad d_{\text{OPP}} = 1.276 \times 10^7 \text{ m}.$$

Por tanto,

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = \frac{(6.67 \times 10^{-11})(3.168 \times 10^{18})}{9.82} \left(\frac{1}{3.456 \times 10^6} - \frac{1}{1.276 \times 10^7} \right) = 4.54 \text{ m}.$$

Por consiguiente,

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} \approx 4.5 \text{ m}.$$

El signo positivo significa que la atracción gravitatoria de Groenlandia eleva la superficie oceánica de equilibrio en Copenhague respecto al lado opuesto de la Tierra. Cualquier desplazamiento común necesario para conservar el volumen del océano se cancela en esta diferencia.

La solución se comprobó con la solución oficial.