

IPhO 2013

Theorieaufgaben und Lösungen · Kopenhagen, Dänemark · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/2013/

Aufgabe 1: Der Meteorit Maribo

Einleitung

Ein Meteoroid ist ein kleines Teilchen (typischerweise kleiner als 1 m) von einem Kometen oder einem Asteroiden. Ein Meteoroid, der auf dem Erdboden aufschlägt, wird als Meteorit bezeichnet.

In der Nacht des 17. Januar 2009 sahen viele Menschen in der Nähe der Ostsee die Leuchtspur oder den Feuerball eines Meteoroiden, der durch die Erdatmosphäre fiel. In Schweden zeichnete eine Überwachungskamera ein Video des Ereignisses auf, siehe Abb. 1.1(a). Anhand dieser Bilder und von Augenzeugenberichten konnte das Einschlaggebiet eingegrenzt werden, und sechs Wochen später wurde in der Nähe der Stadt Maribo in Süddänemark ein Meteorit mit der Masse 0.025 kg gefunden. Messungen an dem nun Maribo genannten Meteoriten und seiner Bahn am Himmel lieferten interessante Ergebnisse. Seine Geschwindigkeit beim Eintritt in die Atmosphäre war außergewöhnlich hoch gewesen. Sein Alter von 4.567×10^9 Jahren zeigt, dass er kurz nach der Entstehung des Sonnensystems entstanden war. Der Meteorit Maribo ist möglicherweise ein Teil des Kometen Encke.

Die Geschwindigkeit von Maribo

Der Feuerball bewegte sich in westlicher Richtung mit einem Kurs von 285° gegenüber Norden auf den Ort zu, an dem der Meteorit später gefunden wurde, wie in Abb. 1.1 skizziert. Der Meteorit wurde in einer Entfernung von 195 km von der Überwachungskamera in Richtung 230° gegenüber Norden gefunden.

Teil	Frage	Punkte
1.1	Berechnen Sie anhand dieser Angaben und der Daten in Abb. 1.1 die mittlere Geschwindigkeit von Maribo im Zeitintervall zwischen den Einzelbildern 155 und 161. Sowohl die Erdkrümmung als auch die auf den Meteoroiden wirkende Gravitationskraft können vernachlässigt werden.	1.3

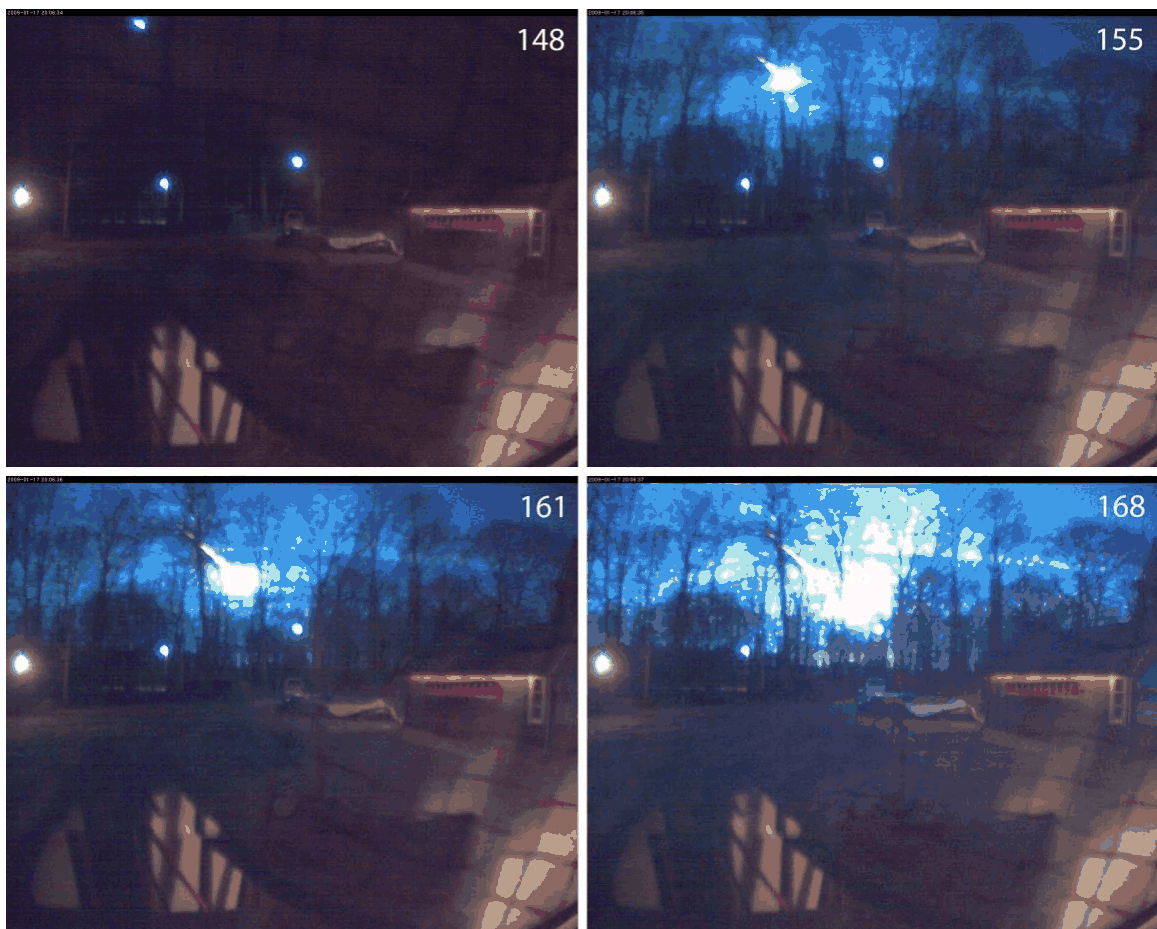
Durch die Atmosphäre und dabei schmelzen?

Die Luftreibung an einem Meteoroiden, der sich in der höheren Atmosphäre bewegt, hängt auf komplizierte Weise von seiner Form und Geschwindigkeit sowie von der Temperatur und Dichte der Atmosphäre ab. In guter Näherung ist die Reibungskraft F in der oberen Atmosphäre durch den Ausdruck $F = k\rho_{\text{atm}}Av^2$ gegeben, wobei k eine Konstante, ρ_{atm} die Dichte der Atmosphäre, A die projizierte Querschnittsfläche des Meteoriten und v seine Geschwindigkeit ist.

Zur Untersuchung des Meteoroiden werden folgende vereinfachende Annahmen getroffen: Das in die Atmosphäre eintretende Objekt war eine Kugel mit der Masse $m_M = 30 \text{ kg}$, dem Radius $R_M = 0.13 \text{ m}$, der Temperatur $T_0 = 200 \text{ K}$ und der Geschwindigkeit $v_M = 2.91 \times 10^4 \text{ m/s}$. Die Dichte der Atmosphäre ist konstant (gleich ihrem Wert 40 km über der Erdoberfläche), $\rho_{\text{atm}} = 4.1 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$, und der Reibungskoeffizient beträgt $k = 0.60$.

Teil	Frage	Punkte
1.2a	Schätzen Sie ab, wie lange es nach dem Eintritt in die Atmosphäre dauert, bis die Geschwindigkeit des Meteoroiden um 10 % von v_M auf $0.90v_M$ abgenommen hat. Sie können die Gravitationskraft auf den Meteoroiden vernachlässigen und annehmen, dass seine Masse und Form unverändert bleiben.	0.7
1.2b	Berechnen Sie, um welchen Faktor die kinetische Energie E_{kin} des in die Atmosphäre eintretenden Meteoroiden größer ist als die Energie E_{melt} , die erforderlich ist, um ihn vollständig zu schmelzen (siehe Datenblatt).	0.3

(a)



(b)

Frame	Time	Azimuth	Altitude
155	1.46 s	215°	19.2°
161	2.28 s	221°	14.7°
Landing at M		230°	0.0°

(c)



Abbildung 1.1 (a) Der Azimut ist der in der Horizontalebene im Uhrzeigersinn von Norden aus gemessene Winkel, und die Höhe ist der Winkel über dem Horizont. Eine Folge von Einzelbildern der Überwachungskamera in Schweden zeigt die Bewegung von Maribo als Feuerball auf seinem Weg durch die Atmosphäre nach unten. (b) Die Daten zweier Einzelbilder geben die Zeit, die von der Kamera (C) aus gesehene Richtung (Azimut) in Grad und die Höhe über dem Horizont (Höhenwinkel) in Grad an. (c) Skizze der Richtungen der Bahn (magentafarbener Pfeil) von Maribo gegenüber Norden (N) und des Fundorts (M) in Dänemark, von der Kamera (C) aus gesehen.

Erwärmung von Maribo während seines Falls durch die Atmosphäre

Als der steinerne Meteoroid Maribo mit Überschallgeschwindigkeit in die Atmosphäre eintrat, erschien er als Feuerball, weil die umgebende Luft leuchtete. Dennoch wurde nur die äußerste Schicht von Maribo erwärmt. Nehmen Sie an, dass Maribo eine homogene Kugel mit der Dichte ρ_{sm} , der spezifischen Wärmekapazität c_{sm} und der Wärmeleitfähigkeit k_{sm} ist (Werte siehe Datenblatt). Außerdem hatte er beim Eintritt in die Atmosphäre die Temperatur $T_0 = 200 \text{ K}$. Während des Falls durch die Atmosphäre betrug seine Oberflächentemperatur aufgrund der Luftreibung konstant $T_s = 1000 \text{ K}$, wodurch sich das Innere allmählich erwärmte.

Nach einer Fallzeit t in der Atmosphäre wird eine äußere Schale von Maribo mit der Dicke x auf eine Temperatur erwärmt worden sein, die deutlich über T_0 liegt. Diese Dicke lässt sich durch Dimensionsanalyse als einfaches Produkt von Potenzen der thermodynamischen Parameter abschätzen: $x \approx t^\alpha \rho_{\text{sm}}^\beta c_{\text{sm}}^\gamma k_{\text{sm}}^\delta$.

Teil	Frage	Punkte
1.3a	Bestimmen Sie durch Dimensionsanalyse (Einheitenanalyse) die Werte der vier Exponenten α , β , γ , und δ .	0.6
1.3b	Berechnen Sie die Dicke x nach einer Fallzeit $t = 5 \text{ s}$ und bestimmen Sie das Verhältnis x/R_M .	0.4

Das Alter eines Meteoriten

Die chemischen Eigenschaften radioaktiver Elemente können unterschiedlich sein. Daher weisen bei der Kristallisation der Minerale in einem bestimmten Meteoriten einige Minerale einen hohen Gehalt an einem bestimmten radioaktiven Element auf, andere dagegen einen niedrigen. Dieser Unterschied kann genutzt werden, um das Alter eines Meteoriten durch radiometrische Datierung seiner radioaktiven Minerale zu bestimmen.

Als konkretes Beispiel untersuchen wir das Isotop ^{87}Rb (Ordnungszahl 37), das mit einer Halbwertszeit von $T_{1/2} = 4.9 \times 10^{10}$ Jahren in das stabile Isotop ^{87}Sr (Ordnungszahl 38) zerfällt, im Verhältnis zum stabilen Isotop ^{86}Sr . Zum Zeitpunkt der Kristallisation war das Verhältnis $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ für alle Minerale gleich, während das Verhältnis $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ unterschiedlich war. Im Laufe der Zeit nimmt die Menge an ^{87}Rb durch Zerfall ab, während infolgedessen die Menge an ^{87}Sr zunimmt. Daher ist das Verhältnis $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ heute unterschiedlich. In Abb. 1.2(a) beziehen sich die Punkte auf der horizontalen Linie auf das Verhältnis $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ in verschiedenen Mineralen zum Zeitpunkt ihrer Kristallisation.

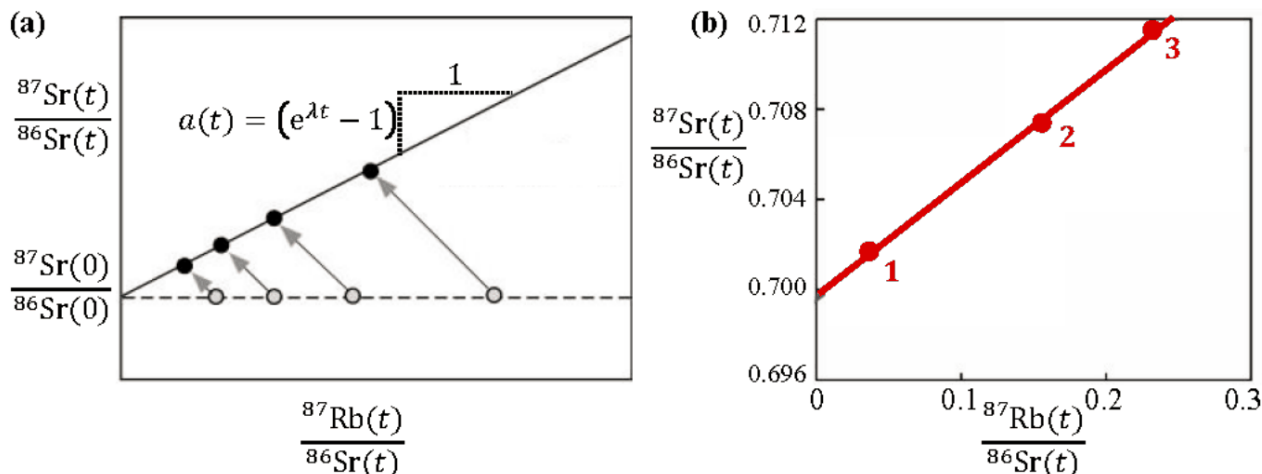


Abbildung 1.2 (a) Das Verhältnis $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ in verschiedenen Mineralen zum Zeitpunkt $t = 0$ der Kristallisation (offene Kreise) und zum heutigen Zeitpunkt (ausgefüllte Kreise). (b) Die Isochronengerade für drei verschiedene Mineralproben, die heute einem Meteoriten entnommen wurden.

Teil	Frage	Punkte
1.4a	Geben Sie das Zerfallsschema für die Umwandlung von $^{87}_{37}\text{Rb}$ in $^{87}_{38}\text{Sr}$ an.	0.3
1.4b	Zeigen Sie, dass die heutigen Verhältnisse $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$, aufgetragen gegen die heutigen Verhältnisse $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ in verschiedenen Mineralproben desselben Meteoriten, auf einer Geraden liegen, der sogenannten Isochronengeraden, mit der Steigung $a(t) = (e^{\lambda t} - 1)$. Dabei ist t die seit der Bildung der Minerale vergangene Zeit, während λ die Zerfallskonstante ist, die umgekehrt proportional zur Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}}$ ist.	0.7
1.4c	Bestimmen Sie mithilfe der Isochronengeraden in Abb. 1.2(b) das Alter τ_M des Meteoriten.	0.4

Der Komet Encke, von dem Maribo stammen könnte

Auf seiner Bahn um die Sonne betragen der kleinste und der größte Abstand zwischen dem Kometen Encke und der Sonne $a_{\min} = 4.95 \times 10^{10} \text{ m}$ beziehungsweise $a_{\max} = 6.16 \times 10^{11} \text{ m}$.

Teil	Frage	Punkte
1.5	Berechnen Sie die Umlaufzeit t_{Encke} des Kometen Encke.	0.6

Folgen eines Asteroideneinschlags auf der Erde

Vor 65 Millionen Jahren wurde die Erde von einem riesigen Asteroiden mit der Dichte $\rho_{\text{ast}} = 3.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, dem Radius $R_{\text{ast}} = 5.0 \text{ km}$ und der Endgeschwindigkeit $v_{\text{ast}} = 2.5 \times 10^4 \text{ m/s}$ getroffen. Dieser Einschlag führte zur Auslöschung des größten Teils des Lebens auf der Erde und zur Entstehung des gewaltigen Chicxulub-Kraters. Nehmen Sie an, dass ein identischer Asteroid heute in einem vollkommen unelastischen Stoß auf die Erde trifft, und nutzen Sie die Tatsache, dass das Trägheitsmoment der Erde das 0.83-Fache des Trägheitsmoments einer homogenen Kugel gleicher Masse und gleichen Radius beträgt. Das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel mit der Masse M und dem Radius R beträgt $\frac{2}{5}MR^2$. Vernachlässigen Sie Änderungen der Erdbahn.

Teil	Frage	Punkte
1.6a	Der Asteroid treffe den Nordpol. Bestimmen Sie die maximale Winkeländerung der Ausrichtung der Erdachse nach dem Einschlag.	0.7
1.6b	Der Asteroid treffe den Äquator bei einem radialen Einschlag. Bestimmen Sie die Änderung $\Delta\tau_{\text{vrt}}$ der Dauer einer Erdumdrehung nach dem Einschlag.	0.7
1.6c	Der Asteroid treffe den Äquator bei einem tangentialen Einschlag in der Äquatorebene. Bestimmen Sie die Änderung $\Delta\tau_{\text{tan}}$ der Dauer einer Erdumdrehung nach dem Einschlag.	0.7

Maximale Einschlaggeschwindigkeit

Betrachten Sie einen Himmelskörper, der im Sonnensystem gravitativ gebunden ist und mit einer Geschwindigkeit v_{imp} auf die Erdoberfläche trifft. Anfangs kann der Einfluss des Gravitationsfeldes der Erde auf den Körper vernachlässigt werden. Vernachlässigen Sie die Reibung in der Atmosphäre, den Einfluss anderer Himmelskörper und die Erdrotation.

Teil	Frage	Punkte
1.7	Berechnen Sie $v_{\text{imp}}^{\text{max}}$, den größtmöglichen Wert von v_{imp} .	1.6

Datenblatt: Tabelle physikalischer Größen

Physikalische Größe	Wert
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Plancksches Wirkungsquantum dividiert durch 2π	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Gravitationskonstante	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Fallbeschleunigung	$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$
Elementarladung	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Elektrische Permittivität des Vakuums	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Elektronenmasse	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Avogadro-Konstante	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmann-Konstante	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Steinmeteorit, spezifische Wärmekapazität	$c_{\text{sm}} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Steinmeteorit, Wärmeleitfähigkeit	$k_{\text{sm}} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Steinmeteorit, Dichte	$\rho_{\text{sm}} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Steinmeteorit, Schmelztemperatur	$T_{\text{sm}} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$
Steinmeteorit, spezifische Schmelzwärme	$L_{\text{sm}} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
Silber, molare Masse	$M_{\text{Ag}} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$
Silber, Dichte	$\rho_{\text{Ag}} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
Silber, spezifische Wärmekapazität	$c_{\text{Ag}} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Wasser, molare Masse	$M_{\text{wa}} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$
Wasser, Dichte	$\rho_{\text{wa}} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Wasser, spezifische Wärmekapazität	$c_{\text{wa}} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Wasser, Verdampfungswärme	$L_{\text{wa}} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$

Physikalische Größe	Wert
Wasser, Siedetemperatur	$T_{100} = 100\text{ }^{\circ}\text{C} = 373.15\text{ K}$
Eis, Dichte von Gletschereis	$\rho_{\text{ice}} = 0.917 \times 10^3\text{ kg m}^{-3}$
Wasserdampf, spezifische Wärmekapazität	$c_{\text{st}} = 2.080 \times 10^3\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$
Erde, Masse	$m_{\text{E}} = 5.97 \times 10^{24}\text{ kg}$
Erde, Radius	$R_{\text{E}} = 6.38 \times 10^6\text{ m}$
Sonne, Masse	$m_{\text{S}} = 1.99 \times 10^{30}\text{ kg}$
Sonne, Radius	$R_{\text{S}} = 6.96 \times 10^8\text{ m}$
Mittlerer Abstand Sonne–Erde	$a_{\text{E}} = 1.50 \times 10^{11}\text{ m}$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **1.1:** $\bar{v} = 2.86 \times 10^4\text{ m s}^{-1} = 28.6\text{ km s}^{-1}$.
- **1.2a:** $t = 0.88\text{ s}$.
- **1.2b:** $E_{\text{kin}}/E_{\text{melt}} \approx 2.1 \times 10^2$.
- **1.3a:** $\alpha = \delta = \frac{1}{2}$, $\beta = \gamma = -\frac{1}{2}$, also $x \approx \sqrt{k_{\text{sm}} t / (\rho_{\text{sm}} c_{\text{sm}})}$.
- **1.3b:** $x \approx 1.6\text{ mm}$, $x/R_{\text{M}} \approx 0.012 = 1.2\%$.
- **1.4a:** ${}^{87}_{37}\text{Rb} \rightarrow {}^{87}_{38}\text{Sr} + {}^0_{-1}\text{e} + \bar{\nu}_{\text{e}}$.
- **1.4b:** $Y(t) = Y_0 + (e^{\lambda t} - 1)X(t)$, wobei $Y = {}^{87}\text{Sr}/{}^{86}\text{Sr}$, $X = {}^{87}\text{Rb}/{}^{86}\text{Sr}$ und $\lambda = \ln 2/T_{\frac{1}{2}}$.
- **1.4c:** $\tau_{\text{M}} \approx 3.5 \times 10^9\text{ yr}$, aus einer Geradensteigung von ungefähr 0.050.
- **1.5:** $t_{\text{Encke}} = 1.05 \times 10^8\text{ s} \approx 3.32\text{ yr}$.
- **1.6a:** $\theta_{\text{max}} \approx 4.3 \times 10^{-8}\text{ rad} \approx 2.4 \times 10^{-6}\text{ degree}$.
- **1.6b:** $\Delta\tau_{\text{vrt}} \approx +6.8 \times 10^{-5}\text{ s}$.
- **1.6c:** $\Delta\tau_{\text{tan}} \approx -3.6 \times 10^{-3}\text{ s}$ für einen prograden Einschlag; $\Delta\tau_{\text{tan}} \approx +3.8 \times 10^{-3}\text{ s}$ für einen retrograden Einschlag.
- **1.7:** $v_{\text{imp}}^{\text{max}} \approx 7.27 \times 10^4\text{ m s}^{-1} = 72.7\text{ km s}^{-1}$, als obere Grenzschränke für einen gravitativ gebundenen Körper zu verstehen.

Lösung

1.1

Es bezeichne C die Kamera, M den Fundort und P_i die horizontale Projektion der Position des Meteoroiden im Einzelbild i . Wir setzen

$$CM = D = 195\text{ km}, \quad CP_i = r_i, \quad MP_i = s_i.$$

Die beobachteten Größen sind:

Einzelbild	Zeit t_i	Azimut ϕ_i	Höhenwinkel h_i
155	1.46 s	215°	19.2°
161	2.28 s	221°	14.7°

Die horizontale Flugbahn hat einen Kurs von 285°. Von M aus gesehen liegt die Kamera in Richtung 50°, während die früheren Positionen des Meteoroiden in Richtung 105° liegen. Daher beträgt der Winkel bei M im Dreieck CMP_i 55°. Der Winkel bei C ist 230° - ϕ_i .

Der Sinussatz liefert daher

$$r_i = D \frac{\sin 55^\circ}{\sin(285^\circ - \phi_i)}, \quad s_i = D \frac{\sin(230^\circ - \phi_i)}{\sin(285^\circ - \phi_i)}.$$

Da die Erdkrümmung vernachlässigt wird, beträgt die Höhe des Meteoroiden

$$z_i = r_i \tan h_i.$$

Numerisch ergibt sich:

Einzelbild	r_i (km)	s_i (km)	z_i (km)
155	169.986	53.709	59.195
161	177.721	33.940	46.624

Damit sind die horizontal und vertikal zurückgelegten Strecken

$$\Delta s = 19.769 \text{ km}, \quad |\Delta z| = 12.571 \text{ km}.$$

Wenn wir die Flugbahn während dieses kurzen Intervalls als geradlinig annehmen, gilt

$$\Delta \ell = \sqrt{(\Delta s)^2 + (\Delta z)^2} = 23.428 \text{ km}.$$

Die verstrichene Zeit beträgt 2.28 - 1.46 = 0.82 s, also

$$\bar{v} = \frac{23.428 \text{ km}}{0.82 \text{ s}} = 28.6 \text{ km s}^{-1}.$$

Für die folgenden Teilaufgaben verwenden wir die gesondert vorgegebene Anfangsgeschwindigkeit $v_M = 2.91 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$.

1.2a

Die projizierte Fläche der Kugel beträgt $A = \pi R_M^2$. Das zweite Newtonsche Gesetz liefert unter Vernachlässigung der Gravitation

$$m_M \frac{dv}{dt} = -k \rho_{\text{atm}} \pi R_M^2 v^2.$$

Durch Trennung der Variablen und Integration von v_M bis v erhalten wir

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_M} = \frac{k \rho_{\text{atm}} \pi R_M^2}{m_M} t.$$

Für $v = 0.90 v_M$ gilt

$$t = \frac{m_M}{k \rho_{\text{atm}} \pi R_M^2 v_M} \left(\frac{1}{0.90} - 1 \right).$$

Einsetzen ergibt

$$t = \frac{30}{(0.60)(4.1 \times 10^{-3})\pi(0.13)^2(2.91 \times 10^4)} \left(\frac{1}{0.90} - 1 \right) = 0.877 \text{ s.}$$

Damit folgt

$$t \approx 0.88 \text{ s.}$$

1.2b

Zum vollständigen Schmelzen muss das Material sowohl von T_0 auf seine Schmelztemperatur erwärmt als auch mit seiner latenten Schmelzwärme versorgt werden. Mit der im Datenblatt angegebenen konstanten spezifischen Wärmekapazität gilt

$$E_{\text{melt}} = m_{\text{M}} [c_{\text{sm}}(T_{\text{sm}} - T_0) + L_{\text{sm}}].$$

Somit

$$E_{\text{melt}} = 30 [(1.2 \times 10^3)(1700 - 200) + 2.6 \times 10^5] = 6.18 \times 10^7 \text{ J.}$$

Die anfängliche kinetische Energie beträgt

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_{\text{M}} v_{\text{M}}^2 = \frac{1}{2} (30)(2.91 \times 10^4)^2 = 1.2702 \times 10^{10} \text{ J.}$$

Folglich

$$\frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{melt}}} = \frac{v_{\text{M}}^2}{2[c_{\text{sm}}(T_{\text{sm}} - T_0) + L_{\text{sm}}]} = 205.5 \approx 2.1 \times 10^2.$$

Dieser Energievergleich bedeutet nicht, dass der Meteoroid vollständig schmilzt: Die kinetische Energie muss nicht im gesamten Meteoroiden als Wärme deponiert werden.

1.3a

Wir verwenden M, L, T, Θ für die Dimensionen von Masse, Länge, Zeit und Temperatur. Die relevanten Dimensionen sind

$$[\rho_{\text{sm}}] = ML^{-3}, \quad [c_{\text{sm}}] = L^2 T^{-2} \Theta^{-1}, \quad [k_{\text{sm}}] = ML T^{-3} \Theta^{-1}.$$

Daher gilt

$$[t^\alpha \rho_{\text{sm}}^\beta c_{\text{sm}}^\gamma k_{\text{sm}}^\delta] = M^{\beta+\delta} L^{-3\beta+2\gamma+\delta} T^{\alpha-2\gamma-3\delta} \Theta^{-\gamma-\delta}.$$

Gleichsetzen mit der Dimension L von x ergibt

$$\begin{aligned} \beta + \delta &= 0, \\ -3\beta + 2\gamma + \delta &= 1, \\ \alpha - 2\gamma - 3\delta &= 0, \\ -\gamma - \delta &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten und vierten Gleichung folgt $\beta = \gamma = -\delta$. Die Gleichung für die Länge liefert dann $2\delta = 1$, und die Gleichung für die Zeit ergibt $\alpha = \delta$. Somit

$$\alpha = \delta = \frac{1}{2}, \quad \beta = \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Die daraus folgende Abschätzung lautet

$$x \approx \sqrt{\frac{k_{\text{sm}} t}{\rho_{\text{sm}} c_{\text{sm}}}}.$$

Die Dimensionsanalyse bestimmt die Exponenten, lässt jedoch einen dimensionslosen Koeffizienten unbestimmt. Für die verlangte Abschätzung wird dieser Koeffizient gleich eins gesetzt.

1.3b

Die Temperaturleitfähigkeit beträgt

$$\chi = \frac{k_{\text{sm}}}{\rho_{\text{sm}} c_{\text{sm}}} = \frac{2.0}{(3.3 \times 10^3)(1.2 \times 10^3)} = 5.05 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Bei $t = 5 \text{ s}$ gilt

$$x \approx \sqrt{\chi t} = \sqrt{(5.05 \times 10^{-7})(5)} = 1.589 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

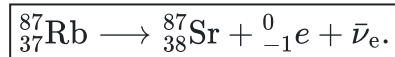
Somit

$$x \approx 1.6 \text{ mm}, \quad \frac{x}{R_{\text{M}}} = \frac{1.589 \times 10^{-3}}{0.13} \approx 0.012 = 1.2\%.$$

Die erwärmte Tiefe ist klein gegenüber dem Radius. Dies steht damit im Einklang, dass sich während des Falls nur eine äußere Schicht nennenswert erwärmt.

1.4a

Die Ordnungszahl steigt um eins, während die Massenzahl unverändert bleibt. Es handelt sich um einen Beta-Minus-Zerfall:



Ein Elektron und ein Elektron-Antineutrino werden emittiert.

1.4b

Wir betrachten eine Mineralprobe nach der Kristallisation als geschlossenes System. Es seien $N_{\text{Rb}}(t)$, $N_{87}(t)$ und N_{86} die Anzahlen der ${}^{87}\text{Rb}$ -, ${}^{87}\text{Sr}$ - und ${}^{86}\text{Sr}$ -Kerne. Die Anzahl N_{86} der stabilen Referenzkerne ist konstant.

Das radioaktive Zerfallsgesetz liefert

$$N_{\text{Rb}}(t) = N_{\text{Rb}}(0)e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}}.$$

Jeder zerfallene Rubidiumkern erzeugt einen Strontium-87-Kern, also

$$\begin{aligned} N_{87}(t) &= N_{87}(0) + N_{\text{Rb}}(0) - N_{\text{Rb}}(t) \\ &= N_{87}(0) + N_{\text{Rb}}(t)(e^{\lambda t} - 1). \end{aligned}$$

Wir dividieren durch N_{86} und definieren

$$Y(t) = \frac{N_{87}(t)}{N_{86}}, \quad X(t) = \frac{N_{\text{Rb}}(t)}{N_{86}}, \quad Y_0 = \frac{N_{87}(0)}{N_{86}}.$$

Dann gilt

$$Y(t) = Y_0 + (e^{\lambda t} - 1)X(t).$$

Alle Proben haben dasselbe anfängliche Strontium-Isotopenverhältnis Y_0 und dasselbe Alter t . Ihre heutigen Werte liegen daher auf einer Geraden mit dem Ordinatenabschnitt Y_0 und der Steigung

$$a(t) = e^{\lambda t} - 1.$$

Bei der Kristallisation ist die Steigung null; anschließend nimmt sie mit dem Alter zu.

1.4c

Die Gerade in Abb. 1.2(b) verläuft näherungsweise durch

$$(X, Y) \approx (0.05, 0.702) \quad \text{und} \quad (0.25, 0.712).$$

Ihre Steigung beträgt daher ungefähr

$$a \approx \frac{0.712 - 0.702}{0.25 - 0.05} = 0.050.$$

Durch Umstellen des Ergebnisses aus Teil 1.4b erhalten wir

$$\tau_M = \frac{\ln(1 + a)}{\lambda} = \frac{T_{\frac{1}{2}}}{\ln 2} \ln(1 + a).$$

Daraus folgt

$$\tau_M \approx \frac{4.9 \times 10^{10} \text{ yr}}{\ln 2} \ln(1.050) = 3.45 \times 10^9 \text{ yr.}$$

Unter Berücksichtigung der Ablesegenauigkeit des Diagramms ergibt sich

$$\tau_M \approx 3.5 \times 10^9 \text{ yr.}$$

Abbildung 1.2(b) bezieht sich auf Proben aus „einem Meteoriten“; sein daraus abgeleitetes Alter muss nicht mit dem in der Einleitung genannten Alter von Maribo übereinstimmen.

1.5

Für eine elliptische Bahn ist die Summe aus Perihel- und Apheldistanz gleich dem Doppelten der großen Halbachse:

$$a = \frac{a_{\min} + a_{\max}}{2} = \frac{4.95 \times 10^{10} + 6.16 \times 10^{11}}{2} = 3.3275 \times 10^{11} \text{ m.}$$

Unter Vernachlässigung der Kometenmasse gegenüber der Sonnenmasse liefert das dritte Keplersche Gesetz

$$t_{\text{Encke}}^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm_S}.$$

Somit

$$t_{\text{Encke}} = 2\pi \sqrt{\frac{(3.3275 \times 10^{11})^3}{(6.67 \times 10^{-11})(1.99 \times 10^{30})}} = 1.0468 \times 10^8 \text{ s.}$$

Mit $1 \text{ yr} \approx 3.156 \times 10^7 \text{ s}$ erhalten wir

$$t_{\text{Encke}} \approx 1.05 \times 10^8 \text{ s} \approx 3.32 \text{ yr.}$$

1.6a

Zunächst berechnen wir die Größen, die in allen drei Teilaufgaben zum Einschlag verwendet werden. Die Masse des Asteroiden beträgt

$$m_{\text{ast}} = \frac{4}{3}\pi R_{\text{ast}}^3 \rho_{\text{ast}} = \frac{4}{3}\pi (5.0 \times 10^3)^3 (3.0 \times 10^3) = 1.571 \times 10^{15} \text{ kg}.$$

Das Trägheitsmoment der Erde beträgt

$$I_E = 0.83 \frac{2}{5} m_E R_E^2 = 8.068 \times 10^{37} \text{ kg m}^2.$$

Mit der anfänglichen Rotationsperiode $\tau_E = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$ gilt

$$\omega_E = \frac{2\pi}{\tau_E} = 7.272 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

und ihr Eigendrehimpuls beträgt

$$L_E = I_E \omega_E = 5.867 \times 10^{33} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Wir behandeln den an der Erde haften gebliebenen Asteroiden als Punktmasse an der Erdoberfläche. Seine Größe und die Verschiebung des gemeinsamen Schwerpunkts ergeben vernachlässigbare Korrekturen.

Am Nordpol ist der Ortsvektor des Asteroiden parallel zur ursprünglichen Rotationsachse der Erde. Daher steht sein Drehimpuls

$$\mathbf{L}_{\text{ast}} = \mathbf{r} \times m_{\text{ast}} \mathbf{v}_{\text{ast}}$$

senkrecht zum ursprünglichen Eigendrehimpuls der Erde. Sein Betrag ist bei einem tangentialen Einschlag am größten:

$$L_{\text{ast}}^{\text{max}} = m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}} = 2.505 \times 10^{26} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Die Drehimpulserhaltung liefert dann in führender Ordnung im kleinen Massenverhältnis von Asteroid zu Erde

$$\tan \theta_{\text{max}} \simeq \frac{L_{\text{ast}}^{\text{max}}}{L_E}.$$

Der Winkel ist äußerst klein, daher

$$\theta_{\text{max}} \simeq \frac{m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}}}{I_E \omega_E} = 4.27 \times 10^{-8} \text{ rad} \approx 2.4 \times 10^{-6} \text{ degree}.$$

Die Änderung des Trägheitstensors trägt zu dieser kleinen Neigung nur eine Korrektur höherer Ordnung bei.

1.6b

Bei einem radialen Einschlag hat der ankommende Asteroid bezüglich des Erdmittelpunkts keinen Drehimpuls. Nachdem er am Äquator haften geblieben ist, steigt das Trägheitsmoment auf

$$I' = I_E + m_{\text{ast}} R_E^2.$$

Die Drehimpulserhaltung verlangt

$$I_E \omega_E = (I_E + m_{\text{ast}} R_E^2) \omega'.$$

Da die Periodendauer umgekehrt proportional zur Winkelgeschwindigkeit ist, gilt

$$\tau' = \tau_E \left(1 + \frac{m_{\text{ast}} R_E^2}{I_E} \right).$$

Daher

$$\Delta\tau_{\text{vrt}} = \tau_E \frac{m_{\text{ast}} R_E^2}{I_E} = \tau_E \frac{m_{\text{ast}}}{0.332 m_E}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\Delta\tau_{\text{vrt}} = 6.85 \times 10^{-5} \text{ s} \approx +6.8 \times 10^{-5} \text{ s}.$$

Der Tag wird um ungefähr $68 \mu\text{s}$ länger.

1.6c

Die Richtung des tangentialen Einschlags ist entscheidend. Es sei $\sigma = +1$ für einen prograden Einschlag, der den Eigendrehimpuls erhöht, und $\sigma = -1$ für einen retrograden Einschlag.

Die Drehimpulserhaltung liefert

$$I_E \omega_E + \sigma m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}} = (I_E + m_{\text{ast}} R_E^2) \omega'.$$

Wir definieren die kleinen dimensionslosen Größen

$$\epsilon = \frac{m_{\text{ast}} R_E^2}{I_E} = 7.925 \times 10^{-10}, \quad \eta = \frac{m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}}}{I_E \omega_E} = 4.270 \times 10^{-8}.$$

Die neue Periodendauer und ihre Änderung sind

$$\tau' = \tau_E \frac{1 + \epsilon}{1 + \sigma \eta},$$

$$\Delta\tau_{\text{tan}} = \tau_E \frac{\epsilon - \sigma \eta}{1 + \sigma \eta}.$$

Da sowohl ϵ als auch η sehr klein sind, gilt mit hoher Genauigkeit auch

$$\Delta\tau_{\text{tan}} \approx \tau_E (\epsilon - \sigma \eta).$$

Somit:

- **Prograder Einschlag:**

$$\Delta\tau_{\text{tan}} = -3.621 \times 10^{-3} \text{ s} \approx -3.6 \text{ ms}.$$

- **Retrograder Einschlag:**

$$\Delta\tau_{\text{tan}} = +3.758 \times 10^{-3} \text{ s} \approx +3.8 \text{ ms}.$$

Das zusätzliche Trägheitsmoment verlängert den Tag in beiden Fällen. Der eingetragene Drehimpuls bewirkt den größeren Effekt und bestimmt das Vorzeichen.

1.7

Zunächst betrachten wir die Bewegung des Körpers relativ zur Sonne, bevor die Gravitation der Erde bedeutsam wird. Im Abstand der Erdbahn hat ein gravitativ gebundener Körper eine negative spezifische Bahnenergie:

$$\mathcal{E} = \frac{u^2}{2} - \frac{Gm_S}{a_E} < 0.$$

Seine heliozentrische Geschwindigkeit ist daher durch die lokale Fluchtgeschwindigkeit aus dem Gravitationsfeld der Sonne begrenzt:

$$u < u_{\max} = \sqrt{\frac{2Gm_S}{a_E}}.$$

Der Grenzfall ist eine Bahn, deren Bindungsenergie gegen null geht.

Wenn wir die Erdbahn als Kreisbahn im gegebenen mittleren Abstand annähern, beträgt ihre Bahngeschwindigkeit

$$v_E = \sqrt{\frac{Gm_S}{a_E}}.$$

Die größte relative Annäherungsgeschwindigkeit ergibt sich, wenn sich der Körper genau entgegengesetzt zur Bahnbewegung der Erde bewegt. Daher

$$v_{\infty}^{\max} = u_{\max} + v_E = (1 + \sqrt{2})\sqrt{\frac{Gm_S}{a_E}}.$$

Numerisch gilt

$$v_E = 29.75 \text{ km s}^{-1}, \quad u_{\max} = 42.07 \text{ km s}^{-1},$$

also

$$v_{\infty}^{\max} = 71.82 \text{ km s}^{-1}.$$

Die Gravitation der Erde beschleunigt den Körper weiter. Bei der Annäherung an die Erde liefert die Erhaltung der mechanischen Energie

$$\frac{1}{2}v_{\text{imp}}^2 - \frac{Gm_E}{R_E} = \frac{1}{2}v_{\infty}^2.$$

Somit

$$v_{\text{imp}}^{\max} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 \frac{Gm_S}{a_E} + \frac{2Gm_E}{R_E}}.$$

Die Fluchtgeschwindigkeit an der Erdoberfläche beträgt

$$\sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}} = 11.17 \text{ km s}^{-1}.$$

Daher

$$v_{\text{imp}}^{\max} = \sqrt{(71.82)^2 + (11.17)^2} \text{ km s}^{-1} \approx 72.7 \text{ km s}^{-1}.$$

Für eine strikt gebundene Bahn liegt die Geschwindigkeit strikt unter diesem Wert. Sie kann sich ihm beliebig weit annähern, wenn die anfängliche Bindungsenergie im Gravitationsfeld der Sonne gegen null geht.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Plasmonischer Dampferzeuger

Einleitung

In dieser Aufgabe untersuchen wir ein effizientes Verfahren zur Dampferzeugung, dessen Funktionsfähigkeit experimentell nachgewiesen wurde. Eine wässrige Lösung aus nanometergroßen Silberkugeln (Nanopartikeln) mit nur etwa 10^{13} Teilchen pro Liter wird mit einem fokussierten Lichtstrahl beleuchtet. Ein Teil des Lichts wird von den Nanopartikeln absorbiert, die sich erwärmen und lokal in ihrer Umgebung Dampf erzeugen, ohne die gesamte wässrige Lösung zu erwärmen. Der Dampf verlässt das System in Form entweichender Dampfblasen. Noch sind nicht alle Einzelheiten des Verfahrens gut verstanden, doch ist bekannt, dass der zentrale Prozess die Absorption von Licht durch die sogenannten kollektiven Elektronenschwingungen der metallischen Nanopartikel ist. Die Vorrichtung wird als plasmonischer Dampferzeuger bezeichnet.

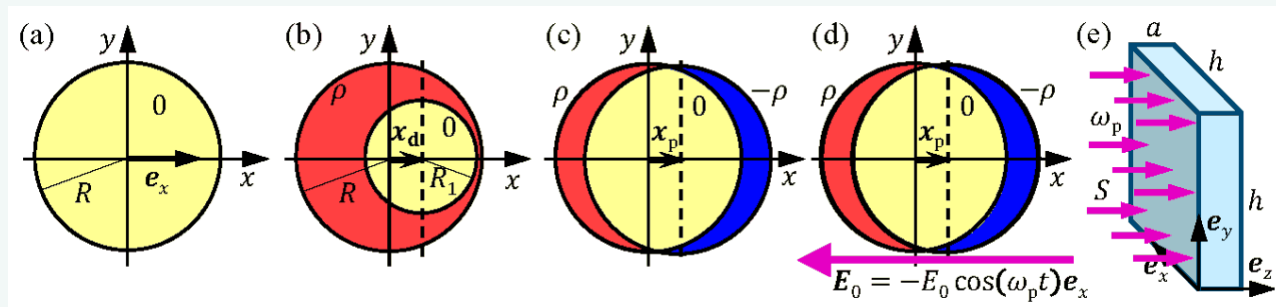


Abbildung 2.1 (a) Ein kugelförmiges, elektrisch neutrales Nanopartikel mit dem Radius R im Ursprung des Koordinatensystems. (b) Eine Kugel mit einer positiven homogenen Ladungsdichte ρ (rot), die einen kleineren kugelförmigen, elektrisch neutralen Bereich (0, gelb) mit dem Radius R_1 enthält, dessen Mittelpunkt um $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$ verschoben ist. (c) Die Kugel mit der positiven Ladungsdichte ρ der Silberionen des Nanopartikels ist im Ursprung des Koordinatensystems fixiert. Der Mittelpunkt des kugelförmigen Bereichs mit der negativen kugelsymmetrischen Ladungsdichte $-\rho$ (blau) der Elektronenwolke ist um $\mathbf{x}_p$ verschoben, wobei $x_p \ll R$ gilt. (d) Ein äußeres homogenes elektrisches Feld $\mathbf{E}_0 = -E_0 \cos(\omega_p t) \mathbf{e}_x$. Bei zeitabhängigem $\mathbf{E}_0$ bewegt sich die Elektronenwolke mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$. (e) Das quaderförmige Gefäß ($h \times h \times a$) mit der wässrigen Nanopartikellösung, die mit monochromatischem Licht der Kreisfrequenz ω_p und der Intensität S beleuchtet wird, das sich entlang der z -Achse ausbreitet.

Ein einzelnes kugelförmiges Silbernanoartikel

In dieser gesamten Aufgabe betrachten wir ein kugelförmiges Silbernanoartikel mit dem Radius $R = 10,0 \text{ nm}$, dessen Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems fixiert ist, siehe Abb. 2.1(a). Alle Bewegungen, Kräfte und anregenden Felder sind parallel zur horizontalen x -Achse (mit

dem Einheitsvektor $\mathbf{e}_x$). Das Nanopartikel enthält freie (Leitungs-)Elektronen, die sich im gesamten Volumen des Nanopartikels bewegen, ohne an ein Silberatom gebunden zu sein. Jedes Silberatom ist ein positives Ion, das ein solches freies Elektron abgegeben hat.

Teil	Frage	Punkte
2.1	Bestimmen Sie die folgenden Größen: das Volumen V und die Masse M des Nanopartikels, die Anzahl N und die Ladungsdichte ρ der Silberionen im Teilchen sowie für die freien Elektronen ihre Konzentration n , ihre Gesamtladung Q und ihre Gesamtmasse m_0 .	0.7

Das elektrische Feld in einem elektrisch neutralen Bereich innerhalb einer geladenen Kugel

Nehmen Sie für den Rest der Aufgabe an, dass die relative Permittivität aller Materialien $\varepsilon = 1$ beträgt. Innerhalb einer geladenen Kugel mit homogener Ladungsdichte ρ und Radius R wird durch Hinzufügen der entgegengesetzten Ladungsdichte $-\rho$ ein kleiner kugelförmiger, elektrisch neutraler Bereich mit dem Radius R_1 erzeugt, dessen Mittelpunkt gegenüber dem Mittelpunkt der Kugel mit Radius R um $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$ verschoben ist, siehe Abb. 2.1(b).

Teil	Frage	Punkte
2.2	Zeigen Sie, dass das elektrische Feld innerhalb des elektrisch neutralen Bereichs homogen ist und die Form $\mathbf{E} = A(\rho/\varepsilon_0) \mathbf{x}_d$ hat, und bestimmen Sie den Vorfaktor A .	1.2

Die Rückstellkraft auf die verschobene Elektronenwolke

Im Folgenden untersuchen wir die kollektive Bewegung der freien Elektronen und modellieren sie daher als eine einzige negativ geladene Kugel mit homogener Ladungsdichte $-\rho$ und der Mittelpunktposition $\mathbf{x}_p$, die sich entlang der x -Achse relativ zum Mittelpunkt der im Ursprung des Koordinatensystems fixierten positiv geladenen Kugel (Silberionen) bewegen kann, siehe Abb. 2.1(c). Nehmen Sie an, dass eine äußere Kraft $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ die Elektronenwolke in eine neue Gleichgewichtslage $\mathbf{x}_p = x_p \mathbf{e}_x$ mit $|x_p| \ll R$ verschiebt. Abgesehen von winzigen Nettoladungen an gegenüberliegenden Enden des Nanopartikels bleibt der größte Teil seines Inneren elektrisch neutral.

Teil	Frage	Punkte
2.3	Drücken Sie die folgenden beiden Größen durch $\mathbf{x}_p$ und n aus: die auf die Elektronenwolke ausgeübte Rückstellkraft $\mathbf{F}$ und die während der Verschiebung an der Elektronenwolke verrichtete Arbeit W_{el} .	1.0

Das kugelförmige Silbernanoartikel in einem äußeren konstanten elektrischen Feld

Ein Nanopartikel befindet sich im Vakuum und wird durch eine äußere Kraft $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ beeinflusst, die von einem angelegten statischen homogenen elektrischen Feld $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$ herrührt. Dieses verschiebt die Elektronenwolke um die kleine Strecke $|x_p|$, wobei $|x_p| \ll R$ gilt.

Teil	Frage	Punkte
2.4	Bestimmen Sie die Verschiebung x_p der Elektronenwolke in Abhängigkeit von E_0 und n sowie die durch die yz -Ebene im Mittelpunkt des Nanopartikels verschobene Elektronenladung $-\Delta Q$ in Abhängigkeit von n , R und x_p .	0.6

Die Ersatzkapazität und Ersatzinduktivität des Silbernanopartikels

Sowohl für ein konstantes als auch für ein zeitabhängiges Feld $\mathbf{E}_0$ lässt sich das Nanopartikel durch eine elektrische Ersatzschaltung modellieren. Die Ersatzkapazität lässt sich bestimmen, indem die zur Trennung der Ladungen ΔQ verrichtete Arbeit W_{el} mit der Energie eines Kondensators in Beziehung gesetzt wird, der die Ladung $\pm \Delta Q$ trägt. Die Ladungstrennung bewirkt eine bestimmte Ersatzspannung V_0 am Ersatzkondensator.

Teil	Frage	Punkte
2.5a	Drücken Sie die Ersatzkapazität C des Systems durch ε_0 und R aus und bestimmen Sie ihren Wert.	0.7
2.5b	Bestimmen Sie für diese Kapazität in Abhängigkeit von $\mathbf{E}_0$ und R die Ersatzspannung V_0 , die an den Ersatzkondensator angelegt werden muss, damit sich die Ladung ΔQ ansammelt.	0.4

Bei einem zeitabhängigen Feld $\mathbf{E}_0$ bewegt sich die Elektronenwolke mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$, Abb. 2.1(d). Sie besitzt die kinetische Energie W_{kin} und erzeugt einen elektrischen Strom I , der durch die ortsfeste yz -Ebene fließt. Die kinetische Energie der Elektronenwolke kann der Energie einer vom Strom I durchflossenen Ersatzspule mit der Induktivität L zugeordnet werden.

Teil	Frage	Punkte
2.6a	Drücken Sie sowohl W_{kin} als auch I durch die Geschwindigkeit v aus.	0.7
2.6b	Drücken Sie die Ersatzinduktivität L durch den Teilchenradius R , die Elektronenladung e und die Elektronenmasse m_e sowie die Elektronenkonzentration n aus und berechnen Sie ihren Wert.	0.5

Die Plasmonenresonanz des Silbernanopartikels

Aus der obigen Analyse folgt, dass die Bewegung, die entsteht, wenn die Elektronenwolke aus ihrer Gleichgewichtslage verschoben und dann losgelassen wird, durch einen idealen LC -Schwingkreis beschrieben werden kann, der bei seiner Resonanzfrequenz schwingt. Diese dynamische Schwingungsform der Elektronenwolke wird als Plasmonenresonanz bezeichnet und schwingt mit der sogenannten Plasmonenkreisfrequenz ω_p .

Teil	Frage	Punkte
2.7a	Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Plasmonenkreisfrequenz ω_p der Elektronenwolke in Abhängigkeit von der Elektronenladung e und der Elektronenmasse m_e , der Elektronendichte n und der Permittivität ε_0 .	0.5
2.7b	Berechnen Sie ω_p in rad/s und die Wellenlänge λ_p in nm von Licht im Vakuum mit der Kreisfrequenz $\omega = \omega_p$.	0.4

Das mit Licht bei der Plasmonenfrequenz beleuchtete Silbernanopartikel

Im Rest der Aufgabe wird das Nanopartikel mit monochromatischem Licht bei der Plasmonenkreisfrequenz ω_p und der einfallenden Intensität $S = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2 = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$ beleuchtet. Da die Wellenlänge groß ist, $\lambda_p \gg R$, kann das Nanopartikel als in einem homogenen, harmonisch schwingenden Feld $\mathbf{E}_0 = -E_0 \cos(\omega_p t)\mathbf{e}_x$ befindlich betrachtet werden. Angetrieben durch $\mathbf{E}_0$ schwingt der Mittelpunkt $\mathbf{x}_p(t)$ der Elektronenwolke mit derselben

Frequenz, der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$ und der konstanten Amplitude x_0 . Diese schwingende Elektronenbewegung führt zur Absorption von Licht. Die vom Teilchen aufgenommene Energie wird entweder durch Joulesche Erwärmung im Teilchen in Wärme umgewandelt oder vom Teilchen als Streulicht wieder emittiert.

Die Joulesche Erwärmung wird durch zufällige unelastische Stöße verursacht, bei denen ein beliebiges freies Elektron von Zeit zu Zeit auf ein Silberion trifft und seine gesamte kinetische Energie verliert, die in Schwingungen der Silberionen (Wärme) umgewandelt wird. Die mittlere Zeit zwischen den Stößen beträgt $\tau \gg 1/\omega_p$, wobei wir für das Silbernanopartikel $\tau = 5.24 \times 10^{-15}$ s verwenden.

Teil	Frage	Punkte
2.8a	Bestimmen Sie einen Ausdruck für die zeitlich gemittelte Joulesche Heizleistung P_{heat} im Nanopartikel sowie für das zeitlich gemittelte Stromquadrat $\langle I^2 \rangle$, der das zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsquadrat $\langle v^2 \rangle$ der Elektronenwolke explizit enthält.	1.0
2.8b	Bestimmen Sie einen Ausdruck für den ohmschen Ersatzwiderstand R_{heat} in einem Widerstands-Ersatzmodell des Nanopartikels, in dem der Strom I der Elektronenwolke die Joulesche Heizleistung P_{heat} hervorruft. Berechnen Sie den Zahlenwert von R_{heat} .	1.0

Der einfallende Lichtstrahl verliert durch Streuung an der schwingenden Elektronenwolke (Reemission) eine zeitlich gemittelte Leistung P_{scat} . P_{scat} hängt von der Amplitude x_0 , der Ladung Q und der Kreisfrequenz ω_p der Streuquelle sowie von den Eigenschaften des Lichts (der Lichtgeschwindigkeit c und der Permittivität ϵ_0 im Vakuum) ab. In Abhängigkeit von diesen vier Variablen ist P_{scat} gegeben durch

$$P_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}.$$

Teil	Frage	Punkte
2.9	Bestimmen Sie mithilfe von P_{scat} einen Ausdruck für den Ersatz-Streuwiderstand R_{scat} (analog zu R_{heat}) in einem Widerstands-Ersatzmodell und berechnen Sie seinen Wert.	1.0

Die obigen Ersatzschaltungselemente werden zu einem LCR -Reihenschaltungsmodell des Silbernanopartikels zusammengefasst, das durch eine harmonisch schwingende Ersatzspannung $V = V_0 \cos(\omega_p t)$ angeregt wird, die durch das elektrische Feld $\mathbf{E}_0$ des einfallenden Lichts bestimmt ist.

Teil	Frage	Punkte
2.10a	Leiten Sie Ausdrücke für die zeitlich gemittelten Verlustleistungen P_{heat} und P_{scat} her, die die Amplitude E_0 des elektrischen Feldes des einfallenden Lichts bei der Plasmonenresonanz $\omega = \omega_p$ enthalten.	1.2
2.10b	Berechnen Sie die Zahlenwerte von E_0 , P_{heat} und P_{scat} .	0.3

Dampferzeugung durch Licht

Eine wässrige Lösung von Silbernanopartikeln mit einer Konzentration von $n_{\text{np}} = 7.3 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$ wird hergestellt. Sie wird in ein quaderförmiges transparentes Gefäß mit den Abmessungen $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1.0 \text{ cm}^3$ gefüllt und mit Licht bei der Plasmonenfrequenz und derselben Intensität $S = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$ wie oben bei senkrechtem Einfall beleuchtet, siehe Abb. 2.1(e). Die Wassertemperatur beträgt $T_{\text{wa}} = 20^\circ \text{C}$, und wir nehmen in recht guter Übereinstimmung mit den

Beobachtungen an, dass im stationären Zustand die gesamte Joulesche Wärme des Nanopartikels zur Erzeugung von Dampf mit der Temperatur $T_{\text{st}} = 110^\circ\text{C}$ verwendet wird, ohne die Wassertemperatur zu erhöhen.

Der thermodynamische Wirkungsgrad η des plasmonischen Dampferzeugers ist durch das Leistungsverhältnis $\eta = P_{\text{st}}/P_{\text{tot}}$ definiert, wobei P_{st} die Leistung ist, die im gesamten Gefäß zur Dampferzeugung verwendet wird, während P_{tot} die Gesamtleistung des einfallenden Lichts ist, das in das Gefäß eintritt.

Die meiste Zeit ist ein beliebiges Nanopartikel von Dampf statt von Wasser umgeben und kann daher so beschrieben werden, als befände es sich im Vakuum.

Teil	Frage	Punkte
2.11a	Berechnen Sie die gesamte pro Sekunde erzeugte Dampfmasse μ_{st} des plasmonischen Dampferzeugers bei Beleuchtung mit Licht der Plasmonenfrequenz und der Intensität S .	0.6
2.11b	Berechnen Sie den Zahlenwert des thermodynamischen Wirkungsgrads η des plasmonischen Dampferzeugers.	0.2

Datenblatt: Tabelle physikalischer Parameter

Physikalischer Parameter	Wert
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Plancksches Wirkungsquantum geteilt durch 2π	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Gravitationskonstante	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Fallbeschleunigung	$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$
Elementarladung	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Elektrische Permittivität des Vakuums	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Elektronenmasse	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Avogadro-Konstante	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmann-Konstante	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Steinmeteorit, spezifische Wärmekapazität	$c_{\text{sm}} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Steinmeteorit, Wärmeleitfähigkeit	$k_{\text{sm}} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Steinmeteorit, Dichte	$\rho_{\text{sm}} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Steinmeteorit, Schmelztemperatur	$T_{\text{sm}} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$
Steinmeteorit, spezifische Schmelzwärme	$L_{\text{sm}} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
Silber, molare Masse	$M_{\text{Ag}} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$
Silber, Dichte	$\rho_{\text{Ag}} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
Silber, spezifische Wärmekapazität	$c_{\text{Ag}} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Wasser, molare Masse	$M_{\text{wa}} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$
Wasser, Dichte	$\rho_{\text{wa}} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Wasser, spezifische Wärmekapazität	$c_{\text{wa}} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Wasser, spezifische Verdampfungswärme	$L_{\text{wa}} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$

Physikalischer Parameter	Wert
Wasser, Siedetemperatur	$T_{100} = 100\text{ }^{\circ}\text{C} = 373.15\text{ K}$
Eis, Dichte von Gletschereis	$\rho_{\text{ice}} = 0.917 \times 10^3\text{ kg m}^{-3}$
Wasserdampf, spezifische Wärmekapazität	$c_{\text{st}} = 2.080 \times 10^3\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$
Masse der Erde	$m_{\text{E}} = 5.97 \times 10^{24}\text{ kg}$
Radius der Erde	$R_{\text{E}} = 6.38 \times 10^6\text{ m}$
Masse der Sonne	$m_{\text{S}} = 1.99 \times 10^{30}\text{ kg}$
Radius der Sonne	$R_{\text{S}} = 6.96 \times 10^8\text{ m}$
Mittlerer Abstand zwischen Sonne und Erde	$a_{\text{E}} = 1.50 \times 10^{11}\text{ m}$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Hier gelten $e > 0$ und $Q < 0$, und W_{el} bezeichnet die positive Arbeit, die zur Ladungstrennung zugeführt wird. Wählen Sie die Stromrichtung im Ersatzschaltkreis so, dass $I = d(\Delta Q)/dt$ gilt, positiv, wenn sich die Elektronen in $+x$ -Richtung bewegen.

• 2.1

$$V = 4.19 \times 10^{-24}\text{ m}^3, \quad M = 4.39 \times 10^{-20}\text{ kg},$$

$$N = 2.45 \times 10^5, \quad \rho = +9.38 \times 10^9\text{ C m}^{-3},$$

$$n = 5.85 \times 10^{28}\text{ m}^{-3}, \quad Q = -3.93 \times 10^{-14}\text{ C}, \quad m_0 = 2.23 \times 10^{-25}\text{ kg}.$$

• 2.2

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_d, \quad \boxed{A = \frac{1}{3}}.$$

• 2.3

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} \mathbf{x}_p, \quad W_{\text{el}} = \frac{2\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} x_p^2.$$

• 2.4

$$x_p = \frac{3\epsilon_0 E_0}{ne}, \quad -\Delta Q = -ne\pi R^2 x_p.$$

• 2.5a

$$C = \frac{9}{4}\pi\epsilon_0 R = 6.26 \times 10^{-19}\text{ F}.$$

• 2.5b

$$V_0 = \frac{4}{3}RE_0.$$

• 2.6a

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m_0 v^2 = \frac{2\pi}{3}nm_e R^3 v^2, \quad I = ne\pi R^2 v.$$

- 2.6b

$$L = \frac{4m_e}{3\pi n e^2 R} = 2.57 \times 10^{-14} \text{ H.}$$

- 2.7a

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{3 \epsilon_0 m_e}}.$$

- 2.7b

$$\omega_p = 7.88 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}, \quad \lambda_p = 239 \text{ nm.}$$

- 2.8a

$$P_{\text{heat}} = \frac{m_0}{2\tau} \langle v^2 \rangle, \quad \langle I^2 \rangle = (n e \pi R^2)^2 \langle v^2 \rangle.$$

- 2.8b

$$R_{\text{heat}} = \frac{L}{2\tau} = \frac{2m_e}{3\pi n e^2 R \tau} = 2.46 \Omega.$$

- 2.9

$$R_{\text{scat}} = \frac{8R^2 \omega_p^2}{27\pi \epsilon_0 c^3} = 2.45 \Omega.$$

- 2.10a

$$P_{\text{heat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{heat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}, \quad P_{\text{scat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{scat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}.$$

- 2.10b

$$E_0 = 2.74 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}, \quad P_{\text{heat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}, \quad P_{\text{scat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W.}$$

- 2.11a, bei gleichmäßiger Beleuchtung im gesamten Gefäß:

$$\mu_{\text{st}} \simeq 1.9 \times 10^{-3} \text{ kg s}^{-1} = 1.9 \text{ g s}^{-1}.$$

- 2.11b, mit derselben Näherung:

$$\eta \simeq 0.50 = 50\%.$$

Lösung

Alle nachfolgenden Ergebnisse zur Elektrostatik und zur Ersatzschaltung beruhen auf dem vorgegebenen Modell einer starren, gleichmäßig geladenen Elektronenwolke. Bei verschiebungsabhängigen Ergebnissen werden die führenden Terme für $|x_p|/R \ll 1$ beibehalten.

2.1

Das Teilchen ist eine Kugel, also gilt

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} (1.00 \times 10^{-8})^3 = 4.19 \times 10^{-24} \text{ m}^3.$$

Seine Masse beträgt

$$M = \rho_{\text{Ag}} V = 4.39 \times 10^{-20} \text{ kg.}$$

Die Anzahl der Silberatome und damit der einfach geladenen Silberionen beträgt

$$N = \frac{M}{M_{\text{Ag}}} N_A = 2.45 \times 10^5.$$

Pro Ion gibt es ein Leitungselektron. Somit gilt

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\rho_{\text{Ag}} N_A}{M_{\text{Ag}}} = 5.85 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

Die positive Ladungsdichte der Ionen beträgt

$$\rho = ne = +9.38 \times 10^9 \text{ C m}^{-3}.$$

Für die Elektronen gilt

$$Q = -Ne = -3.93 \times 10^{-14} \text{ C}, \quad m_0 = Nm_e = 2.23 \times 10^{-25} \text{ kg}.$$

2.2

Wir wenden das gaußsche Gesetz auf eine konzentrische gaußsche Kugelfläche mit dem Radius r innerhalb einer gleichmäßig geladenen Kugel an:

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho(4\pi r^3/3)}{\epsilon_0}.$$

Folglich lautet das Feld im Inneren

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}.$$

Der neutrale Bereich entsteht durch Überlagerung mit einer Kugel der Ladungsdichte $-\rho$, deren Mittelpunkt bei $\mathbf{x}_d$ liegt. An einem Punkt innerhalb dieser kleineren Kugel lautet ihr Feld

$$\mathbf{E}_-(\mathbf{r}) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{x}_d).$$

Die Addition der beiden Felder ergibt

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_d.$$

Die Ortsabhängigkeit $\mathbf{r}$ hebt sich auf, daher ist das Feld homogen, und es gilt

$$\boxed{A = \frac{1}{3}}.$$

2.3

Die verschobene Elektronenwolke hat die Ladungsdichte $-ne$, während die ortsfesten Ionen die Ladungsdichte $+ne$ haben. Nach 2.2 lautet das Feld in ihrem überlappenden, neutralen Innenbereich

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = \frac{ne}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_p.$$

In erster Ordnung der Verschiebung ergibt dieses Feld die Rückstellkraft auf die Wolke:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}_{\text{int}} = -\frac{Nne^2}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_p.$$

Die kleinen nicht überlappenden Bereiche beeinflussen nur Terme höherer Ordnung. Mit $N = 4\pi nR^3/3$ gilt

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} \mathbf{x}_p.$$

Wir definieren die effektive Federkonstante

$$k = \frac{Nne^2}{3\epsilon_0}.$$

Die bei einer quasistatischen Verschiebung von null bis x_p zugeführte Arbeit beträgt

$$W_{\text{el}} = -\int_0^{x_p} F_x(x) dx = \int_0^{x_p} kx dx = \frac{1}{2} kx_p^2.$$

Daher gilt

$$W_{\text{el}} = \frac{Nne^2}{6\epsilon_0} x_p^2 = \frac{2\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} x_p^2.$$

Dies ist die gespeicherte elektrostatische Energie, die in 2.5 verwendet wird. Die von der Rückstellkraft selbst verrichtete Arbeit beträgt $-W_{\text{el}}$.

2.4

Das äußere Feld zeigt in $-x$ -Richtung, daher zeigt die Kraft auf die negative Elektronenwolke in $+x$ -Richtung:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = Q\mathbf{E}_0 = NeE_0\mathbf{e}_x.$$

Im Gleichgewicht gilt

$$NeE_0 - \frac{Nne^2}{3\epsilon_0} x_p = 0.$$

Daraus folgt

$$x_p = \frac{3\epsilon_0 E_0}{ne}.$$

Bei einer kleinen Verschiebung x_p beträgt das durch die Mittelebene transportierte Volumen der Elektronenwolke in führender Ordnung

$$\Delta V = \pi R^2 x_p.$$

Multiplikation mit ihrer Ladungsdichte ergibt

$$-\Delta Q = -ne\pi R^2 x_p.$$

Somit lautet die positive Ladungstrennungsvariable

$$\Delta Q = ne\pi R^2 x_p = 3\pi\epsilon_0 R^2 E_0.$$

2.5a

Wir setzen die elektrostatische Energie gleich der Energie des Ersatzkondensators:

$$W_{\text{el}} = \frac{(\Delta Q)^2}{2C}.$$

Mit den obigen Ergebnissen gilt

$$C = \frac{(ne\pi R^2 x_p)^2}{2(2\pi n^2 e^2 R^3 x_p^2 / (9\epsilon_0))} = \frac{9}{4} \pi \epsilon_0 R.$$

Daher ist

$$C = 6.26 \times 10^{-19} \text{ F}.$$

2.5b

Die Ersatzspannung beträgt

$$V_0 = \frac{\Delta Q}{C}.$$

Einsetzen ergibt

$$V_0 = \frac{3\pi\epsilon_0 R^2 E_0}{(9/4)\pi\epsilon_0 R},$$

also

$$V_0 = \frac{4}{3} R E_0.$$

2.6a

Alle N Elektronen nehmen an der kollektiven Bewegung teil. Ihre kinetische Energie beträgt

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} N m_e v^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{2\pi}{3} n m_e R^3 v^2.$$

Durch Differenzieren der Beziehung für die Ladungstrennung ergibt sich

$$I = \frac{d(\Delta Q)}{dt} = ne\pi R^2 v.$$

Hier entspricht ein positiver Strom im Ersatzschaltkreis einem Strom in technischer Stromrichtung in $-x$ -Richtung. Würde der Strom durch die Ebene stattdessen in $+x$ -Richtung als positiv definiert, so wäre er $I_x = -ne\pi R^2 v$. Die Ergebnisse für Energie und Widerstand hängen von I^2 ab, sodass diese Wahl der Orientierung sie nicht beeinflusst.

2.6b

Wir identifizieren die kinetische Energie mit der Energie der Ersatzspule:

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Daraus folgt

$$L = \frac{m_0}{(ne\pi R^2)^2}.$$

Mit $m_0 = (4\pi R^3/3) n m_e$ gilt

$$L = \frac{4m_e}{3\pi n e^2 R} = 2.57 \times 10^{-14} \text{ H}.$$

2.7a

Für einen frei schwingenden idealen LC -Schwingkreis gilt

$$L \frac{d^2(\Delta Q)}{dt^2} + \frac{\Delta Q}{C} = 0,$$

also

$$\omega_p^2 = \frac{1}{LC}.$$

Wegen

$$LC = \frac{4m_e}{3\pi n e^2 R} \frac{9\pi \varepsilon_0 R}{4} = \frac{3\varepsilon_0 m_e}{n e^2},$$

erhalten wir

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{3\varepsilon_0 m_e}}.$$

Dasselbe Ergebnis folgt unmittelbar aus $\omega_p^2 = k/m_0$.

2.7b

Einsetzen der gegebenen Konstanten ergibt

$$\omega_p = 7.88 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}.$$

Wegen $\omega = 2\pi c/\lambda$ gilt

$$\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} = 2.39 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

Somit ist

$$\lambda_p = 239 \text{ nm}.$$

2.8a

Im vorgegebenen Stoßmodell verliert jedes Elektron bei einem Stoß seine gesamte kinetische Energie der kollektiven Bewegung. Sein zeitlich gemittelter Energieverlust pro Stoß beträgt

$$\frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle.$$

Über alle Elektronen gemittelt treten N/τ Stöße pro Sekunde auf. Die zufälligen Stoßzeitpunkte erlauben es, die über eine Periode gemittelte kinetische Energie zu verwenden, sodass

$$P_{\text{heat}} = \frac{N m_e}{2\tau} \langle v^2 \rangle = \frac{m_0}{2\tau} \langle v^2 \rangle.$$

Aus der Beziehung zwischen Strom und Geschwindigkeit folgt

$$\langle I^2 \rangle = (n e \pi R^2)^2 \langle v^2 \rangle.$$

2.8b

Der Ersatzwiderstand ist definiert durch

$$P_{\text{heat}} = R_{\text{heat}} \langle I^2 \rangle.$$

Folglich gilt

$$R_{\text{heat}} = \frac{m_0}{2\tau(ne\pi R^2)^2} = \frac{L}{2\tau}.$$

Somit ist

$$R_{\text{heat}} = \frac{2m_e}{3\pi ne^2 R\tau} = 2.46 \, \Omega.$$

Der Faktor $1/2$ folgt aus der kinetischen Energie $\frac{1}{2}m_e v^2$, die im konkret in der Aufgabe vorgegebenen Modell pro Stoß verloren geht.

2.9

Für eine harmonische Bewegung mit der Amplitude x_0 gilt

$$x_p(t) = x_0 \cos(\omega_p t + \phi),$$

und damit

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega_p^2 x_0^2.$$

Daher gilt

$$\langle I^2 \rangle = \frac{1}{2} (ne\pi R^2)^2 \omega_p^2 x_0^2.$$

Wir definieren den Streuwiderstand durch

$$P_{\text{scat}} = R_{\text{scat}} \langle I^2 \rangle.$$

Mit der angegebenen Strahlungsformel ergibt sich

$$R_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \frac{2}{(ne\pi R^2)^2 \omega_p^2 x_0^2}.$$

Wegen

$$Q = -\frac{4}{3}\pi R^3 ne, \quad \frac{Q^2}{(ne\pi R^2)^2} = \frac{16R^2}{9},$$

erhalten wir

$$R_{\text{scat}} = \frac{8R^2 \omega_p^2}{27\pi \epsilon_0 c^3} = 2.45 \, \Omega.$$

Äquivalent dazu gilt

$$R_{\text{scat}} = \frac{8ne^2 R^2}{81\pi \epsilon_0^2 m_e c^3}.$$

2.10a

Sowohl Erwärmung als auch Streuung entziehen demselben schwingenden Strom Energie. Ihre Ersatzwiderstände addieren sich daher in der Reihenschaltung:

$$R_{\Sigma} = R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}}.$$

Bei $\omega = \omega_p = 1/\sqrt{LC}$ heben sich der induktive und der kapazitive Blindwiderstand auf:

$$\omega_p L - \frac{1}{\omega_p C} = 0.$$

Somit ist der Strom in Phase mit der anregenden Spannung und hat die Amplitude

$$I_0 = \frac{V_0}{R_\Sigma} = \frac{4RE_0}{3R_\Sigma}.$$

Für einen sinusförmigen Strom gilt

$$\langle I^2 \rangle = \frac{I_0^2}{2} = \frac{8R^2 E_0^2}{9R_\Sigma^2}.$$

Die beiden mittleren Leistungen betragen daher

$$P_{\text{heat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{heat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}$$

und

$$P_{\text{scat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{scat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}.$$

2.10b

Aus der angegebenen einfallenden Intensität folgt

$$S = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2,$$

also

$$E_0 = \sqrt{\frac{2S}{c\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2(1.00 \times 10^6)}{(2.998 \times 10^8)(8.854 \times 10^{-12})}}.$$

Somit gilt

$$E_0 = 2.74 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}.$$

Mit ungerundeten Zwischenwerten ergibt sich

$$V_0 = 3.66 \times 10^{-4} \text{ V}, \quad R_\Sigma = 4.910 \Omega, \quad I_0 = 7.45 \times 10^{-5} \text{ A}.$$

Folglich gilt

$$P_{\text{heat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}, \quad P_{\text{scat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}.$$

Ihre annähernde Gleichheit folgt aus der annähernden Gleichheit der beiden Widerstände.

Auch die Verschiebungsamplitude lässt sich überprüfen:

$$x_0 = \frac{I_0}{ne\pi R^2 \omega_p} = 3.21 \times 10^{-15} \text{ m},$$

also gilt $x_0/R = 3.21 \times 10^{-7} \ll 1$. Außerdem ist $\omega_p \tau = 41.3$, im Einklang mit der angenommenen Trennung der Zeitskalen von Schwingung und Stößen.

2.11a

Wir verwenden die Heizleistung pro Teilchen aus 2.10 im gesamten beleuchteten Volumen. Dabei wird von gleichmäßiger Beleuchtung ausgegangen und kein zusätzliches Modell für Abschwächung oder Mehrfachstreuung eingeführt.

Das Gefäßvolumen beträgt

$$V_{\text{vessel}} = h^2 a = (0.10)^2 (0.010) = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3.$$

Es enthält

$$N_{\text{np}} = n_{\text{np}} h^2 a = 7.3 \times 10^{11}$$

Nanopartikel. Es wird angenommen, dass ihre gesamte Joulesche Wärme Dampf erzeugt, also gilt

$$P_{\text{st}} = N_{\text{np}} P_{\text{heat}} = 4.98 \times 10^3 \text{ W}.$$

Jedes Kilogramm, das zu Dampf wird, muss zunächst von 20°C auf 100°C erwärmt, dann verdampft und schließlich auf 110°C erhitzt werden. Die erforderliche Energie pro Masseneinheit beträgt

$$q_{\text{st}} = c_{\text{wa}}(T_{100} - T_{\text{wa}}) + L_{\text{wa}} + c_{\text{st}}(T_{\text{st}} - T_{100}).$$

Numerisch ergibt sich

$$\begin{aligned} q_{\text{st}} &= (4.181 \times 10^3)(80) + 2.260 \times 10^6 + (2.080 \times 10^3)(10) \\ &= 2.61528 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}. \end{aligned}$$

Dass das übrige Wasser bei 20°C bleibt, macht die Erwärmung des verdampfenden Anteils nicht überflüssig.

Die Energieerhaltung liefert

$$\mu_{\text{st}} q_{\text{st}} = P_{\text{st}}.$$

Somit gilt

$$\mu_{\text{st}} = \frac{n_{\text{np}} h^2 a P_{\text{heat}}}{c_{\text{wa}}(T_{100} - T_{\text{wa}}) + L_{\text{wa}} + c_{\text{st}}(T_{\text{st}} - T_{100})} = 1.904 \times 10^{-3} \text{ kg s}^{-1}.$$

Mit der Genauigkeit der Gefäß- und Konzentrationsangaben ergibt sich

$$\boxed{\mu_{\text{st}} \simeq 1.9 \text{ g s}^{-1}}.$$

2.11b

Der Strahl tritt senkrecht durch die Seitenfläche mit dem Flächeninhalt h^2 ein, also gilt

$$P_{\text{tot}} = S h^2 = (1.00 \times 10^6)(0.10)^2 = 1.00 \times 10^4 \text{ W}.$$

Daher ist

$$\eta = \frac{P_{\text{st}}}{P_{\text{tot}}} = \frac{n_{\text{np}} h^2 a P_{\text{heat}}}{S h^2} = \frac{n_{\text{np}} a P_{\text{heat}}}{S}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\eta = 0.4979,$$

oder, sinnvoll gerundet,

$$\boxed{\eta \simeq 0.50 = 50\%}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Der grönländische Eisschild

Einleitung

Diese Aufgabe behandelt die Physik des grönländischen Eisschildes, des zweitgrößten Gletschers der Welt, Abb. 3.1(a). Als Idealisierung wird Grönland als rechteckige Insel der Breite $2L$ und der Länge $5L$ modelliert, deren Untergrund auf Meereshöhe liegt und vollständig von inkompressiblem Eis (konstante Dichte ρ_{ice}) bedeckt ist, siehe Abb. 3.1(b). Das Höhenprofil $H(x)$ des Eisschildes hängt nicht von der y -Koordinate ab und steigt von null an den Küsten $x = \pm L$ bis zu einer maximalen Höhe H_m entlang der mittleren Nord-Süd-Achse (der y -Achse) an, die als Eisscheide bezeichnet wird, siehe Abb. 3.1(c).

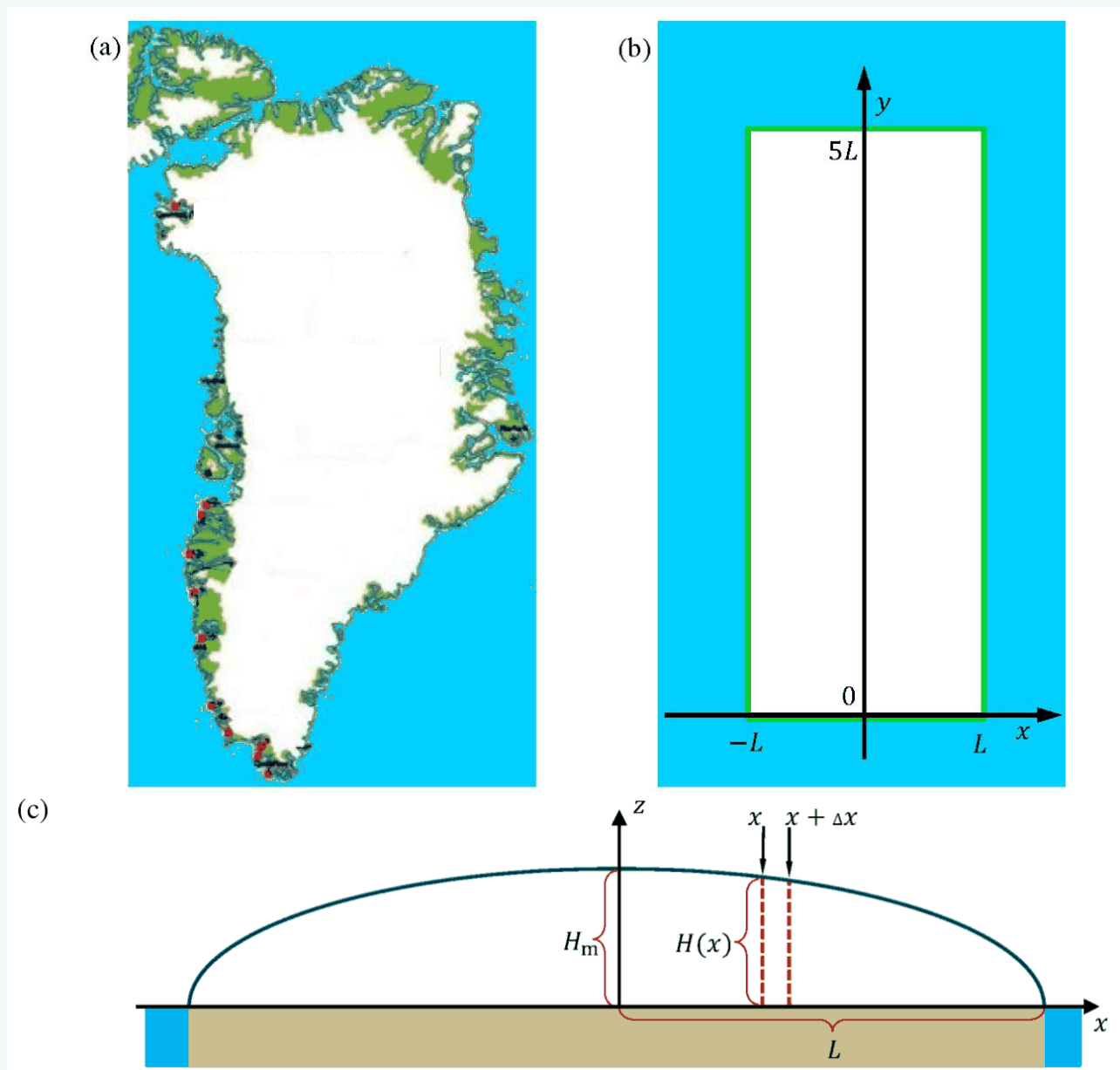


Abbildung 3.1 (a) Eine Karte Grönlands mit der Ausdehnung des Eisschildes (weiß), den eisfreien Küstenregionen (grün) und dem umgebenden Ozean (blau). (b) Das grobe Modell des grönländischen Eisschildes, der eine rechteckige Fläche in der xy -Ebene mit den Seitenlängen $2L$ und $5L$ bedeckt. Die Eisscheide, die Linie der maximalen Eisschildhöhe H_m , verläuft entlang der y -Achse. (c) Ein vertikaler Schnitt (xz -Ebene) durch den Eisschild mit dem Höhenprofil $H(x)$

(blaue Linie). $H(x)$ ist für $0 < y < 5L$ unabhängig von der y -Koordinate, fällt jedoch bei $y = 0$ und $y = 5L$ abrupt auf null ab. Die z -Achse kennzeichnet die Lage der Eisscheide. Zur besseren Übersicht sind die vertikalen Abmessungen gegenüber den horizontalen überhöht dargestellt. Die Dichte ρ_{ice} des Eises ist konstant.

Zwei nützliche Formeln

In dieser Aufgabe kann das folgende Integral verwendet werden:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx = \frac{2}{3}$$

sowie die Näherung $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, die für $|\alpha x| \ll 1$ gilt.

Das Höhenprofil des Eisschildes

Auf kurzen Zeitskalen ist der Gletscher ein inkompressibles hydrostatisches System mit festem Höhenprofil $H(x)$.

3.1	Geben Sie einen Ausdruck für den Druck $p(x, z)$ innerhalb des Eisschildes als Funktion der vertikalen Höhe z über dem Untergrund und des Abstands x von der Eisscheide an. Vernachlässigen Sie den Luftdruck.	0.3
-----	--	-----

Betrachten Sie eine vertikale Scheibe des Eisschildes im Gleichgewicht, die eine kleine horizontale Grundfläche $\Delta x \Delta y$ zwischen x und $x + \Delta x$ bedeckt, siehe die roten gestrichelten Linien in Abb. 3.1(c). Die Größe von Δy spielt keine Rolle. Die resultierende horizontale Kraftkomponente ΔF auf die beiden vertikalen Seitenflächen der Scheibe, die aus dem Höhenunterschied zwischen ihrer dem Zentrum zugewandten und ihrer der Küste zugewandten Seite entsteht, wird durch eine Reibungskraft $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$ ausgeglichen, die der Untergrund auf die Grundfläche $\Delta x \Delta y$ ausübt, wobei $S_b = 100 \text{ kPa}$ ist.

3.2a	Zeigen Sie für einen gegebenen Wert von x , dass im Grenzfall $\Delta x \rightarrow 0$ die Beziehung $S_b = kH \, dH/dx$ gilt, und bestimmen Sie k .	0.9
3.2b	Bestimmen Sie einen Ausdruck für das Höhenprofil $H(x)$ in Abhängigkeit von ρ_{ice} , g , L , S_b und dem Abstand x von der Eisscheide. Das Ergebnis wird zeigen, dass die maximale Gletscherhöhe H_m mit der halben Breite L gemäß $H_m \propto L^{1/2}$ skaliert.	0.8
3.2c	Bestimmen Sie den Exponenten γ , mit dem das Gesamtvolumen V_{ice} des Eisschildes mit der Fläche A der rechteckigen Insel skaliert, $V_{\text{ice}} \propto A^\gamma$.	0.5

Ein dynamischer Eisschild

Auf längeren Zeitskalen ist das Eis eine viskose inkompressible Flüssigkeit, die unter dem Einfluss der Schwerkraft vom zentralen Bereich zur Küste fließt. In diesem Modell behält das Eis sein Höhenprofil $H(x)$ in einem stationären Zustand bei, in dem die Akkumulation von Eis durch Schneefall im zentralen Bereich durch das Abschmelzen an der Küste ausgeglichen wird. Treffen Sie zusätzlich zur Geometrie des Eisschildes aus Abb. 3.1(b) und (c) die folgenden Modellannahmen:

- 1) Das Eis fließt in der xz -Ebene von der Eisscheide (der y -Achse) weg.
- 2) Die Akkumulationsrate c (m/Jahr) im zentralen Bereich ist konstant.
- 3) Das Eis kann den Gletscher nur durch Abschmelzen nahe den Küsten bei $x = \pm L$ verlassen.
- 4) Die horizontale (x -)Komponente

$v_x(x) = dx/dt$ der Fließgeschwindigkeit des Eises ist unabhängig von z . 5) Die vertikale (z -)Komponente $v_z(z) = dz/dt$ der Fließgeschwindigkeit des Eises ist unabhängig von x .

Betrachten Sie nur den zentralen Bereich $|x| \ll L$ nahe der Mitte des Eisschilds, in dem die Höhenänderungen des Eisschilds sehr klein sind und vollständig vernachlässigt werden können, d. h. $H(x) \approx H_m$.

3.3	Bestimmen Sie mithilfe der Massenerhaltung einen Ausdruck für die horizontale Fließgeschwindigkeit $v_x(x)$ des Eises in Abhängigkeit von c , x und H_m .	0.6
-----	---	-----

Aus der Annahme der Inkompressibilität, d. h. der konstanten Dichte ρ_{ice} des Eises, folgt, dass die Massenerhaltung die folgende Bedingung für die Komponenten der Fließgeschwindigkeit des Eises verlangt:

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

3.4	Geben Sie einen Ausdruck für die z -Abhängigkeit der vertikalen Komponente $v_z(z)$ der Fließgeschwindigkeit des Eises an.	0.6
-----	--	-----

Ein kleines Eisteilchen, das sich anfangs an der Oberfläche an der Position (x_i, H_m) befindet, bewegt sich im Laufe der Zeit als Teil des Eisschilds entlang einer Bahnkurve $z(x)$ in der vertikalen xz -Ebene.

3.5	Leiten Sie einen Ausdruck für eine solche Bahnkurve $z(x)$ her.	0.9
-----	---	-----

Alter und Klimaindikatoren im dynamischen Eisschild

Anhand der Komponenten $v_x(x)$ und $v_z(z)$ der Fließgeschwindigkeit des Eises lässt sich das Alter $\tau(z)$ des Eises in einer bestimmten Tiefe $H_m - z$ unter der Oberfläche des Eisschilds abschätzen.

3.6	Bestimmen Sie einen Ausdruck für das Alter $\tau(z)$ des Eises als Funktion der Höhe z über dem Untergrund direkt an der Eisscheide $x = 0$.	1.0
-----	---	-----

Eine Eiskernbohrung im Inneren des grönländischen Eisschilds durchdringt Schneeschichten aus der Vergangenheit, und der Eiskern kann untersucht werden, um vergangene Klimaveränderungen zu erschließen. Einer der besten Indikatoren ist das sogenannte $\delta^{18}\text{O}$, das wie folgt definiert ist:

$$\delta^{18}\text{O} = \frac{R_{\text{ice}} - R_{\text{ref}}}{R_{\text{ref}}} 1000 \text{ ‰},$$

wobei $R = [^{18}\text{O}]/[^{16}\text{O}]$ das Häufigkeitsverhältnis der beiden stabilen Sauerstoffisotope ^{18}O und ^{16}O bezeichnet. Der Referenzwert R_{ref} beruht auf der Isotopenzusammensetzung der Ozeane in der Äquatorregion.

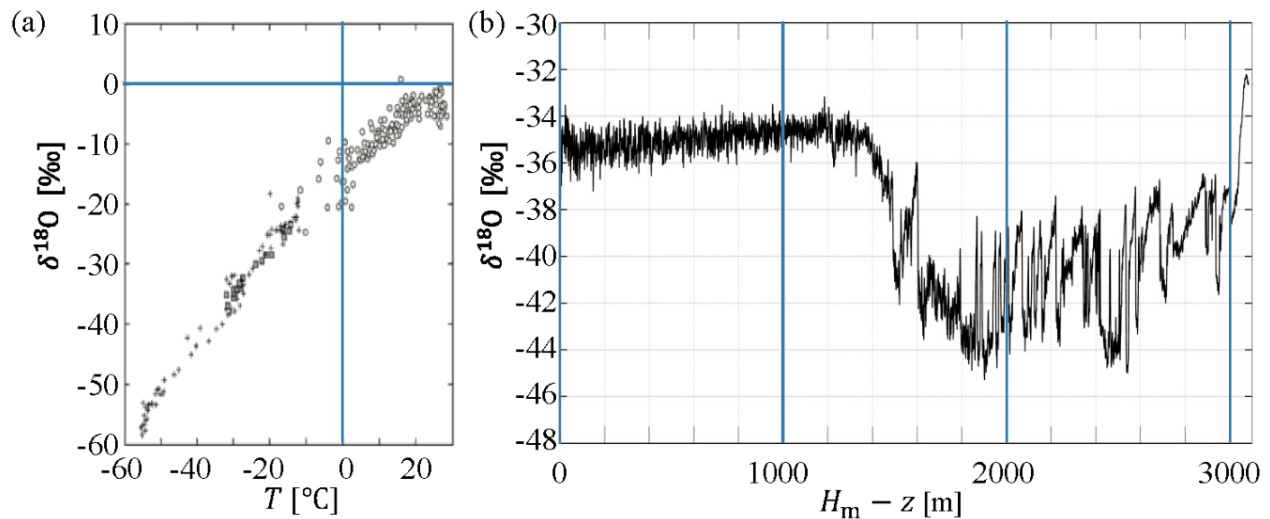


Abbildung 3.2 (a) Beobachteter Zusammenhang zwischen $\delta^{18}\text{O}$ im Schnee und der mittleren jährlichen Oberflächentemperatur T . **(b)** Messwerte von $\delta^{18}\text{O}$ in Abhängigkeit von der Tiefe $H_m - z$ unter der Oberfläche, gewonnen aus einem Eiskern, der an einer bestimmten Stelle entlang der grönländischen Eisscheide mit $H_m = 3060$ m von der Oberfläche bis zum Felsuntergrund erbohrt wurde.

Beobachtungen am grönländischen Eisschild zeigen, dass sich $\delta^{18}\text{O}$ im Schnee annähernd linear mit der Temperatur ändert, Abb. 3.2(a). Unter der Annahme, dass dies schon immer der Fall war, ermöglicht das aus einem Eiskern in der Tiefe $H_m - z$ bestimmte $\delta^{18}\text{O}$ eine Abschätzung der Temperatur T in der Nähe Grönlands vor $\tau(z)$ Jahren.

Messungen von $\delta^{18}\text{O}$ in einem 3060 m langen grönländischen Eiskern zeigen in einer Tiefe von 1492 m eine abrupte Änderung von $\delta^{18}\text{O}$, Abb. 3.2(b), die das Ende der letzten Eiszeit markiert. Die Eiszeit begann vor 120.000 Jahren, was einer Tiefe von 3040 m entspricht, und die gegenwärtige Warmzeit begann vor 11.700 Jahren, was einer Tiefe von 1492 m entspricht. Nehmen Sie an, dass diese beiden Zeiträume durch zwei unterschiedliche Akkumulationsraten, c_{ia} (Eiszeit) beziehungsweise c_{ig} (Warmzeit), beschrieben werden können. Sie können annehmen, dass H_m während dieser gesamten 120.000 Jahre konstant war.

3.7a	Bestimmen Sie die Akkumulationsraten c_{ia} und c_{ig} .	0.8
3.7b	Bestimmen Sie mithilfe der Daten in Abb. 3.2 die Temperaturänderung beim Übergang von der Eiszeit zur Warmzeit.	0.2

Meeresspiegelanstieg durch das Abschmelzen des grönländischen Eisschilds

Ein vollständiges Abschmelzen des grönländischen Eisschilds wird einen Anstieg des Meeresspiegels im Weltmeer verursachen. Als grobe Abschätzung dieses Meeresspiegelanstiegs kann man einfach einen gleichmäßigen Anstieg im gesamten Weltmeer mit konstanter Fläche $A_0 = 3.61 \times 10^{14} \text{ m}^2$ betrachten.

3.8	Berechnen Sie den mittleren globalen Meeresspiegelanstieg, der sich aus einem vollständigen Abschmelzen des grönländischen Eisschilds ergeben würde, wenn seine gegenwärtige Fläche $A_G = 1.71 \times 10^{12} \text{ m}^2$ und $S_b = 100 \text{ kPa}$ gegeben sind.	0.6
-----	---	-----

Der massereiche grönländische Eisschild übt eine Gravitationsanziehung auf den umgebenden Ozean aus. Wenn der Eisschild schmilzt, entfällt diese lokale Anhebung des Meeresspiegels, und der Meeresspiegel in der Nähe Grönlands sinkt. Dieser Effekt wirkt dem oben berechneten Meeresspiegelanstieg teilweise entgegen.

Um die Größe dieser Gravitationsanziehung auf das Wasser abzuschätzen, wird der grönländische Eisschild nun als Punktmasse auf Höhe des Untergrunds modelliert, deren Masse gleich der Gesamtmasse des grönländischen Eisschilds ist. Kopenhagen liegt entlang der Erdoberfläche in einer Entfernung von 3500 km vom Zentrum der Punktmasse. Die Erde ohne die Punktmasse kann als kugelsymmetrisch betrachtet werden, mit einem globalen Ozean, der die gesamte Erdoberfläche mit der Fläche $A_E = 5.10 \times 10^{14} \text{ m}^2$ bedeckt. Alle Auswirkungen der Erdrotation können vernachlässigt werden.

3.9	Bestimmen Sie im Rahmen dieses Modells die Differenz $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}}$ zwischen dem Meeresspiegel in Kopenhagen (h_{CPH}) und dem Meeresspiegel am Grönland diametral gegenüberliegenden Punkt (h_{OPP}).	1.8
-----	---	-----

Datenblatt: Tabelle physikalischer Größen

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Plancksches Wirkungsquantum geteilt durch 2π	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Gravitationskonstante	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Fallbeschleunigung	$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$
Elementarladung	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Elektrische Permittivität des Vakuums	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Elektronenmasse	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Avogadro-Konstante	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmann-Konstante	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Steinmeteorit, spezifische Wärmekapazität	$c_{\text{sm}} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Steinmeteorit, Wärmeleitfähigkeit	$k_{\text{sm}} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Steinmeteorit, Dichte	$\rho_{\text{sm}} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Steinmeteorit, Schmelztemperatur	$T_{\text{sm}} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$
Steinmeteorit, spezifische Schmelzwärme	$L_{\text{sm}} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
Silber, molare Masse	$M_{\text{Ag}} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$
Silber, Dichte	$\rho_{\text{Ag}} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
Silber, spezifische Wärmekapazität	$c_{\text{Ag}} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Wasser, molare Masse	$M_{\text{wa}} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$
Wasser, Dichte	$\rho_{\text{wa}} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Wasser, spezifische Wärmekapazität	$c_{\text{wa}} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Wasser, spezifische Verdampfungswärme	$L_{\text{wa}} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$
Wasser, Siedetemperatur	$T_{100} = 100 \text{ }^\circ\text{C} = 373.15 \text{ K}$
Eis, Dichte von Gletschereis	$\rho_{\text{ice}} = 0.917 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Wasserdampf, spezifische Wärmekapazität	$c_{\text{st}} = 2.080 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Erde, Masse	$m_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Erde, Radius	$R_E = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$
Sonne, Masse	$m_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Sonne, Radius	$R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$
Mittlerer Abstand zwischen Sonne und Erde	$a_E = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **3.1:** $p(x, z) = \rho_{\text{ice}} g [H(x) - z]$, für $0 \leq z \leq H(x)$.
- **3.2a:** $S_b = -\rho_{\text{ice}} g H \frac{dH}{dx}$, also $k = -\rho_{\text{ice}} g$ auf der Hälfte $x > 0$.
- **3.2b:** $H(x) = \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{\text{ice}} g} (L - |x|)}$, mit $H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}} g}}$.
- **3.2c:** $\gamma = \frac{5}{4}$; genauer gilt $V_{\text{ice}} = \frac{2}{3} A H_m$.
- **3.3:** $v_x(x) = \frac{c}{H_m} x$.
- **3.4:** $v_z(z) = -\frac{c}{H_m} z$.
- **3.5:** $z(x) = H_m \frac{x_i}{x}$ für $x_i \neq 0$. Für $x_i = 0$ verläuft die Bahn vertikal entlang $x = 0$.
- **3.6:** $\tau(z) = \frac{H_m}{c} \ln \frac{H_m}{z}$.
- **3.7a:** $c_{\text{ia}} = 0.123 \text{ m/year}$, $c_{\text{ig}} = 0.175 \text{ m/year}$.
- **3.7b:** $\Delta T \approx +10 \text{ K}$, eine Erwärmung um ungefähr 10°C .
- **3.8:** $\Delta h_{\text{mean}} \approx 8.8 \text{ m}$.
- **3.9:** $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} \approx 4.5 \text{ m}$, wobei der Meeresspiegel in Kopenhagen höher liegt.

Lösung

3.1

Das hydrostatische Gleichgewicht in vertikaler Richtung ergibt

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_{\text{ice}} g.$$

Bei Vernachlässigung des Luftdrucks ist der Druck an der Oberfläche null:

$$p(x, H(x)) = 0.$$

Die Integration von der Oberfläche nach unten liefert daher

$$p(x, z) = \rho_{\text{ice}} g [H(x) - z].$$

3.2a

Betrachten Sie die rechte Hälfte des Eisschilds, $x > 0$. Die Druckkraft auf eine vertikale Seitenfläche der Höhe $H(x)$ und der Breite Δy beträgt

$$F(x) = \Delta y \int_0^{H(x)} \rho_{\text{ice}} g [H(x) - z] dz = \frac{1}{2} \rho_{\text{ice}} g H(x)^2 \Delta y.$$

Die Kraft auf die dem Zentrum zugewandte Seitenfläche wirkt in Richtung zunehmender x , während die Kraft auf die der Küste zugewandte Seitenfläche in Richtung abnehmender x wirkt. Ihre Resultierende ist

$$\Delta F = \frac{1}{2} \rho_{\text{ice}} g [H(x)^2 - H(x + \Delta x)^2] \Delta y.$$

In erster Ordnung in Δx gilt

$$\Delta F = -\rho_{\text{ice}} g H(x) \frac{dH}{dx} \Delta x \Delta y.$$

Das Gleichgewicht zwischen dieser nach außen gerichteten Kraft und der Reibung am Untergrund $S_b \Delta x \Delta y$ liefert

$$\boxed{S_b = -\rho_{\text{ice}} g H \frac{dH}{dx}}, \quad \boxed{k = -\rho_{\text{ice}} g}.$$

Auf dieser Hälfte ist die Ableitung negativ, sodass wie gefordert $S_b > 0$ ist. Auf beiden Hälften gilt für die Beträge die entsprechende Beziehung $S_b = \rho_{\text{ice}} g H |dH/dx|$.

3.2b

Für $0 \leq x \leq L$ lässt sich das obige Ergebnis schreiben als

$$\frac{d(H^2)}{dx} = -\frac{2S_b}{\rho_{\text{ice}} g}.$$

Mit der Randbedingung $H(L) = 0$ an der Küste folgt

$$H(x)^2 = \frac{2S_b}{\rho_{\text{ice}} g} (L - x).$$

Spiegelung an der Eisscheide ergibt das vollständige Profil:

$$\boxed{H(x) = \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{\text{ice}} g} (L - |x|)}, \quad -L \leq x \leq L.}$$

An der Eisscheide gilt

$$\boxed{H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}} g}}},$$

also $H_m \propto L^{1/2}$, wenn die Reibung am Untergrund, die Dichte und die Fallbeschleunigung konstant sind.

3.2c

Die Fläche der Insel beträgt

$$A = (2L)(5L) = 10L^2.$$

Da das Profil unabhängig von y ist, beträgt das Eisvolumen

$$V_{\text{ice}} = 5L \int_{-L}^L H(x) dx = 10LH_m \int_0^L \sqrt{1 - \frac{x}{L}} dx.$$

Mit $u = x/L$ liefert das angegebene Integral

$$V_{\text{ice}} = 10L^2 H_m \int_0^1 \sqrt{1-u} du = \frac{20}{3} L^2 H_m = \boxed{\frac{2}{3} A H_m}.$$

Somit gilt

$$V_{\text{ice}} \propto L^{2+1/2} = L^{5/2} \propto A^{5/4},$$

und

$$\boxed{\gamma = \frac{5}{4}}.$$

3.3

Betrachten Sie im zentralen Bereich ein Kontrollvolumen zwischen der Eisscheide und einer Position $x > 0$ mit der Breite Δy . Im stationären Zustand muss die Akkumulation auf seiner Oberfläche gleich seinem horizontalen Abfluss sein.

Die pro Zeiteinheit akkumulierte Masse beträgt

$$\dot{m}_{\text{in}} = \rho_{\text{ice}} c x \Delta y.$$

Aus Symmetriegründen gibt es keinen horizontalen Fluss durch die Eisscheide. Da v_x unabhängig von der Höhe ist, beträgt der Massenabfluss durch die Seitenfläche bei x

$$\dot{m}_{\text{out}} = \rho_{\text{ice}} v_x(x) H_m \Delta y.$$

Gleichsetzen ergibt

$$\boxed{v_x(x) = \frac{c}{H_m} x}.$$

Derselbe vorzeichenbehaftete Ausdruck gilt für $x < 0$, wo der Fluss in Richtung negativer x erfolgt. Dieses Ergebnis verwendet die Näherung $H(x) \approx H_m$ für den zentralen Bereich.

3.4

Die Inkompressibilität erfordert

$$\frac{dv_z}{dz} = -\frac{dv_x}{dx} = -\frac{c}{H_m}.$$

Integration ergibt

$$v_z(z) = -\frac{c}{H_m} z + C.$$

Durch den Untergrund findet kein Fluss statt, daher ist $v_z(0) = 0$, woraus $C = 0$ folgt. Somit gilt

$$\boxed{v_z(z) = -\frac{c}{H_m} z}.$$

Insbesondere gilt $v_z(H_m) = -c$: Die Abwärtsbewegung an der Oberfläche gleicht die Zufuhr von neuem Eis aus.

3.5

Für ein Teilchen mit $x_i \neq 0$ erfüllt seine Bahnkurve die Beziehung

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz/dt}{dx/dt} = \frac{v_z}{v_x} = -\frac{z}{x}.$$

Durch Trennung der Variablen und Anwendung der Anfangsbedingung $z(x_i) = H_m$ folgt

$$\int_{H_m}^z \frac{dz'}{z'} = - \int_{x_i}^x \frac{dx'}{x'},$$

also

$$\ln \frac{z}{H_m} = - \ln \left| \frac{x}{x_i} \right|.$$

Das Teilchen bleibt auf seiner ursprünglichen Seite der Eisscheide; daher ist $x/x_i > 0$, und es gilt

$$\boxed{xz = x_i H_m}, \quad \boxed{z(x) = H_m \frac{x_i}{x}}.$$

Die Bahnkurve ist ein Ast einer gleichseitigen Hyperbel, entlang dessen sich das Teilchen nach außen und nach unten bewegt. Gleichwertig gilt

$$x(t) = x_i e^{ct/H_m}, \quad z(t) = H_m e^{-ct/H_m}.$$

Für $x_i = 0$ bleibt das Teilchen bei $x = 0$ und sinkt gemäß demselben Ausdruck für $z(t)$ vertikal ab. Diese Bahnkurven gelten, solange das Teilchen im zentralen Bereich bleibt.

3.6

An der Eisscheide verschwindet die horizontale Geschwindigkeit. Das Alter ist die Zeit, die seit der Ablagerung des Teilchens bei $z = H_m$ vergangen ist:

$$\tau(z) = \int_{H_m}^z \frac{dz'}{v_z(z')} = -\frac{H_m}{c} \int_{H_m}^z \frac{dz'}{z'}.$$

Daher gilt

$$\boxed{\tau(z) = \frac{H_m}{c} \ln \frac{H_m}{z}}.$$

An der Oberfläche ist dieses Alter null, und es nimmt mit der Tiefe zu. In diesem idealisierten Modell divergiert es für $z \rightarrow 0$, weil die vertikale Geschwindigkeit am Gletscherbett gegen null geht.

3.7a

Für diesen Eiskern gilt $H_m = 3060$ m. Die gegenwärtigen Höhen der beiden datierten Schichten über dem Gletscherbett betragen

$$\begin{aligned} z_1 &= 3060 - 1492 = 1568 \text{ m}, \\ z_2 &= 3060 - 3040 = 20 \text{ m}. \end{aligned}$$

Die Übergangsschicht hat nur die 11 700 Jahre des Eisflusses während der Warmzeit durchlaufen. Somit gilt

$$\ln \frac{3060}{1568} = \frac{c_{ig}(11\,700 \text{ year})}{3060 \text{ m}},$$

woraus folgt

$$c_{ig} = \frac{3060}{11\,700} \ln \frac{3060}{1568} = 0.175 \text{ m/year}.$$

Für die ältere Schicht änderte sich die Akkumulationsrate während ihres Absinkens. Bei konstantem H_m gilt

$$\frac{d \ln z}{dt} = -\frac{c(t)}{H_m}.$$

Sie war dem Eisfluss während der Eiszeit über einen Zeitraum von

$$120\,000 - 11\,700 = 108\,300 \text{ years},$$

ausgesetzt, gefolgt von 11 700 Jahren Eisfluss während der Warmzeit. Folglich gilt

$$\ln \frac{3060}{20} = \frac{c_{ia}(108\,300 \text{ year}) + c_{ig}(11\,700 \text{ year})}{3060 \text{ m}}.$$

Durch Subtraktion der Gleichung für die Übergangsschicht entfällt der Beitrag der Warmzeit:

$$\ln \frac{1568}{20} = \frac{c_{ia}(108\,300 \text{ year})}{3060 \text{ m}}.$$

Damit ergibt sich

$$c_{ia} = \frac{3060}{108\,300} \ln \frac{1568}{20} = 0.123 \text{ m/year}.$$

Die Kompression des älteren Eises während der Warmzeit muss unbedingt berücksichtigt werden.

3.7b

Abbildung 3.2(b) liefert repräsentative Isotopenwerte von ungefähr

$$\delta_{ia}^{18}\text{O} \approx -42 \text{ ‰}, \quad \delta_{ig}^{18}\text{O} \approx -35 \text{ ‰}.$$

Der Übergang entspricht somit einem Anstieg um etwa 7 ‰.

Der annähernd lineare Verlauf in Abb. 3.2(a) hat im relevanten Temperaturbereich eine Steigung von etwa

$$\frac{\Delta(\delta^{18}\text{O})}{\Delta T} \approx 0.7 \text{ ‰ K}^{-1}.$$

Daher gilt

$$\Delta T \approx \frac{7 \text{ ‰}}{0.7 \text{ ‰ K}^{-1}} \approx 10 \text{ K}.$$

Die Änderung ist eine Erwärmung:

$$T_{ig} - T_{ia} \approx +10 \text{ K}.$$

Die Genauigkeit ist durch das Ablesen aus den Diagrammen begrenzt.

3.8

Mithilfe der Inselgeometrie und des Höhenprofils lässt sich das gegenwärtige Volumen im Modell bestimmen. Da $A_G = 10L^2$ gilt, folgt

$$L = \sqrt{\frac{A_G}{10}} = \sqrt{\frac{1.71 \times 10^{12}}{10}} = 4.14 \times 10^5 \text{ m.}$$

Die vom Modell vorhergesagte maximale Höhe beträgt

$$H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}} g}} = \sqrt{\frac{2(1.00 \times 10^5)(4.1352 \times 10^5)}{(917)(9.82)}} = 3.03 \times 10^3 \text{ m.}$$

Mit Teil 3.2c folgt

$$V_{\text{ice}} = \frac{2}{3} A_G H_m = 3.45 \times 10^{15} \text{ m}^3.$$

Beim Schmelzen bleibt die Masse erhalten, sodass das entstehende Wasservolumen beträgt:

$$V_{\text{water}} = \frac{\rho_{\text{ice}}}{\rho_{\text{wa}}} V_{\text{ice}}.$$

Wird dieses Wasser gleichmäßig über die konstante Ozeanfläche verteilt, ergibt sich

$$\Delta h_{\text{mean}} = \frac{V_{\text{water}}}{A_O} = \frac{\rho_{\text{ice}}}{\rho_{\text{wa}}} \frac{2A_G H_m}{3A_O}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\Delta h_{\text{mean}} = \frac{917}{998} \frac{3.4548 \times 10^{15}}{3.61 \times 10^{14}} = 8.79 \text{ m.}$$

Somit gilt

$$\boxed{\Delta h_{\text{mean}} \approx 8.8 \text{ m}.}$$

3.9

Die freie Oberfläche eines ruhenden Ozeans ist eine Äquipotentialfläche. Daher vergleichen wir die Gravitationspotentiale in Kopenhagen und am Grönland gegenüberliegenden Punkt.

Die Punktmasse, die den Eisschild repräsentiert, beträgt

$$M = \rho_{\text{ice}} V_{\text{ice}} = (917)(3.4548 \times 10^{15}) = 3.17 \times 10^{18} \text{ kg.}$$

Sei R der Erdradius und h eine kleine Verschiebung der Meeresoberfläche gegenüber einer Referenzkugel. Der Beitrag der Erde zum Gravitationspotential pro Masseneinheit ist

$$\Phi_E(R+h) = -\frac{Gm_E}{R+h} \approx -\frac{Gm_E}{R} + gh,$$

wobei $h \ll R$ gilt. Die Eismasse liefert den Beitrag

$$\Phi_{\text{ice}} = -\frac{GM}{d},$$

wobei d der geradlinige Abstand zur Eismasse ist.

In erster Ordnung kann d auf der Referenzkugel berechnet werden: Änderungen um wenige Meter sind gegenüber Entfernungen von Millionen Metern vernachlässigbar. Gleiche Potentiale an der Oberfläche erfordern daher

$$gh_{\text{CPH}} - \frac{GM}{d_{\text{CPH}}} = gh_{\text{OPP}} - \frac{GM}{d_{\text{OPP}}}.$$

Somit gilt

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = \frac{GM}{g} \left(\frac{1}{d_{\text{CPH}}} - \frac{1}{d_{\text{OPP}}} \right).$$

Die angegebenen 3500 km sind eine Bogenlänge s , sodass sich für den Mittelpunktswinkel und die Sehnenlänge ergibt:

$$\theta = \frac{s}{R}, \quad d_{\text{CPH}} = 2R \sin \frac{\theta}{2} = 2R \sin \frac{s}{2R}.$$

Am gegenüberliegenden Punkt gilt

$$d_{\text{OPP}} = 2R.$$

Folglich gilt

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = \frac{GM}{2gR} \left[\frac{1}{\sin(s/(2R))} - 1 \right].$$

Aus der angegebenen Erdoberfläche folgt $R = \sqrt{A_E/(4\pi)} \approx 6.37 \times 10^6$ m, in Übereinstimmung mit dem angegebenen Radius. Mit $R = 6.38 \times 10^6$ m ergibt sich

$$\theta = 0.5486, \quad d_{\text{CPH}} = 3.456 \times 10^6 \text{ m}, \quad d_{\text{OPP}} = 1.276 \times 10^7 \text{ m}.$$

Damit folgt

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = \frac{(6.67 \times 10^{-11})(3.168 \times 10^{18})}{9.82} \left(\frac{1}{3.456 \times 10^6} - \frac{1}{1.276 \times 10^7} \right) = 4.54 \text{ m}.$$

Daher gilt

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} \approx 4.5 \text{ m}.$$

Das positive Vorzeichen bedeutet, dass die Gravitationsanziehung Grönlands die Meeresoberfläche im Gleichgewicht bei Kopenhagen gegenüber der gegenüberliegenden Seite der Erde anhebt. Eine gemeinsame Höhenverschiebung, die zur Erhaltung des Ozeanvolumens erforderlich ist, fällt aus dieser Differenz heraus.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.