

المسألة 1: نيزك ماريبو

مقدمة

الجُسيم النيزكي هو جسيم صغير (عادةً أصغر من 1 m) مصدره مذنب أو كويكب. ويُسمَّى الجسيم النيزكي الذي يصطدم بالأرض نيزكًا.

في ليلة 17 يناير 2009، رأى كثير من الناس بالقرب من بحر البلطيق المسار المتوهج، أو الكرة النارية، لجسيم نيزكي يسقط عبر الغلاف الجوي للأرض. وفي السويد، سجّلت كاميرا مراقبة مقطع فيديو للحدث، انظر الشكل 1.1(a). ومن هذه الصور وروايات شهود العيان، أمكن تضيق نطاق منطقة الاصطدام، وبعد ستة أسابيع عُثِرَ على نيزك كتلته 0.025 kg بالقرب من بلدة ماريبو في جنوب الدنمارك. وأظهرت القياسات التي أُجريت على النيزك، الذي سُمِّي الآن ماريبو، وعلى مداره في السماء نتائج مثيرة للاهتمام. فقد كانت سرعته عند دخوله الغلاف الجوي عاليةً على نحو استثنائي. ويُظهر عمره، البالغ 4.567×10^9 سنة، أنه تكوّن بعد نشأة المجموعة الشمسية بوقت قصير. ومن المحتمل أن يكون نيزك ماريبو جزءًا من المذنب إنكه.

سرعة ماريبو

كانت الكرة النارية تتحرك باتجاه الغرب، بزاوية 285° بالنسبة إلى الشمال، نحو الموقع الذي عُثِرَ فيه لاحقًا على النيزك، كما هو موضَّح تخطيطيًا في الشكل 1.1. وقد عُثِرَ على النيزك على مسافة 195 km من كاميرا المراقبة، في الاتجاه 230° بالنسبة إلى الشمال.

الجزء	السؤال	الدرجات
1.1	استخدم هذه المعلومات والبيانات الواردة في الشكل 1.1 لحساب متوسط سرعة ماريبو في الفترة الزمنية بين الإطارين 155 و 161. يمكن إهمال كل من انحناء الأرض وقوة الجاذبية المؤثرة في الجسيم النيزكي.	1.3

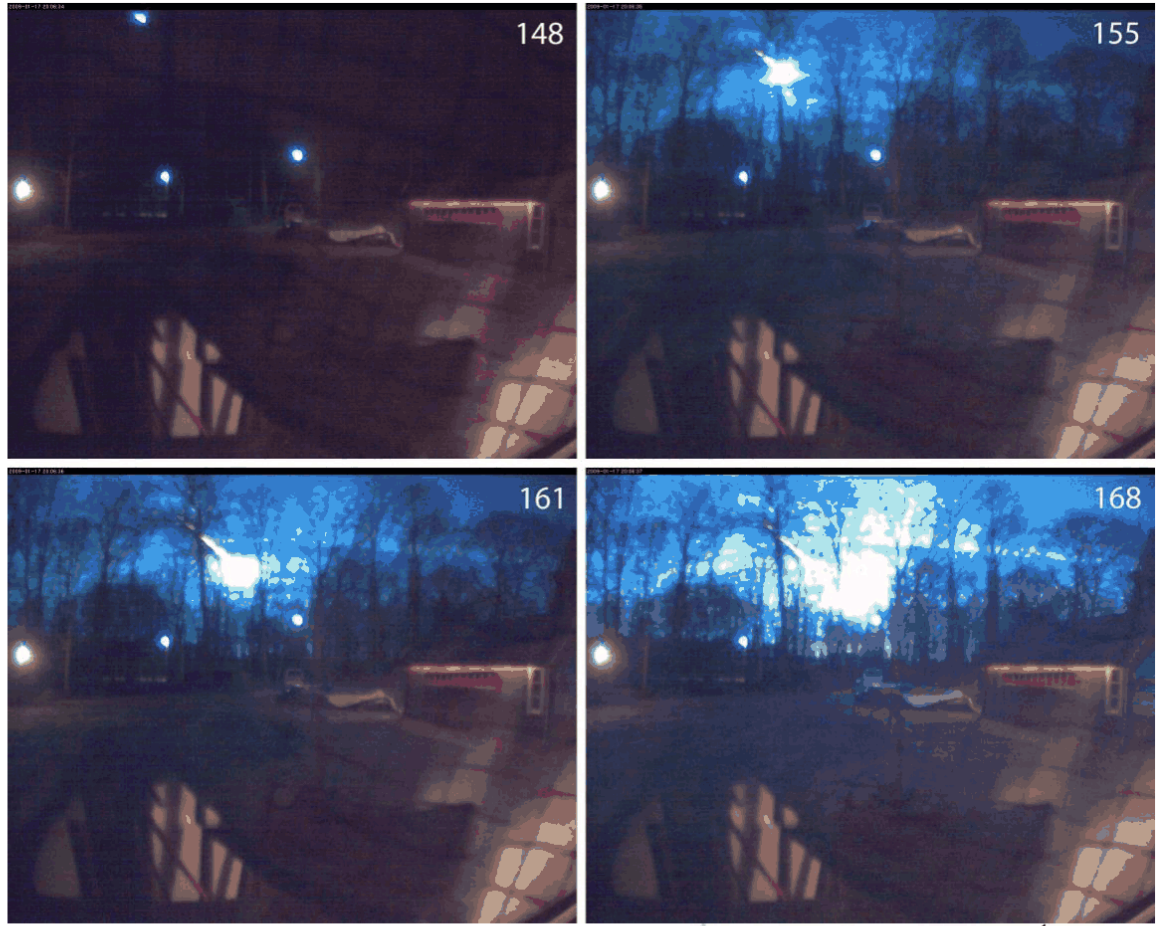
عبر الغلاف الجوي، وهل ينصهر؟

يعتمد احتكاك الهواء بجسيم نيزكي يتحرك في الطبقات العليا من الغلاف الجوي اعتمادًا معقدًا على شكل الجسيم النيزكي وسرعته، وعلى درجة حرارة الغلاف الجوي وكثافته. وكتقريب معقول، تُعطى قوة الاحتكاك F في الطبقات العليا من الغلاف الجوي بالعلاقة $F = k\rho_{\text{atm}}Av^2$ ، حيث k ثابت، ρ_{atm} كثافة الغلاف الجوي، A مساحة المقطع العرضي المسقط للنيزك، و v سرعته.

تُعتمد الافتراضات التبسيطية الآتية لتحليل الجسيم النيزكي: كان الجسم الداخل إلى الغلاف الجوي كرةً كتلتها $m_M = 30 \text{ kg}$ ونصف قطرها $R_M = 0.13 \text{ m}$ ، ودرجة حرارتها $T_0 = 200 \text{ K}$ ، وسرعتها $v_M = 2.91 \times 10^4 \text{ m/s}$. وكثافة الغلاف الجوي ثابتة (وتساوي قيمتها على ارتفاع 40 km فوق سطح الأرض)، $\rho_{\text{atm}} = 4.1 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$ ، ومعامل الاحتكاك هو $k = 0.60$.

الجزء	السؤال	الدرجات
1.2a	قدّر الزمن اللازم بعد دخول الجسيم النيزكي الغلاف الجوي حتى تنخفض سرعته بنسبة 10 % من v_M إلى $0.90v_M$. يمكنك إهمال قوة الجاذبية المؤثرة في الجسيم النيزكي وافترض أنه يحتفظ بكتلته وشكله.	0.7
1.2b	احسب عدد المرات التي تتجاوز بها الطاقة الحركية E_{kin} للجسيم النيزكي عند دخوله الغلاف الجوي الطاقة E_{melt} اللازمة لصلبه بالكامل (انظر ورقة البيانات).	0.3

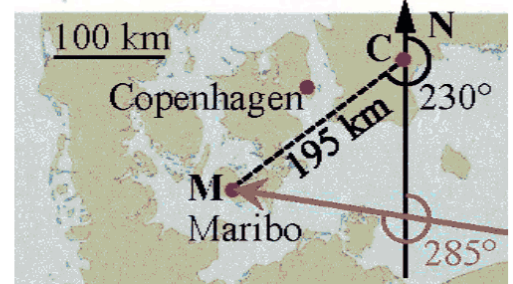
(a)



(b)

Frame	Time	Azimuth	Altitude
155	1.46 s	215°	19.2°
161	2.28 s	221°	14.7°
Landing at M		230°	0.0°

(c)



الشكل 1.1 (a) السميت هو الموضع الزاوي المقاس في اتجاه عقارب الساعة بدءاً من الشمال في المستوى الأفقي، والارتفاع هو الموضع الزاوي فوق الأفق. سلسلة من الإطارات التي سجلتها كاميرا المراقبة في السويد، تُظهر حركة ماريبو بوصفه كرةً ناريةً أثناء هبوطه عبر الغلاف الجوي. (b) بيانات من إطارين تبيّن الزمن والاتجاه (السميت) بالدرجات، كما تراه الكاميرا (C)، والارتفاع فوق الأفق (زاوية الارتفاع) بالدرجات. (c) رسم تخطيطي لاتجاه مسار ماريبو (السهم الأرجواني) بالنسبة إلى الشمال (N)، واتجاه موقع سقوطه (M) في الدنمارك كما تراه الكاميرا (C).

تسخّن ماريبو أثناء سقوطه في الغلاف الجوي

عندما دخل الجسم النيزكي الصخري ماريبو الغلاف الجوي بسرعة تفوق سرعة الصوت، ظهر ككرة نارية لأن الهواء المحيط به كان متوهّجاً. ومع ذلك، لم تسخن إلا الطبقة الخارجية القصوى من ماريبو. افترض أن ماريبو كرة متجانسة كثافتها ρ_{sm} ، وسعتها الحرارية النوعية c_{sm} ، وموصليتها الحرارية k_{sm} (للقيم، انظر ورقة البيانات). وافترض أيضاً أن درجة حرارته عند دخول الغلاف الجوي كانت $T_0 = 200 \text{ K}$. وأثناء سقوطه عبر الغلاف الجوي، كانت درجة حرارة سطحه ثابتة عند $T_s = 1000 \text{ K}$ بفعل الاحتكاك بالهواء، ممّا أدّى إلى تسخين داخله تدريجياً.

بعد سقوط ماريبو مدةً زمنية t في الغلاف الجوي، تكون قشرة خارجية منه سُمكها x قد سُخّنت إلى درجة حرارة أعلى بكثير من T_0 . ويمكن تقدير هذا السُمك بالتحليل البُعدي على صورة حاصل ضرب بسيط لقوى المعاملات الديناميكية الحرارية:

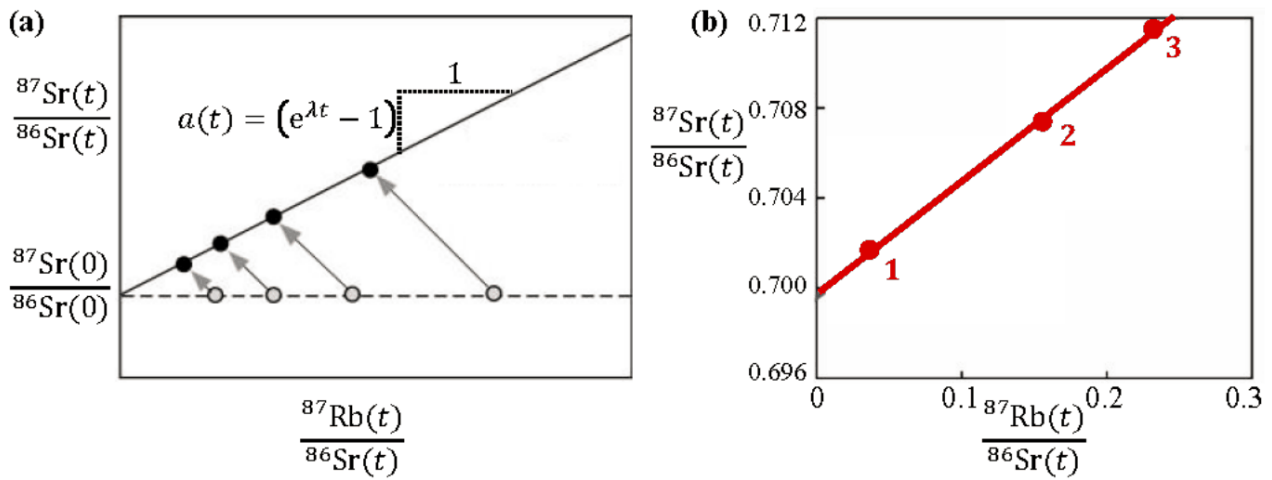
$$x \approx t^\alpha \rho_{sm}^\beta c_{sm}^\gamma k_{sm}^\delta$$

الجزء	السؤال	الدرجات
1.3a	حدّد بالتحليل البُعدي (تحليل الوحدات) قيم الأسس الأربعة $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.	0.6
1.3b	احسب السُمك x بعد زمن سقوط $t = 5$ s، وحدّد النسبة x/R_M .	0.4

عمر النيزك

قد تختلف الخواص الكيميائية للعناصر المشعّة، لذا فإن بعض المعادن، أثناء تبلور المعادن في نيزك معيّن، تحتوي على نسبة عالية من عنصر مشعّ محدّد، بينما تحتوي معادن أخرى على نسبة منخفضة منه. ويمكن استخدام هذا الاختلاف لتحديد عمر النيزك بالتأريخ الإشعاعي لمعادنه المشعّة.

كمثال محدّد، ندرس النظير ^{87}Rb (العنصر رقم 37)، الذي يضمحلّ إلى النظير المستقر ^{87}Sr (العنصر رقم 38) بعمر نصف مقداره $T_{1/2} = 4.9 \times 10^{10}$ سنة، وذلك بالنسبة إلى النظير المستقر ^{86}Sr . عند التبلور، كانت النسبة $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ متطابقة في جميع المعادن، بينما كانت النسبة $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ مختلفة. ومع مرور الزمن، تتناقص كمية ^{87}Rb بفعل الاضمحلال، وتزداد تبعاً لذلك كمية ^{87}Sr . ونتيجةً لذلك، تكون النسبة $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ مختلفة اليوم. في الشكل 1.2(a)، تشير النقاط الواقعة على الخط الأفقي إلى النسبة $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ في معادن مختلفة عند تبلورها.



الشكل 1.2 (a) النسبة $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ في معادن مختلفة عند زمن التبلور $t = 0$ (الدوائر الفارغة) وفي الوقت الحاضر (الدوائر المصمتة). (b) خط تساوي العمر لثلاث عينات معدنية مختلفة مأخوذة من نيزك في الوقت الحاضر.

الجزء	السؤال	الدرجات
1.4a	اكتب مخطّط الاضمحلال لتحوّل ^{87}Rb إلى ^{87}Sr .	0.3
1.4b	بيّن أن تمثيل النسبة الحالية $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ بدلالة النسبة الحالية $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ في عينات معدنية مختلفة من النيزك نفسه يعطي خطاً مستقيماً، يُسمّى خط تساوي العمر، وميله $a(t) = (e^{\lambda t} - 1)$. هنا t هو الزمن المنقضي منذ تكوّن المعادن، و λ هو ثابت الاضمحلال الذي يتناسب عكسياً مع عمر النصف $T_{1/2}$.	0.7
1.4c	حدّد عمر النيزك τ_M باستخدام خط تساوي العمر في الشكل 1.2(b).	0.4

المذنب إنكه، الذي قد يكون مصدر ماريبو

في مدار المذنب إنكه حول الشمس، تبلغ المسافتان الدنيا والعظمى بينه وبين الشمس $a_{\min} = 4.95 \times 10^{10}$ m و $a_{\max} = 6.16 \times 10^{11}$ m، على الترتيب.

الجزء	السؤال	الدرجات
1.5	احسب الزمن الدوري المداري t_{Encke} للمذنب إنكه.	0.6

عواقب اصطدام كويكب بالأرض

قبل 65 مليون سنة، اصطدم بالأرض كويكب ضخيم كثافته $\rho_{\text{ast}} = 3.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ، ونصف قطره $R_{\text{ast}} = 5.0 \text{ km}$ ، وسرعته النهائية $v_{\text{ast}} = 2.5 \times 10^4 \text{ m/s}$. وأدّى هذا الاصطدام إلى انقراض معظم أشكال الحياة على الأرض وتكوّن فوهة تشيكشولوب الهائلة. افترض أن كويكباً مماثلاً يصطدم بالأرض اليوم اصطداماً عديم المرونة تماماً، واستخدم حقيقة أن عزم القصور الذاتي للأرض يساوي 0.83 من عزم القصور الذاتي لكرة متجانسة لها الكتلة ونصف القطر نفسيهما. وعزم القصور الذاتي لكرة متجانسة كتلتها M ونصف قطرها R هو $\frac{2}{5}MR^2$. أهمل التغيرات في مدار الأرض.

الجزء	السؤال	الدرجات
1.6a	ليصطدم الكويكب بالقطب الشمالي. أوجد أقصى تغيّر في الاتجاه الزاوي لمحور الأرض بعد الاصطدام.	0.7
1.6b	ليصطدم الكويكب بخط الاستواء اصطداماً شعاعياً. أوجد التغيّر $\Delta\tau_{\text{vrt}}$ في مدة دورة واحدة للأرض بعد الاصطدام.	0.7
1.6c	ليصطدم الكويكب بخط الاستواء اصطداماً مماسياً في المستوى الاستوائي. أوجد التغيّر $\Delta\tau_{\text{tan}}$ في مدة دورة واحدة للأرض بعد الاصطدام.	0.7

أقصى سرعة اصطدام

اعتبر جسمًا سماويًا مرتبطًا بالجاذبية ضمن المجموعة الشمسية، يصطدم بسطح الأرض بسرعة v_{imp} . في البداية، يمكن إهمال تأثير مجال جاذبية الأرض في الجسم. أهمل الاحتكاك في الغلاف الجوي، وتأثير الأجرام السماوية الأخرى، ودوران الأرض.

الجزء	السؤال	الدرجات
1.7	احسب $v_{\text{imp}}^{\text{max}}$ ، وهي أكبر قيمة ممكنة لـ v_{imp} .	1.6

ورقة البيانات: جدول المعاملات الفيزيائية

المعامل الفيزيائي	القيمة
سرعة الضوء في الفراغ	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
ثابت بلانك مقسوماً على 2π	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
ثابت الجاذبية	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
تسارع الجاذبية	$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$
الشحنة الأولية	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
السماحية الكهربائية للفراغ	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
كتلة الإلكترون	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
ثابت أفوغادرو	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
ثابت بولتزمان	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
النيزك الصخري، الحرارة النوعية	$c_{\text{sm}} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
النيزك الصخري، الموصلية الحرارية	$k_{\text{sm}} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
النيزك الصخري، الكثافة	$\rho_{\text{sm}} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
النيزك الصخري، درجة الانصهار	$T_{\text{sm}} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$
النيزك الصخري، الحرارة النوعية للانصهار	$L_{\text{sm}} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
الفضة، الكتلة المولية	$M_{\text{Ag}} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$
الفضة، الكثافة	$\rho_{\text{Ag}} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
الفضة، السعة الحرارية النوعية	$c_{\text{Ag}} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
الماء، الكتلة المولية	$M_{\text{wa}} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$
الماء، الكثافة	$\rho_{\text{wa}} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$

المعامل الفيزيائي	القيمة
الماء، السعة الحرارية النوعية	$c_{wa} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
الماء، حرارة التبخر	$L_{wa} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$
الماء، درجة الغليان	$T_{100} = 100^\circ \text{C} = 373.15 \text{ K}$
الجليد، كثافة الجليد النهري	$\rho_{ice} = 0.917 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
البخار، السعة الحرارية النوعية	$c_{st} = 2.080 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
كتلة الأرض	$m_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
نصف قطر الأرض	$R_E = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$
كتلة الشمس	$m_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
نصف قطر الشمس	$R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$
متوسط المسافة بين الشمس والأرض	$a_E = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- 1.1: $\bar{v} = 2.86 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 28.6 \text{ km s}^{-1}$
- 1.2a: $t = 0.88 \text{ s}$
- 1.2b: $E_{kin}/E_{melt} \approx 2.1 \times 10^2$
- 1.3a: $\alpha = \delta = \frac{1}{2}, \quad \beta = \gamma = -\frac{1}{2}$ ، ومن ثم $x \approx \sqrt{k_{sm}t/(\rho_{sm}c_{sm})}$
- 1.3b: $x \approx 1.6 \text{ mm}, \quad x/R_M \approx 0.012 = 1.2\%$
- 1.4a: ${}^{87}_{37}\text{Rb} \rightarrow {}^{87}_{38}\text{Sr} + {}^0_{-1}e + \bar{\nu}_e$
- 1.4b: $Y(t) = Y_0 + (e^{\lambda t} - 1)X(t)$ ، حيث $X = {}^{87}\text{Rb}/{}^{86}\text{Sr}$ ، و $\lambda = \ln 2/T_{\frac{1}{2}}$
- 1.4c: $\tau_M \approx 3.5 \times 10^9 \text{ yr}$ ، من ميل الرسم البياني البالغ نحو 0.050.
- 1.5: $t_{\text{Encke}} = 1.05 \times 10^8 \text{ s} \approx 3.32 \text{ yr}$
- 1.6a: $\theta_{\max} \approx 4.3 \times 10^{-8} \text{ rad} \approx 2.4 \times 10^{-6} \text{ degree}$
- 1.6b: $\Delta\tau_{\text{vrt}} \approx +6.8 \times 10^{-5} \text{ s}$
- 1.6c: $\Delta\tau_{\text{tan}} \approx -3.6 \times 10^{-3} \text{ s}$ لاصطدام في اتجاه الدوران؛ و $\Delta\tau_{\text{tan}} \approx +3.8 \times 10^{-3} \text{ s}$ لاصطدام عكس اتجاه الدوران.
- 1.7: $v_{\text{imp}}^{\max} \approx 7.27 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 72.7 \text{ km s}^{-1}$ ، وتُفهم هذه القيمة بوصفها حدًا علويًا حديًا لجسم مرتبط بالجاذبية.

الحل

1.1

لنرمز بـ C إلى الكاميرا، وبـ M إلى موقع السقوط، وبـ P_i إلى الإسقاط الأفقي لموضع الجسم النيزكي في الإطار i . نكتب

$$CM = D = 195 \text{ km}, \quad CP_i = r_i, \quad MP_i = s_i.$$

الكميات المرصودة هي:

الإطار	الزمن t_i	السمت ϕ_i	زاوية الارتفاع h_i
155	1.46 s	215°	19.2°
161	2.28 s	221°	14.7°

اتجاه المسار الأفقي هو 285° . وعند النظر من M ، يكون سمت الكاميرا 50° ، بينما يكون سمت المواضع السابقة للجسيم النيزكي 105° . ومن ثم فإن الزاوية عند M في المثلث CMP_i تساوي 55° . أما الزاوية عند C فتساوي $230^\circ - \phi_i$.

لذلك يعطي قانون الجيوب

$$r_i = D \frac{\sin 55^\circ}{\sin(285^\circ - \phi_i)}, \quad s_i = D \frac{\sin(230^\circ - \phi_i)}{\sin(285^\circ - \phi_i)}.$$

وبما أننا نهمل انحناء الأرض، فإن ارتفاع الجسيم النيزكي هو

$$z_i = r_i \tan h_i.$$

عددياً،

الإطار	r_i (km)	s_i (km)	z_i (km)
155	169.986	53.709	59.195
161	177.721	33.940	46.624

إذاً المسافتان المقطوعتان أفقياً ورأسياً هما

$$\Delta s = 19.769 \text{ km}, \quad |\Delta z| = 12.571 \text{ km}.$$

وباعتبار المسار مستقيماً خلال هذه الفترة القصيرة،

$$\Delta \ell = \sqrt{(\Delta s)^2 + (\Delta z)^2} = 23.428 \text{ km}.$$

الزمن المنقضي هو $2.28 - 1.46 = 0.82 \text{ s}$ ، ومن ثم

$$\bar{v} = \frac{23.428 \text{ km}}{0.82 \text{ s}} = 28.6 \text{ km s}^{-1}.$$

في الأجزاء اللاحقة، نستخدم السرعة الابتدائية المحددة على نحو مستقل $v_M = 2.91 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$.

1.2a

المساحة المسقطة للكرة هي $A = \pi R_M^2$. ويعطي قانون نيوتن الثاني، مع إهمال الجاذبية،

$$m_M \frac{dv}{dt} = -k \rho_{\text{atm}} \pi R_M^2 v^2.$$

بفصل المتغيرات والتكامل من v_M إلى v ،

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_M} = \frac{k \rho_{\text{atm}} \pi R_M^2}{m_M} t.$$

عندما $v = 0.90 v_M$ ،

$$t = \frac{m_M}{k \rho_{\text{atm}} \pi R_M^2 v_M} \left(\frac{1}{0.90} - 1 \right).$$

بالتعويض نحصل على

$$t = \frac{30}{(0.60)(4.1 \times 10^{-3})\pi(0.13)^2(2.91 \times 10^4)} \left(\frac{1}{0.90} - 1 \right) = 0.877 \text{ s}.$$

إذاً،

$$t \approx 0.88 \text{ s.}$$

1.2b

يتطلب الانصهار الكامل تسخين المادة من T_0 إلى درجة انصهارها، وتزويدها بالحرارة الكامنة للانصهار. وباستخدام الحرارة النوعية الثابتة المعطاة في ورقة البيانات،

$$E_{\text{melt}} = m_{\text{M}} [c_{\text{sm}}(T_{\text{sm}} - T_0) + L_{\text{sm}}].$$

إذاً

$$E_{\text{melt}} = 30 [(1.2 \times 10^3)(1700 - 200) + 2.6 \times 10^5] = 6.18 \times 10^7 \text{ J.}$$

الطاقة الحركية الابتدائية هي

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_{\text{M}} v_{\text{M}}^2 = \frac{1}{2} (30)(2.91 \times 10^4)^2 = 1.2702 \times 10^{10} \text{ J.}$$

وبالتالي،

$$\frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{melt}}} = \frac{v_{\text{M}}^2}{2[c_{\text{sm}}(T_{\text{sm}} - T_0) + L_{\text{sm}}]} = 205.5 \approx 2.1 \times 10^2.$$

لا تعني هذه المقارنة بين الطاقتين حدوث انصهار كامل؛ إذ لا يلزم أن تنتقل الطاقة الحركية على هيئة حرارة إلى جميع أنحاء الجسم النيزكي.

1.3a

نستخدم M, L, T, Θ لأبعاد الكتلة والطول والزمن ودرجة الحرارة. والأبعاد ذات الصلة هي

$$[\rho_{\text{sm}}] = ML^{-3}, \quad [c_{\text{sm}}] = L^2 T^{-2} \Theta^{-1}, \quad [k_{\text{sm}}] = ML T^{-3} \Theta^{-1}.$$

إذاً،

$$[t^\alpha \rho_{\text{sm}}^\beta c_{\text{sm}}^\gamma k_{\text{sm}}^\delta] = M^{\beta+\delta} L^{-3\beta+2\gamma+\delta} T^{\alpha-2\gamma-3\delta} \Theta^{-\gamma-\delta}.$$

وبمساواة ذلك ببعد x ، وهو L ، نحصل على

$$\begin{aligned} \beta + \delta &= 0, \\ -3\beta + 2\gamma + \delta &= 1, \\ \alpha - 2\gamma - 3\delta &= 0, \\ -\gamma - \delta &= 0. \end{aligned}$$

تعطي المعادلتان الأولى والرابعة $\beta = \gamma = -\delta$. ثم تعطي معادلة الطول $2\delta = 1$ ، وتعطي معادلة الزمن $\alpha = \delta$. ومن ثم

$$\alpha = \delta = \frac{1}{2}, \quad \beta = \gamma = -\frac{1}{2}.$$

والتقدير الناتج هو

$$x \approx \sqrt{\frac{k_{\text{sm}} t}{\rho_{\text{sm}} c_{\text{sm}}}}.$$

يحدد التحليل البُعدي الأسس، لكنه يترك معاملاً عديم الأبعاد غير محدد. ويأخذ التقدير المطلوب هذا المعامل مساوياً للواحد.

1.3b

الانتشارية الحرارية هي

$$\chi = \frac{k_{\text{sm}}}{\rho_{\text{sm}} c_{\text{sm}}} = \frac{2.0}{(3.3 \times 10^3)(1.2 \times 10^3)} = 5.05 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

عند $t = 5 \text{ s}$

$$x \approx \sqrt{\chi t} = \sqrt{(5.05 \times 10^{-7})(5)} = 1.589 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

إذًا

$$\boxed{x \approx 1.6 \text{ mm}}, \quad \boxed{\frac{x}{R_M} = \frac{1.589 \times 10^{-3}}{0.13} \approx 0.012 = 1.2\%}.$$

العمق الذي يصل إليه التسخين صغير مقارنةً بنصف القطر، وهو ما يتوافق مع ارتفاع درجة حرارة طبقة خارجية فقط ارتفاعاً ملحوظاً أثناء السقوط.

1.4a

يزداد العدد الذري بمقدار واحد، بينما يبقى العدد الكتلي دون تغيير. وهذا اضمحلال بيتا السالب:



ينبعث إلكترون وضديد نيوترينو إلكتروني.

1.4b

نعتبر عينة معدنية واحدة نظاماً مغلقاً بعد التبلور. لكن $N_{\text{Rb}}(t)$ و $N_{87}(t)$ و N_{86} أعداد نوى ${}^{87}\text{Rb}$ ، و ${}^{87}\text{Sr}$ ، و ${}^{86}\text{Sr}$. ويظل عدد النوى المرجعية المستقرة N_{86} ثابتاً.

يعطي الاضمحلال الإشعاعي

$$N_{\text{Rb}}(t) = N_{\text{Rb}}(0)e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}}.$$

تنتج كل نواة روبيدوم تضمحل نواة سترانشيوم-87 واحدة، ومن ثم

$$\begin{aligned} N_{87}(t) &= N_{87}(0) + N_{\text{Rb}}(0) - N_{\text{Rb}}(t) \\ &= N_{87}(0) + N_{\text{Rb}}(t)(e^{\lambda t} - 1). \end{aligned}$$

بالقسمة على N_{86} ، نعرّف

$$Y(t) = \frac{N_{87}(t)}{N_{86}}, \quad X(t) = \frac{N_{\text{Rb}}(t)}{N_{86}}, \quad Y_0 = \frac{N_{87}(0)}{N_{86}}.$$

عندئذٍ

$$\boxed{Y(t) = Y_0 + (e^{\lambda t} - 1)X(t).}$$

لجميع العينات النسبة الابتدائية نفسها لنظيري السترونشيوم Y_0 ، والعمر نفسه t . ولذلك تقع قيمها الحالية على خط مستقيم مقطعه على المحور الرأسي Y_0 ، وميله

$$\boxed{a(t) = e^{\lambda t} - 1.}$$

عند التبلور يكون الميل صفراً؛ ثم يزداد مع العمر.

1.4c

يمرّ الخط في الشكل 1.2(b) تقريباً بالنقطتين

$$(X, Y) \approx (0.05, 0.702) \quad \text{و} \quad (0.25, 0.712).$$

ولذلك يكون ميله تقريباً

$$a \approx \frac{0.712 - 0.702}{0.25 - 0.05} = 0.050.$$

بحلّ نتيجة الجزء 1.4b لإيجاد العمر،

$$\tau_M = \frac{\ln(1+a)}{\lambda} = \frac{T_{\frac{1}{2}}}{\ln 2} \ln(1+a).$$

ومن ثم

$$\tau_M \approx \frac{4.9 \times 10^{10} \text{ yr}}{\ln 2} \ln(1.050) = 3.45 \times 10^9 \text{ yr}.$$

مع مراعاة دقة القراءة من الرسم البياني،

$$\tau_M \approx 3.5 \times 10^9 \text{ yr}.$$

يشير الشكل 1.2(b) إلى عينات من «نيزك ما»؛ ولا يلزم أن يساوي العمر المستنتج منه عمر ماريبو المذكور في المقدمة.

1.5

في المدار الإهليلجي، يساوي مجموع مسافتي الحضيض الشمسي والأوج الشمسي ضعف نصف المحور الأكبر:

$$a = \frac{a_{\min} + a_{\max}}{2} = \frac{4.95 \times 10^{10} + 6.16 \times 10^{11}}{2} = 3.3275 \times 10^{11} \text{ m}.$$

بإهمال كتلة المذنب مقارنةً بكتلة الشمس، يعطي قانون كبلر الثالث

$$t_{\text{Encke}}^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm_S}.$$

إذًا

$$t_{\text{Encke}} = 2\pi \sqrt{\frac{(3.3275 \times 10^{11})^3}{(6.67 \times 10^{-11})(1.99 \times 10^{30})}} = 1.0468 \times 10^8 \text{ s}.$$

وباستخدام $1 \text{ yr} \approx 3.156 \times 10^7 \text{ s}$ ،

$$t_{\text{Encke}} \approx 1.05 \times 10^8 \text{ s} \approx 3.32 \text{ yr}.$$

1.6a

نحسب أولاً الكميات المستخدمة في أسئلة الاصطدام الثلاثة جميعها. كتلة الكويكب هي

$$m_{\text{ast}} = \frac{4}{3}\pi R_{\text{ast}}^3 \rho_{\text{ast}} = \frac{4}{3}\pi (5.0 \times 10^3)^3 (3.0 \times 10^3) = 1.571 \times 10^{15} \text{ kg}.$$

عزم القصور الذاتي للأرض هو

$$I_E = 0.83 \frac{2}{5} m_E R_E^2 = 8.068 \times 10^{37} \text{ kg m}^2.$$

بأخذ زمن دورانها الابتدائي مساوياً لـ $\tau_E = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$ ،

$$\omega_E = \frac{2\pi}{\tau_E} = 7.272 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

ويكون زخمها الزاوي الناتج عن دورانها حول محورها

$$L_E = I_E \omega_E = 5.867 \times 10^{33} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

نعامل الكويكب الملتحم بالأرض ككتلة نقطية عند سطحها. فالتصحیحات الناتجة عن حجمه وإزاحة مركز الكتلة المشترك قابلة للإهمال.

عند القطب الشمالي، يكون متجه موضع الكويكب موازياً لمحور دوران الأرض الابتدائي. ولذلك فإن زخمه الزاوي

$$\mathbf{L}_{\text{ast}} = \mathbf{r} \times m_{\text{ast}} \mathbf{v}_{\text{ast}}$$

يكون عمودياً على الزخم الزاوي الابتدائي لدوران الأرض حول محورها. ويبلغ مقداره أكبر قيمة في حالة الاصطدام المماسي:

$$L_{\text{ast}}^{\max} = m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}} = 2.505 \times 10^{26} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

وعندئذٍ يعطي انحفاظ الزخم الزاوي، إلى الرتبة الأولى في نسبة كتلة الكويكب الصغيرة إلى كتلة الأرض،

$$\tan \theta_{\max} \simeq \frac{L_{\text{ast}}^{\max}}{L_E}.$$

الزاوية صغيرة جداً، ومن ثم

$$\theta_{\max} \simeq \frac{m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}}}{I_E \omega_E} = 4.27 \times 10^{-8} \text{ rad} \approx 2.4 \times 10^{-6} \text{ degree.}$$

لا يسهم التغير في موتر القصور الذاتي إلا بتصحيح من رتبة أعلى لهذا الميل الصغير.

1.6b

في الاصطدام الشعاعي، يكون الزخم الزاوي للكويكب القادم حول مركز الأرض صفراً. وبعد التصاقه بخط الاستواء، يزداد عزم القصور الذاتي إلى

$$I' = I_E + m_{\text{ast}} R_E^2.$$

يتطلب انحفاظ الزخم الزاوي

$$I_E \omega_E = (I_E + m_{\text{ast}} R_E^2) \omega'.$$

وبما أن الزمن الدوري يتناسب عكسياً مع السرعة الزاوية،

$$\tau' = \tau_E \left(1 + \frac{m_{\text{ast}} R_E^2}{I_E} \right).$$

إذاً،

$$\Delta \tau_{\text{vrt}} = \tau_E \frac{m_{\text{ast}} R_E^2}{I_E} = \tau_E \frac{m_{\text{ast}}}{0.332 m_E}.$$

عددياً،

$$\Delta \tau_{\text{vrt}} = 6.85 \times 10^{-5} \text{ s} \approx +6.8 \times 10^{-5} \text{ s.}$$

يزداد طول اليوم بنحو $68 \mu\text{s}$.

1.6c

لاتجاه الاصطدام المماسي أثر في النتيجة. لتكن $\sigma = +1$ لاتجاه الاصطدام في اتجاه الدوران، الذي يضيف زخماً زاوياً إلى دوران الأرض حول محورها، و $\sigma = -1$ للاتصدام عكس اتجاه الدوران.

يعطي انحفاظ الزخم الزاوي

$$I_E \omega_E + \sigma m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}} = (I_E + m_{\text{ast}} R_E^2) \omega'.$$

نعرف الكميتين الصغيرتين عديمتي الأبعاد

$$\epsilon = \frac{m_{\text{ast}} R_E^2}{I_E} = 7.925 \times 10^{-10}, \quad \eta = \frac{m_{\text{ast}} R_E v_{\text{ast}}}{I_E \omega_E} = 4.270 \times 10^{-8}.$$

الزمن الدوري الجديد والتغير فيه هما

$$\tau' = \tau_E \frac{1 + \epsilon}{1 + \sigma \eta},$$

$$\Delta \tau_{\text{tan}} = \tau_E \frac{\epsilon - \sigma \eta}{1 + \sigma \eta}.$$

وبما أن كلا من ϵ و η صغير جداً، فإن التعبير الآتي دقيق أيضاً

$$\Delta \tau_{\text{tan}} \approx \tau_E (\epsilon - \sigma \eta).$$

إذاً:

• اصطدام في اتجاه الدوران:

$$\Delta\tau_{\text{tan}} = -3.621 \times 10^{-3} \text{ s} \approx -3.6 \text{ ms.}$$

• اصطدام عكس اتجاه الدوران:

$$\Delta\tau_{\text{tan}} = +3.758 \times 10^{-3} \text{ s} \approx +3.8 \text{ ms.}$$

تؤدي الزيادة في عزم القصور الذاتي إلى إطالة اليوم في كلتا الحالتين. أما الزخم الزاوي القادم فيحدث الأثر الأكبر ويحدد الإشارة.

1.7

ننظر أولاً في حركة الجسم بالنسبة إلى الشمس، قبل أن تصبح جاذبية الأرض مؤثرة بدرجة ملحوظة. عند مسافة مدار الأرض، تكون الطاقة المدارية النوعية لجسم مرتبط بالجاذبية سالبة:

$$\mathcal{E} = \frac{u^2}{2} - \frac{Gm_S}{a_E} < 0.$$

ولذلك تحد سرعة الإفلات المحلية من جاذبية الشمس سرعته بالنسبة إلى الشمس:

$$u < u_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2Gm_S}{a_E}}.$$

الحالة الحدية هي مدار تؤول طاقة ارتباطه إلى الصفر.

بتقريب مدار الأرض إلى دائرة عند المسافة المتوسطة المعطاة، تكون سرعتها المدارية

$$v_E = \sqrt{\frac{Gm_S}{a_E}}.$$

تتحقق أكبر سرعة اقتراب نسبية عندما يتحرك الجسم في اتجاه معاكس تماماً لحركة الأرض المدارية. ومن ثم

$$v_{\infty}^{\text{max}} = u_{\text{max}} + v_E = (1 + \sqrt{2})\sqrt{\frac{Gm_S}{a_E}}.$$

عددياً،

$$v_E = 29.75 \text{ km s}^{-1}, \quad u_{\text{max}} = 42.07 \text{ km s}^{-1},$$

ومن ثم

$$v_{\infty}^{\text{max}} = 71.82 \text{ km s}^{-1}.$$

تزيد جاذبية الأرض سرعة الجسم أكثر. وأثناء اقترابه من الأرض، يعطي انحفاظ الطاقة الميكانيكية

$$\frac{1}{2}v_{\text{imp}}^2 - \frac{Gm_E}{R_E} = \frac{1}{2}v_{\infty}^2.$$

إذاً

$$v_{\text{imp}}^{\text{max}} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 \frac{Gm_S}{a_E} + \frac{2Gm_E}{R_E}}.$$

سرعة الإفلات من سطح الأرض هي

$$\sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}} = 11.17 \text{ km s}^{-1}.$$

إذاً،

$$v_{\text{imp}}^{\text{max}} = \sqrt{(71.82)^2 + (11.17)^2} \text{ km s}^{-1} \approx 72.7 \text{ km s}^{-1}.$$

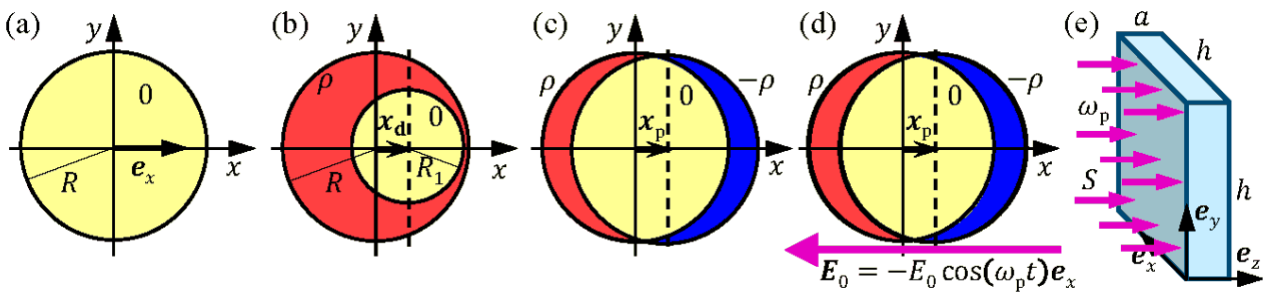
في مدار مرتبط ارتباطاً صارماً، تكون السرعة أقل من هذه القيمة حتماً. ويمكن أن تقترب منها اقتراباً كيفما نشاء كلما آلت طاقة الارتباط الابتدائية بالشَّمس إلى الصفر.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: مولّد البخار البلازموني

مقدمة

ندرس في هذه المسألة عملية فعّالة لإنتاج البخار ثبت نجاحها تجريبياً. يُضاء محلول مائي يحتوي على جسيمات فضة كروية ذات أبعاد نانومترية (جسيمات نانوية)، بتركيز لا يتجاوز نحو 10^{13} جسيماً في اللتر، بحزمة ضوئية مركّزة. تمتص الجسيمات النانوية جزءاً من الضوء، فتسخن وتولّد البخار موضعياً حولها دون تسخين المحلول المائي بأكمله. ويغادر البخار النظام على هيئة فقاعات بخار متصاعدة. ليست جميع تفاصيل هذه العملية مفهومة جيداً في الوقت الحاضر، لكن من المعروف أن عمليتها الأساسية هي امتصاص الضوء من خلال ما يُسمّى الاهتزازات الجماعية للإلكترونات في الجسيمات النانوية المعدنية. ويُعرف هذا الجهاز باسم مولّد البخار البلازموني.



الشكل 2.1 (a) جسيم نانوي كروي متعادل الشحنة نصف قطره R ، موضوع في مركز جهاز الإحداثيات. **(b)** كرة ذات كثافة شحنة موجبة متجانسة ρ (بالأحمر)، تحتوي على منطقة كروية أصغر متعادلة الشحنة (0، بالأصفر) نصف قطرها R_1 ، ومركزها مزاح بمقدار $x_d = x_d e_x$. **(c)** الكرة ذات كثافة الشحنة الموجبة ρ لأيونات الفضة في الجسيم النانوي ثابتة في مركز جهاز الإحداثيات. مركز المنطقة الكروية ذات كثافة الشحنة الكروية السالبة $-\rho$ (بالأزرق) للسحابة الإلكترونية مزاح بمقدار x_p ، حيث $x_p \ll R$. **(d)** مجال كهربائي خارجي متجانس $E_0 = -E_0 e_x$ عندما يكون E_0 متغيراً مع الزمن، تتحرك السحابة الإلكترونية بسرعة $v = dx_p/dt$. **(e)** الوعاء المستطيل ($h \times h \times a$) الذي يحتوي على المحلول المائي للجسيمات النانوية، والمضاء بضوء أحادي اللون ينتشر على امتداد المحور z بتردد زاوي ω_p وشدة S .

جسيم فضة نانوي كروي منفرد

نعتبر طوال هذه المسألة جسيم فضة نانويًا كرويًا نصف قطره $R = 10,0 \text{ nm}$ ، ومركزه ثابت عند مبدأ جهاز الإحداثيات، انظر الشكل 2.1(a). جميع الحركات والقوى والمجالات المحركة موازية للمحور الأفقي x (ذي متجه الوحدة e_x). يحتوي الجسيم النانوي على إلكترونات حرة (إلكترونات توصيل) تتحرك داخل كامل حجم الجسيم النانوي دون أن تكون مرتبطة بأي ذرة فضة. وكل ذرة فضة هي أيون موجب منح إلكترونًا حرًا واحدًا من هذه الإلكترونات.

الدرجات	السؤال	الجزء
0.7	أوجد الكميات الآتية: حجم الجسيم النانوي V وكتلته M ، وعدد أيونات الفضة N وكثافة شحنتها ρ في الجسيم، ولإلكترونات الحرة تركيزها n ، وشحنتها الكلية Q ، وكتلتها الكلية m_0 .	2.1

المجال الكهربائي في منطقة متعادلة الشحنة داخل كرة مشحونة

افترض في بقية المسألة أن السماحية الكهربائية النسبية لجميع المواد هي $\epsilon = 1$. تنشأ داخل كرة مشحونة ذات كثافة شحنة متجانسة ρ ونصف قطر R منطقة كروية صغيرة متعادلة الشحنة نصف قطرها R_1 ، بإضافة كثافة الشحنة المعاكسة $-\rho$ ، ويكون مركزها مزاحاً بمقدار $x_d = x_d e_x$ عن مركز الكرة ذات نصف القطر R ، انظر الشكل 2.1(b).

الجزء	السؤال	الدرجات
2.2	بين أن المجال الكهربائي داخل المنطقة المتعادلة الشحنة متجانس ويأخذ الصورة $E = A(\rho/\epsilon_0)x_d$ وحدد المعامل A .	1.2

قوة الإرجاع المؤثرة في السحابة الإلكترونية المزاحة

ندرس فيما يلي الحركة الجماعية للإلكترونات الحرة، ولذلك نمثلها بكرة واحدة سالبة الشحنة ذات كثافة شحنة متجانسة $-\rho$ ، وموضع مركزها x_p ، ويمكنها التحرك على امتداد المحور x بالنسبة إلى مركز الكرة موجبة الشحنة (أيونات الفضة) الثابت عند مبدأ جهاز الإحداثيات، انظر الشكل 2.1(c). افترض أن قوة خارجية F_{ext} تزيح السحابة الإلكترونية إلى موضع اتزان جديد $x_p = x_p e_x$ ، مع $|x_p| \ll R$. باستثناء شحنات صافية ضئيلة عند طرفين متقابلين من الجسم النانوي، يبقى معظم داخله متعادل الشحنة.

الجزء	السؤال	الدرجات
2.3	عبر بدلالة x_p و n عن الكميتين الآتيتين: قوة الإرجاع F المؤثرة في السحابة الإلكترونية، والشغل W_{el} المبذول على السحابة الإلكترونية أثناء الإزاحة.	1.0

جسيم الفضة النانوي الكروي في مجال كهربائي خارجي ثابت

يوضع جسيم نانوي في الفراغ، ويتأثر بقوة خارجية F_{ext} ناتجة عن تطبيق مجال كهربائي ساكن متجانس $E_0 = -E_0 e_x$ ، يزيح السحابة الإلكترونية مسافة صغيرة $|x_p|$ ، حيث $|x_p| \ll R$.

الجزء	السؤال	الدرجات
2.4	أوجد إزاحة السحابة الإلكترونية x_p بدلالة E_0 و n ، وحدد مقدار الشحنة الإلكترونية ΔQ - التي تعبر المستوى yz عند مركز الجسيم النانوي بدلالة n و R و x_p .	0.6

السعة الكهربائية والمحاذة المكافئتان لجسيم الفضة النانوي

يمكن تمثيل الجسيم النانوي بدائرة كهربائية مكافئة، سواء أكان المجال E_0 ثابتاً أم متغيراً مع الزمن. ويمكن إيجاد السعة المكافئة بربط الشغل W_{el} المبذول لفصل الشحنات ΔQ بطاقة مكثف يحمل شحنة $\pm \Delta Q$. ويؤدي فصل الشحنات إلى فرق جهد مكافئ معين V_0 بين طرفي المكثف المكافئ.

الجزء	السؤال	الدرجات
2.5a	عبر عن السعة المكافئة للنظام C بدلالة ϵ_0 و R ، وأوجد قيمتها.	0.7
2.5b	لهذه السعة، حدد بدلالة E_0 و R فرق الجهد المكافئ V_0 الذي ينبغي تطبيقه بين طرفي المكثف المكافئ لتجميع الشحنة ΔQ .	0.4

عندما يكون المجال E_0 متغيراً مع الزمن، تتحرك السحابة الإلكترونية بسرعة $v = v e_x$ ، الشكل 2.1(d). وتكون لها طاقة حركية W_{kin} ، وتشكل تياراً كهربائياً I يمر عبر المستوى الثابت yz . ويمكن إسناد الطاقة الحركية للسحابة الإلكترونية إلى طاقة ملف مكافئ محاشته L ويمر فيه التيار I .

الجزء	السؤال	الدرجات
2.6a	عبر عن كلٍّ من W_{kin} و I بدلالة السرعة v .	0.7
2.6b	عبر عن المحاذة المكافئة L بدلالة نصف قطر الجسيم R ، وشحنة الإلكترون e وكتلته m_e ، وتركيز الإلكترونات n ، واحسب قيمتها.	0.5

الرنين البلازموني لجسيم الفضة النانوي

يترتب على التحليل السابق أن الحركة الناشئة عن إزاحة السحابة الإلكترونية عن موضع اتزانها ثم إطلاقها يمكن تمثيلها بدائرة مثالية من نوع LC تتذبذب عند الرنين. ويُعرف هذا النمط الديناميكي للسحابة الإلكترونية باسم الرنين البلازموني، وهو يتذبذب عند ما يُسمَّى التردد البلازموني الزاوي ω_p .

الجزء	السؤال	الدرجات
2.7a	أوجد تعبيراً للتردد البلازموني الزاوي ω_p للسحابة الإلكترونية بدلالة شحنة الإلكترون e وكتلته m_e ، وكثافة الإلكترونات n ، والسماحية ϵ_0 .	0.5
2.7b	احسب ω_p بوحدة rad/s، والطول الموجي λ_p بوحدة nm لضوء في الفراغ تردده الزاوي $\omega = \omega_p$.	0.4

جسيم الفضة النانوي المضاء بضوء عند التردد البلازموني

في بقية المسألة، يُضاء الجسيم النانوي بضوء أحادي اللون عند التردد البلازموني الزاوي ω_p ، وبشدة ساقطة $S = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$. ولأن الطول الموجي كبير، $\lambda_p \gg R$ ، يمكن اعتبار الجسيم النانوي موضوعاً في مجال متجانس متذبذب توافقياً $E_x = -E_0 \cos(\omega_p t) e_x$. وبفعل المجال المحرَّك E_0 ، يتذبذب مركز السحابة الإلكترونية $x_p(t)$ بالتردد نفسه، بسرعة $v = dx_p/dt$ وسعة ثابتة x_0 . تؤدي هذه الحركة التذبذبية للإلكترونات إلى امتصاص الضوء. وتتحول الطاقة التي يلتقطها الجسيم إما إلى تسخين جول داخل الجسيم، أو يعيد الجسيم إصدارها على هيئة ضوء متشتت.

ينشأ تسخين جول عن تصادمات عشوائية غير مرنة، يصطدم فيها أي إلكترون حر من حين إلى آخر بأيون فضة، ويفقد كامل طاقته الحركية التي تتحول إلى اهتزازات لأيونات الفضة (حرارة). ومتوسط الزمن بين التصادمات هو $1/\omega_p \gg \tau$ ، ونستخدم لجسيم الفضة النانوي القيمة $\tau = 5.24 \times 10^{-15} \text{ s}$.

الجزء	السؤال	الدرجات
2.8a	أوجد تعبيراً للمتوسط الزمني لقدرة تسخين جول P_{heat} في الجسيم النانوي، وكذلك للمتوسط الزمني لمربع التيار $\langle I^2 \rangle$ ، يتضمن صراحةً المتوسط الزمني لمربع سرعة السحابة الإلكترونية $\langle v^2 \rangle$.	1.0
2.8b	أوجد تعبيراً للمقاومة الأومية المكافئة R_{heat} في نموذج مقاومة مكافئ للجسيم النانوي، تكون فيه قدرة تسخين جول P_{heat} ناتجة عن تيار السحابة الإلكترونية I . احسب القيمة العددية للمقاومة R_{heat} .	1.0

تفقد الحزمة الضوئية الساقطة قدرةً متوسطها الزمني P_{scat} بسبب التشتت على السحابة الإلكترونية المتذبذبة (إعادة الإصدار). تعتمد P_{scat} على سعة مصدر التشتت x_0 ، وشحنته Q ، وتردده الزاوي ω_p ، وخصائص الضوء (سرعة الضوء c والسماحية ϵ_0 في الفراغ). وبدلالة هذه المتغيرات الأربعة، تُعطى P_{scat} بالعلاقة

$$P_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}.$$

الجزء	السؤال	الدرجات
2.9	باستخدام P_{scat} ، أوجد تعبيراً لمقاومة التشتت المكافئة R_{scat} (على غرار R_{heat}) في نموذج مقاومة مكافئ، واحسب قيمتها.	1.0

تُجمع عناصر الدائرة المكافئة السابقة في نموذج دائرة LCR متصلة على التوالي لجسيم الفضة النانوي، تُقاد بفرق جهد مكافئ متذبذب توافقياً $V = V_0 \cos(\omega_p t)$ ، يحدده المجال الكهربائي E_0 للضوء الساقط.

الجزء	السؤال	الدرجات
2.10a	اشتق تعبيرين للمتوسطين الزمنيين لقدرتَي الفقد P_{heat} و P_{scat} ، يتضمنان سعة المجال الكهربائي E_0 في الضوء الساقط عند الرنين البلازموني $\omega = \omega_p$.	1.2
2.10b	احسب القيم العددية لكل من E_0 و P_{heat} و P_{scat} .	0.3

توليد البخار بالضوء

يُحضّر محلول مائي لجسيمات فضة نانوية بتركيز $n_{np} = 7.3 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$ ويوضع داخل وعاء مستطيل شفاف أبعاده $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1.0 \text{ cm}^3$ ويضاء بضوء عند التردد البلازموني، وبالشدة نفسها $S = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$ عند سقوط عمودي كما سبق، انظر الشكل 2.1(e). درجة حرارة الماء هي $T_{wa} = 20^\circ \text{C}$ ، ونفترض، بما يتفق مع المشاهدات بدرجة معقولة، أن كامل تسخين جول للجسيم النانوي يُستهلك في الحالة المستقرة في إنتاج بخار درجة حرارته $T_{st} = 110^\circ \text{C}$ دون رفع درجة حرارة الماء.

تُعرّف الكفاءة الديناميكية الحرارية η لمولد البخار البلازموني بنسبة القدرتين $\eta = P_{st}/P_{tot}$ ، حيث P_{st} هي القدرة المستهلكة في إنتاج البخار في الوعاء بأكمله، بينما P_{tot} هي القدرة الكلية للضوء الساقط الذي يدخل الوعاء. يكون أي جسيم نانوي محاطاً بالبخار بدلاً من الماء معظم الوقت، ولذلك يمكن وصفه بأنه موجود في الفراغ.

الدرجات	السؤال	الجزء
0.6	احسب الكتلة الكلية في الثانية μ_{st} للبخار الذي ينتجه مولد البخار البلازموني أثناء إضاءته بضوء عند التردد البلازموني وبشدة S .	2.11a
0.2	احسب القيمة العددية للكفاءة الديناميكية الحرارية η لمولد البخار البلازموني.	2.11b

ورقة البيانات: جدول المعلومات الفيزيائية

القيمة	المعلمة الفيزيائية
$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	سرعة الضوء في الفراغ
$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$	ثابت بلانك مقسوماً على 2π
$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$	ثابت الجاذبية
$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$	تسارع الجاذبية
$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$	الشحنة الأولية
$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$	السماحية الكهربائية للفراغ
$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$	كتلة الإلكترون
$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	ثابت أفوغادرو
$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$	ثابت بولتزمان
$c_{sm} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$	الحرارة النوعية للنيزك الحجري
$k_{sm} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$	الموصلية الحرارية للنيزك الحجري
$\rho_{sm} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$	كثافة النيزك الحجري
$T_{sm} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$	درجة انصهار النيزك الحجري
$L_{sm} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$	الحرارة النوعية للانصهار للنيزك الحجري
$M_{Ag} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$	الكتلة المولية للفضة
$\rho_{Ag} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$	كثافة الفضة
$c_{Ag} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$	السعة الحرارية النوعية للفضة
$M_{wa} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$	الكتلة المولية للماء
$\rho_{wa} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$	كثافة الماء
$c_{wa} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$	السعة الحرارية النوعية للماء
$L_{wa} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$	حرارة تبخر الماء
$T_{100} = 100^\circ \text{C} = 373.15 \text{ K}$	درجة غليان الماء
$\rho_{ice} = 0.917 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$	كثافة جليد النهر الجليدي

المعلمة الفيزيائية	القيمة
السعة الحرارية النوعية للبخر	$c_{st} = 2.080 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
كتلة الأرض	$m_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
نصف قطر الأرض	$R_E = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$
كتلة الشمس	$m_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
نصف قطر الشمس	$R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$
متوسط المسافة بين الشمس والأرض	$a_E = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

هنا $e > 0$ و $Q < 0$ ، ويرمز W_{el} إلى الشغل الموجب المبذول لفصل الشحنات. اختر اتجاه تيار الدائرة بحيث يكون $I = d(\Delta Q)/dt$ ، ويكون موجباً عندما تتحرك الإلكترونات في اتجاه $+x$.

2.1 •

$$V = 4.19 \times 10^{-24} \text{ m}^3, \quad M = 4.39 \times 10^{-20} \text{ kg},$$

$$N = 2.45 \times 10^5, \quad \rho = +9.38 \times 10^9 \text{ C m}^{-3},$$

$$n = 5.85 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}, \quad Q = -3.93 \times 10^{-14} \text{ C}, \quad m_0 = 2.23 \times 10^{-25} \text{ kg}.$$

2.2 •

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_d, \quad \boxed{A = \frac{1}{3}}.$$

2.3 •

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} \mathbf{x}_p, \quad W_{el} = \frac{2\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} x_p^2.$$

2.4 •

$$x_p = \frac{3\epsilon_0 E_0}{ne}, \quad -\Delta Q = -ne\pi R^2 x_p.$$

2.5a •

$$C = \frac{9}{4} \pi \epsilon_0 R = 6.26 \times 10^{-19} \text{ F}.$$

2.5b •

$$V_0 = \frac{4}{3} R E_0.$$

2.6a •

$$W_{kin} = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{2\pi}{3} n m_e R^3 v^2, \quad I = ne\pi R^2 v.$$

2.6b •

$$L = \frac{4m_e}{3\pi ne^2 R} = 2.57 \times 10^{-14} \text{ H}.$$

2.7a •

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{3\varepsilon_0 m_e}}.$$

2.7b •

$$\omega_p = 7.88 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}, \quad \lambda_p = 239 \text{ nm}.$$

2.8a •

$$P_{\text{heat}} = \frac{m_0}{2\tau} \langle v^2 \rangle, \quad \langle I^2 \rangle = (ne\pi R^2)^2 \langle v^2 \rangle.$$

2.8b •

$$R_{\text{heat}} = \frac{L}{2\tau} = \frac{2m_e}{3\pi ne^2 R\tau} = 2.46 \Omega.$$

2.9 •

$$R_{\text{scat}} = \frac{8R^2 \omega_p^2}{27\pi \varepsilon_0 c^3} = 2.45 \Omega.$$

2.10a •

$$P_{\text{heat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{heat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}, \quad P_{\text{scat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{scat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}.$$

2.10b •

$$E_0 = 2.74 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}, \quad P_{\text{heat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}, \quad P_{\text{scat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}.$$

2.11a •، باستخدام إضاءة منتظمة في كامل الوعاء:

$$\mu_{\text{st}} \simeq 1.9 \times 10^{-3} \text{ kg s}^{-1} = 1.9 \text{ g s}^{-1}.$$

2.11b •، بالتقريب نفسه:

$$\eta \simeq 0.50 = 50\%.$$

الحل

تستخدم جميع النتائج الكهروستاتيكية ونتائج الدائرة أدناه النموذج المفروض للسحابة الإلكترونية الصلبة المشحونة بانتظام. وتحفظ النتائج المعتمدة على الإزاحة بالحدود الرائدة عندما $|x_p|/R \ll 1$.

2.1

الجسيم كرة، ولذلك

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} (1.00 \times 10^{-8})^3 = 4.19 \times 10^{-24} \text{ m}^3.$$

وكتلته هي

$$M = \rho_{\text{Ag}} V = 4.39 \times 10^{-20} \text{ kg}.$$

عدد ذرات الفضة، ومن ثم عدد أيونات الفضة أحادية الشحنة، هو

$$N = \frac{M}{M_{\text{Ag}}} N_A = 2.45 \times 10^5.$$

يوجد إلكترون توصيل واحد لكل أيون. ومن ثم

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\rho_{\text{Ag}} N_A}{M_{\text{Ag}}} = 5.85 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

كثافة الشحنة الأيونية الموجبة هي

$$\rho = ne = +9.38 \times 10^9 \text{ C m}^{-3}.$$

أما للإلكترونات،

$$Q = -Ne = -3.93 \times 10^{-14} \text{ C}, \quad m_0 = Nm_e = 2.23 \times 10^{-25} \text{ kg}.$$

2.2

نطبق قانون غاوس على سطح غاوسي كروي متحد المركز نصف قطره r ، داخل كرة مشحونة بانتظام:

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho(4\pi r^3/3)}{\epsilon_0}.$$

وعليه، فإن المجال الداخلي هو

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}.$$

تتكون المنطقة المتعادلة بتراكب كرة كثافة شحنتها $-\rho$ ، ومركزها عند $\mathbf{x}_d$. وعند نقطة داخل هذه الكرة الأصغر، يكون مجالها

$$\mathbf{E}_-(\mathbf{r}) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{x}_d).$$

يعطي جمع المجالين

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_d.$$

يُلغى الاعتماد على الموضع $\mathbf{r}$ ، ولذلك يكون المجال متجانسًا، ويكون

$$\boxed{A = \frac{1}{3}}.$$

2.3

كثافة شحنة السحابة الإلكترونية المزاحة هي $-ne$ ، بينما كثافة شحنة الأيونات الثابتة هي $+ne$. وفقًا للجزء 2.2، يكون المجال في المنطقة الداخلية المتعادلة التي تتداخلان فيها

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = \frac{ne}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_p.$$

إلى الرتبة الأولى في الإزاحة، يعطي هذا المجال قوة الإرجاع المؤثرة في السحابة:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}_{\text{int}} = -\frac{Nne^2}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_p.$$

لا تؤثر المناطق الصغيرة غير المتداخلة إلا في حدود الرتب الأعلى. وباستخدام $N = 4\pi nR^3/3$ ،

$$\boxed{\mathbf{F} = -\frac{4\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} \mathbf{x}_p}.$$

نعرف ثابت النابض الفعّال

$$k = \frac{Nne^2}{3\epsilon_0}.$$

الشغل المبذول في إزاحة شبه ساكنة من الصفر إلى x_p هو

$$W_{\text{el}} = -\int_0^{x_p} F_x(x) dx = \int_0^{x_p} kx dx = \frac{1}{2} kx_p^2.$$

لذلك

$$W_{\text{el}} = \frac{Nne^2}{6\epsilon_0} x_p^2 = \frac{2\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} x_p^2.$$

هذه الطاقة الكهروستاتيكية المخزنة المستخدمة في الجزء 2.5. أما الشغل الذي تبذله قوة الإرجاع نفسها فهو $-W_{\text{el}}$.

2.4

يتجه المجال الخارجي في اتجاه $-x$ ، ولذلك تتجه القوة المؤثرة في السحابة الإلكترونية السالبة في اتجاه $+x$:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = Q\mathbf{E}_0 = NeE_0\mathbf{e}_x.$$

عند الاتزان،

$$NeE_0 - \frac{Nne^2}{3\epsilon_0} x_p = 0.$$

ومن ثم

$$x_p = \frac{3\epsilon_0 E_0}{ne}.$$

عند انتقال صغير x_p ، يكون حجم السحابة الإلكترونية المنقول عبر المستوى المركزي، إلى الرتبة الرائدة،

$$\Delta V = \pi R^2 x_p.$$

وبضربه في كثافة شحنتها نحصل على

$$-\Delta Q = -ne\pi R^2 x_p.$$

إذن متغير فصل الشحنة الموجب هو

$$\Delta Q = ne\pi R^2 x_p = 3\pi\epsilon_0 R^2 E_0.$$

2.5a

نساوي الطاقة الكهروستاتيكية بطاقة المكثف المكافئ:

$$W_{\text{el}} = \frac{(\Delta Q)^2}{2C}.$$

وباستخدام النتائج السابقة،

$$C = \frac{(ne\pi R^2 x_p)^2}{2(2\pi n^2 e^2 R^3 x_p^2 / (9\epsilon_0))} = \frac{9}{4} \pi \epsilon_0 R.$$

لذلك

$$C = 6.26 \times 10^{-19} \text{ F}.$$

2.5b

فرق الجهد المكافئ هو

$$V_0 = \frac{\Delta Q}{C}.$$

بالتعويض نحصل على

$$V_0 = \frac{3\pi\epsilon_0 R^2 E_0}{(9/4)\pi\epsilon_0 R},$$

ومن ثم

$$V_0 = \frac{4}{3} RE_0.$$

2.6a

تشارك الإلكترونات جميعها، وعددها N ، في الحركة الجماعية. وطاقتها الحركية هي

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} N m_e v^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{2\pi}{3} n m_e R^3 v^2.$$

باشتقاق علاقة فصل الشحنة نحصل على

$$I = \frac{d(\Delta Q)}{dt} = n e \pi R^2 v.$$

هنا يقابل تيار الدائرة الموجب تياراً اصطلاحياً في اتجاه $-x$. ولو عُرف التيار الاصطلاحي عبر المستوى على أنه موجب في اتجاه $+x$ بدلاً من ذلك، لكان $I_x = -n e \pi R^2 v$. وتعتمد نتائج الطاقة والمقاومة على I^2 ، ولذلك لا يؤثر فيها هذا الاختيار للاتجاه.

2.6b

نساوي الطاقة الحركية بطاقة الملف المكافئ:

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

وينتج عن ذلك

$$L = \frac{m_0}{(n e \pi R^2)^2}.$$

وباستخدام $m_0 = (4\pi R^3/3) n m_e$

$$L = \frac{4m_e}{3\pi n e^2 R} = 2.57 \times 10^{-14} \text{ H}.$$

2.7a

لدائرة مثالية من نوع LC تتذبذب بحرية،

$$L \frac{d^2(\Delta Q)}{dt^2} + \frac{\Delta Q}{C} = 0,$$

ومن ثم

$$\omega_p^2 = \frac{1}{LC}.$$

وبما أن

$$LC = \frac{4m_e}{3\pi n e^2 R} \frac{9\pi \epsilon_0 R}{4} = \frac{3\epsilon_0 m_e}{n e^2},$$

نحصل على

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{3\epsilon_0 m_e}}.$$

وتنتج النتيجة نفسها مباشرةً من $\omega_p^2 = k/m_0$.

2.7b

بالتعويض بالثوابت المعطاة نحصل على

$$\omega_p = 7.88 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}.$$

$$\omega = 2\pi c/\lambda$$

$$\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} = 2.39 \times 10^{-7} \text{ m.}$$

إذن

$$\lambda_p = 239 \text{ nm}.$$

2.8a

في نموذج التصادم المذكور، يفقد كل إلكترون كامل طاقته الحركية الجماعية في التصادم. والمتوسط الزمني للطاقة التي يفقدها في كل تصادم هو

$$\frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle.$$

يحدث في المتوسط N/τ تصادمًا في الثانية بين جميع الإلكترونات. وتسمح لنا عشوائية أزمنة التصادم باستخدام متوسط الطاقة الحركية على دورة كاملة، فنحصل على

$$P_{\text{heat}} = \frac{N m_e}{2\tau} \langle v^2 \rangle = \frac{m_0}{2\tau} \langle v^2 \rangle.$$

ومن العلاقة بين التيار والسرعة،

$$\langle I^2 \rangle = (ne\pi R^2)^2 \langle v^2 \rangle.$$

2.8b

نُعرّف المقاومة المكافئة بالعلاقة

$$P_{\text{heat}} = R_{\text{heat}} \langle I^2 \rangle.$$

وعليه،

$$R_{\text{heat}} = \frac{m_0}{2\tau(ne\pi R^2)^2} = \frac{L}{2\tau}.$$

إذن

$$R_{\text{heat}} = \frac{2m_e}{3\pi ne^2 R\tau} = 2.46 \Omega.$$

ينشأ العامل $1/2$ من الطاقة الحركية $\frac{1}{2} m_e v^2$ المفقودة في كل تصادم، وفق النموذج المحدّد المعطى في المسألة.

2.9

لحركة توافقية سعتها x_0 ،

$$x_p(t) = x_0 \cos(\omega_p t + \phi),$$

ومن ثم

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega_p^2 x_0^2.$$

لذلك

$$\langle I^2 \rangle = \frac{1}{2} (ne\pi R^2)^2 \omega_p^2 x_0^2.$$

نُعرّف مقاومة التشتت بالعلاقة

$$P_{\text{scat}} = R_{\text{scat}} \langle I^2 \rangle.$$

وباستخدام صيغة الإشعاع المعطاة،

$$R_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \frac{2}{(ne\pi R^2)^2 \omega_p^2 x_0^2}.$$

وبما أن

$$Q = -\frac{4}{3}\pi R^3 ne, \quad \frac{Q^2}{(ne\pi R^2)^2} = \frac{16R^2}{9},$$

نحصل على

$$R_{\text{scat}} = \frac{8R^2 \omega_p^2}{27\pi\epsilon_0 c^3} = 2.45 \, \Omega.$$

وبصورة مكافئة،

$$R_{\text{scat}} = \frac{8ne^2 R^2}{81\pi\epsilon_0^2 m_e c^3}.$$

2.10a

يسحب كل من التسخين والتشتت طاقةً من التيار المتذبذب نفسه. ولذلك تُجمع مقاوماتهما المكافئتان في الدائرة المتصلة على التوالي:

$$R_{\Sigma} = R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}}.$$

عند $\omega = \omega_p = 1/\sqrt{LC}$ ، تتلاشى المفاعلتان الحثية والسعوية إحداهما بالأخرى:

$$\omega_p L - \frac{1}{\omega_p C} = 0.$$

ومن ثم يكون التيار متفقاً في الطور مع فرق الجهد المحرّك، وتكون سعته

$$I_0 = \frac{V_0}{R_{\Sigma}} = \frac{4RE_0}{3R_{\Sigma}}.$$

ولتيار جيبى،

$$\langle I^2 \rangle = \frac{I_0^2}{2} = \frac{8R^2 E_0^2}{9R_{\Sigma}^2}.$$

لذلك يكون متوسطا القدرتين

$$P_{\text{heat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{heat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}$$

و

$$P_{\text{scat}} = \frac{8R^2 E_0^2}{9} \frac{R_{\text{scat}}}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}.$$

2.10b

من الشدة الساقطة المحددة،

$$S = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2,$$

ومن ثم

$$E_0 = \sqrt{\frac{2S}{c\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2(1.00 \times 10^6)}{(2.998 \times 10^8)(8.854 \times 10^{-12})}}.$$

إذن

$$E_0 = 2.74 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}.$$

باستخدام قيم وسيطة غير مقرّبة،

$$V_0 = 3.66 \times 10^{-4} \text{ V}, \quad R_\Sigma = 4.910 \, \Omega, \quad I_0 = 7.45 \times 10^{-5} \text{ A}.$$

وعليه،

$$P_{\text{heat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}, \quad P_{\text{scat}} = 6.82 \times 10^{-9} \text{ W}.$$

ينشأ تقاربهما الشديد من التقارب الشديد بين المقاومتين.

ويمكن أيضًا التحقق من سعة الإزاحة:

$$x_0 = \frac{I_0}{ne\pi R^2 \omega_p} = 3.21 \times 10^{-15} \text{ m},$$

ومن ثم $x_0/R = 3.21 \times 10^{-7} \ll 1$ كذلك، $\omega_p \tau = 41.3$ ، بما يتفق مع الفصل المفترض بين المقاييس الزمنية للتذبذب والتصادمات.

2.11a

نطبق قدرة التسخين لكل جسيم من الجزء 2.10 على كامل الحجم المضاء. ويستخدم ذلك افتراض الإضاءة المنتظمة، ولا يدخل نموذجًا إضافيًا للتوهين أو التشتت المتعدد.

حجم الوعاء هو

$$V_{\text{vessel}} = h^2 a = (0.10)^2 (0.010) = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3.$$

وهو يحتوي على

$$N_{\text{np}} = n_{\text{np}} h^2 a = 7.3 \times 10^{11}$$

جسيمًا نانويًا. ونفترض أن كامل تسخين جول فيها يُستخدم لإنتاج البخار، ومن ثم

$$P_{\text{st}} = N_{\text{np}} P_{\text{heat}} = 4.98 \times 10^3 \text{ W}.$$

يجب أولاً تسخين كل كيلوغرام يتحول إلى بخار من 20°C إلى 100°C ، ثم تبخيره، وأخيرًا تسخينه إلى 110°C . والطاقة المطلوبة لكل وحدة كتلة هي

$$q_{\text{st}} = c_{\text{wa}}(T_{100} - T_{\text{wa}}) + L_{\text{wa}} + c_{\text{st}}(T_{\text{st}} - T_{100}).$$

عدديًا،

$$\begin{aligned} q_{\text{st}} &= (4.181 \times 10^3)(80) + 2.260 \times 10^6 + (2.080 \times 10^3)(10) \\ &= 2.61528 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}. \end{aligned}$$

إن بقاء كتلة الماء عند 20°C لا يلغي التسخين اللازم للجزء الذي يتبخر.

يعطي حفظ الطاقة

$$\mu_{\text{st}} q_{\text{st}} = P_{\text{st}}.$$

إذن

$$\mu_{\text{st}} = \frac{n_{\text{np}} h^2 a P_{\text{heat}}}{c_{\text{wa}}(T_{100} - T_{\text{wa}}) + L_{\text{wa}} + c_{\text{st}}(T_{\text{st}} - T_{100})} = 1.904 \times 10^{-3} \text{ kg s}^{-1}.$$

وبالدقة التي تتيحها بيانات الوعاء والتركيز،

$$\mu_{\text{st}} \simeq 1.9 \text{ g s}^{-1}.$$

2.11b

تدخل الحزمة عموديًا عبر الوجه ذي المساحة h^2 ، ولذلك

$$P_{\text{tot}} = Sh^2 = (1.00 \times 10^6)(0.10)^2 = 1.00 \times 10^4 \text{ W}.$$

لذلك

$$\eta = \frac{P_{\text{st}}}{P_{\text{tot}}} = \frac{n_{\text{np}} h^2 a P_{\text{heat}}}{Sh^2} = \frac{n_{\text{np}} a P_{\text{heat}}}{S}.$$

عدديًا،

$$\eta = 0.4979,$$

أو، بالتقريب المناسب،

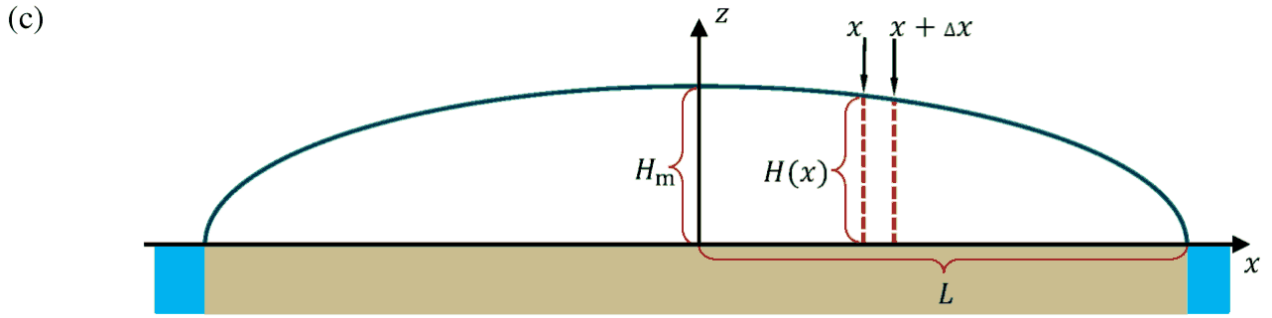
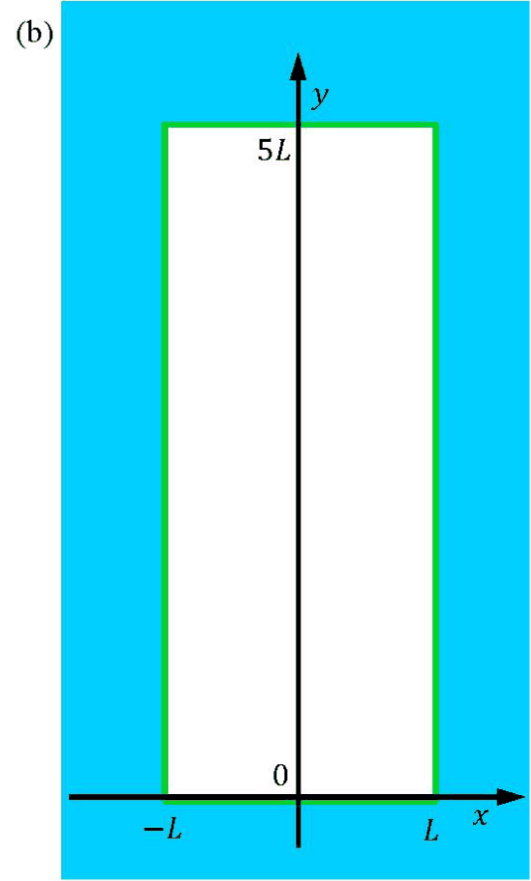
$$\boxed{\eta \simeq 0.50 = 50\%}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: الغطاء الجليدي في غرينلاند

مقدمة

تتناول هذه المسألة فيزياء الغطاء الجليدي في غرينلاند، وهو ثاني أكبر نهر جليدي في العالم، الشكل 3.1(a). وفي نموذج مثالي، تُمثل غرينلاند بجزيرة مستطيلة عرضها $2L$ وطولها $5L$ ، تقع أرضها عند مستوى سطح البحر ويغطيها بالكامل جليد غير قابل للانضغاط (ذو كثافة ثابتة ρ_{ice})، انظر الشكل 3.1(b). لا يعتمد منحنى ارتفاع الغطاء الجليدي $H(x)$ على الإحداثي y ، ويزداد الارتفاع من الصفر عند الساحلين $x = \pm L$ إلى ارتفاع أعظمي H_m على امتداد المحور الأوسط الممتد من الشمال إلى الجنوب (المحور y)، والمعروف باسم خط تقسيم الجليد، انظر الشكل 3.1(c).



الشكل 3.1 (a) خريطة لغرينلاند تُبيّن امتداد الغطاء الجليدي (بالأبيض)، والمناطق الساحلية الخالية من الجليد (بالأخضر)، والمحيط المحيط بها (بالأزرق). **(b)** النموذج التقريبي للغطاء الجليدي في غرينلاند بوصفه يغطي مساحة مستطيلة في المستوى xy ، طولاً ضلعيها $2L$ و $5L$. يمتد خط تقسيم الجليد، وهو خط الارتفاع الأعظمي للغطاء الجليدي H_m ، على طول المحور y . **(c)** مقطع رأسي (المستوى xz) عبر الغطاء الجليدي يُبين منحنى الارتفاع $H(x)$ (الخط الأزرق). لا يعتمد $H(x)$ على الإحداثي y عندما $0 < y < 5L$ ، بينما يهبط فجأة إلى الصفر عند $y = 0$ و $y = 5L$. يحدد المحور z موضع خط تقسيم الجليد. وللتوضيح، كُبرت الأبعاد الرأسية مقارنة بالأبعاد الأفقية. كثافة الجليد ρ_{ice} ثابتة.

صيغتان مفيدتان

يمكنك في هذه المسألة الاستعانة بالتكامل:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx = \frac{2}{3}$$

وبالتقريب $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ ، الصالح عندما $|\alpha x| \ll 1$.

منحنى ارتفاع الغطاء الجليدي

على المقاييس الزمنية القصيرة، يكون النهر الجليدي نظاماً هيدروستاتيكياً غير قابل للانضغاط ذا منحنى ارتفاع ثابت $H(x)$.

3.1	اكتب تعبيراً للضغط $p(x, z)$ داخل الغطاء الجليدي بدلالة الارتفاع الرأسى z فوق الأرض والمسافة x من خط تقسيم الجليد. أهمل الضغط الجوي.	0.3
-----	--	-----

اعتبر شريحة رأسية معينة من الغطاء الجليدي في حالة اتزان، تغطي مساحة قاعدة أفقية صغيرة $\Delta x \Delta y$ بين x و $x + \Delta x$ ، انظر الخطوط الحمراء المتقطعة في الشكل 3.1(c). لا يهم مقدار Δy . تتوازن المركبة الأفقية المحصلة للقوة ΔF المؤثرة على الجانبين الرأسين للشريحة، والناشئة عن اختلاف الارتفاع بين جانب الشريحة المواجه للمركز وجانبها المواجه للساحل، مع قوة احتكاك $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$ تؤثر بها الأرض على مساحة القاعدة $\Delta x \Delta y$ ، حيث $S_b = 100 \text{ kPa}$.

3.2a	لقيمة معينة من x ، يبين أنه في النهاية $\Delta x \rightarrow 0$ ، تكون $S_b = kH \text{ d}H/\text{d}x$ ، وحدد k .	0.9
3.2b	أوجد تعبيراً لمنحنى الارتفاع $H(x)$ بدلالة ρ_{ice} و g و L و S_b والمسافة x من خط التقسيم. ستظهر النتيجة أن الارتفاع الأعظمي للنهر الجليدي H_m يتناسب مع نصف العرض L وفق العلاقة $H_m \propto L^{1/2}$.	0.8
3.2c	حدد الأس γ الذي يصف تناسب الحجم الكلي V_{ice} للغطاء الجليدي مع مساحة الجزيرة المستطيلة A ، وفق العلاقة $V_{\text{ice}} \propto A^\gamma$.	0.5

غطاء جليدي متحرك

على مقياس زمني أطول، يكون الجليد مائعاً لزجاً غير قابل للانضغاط، يتدفق بفعل الجاذبية من الجزء المركزي إلى الساحل. وفي هذا النموذج، يحافظ الجليد على منحنى ارتفاعه $H(x)$ في حالة مستقرة، يتوازن فيها تراكم الجليد الناتج عن تساقط الثلوج في المنطقة المركزية مع الانصهار عند الساحل. بالإضافة إلى هندسة الغطاء الجليدي المبينة في الشكلين 3.1(b) و(c)، اعتمد الافتراضات التالية للنموذج:

- 1) يتدفق الجليد في المستوى xz مبتعداً عن خط تقسيم الجليد (المحور y). معدل التراكم c (متر/سنة) في المنطقة المركزية ثابت.
- 3) لا يمكن للجليد مغادرة النهر الجليدي إلا بالانصهار قرب الساحل عند $x = \pm L$. (4) المركبة الأفقية (في اتجاه x) $v_x(x) = \text{d}x/\text{d}t$ لسرعة تدفق الجليد لا تعتمد على z . (5) المركبة الرأسية (في اتجاه z) $v_z(z) = \text{d}z/\text{d}t$ لسرعة تدفق الجليد لا تعتمد على x .

اعتبر فقط المنطقة المركزية $|x| \ll L$ القريبة من وسط الغطاء الجليدي، حيث تكون تغيرات ارتفاع الغطاء الجليدي صغيرة جداً ويمكن إهمالها كلياً، أي $H(x) \approx H_m$.

3.3	استخدم انحفاظ الكتلة لإيجاد تعبير لسرعة تدفق الجليد الأفقية $v_x(x)$ بدلالة c و x و H_m .	0.6
-----	---	-----

يترتب على افتراض عدم قابلية الانضغاط، أي ثبات كثافة الجليد ρ_{ice} ، أن انحفاظ الكتلة يفرض القيد التالي على مركبتي سرعة تدفق الجليد

$$\frac{\text{d}v_x}{\text{d}x} + \frac{\text{d}v_z}{\text{d}z} = 0.$$

3.4	اكتب تعبيراً يصف اعتماد المركبة الرأسية $v_z(z)$ لسرعة تدفق الجليد على z .	0.6
-----	--	-----

مع مرور الزمن، يتدفق جسيم جليدي صغير يقع ابتداءً عند الموضع السطحي (x_i, H_m) ، بوصفه جزءاً من الغطاء الجليدي، على طول مسار تدفق $z(x)$ في المستوى الرأسى xz .

3.5	اشتق تعبيراً لمسار التدفق هذا $z(x)$.	0.9
-----	--	-----

العمر والمؤشرات المناخية في الغطاء الجليدي المتحرك

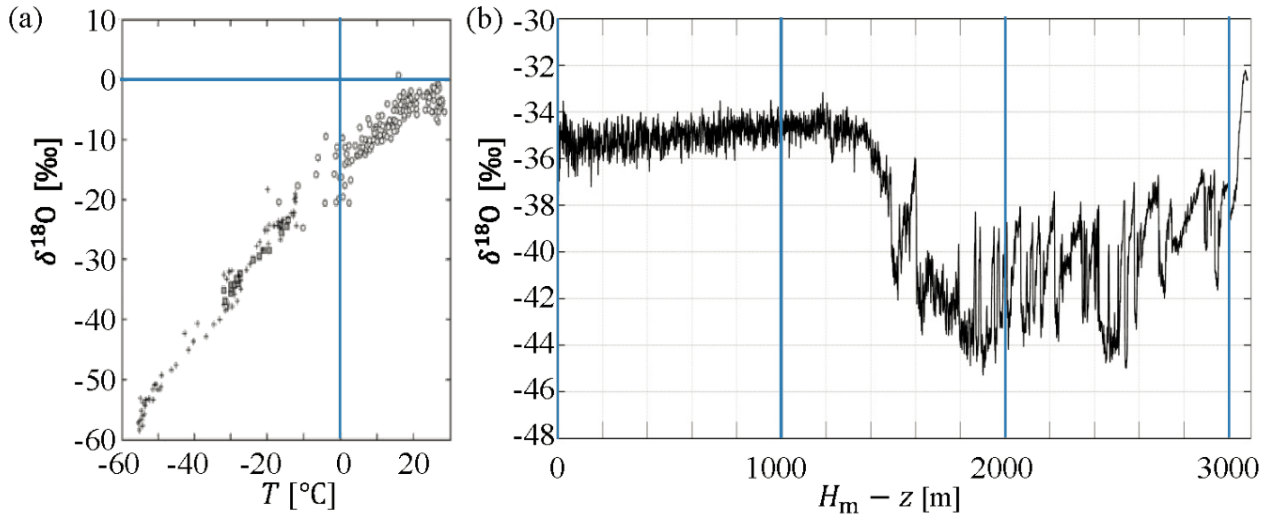
استناداً إلى مركبتي سرعة تدفق الجليد $v_x(x)$ و $v_z(z)$ ، يمكن تقدير عمر الجليد $\tau(z)$ عند عمق معين z من H_m تحت سطح الغطاء الجليدي.

3.6	أوجد تعبيراً لعمر الجليد $\tau(z)$ بدلالة الارتفاع z فوق الأرض، عند خط تقسيم الجليد مباشرةً $x = 0$.	1.0
-----	---	-----

تخترق اللبابة الجليدية المستخرجة بالحفر في داخل الغطاء الجليدي في غرينلاند طبقات من الثلوج تعود إلى الماضي، ويمكن تحليل هذه اللبابة للكشف عن التغيرات المناخية الماضية. ومن أفضل المؤشرات ما يسمى $\delta^{18}\text{O}$ ، والمُعَرَّف بالعلاقة

$$\delta^{18}\text{O} = \frac{R_{\text{ice}} - R_{\text{ref}}}{R_{\text{ref}}} 1000 \text{ ‰},$$

حيث ترمز $R = [^{18}\text{O}]/[^{16}\text{O}]$ إلى الوفرة النسبية لنظيري الأكسجين المستقرين ^{18}O و ^{16}O . وتستند القيمة المرجعية R_{ref} إلى التركيب النظائري للمحيطات حول خط الاستواء.



الشكل 3.2 (a) العلاقة المرصودة بين $\delta^{18}\text{O}$ في الثلج ومتوسط درجة حرارة السطح السنوي T . **(b)** قياسات $\delta^{18}\text{O}$ بدلالة العمق $H_m - z$ تحت السطح، مأخوذة من لبابة جليدية استُخرجت بالحفر من السطح حتى الصخر القاعدي في موضع معين على امتداد خط تقسيم الجليد في غرينلاند، حيث $H_m = 3060 \text{ m}$.

تُظهر أرصاء الغطاء الجليدي في غرينلاند أن $\delta^{18}\text{O}$ في الثلج يتغير تقريباً بصورة خطية مع درجة الحرارة، الشكل 3.2(a). وبافتراض أن هذا كان صحيحاً دائماً، فإن $\delta^{18}\text{O}$ المستخلص من لبابة جليدية عند العمق $H_m - z$ يتيح تقدير درجة الحرارة T قرب غرينلاند عند العمر $\tau(z)$.

تُظهر قياسات $\delta^{18}\text{O}$ في لبابة جليدية من غرينلاند طولها 3060 متراً تغيراً مفاجئاً في $\delta^{18}\text{O}$ عند عمق 1492 متراً، الشكل 3.2(b)، يشير إلى نهاية العصر الجليدي الأخير. بدأ العصر الجليدي قبل 120,000 سنة، وهو ما يقابل عمقاً قدره 3040 متراً، وبدأت الفترة الحالية بين الجليديين قبل 11,700 سنة، وهو ما يقابل عمقاً قدره 1492 متراً. افترض أنه يمكن وصف هاتين الفترتين بمعدلي تراكم مختلفين، هما c_{ia} (العصر الجليدي) و c_{ig} (الفترة بين الجليديين)، على الترتيب. يمكنك افتراض ثبات H_m طوال هذه السنوات البالغ عددها 120,000 سنة.

0.8	حدد معدلي التراكم c_{ig} و c_{ia} .	3.7a
0.2	استخدم بيانات الشكل 3.2 لإيجاد التغير في درجة الحرارة عند الانتقال من العصر الجليدي إلى الفترة بين الجليديين.	3.7b

ارتفاع مستوى سطح البحر الناتج عن انصهار الغطاء الجليدي في غرينلاند

سيؤدي الانصهار الكامل للغطاء الجليدي في غرينلاند إلى ارتفاع مستوى سطح البحر في المحيط العالمي. وكتقدير تقريبي لهذا الارتفاع، يمكن ببساطة اعتبار ارتفاع منتظم في جميع أنحاء محيط عالمي ذي مساحة ثابتة $A_0 = 3.61 \times 10^{14} \text{ m}^2$.

0.6	احسب متوسط ارتفاع مستوى سطح البحر عالمياً الذي سينتج عن الانصهار الكامل للغطاء الجليدي في غرينلاند، علماً بأن مساحته الحالية $A_G = 1.71 \times 10^{12} \text{ m}^2$ وأن $A_0 = 3.61 \times 10^{14} \text{ m}^2$.	3.8
-----	--	-----

يمارس الغطاء الجليدي الضخم في غرينلاند جذباً ثقالياً على المحيط المحيط به. وإذا انصهر الغطاء الجليدي، يزول هذا المد المحلي وينخفض مستوى سطح البحر بالقرب من غرينلاند، وهو تأثير يعاكس جزئياً ارتفاع مستوى سطح البحر المحسوب أعلاه.

لتقدير مقدار هذا الجذب الثقالي المؤثر على الماء، يُمثَّل الغطاء الجليدي في غرينلاند الآن بكتلة نقطية تقع عند مستوى الأرض وتساوي كتلتها الكتلة الكلية للغطاء الجليدي في غرينلاند. تقع كوبنهاغن على مسافة 3500 كيلومتر على امتداد سطح الأرض من مركز الكتلة النقطية. ويمكن اعتبار الأرض، دون الكتلة النقطية، متناظرة كروياً ولها محيط عالمي منتشر على سطحها بأكمله، ذي مساحة $A_E = 5.10 \times 10^{14} \text{ m}^2$. ويمكن إهمال جميع تأثيرات دوران الأرض.

3.9	ضمن هذا النموذج، حدد الفرق $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}}$ بين مستوى سطح البحر في كوبنهاغن (h_{CPH}) ومستواه عند النقطة المقابلة لغرينلاند قطرياً (h_{OPP}).	1.8
-----	--	-----

ورقة البيانات: جدول المعلومات الفيزيائية

$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	سرعة الضوء في الفراغ
$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$	ثابت بلانك مقسوماً على 2π
$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$	ثابت الجذب العام
$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$	تسارع الجاذبية
$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$	الشحنة الأولية
$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$	السماحية الكهربائية للفراغ
$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$	كتلة الإلكترون
$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	ثابت أفوغادرو
$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$	ثابت بولتزمان
$c_{\text{sm}} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$	نيزك حجري، الحرارة النوعية
$k_{\text{sm}} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$	نيزك حجري، الموصلية الحرارية
$\rho_{\text{sm}} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$	نيزك حجري، الكثافة
$T_{\text{sm}} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$	نيزك حجري، درجة الانصهار
$L_{\text{sm}} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$	نيزك حجري، الحرارة النوعية للانصهار
$M_{\text{Ag}} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$	الفضة، الكتلة المولية
$\rho_{\text{Ag}} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$	الفضة، الكثافة
$c_{\text{Ag}} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$	الفضة، السعة الحرارية النوعية
$M_{\text{wa}} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$	الماء، الكتلة المولية
$\rho_{\text{wa}} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$	الماء، الكثافة
$c_{\text{wa}} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$	الماء، السعة الحرارية النوعية
$L_{\text{wa}} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$	الماء، حرارة التبخر
$T_{100} = 100^\circ \text{C} = 373.15 \text{ K}$	الماء، درجة الغليان
$\rho_{\text{ice}} = 0.917 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$	الجليد، كثافة النهر الجليدي
$c_{\text{st}} = 2.080 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$	البخار، السعة الحرارية النوعية
$m_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$	الأرض، الكتلة
$R_E = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$	الأرض، نصف القطر
$m_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$	الشمس، الكتلة
$R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$	الشمس، نصف القطر
$a_E = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$	متوسط المسافة بين الشمس والأرض

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• 3.1: $p(x, z) = \rho_{\text{ice}} g [H(x) - z]$ عندما $0 \leq z \leq H(x)$.

$$\bullet \text{ 3.2a : } S_b = -\rho_{\text{ice}} g H \frac{dH}{dx} \text{ ، ومن ثم } \boxed{k = -\rho_{\text{ice}} g} \text{ في النصف } x > 0 .$$

$$\bullet \text{ 3.2b : } H(x) = \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{\text{ice}} g} (L - |x|)} \text{ ، حيث } H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}} g}} .$$

$$\bullet \text{ 3.2c : } \gamma = \frac{5}{4} \text{ ؛ وتحديداً ، } V_{\text{ice}} = \frac{2}{3} A H_m .$$

$$\bullet \text{ 3.3 : } v_x(x) = \frac{c}{H_m} x$$

$$\bullet \text{ 3.4 : } v_z(z) = -\frac{c}{H_m} z$$

$$\bullet \text{ 3.5 : } z(x) = H_m \frac{x_i}{x} \text{ عندما } x_i \neq 0 \text{ ، وعندما } x_i = 0 \text{ ، يكون المسار رأسياً على امتداد } x = 0 .$$

$$\bullet \text{ 3.6 : } \tau(z) = \frac{H_m}{c} \ln \frac{H_m}{z}$$

$$\bullet \text{ 3.7a : } c_{\text{ia}} = 0.123 \text{ m/year} , \quad c_{\text{ig}} = 0.175 \text{ m/year}$$

$$\bullet \text{ 3.7b : } \Delta T \approx +10 \text{ K} , \text{ أي احتراق بنحو } 10^\circ \text{C} .$$

$$\bullet \text{ 3.8 : } \Delta h_{\text{mean}} \approx 8.8 \text{ m}$$

$$\bullet \text{ 3.9 : } h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} \approx 4.5 \text{ m} , \text{ ويكون المستوى أعلى في كوبنهاغن.}$$

الحل

3.1

يعطي الاتزان الهيدروستاتيكي في الاتجاه الرأسي

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_{\text{ice}} g .$$

يكون الضغط عند السطح صفراً عند إهمال الضغط الجوي:

$$p(x, H(x)) = 0 .$$

ومن ثم يعطي التكامل نزولاً من السطح

$$\boxed{p(x, z) = \rho_{\text{ice}} g [H(x) - z]} .$$

3.2a

اعتبر النصف الأيمن من الغطاء الجليدي، $x > 0$. قوة الضغط المؤثرة على وجه رأسي ارتفاعه $H(x)$ وعرضه Δy هي

$$F(x) = \Delta y \int_0^{H(x)} \rho_{\text{ice}} g [H(x) - z] dz = \frac{1}{2} \rho_{\text{ice}} g H(x)^2 \Delta y .$$

تؤثر القوة على الوجه المواجه للمركز في اتجاه تزايد x ، بينما تؤثر القوة على الوجه المواجه للساحل في اتجاه تناقص x . وتكون محصلتهما

$$\Delta F = \frac{1}{2} \rho_{\text{ice}} g [H(x)^2 - H(x + \Delta x)^2] \Delta y .$$

إلى الرتبة الأولى في Δx ،

$$\Delta F = -\rho_{\text{ice}} g H(x) \frac{dH}{dx} \Delta x \Delta y .$$

بموازنة هذه القوة المتجهة إلى الخارج مع الاحتكاك القاعدي $S_b \Delta x \Delta y$ ، نحصل على

$$\boxed{S_b = -\rho_{\text{ice}} g H \frac{dH}{dx}} , \quad \boxed{k = -\rho_{\text{ice}} g} .$$

المشتقة سالبة في هذا النصف، ولذلك $S_b > 0$ ، كما هو مطلوب. وفي أي من النصفين، تكون العلاقة المناظرة بين المقادير هي $S_b = \rho_{ice} g H |dH/dx|$.

3.2b

في المجال $0 \leq x \leq L$ ، يمكن كتابة النتيجة السابقة على الصورة

$$\frac{d(H^2)}{dx} = -\frac{2S_b}{\rho_{ice} g}.$$

باستخدام الشرط الحدي عند الساحل $H(L) = 0$ ،

$$H(x)^2 = \frac{2S_b}{\rho_{ice} g} (L - x).$$

يعطي الانعكاس حول خط تقسيم الجليد منحنى الارتفاع الكامل:

$$H(x) = \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{ice} g} (L - |x|)}, \quad -L \leq x \leq L.$$

عند خط التقسيم،

$$H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{ice} g}},$$

ومن ثم $H_m \propto L^{1/2}$ عندما يكون الاحتكاك القاعدي والكثافة وتسارع الجاذبية ثابت.

3.2c

مساحة الجزيرة هي

$$A = (2L)(5L) = 10L^2.$$

بما أن منحنى الارتفاع لا يعتمد على y ، فإن حجم الجليد هو

$$V_{ice} = 5L \int_{-L}^L H(x) dx = 10LH_m \int_0^L \sqrt{1 - \frac{x}{L}} dx.$$

بوضع $u = x/L$ ، يعطي التكامل المعطى

$$V_{ice} = 10L^2 H_m \int_0^1 \sqrt{1 - u} du = \frac{20}{3} L^2 H_m = \boxed{\frac{2}{3} A H_m}.$$

إذن

$$V_{ice} \propto L^{2+1/2} = L^{5/2} \propto A^{5/4},$$

و

$$\gamma = \frac{5}{4}.$$

3.3

نأخذ حجم تحكم مركزيًا بين خط التقسيم وموضع $x > 0$ ، بعرض Δy . في الحالة المستقرة، يجب أن يساوي التراكم على سطحه التدفق الأفقي الخارج منه.

الكتلة المتراكمة في وحدة الزمن هي

$$\dot{m}_{in} = \rho_{ice} c x \Delta y.$$

بفعل التناظر، لا يوجد تدفق أفقي عبر خط التقسيم. وبما أن v_x لا تعتمد على الارتفاع، فإن التدفق الخارج عبر الوجه عند x هو

$$\dot{m}_{\text{out}} = \rho_{\text{ice}} v_x(x) H_m \Delta y.$$

بمساواة هذين المقدارين نحصل على

$$v_x(x) = \frac{c}{H_m} x.$$

ينطبق التعبير نفسه بإشارته عندما $x < 0$ ، حيث يكون التدفق في اتجاه x السالب. تستخدم هذه النتيجة تقريب المنطقة المركزية $H(x) \approx H_m$.

3.4

تقتضي عدم قابلية الانضغاط أن

$$\frac{dv_z}{dz} = -\frac{dv_x}{dx} = -\frac{c}{H_m}.$$

يعطي التكامل

$$v_z(z) = -\frac{c}{H_m} z + C.$$

لا يوجد تدفق عبر الأرض، ولذلك $v_z(0) = 0$ ، مما يعني أن $C = 0$. ومن ثم،

$$v_z(z) = -\frac{c}{H_m} z.$$

وبوجه خاص، $v_z(H_m) = -c$ توازن الحركة نحو الأسفل عند السطح إضافة الجليد الجديد.

3.5

لجسيم يحقق $x_i \neq 0$ ، يحقق مساره

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz/dt}{dx/dt} = \frac{v_z}{v_x} = -\frac{z}{x}.$$

بفصل المتغيرات وتطبيق الشرط الابتدائي $z(x_i) = H_m$ ،

$$\int_{H_m}^z \frac{dz'}{z'} = -\int_{x_i}^x \frac{dx'}{x'},$$

ومن ثم

$$\ln \frac{z}{H_m} = -\ln \left| \frac{x}{x_i} \right|.$$

يبقى الجسيم في جانبه الأصلي من خط التقسيم؛ ولذلك $x/x_i > 0$ ، و

$$xz = x_i H_m, \quad z(x) = H_m \frac{x_i}{x}.$$

المسار فرع من قطع زائد قائم، يتحرك الجسيم على امتداده إلى الخارج وإلى الأسفل. وبصورة مكافئة،

$$x(t) = x_i e^{ct/H_m}, \quad z(t) = H_m e^{-ct/H_m}.$$

عندما $x_i = 0$ ، يبقى الجسيم عند $x = 0$ ويهبط رأسياً وفق التعبير نفسه لـ $z(t)$. تنطبق هذه المسارات ما دام الجسيم في المنطقة المركزية.

3.6

عند خط تقسيم الجليد، تنعدم السرعة الأفقية. العمر هو الزمن المنقضي منذ ترسب الجسيم عند $z = H_m$:

$$\tau(z) = \int_{H_m}^z \frac{dz'}{v_z(z')} = -\frac{H_m}{c} \int_{H_m}^z \frac{dz'}{z'}.$$

لذلك،

$$\tau(z) = \frac{H_m}{c} \ln \frac{H_m}{z}.$$

يساوي هذا العمر صفرًا عند السطح ويزداد مع العمق. وفي هذا النموذج المثالي، يتباعد عندما $z \rightarrow 0$ ، لأن السرعة الرأسية تقترب من الصفر عند القاعدة.

3.7a

لهذه اللبابة الجليدية، $H_m = 3060$ m. الارتفاعان الحاليان فوق القاعدة للطبقتين اللتين حُدد عمرهما هما

$$z_1 = 3060 - 1492 = 1568 \text{ m},$$

$$z_2 = 3060 - 3040 = 20 \text{ m}.$$

لم تتعرض الطبقة الانتقالية إلا للتدفق خلال الفترة بين الجليديين البالغة 11 700 سنة. ومن ثم

$$\ln \frac{3060}{1568} = \frac{c_{ig}(11\,700 \text{ year})}{3060 \text{ m}},$$

مما يعطي

$$c_{ig} = \frac{3060}{11\,700} \ln \frac{3060}{1568} = 0.175 \text{ m/year}.$$

أما الطبقة الأقدم، فقد تغير معدل التراكم أثناء هبوطها. ومع ثبات H_m ،

$$\frac{d \ln z}{dt} = -\frac{c(t)}{H_m}.$$

تعرضت هذه الطبقة للتدفق في العصر الجليدي مدة

$$120\,000 - 11\,700 = 108\,300 \text{ years},$$

تلاها تدفق خلال الفترة بين الجليديين مدة 11 700 سنة. وبالتالي،

$$\ln \frac{3060}{20} = \frac{c_{ia}(108\,300 \text{ year}) + c_{ig}(11\,700 \text{ year})}{3060 \text{ m}}.$$

ب طرح معادلة الطبقة الانتقالية، تُحذف مساهمة الفترة بين الجليديين:

$$\ln \frac{1568}{20} = \frac{c_{ia}(108\,300 \text{ year})}{3060 \text{ m}}.$$

وعليه

$$c_{ia} = \frac{3060}{108\,300} \ln \frac{1568}{20} = 0.123 \text{ m/year}.$$

من الضروري أخذ انضغاط الجليد الأقدم خلال الفترة بين الجليديين في الحسبان.

3.7b

يعطي الشكل 3.2(b) قيمًا نظائرية تمثيلية تقارب

$$\delta_{ia}^{18}\text{O} \approx -42 \text{ ‰}, \quad \delta_{ig}^{18}\text{O} \approx -35 \text{ ‰}.$$

إذن يقابل الانتقال زيادة بنحو 7 ‰.

للمنحى الخطي تقريبًا في الشكل 3.2(a)، ضمن مجال درجات الحرارة المعني، ميل يقارب

$$\frac{\Delta(\delta^{18}\text{O})}{\Delta T} \approx 0.7 \text{ ‰ K}^{-1}.$$

لذلك،

$$\Delta T \approx \frac{7 \text{ ‰}}{0.7 \text{ ‰ K}^{-1}} \approx 10 \text{ K}.$$

يتمثل التغير في احتراق:

$$T_{\text{ig}} - T_{\text{ia}} \approx +10 \text{ K}.$$

تحد القراءات البيانية من الدقة.

3.8

نستخدم هندسة الجزيرة ومنحنى الارتفاع لتحديد الحجم الحالي وفق النموذج. بما أن $A_G = 10L^2$

$$L = \sqrt{\frac{A_G}{10}} = \sqrt{\frac{1.71 \times 10^{12}}{10}} = 4.14 \times 10^5 \text{ m}.$$

الارتفاع الأعظمي الذي يتنبأ به النموذج هو

$$H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}} g}} = \sqrt{\frac{2(1.00 \times 10^5)(4.1352 \times 10^5)}{(917)(9.82)}} = 3.03 \times 10^3 \text{ m}.$$

باستخدام الجزء 3.2c،

$$V_{\text{ice}} = \frac{2}{3} A_G H_m = 3.45 \times 10^{15} \text{ m}^3.$$

يحفظ الانصهار الكتلة، ولذلك يكون حجم الماء الناتج

$$V_{\text{water}} = \frac{\rho_{\text{ice}}}{\rho_{\text{wa}}} V_{\text{ice}}.$$

يؤدي توزيع هذا الماء بانتظام على مساحة المحيط الثابتة إلى

$$\Delta h_{\text{mean}} = \frac{V_{\text{water}}}{A_O} = \frac{\rho_{\text{ice}}}{\rho_{\text{wa}}} \frac{2A_G H_m}{3A_O}.$$

عددياً،

$$\Delta h_{\text{mean}} = \frac{917}{998} \frac{3.4548 \times 10^{15}}{3.61 \times 10^{14}} = 8.79 \text{ m}.$$

إذن

$$\Delta h_{\text{mean}} \approx 8.8 \text{ m}.$$

3.9

يكون السطح الحر لمحيط ساكن سطحاً متساوي الجهد. ولذلك نقارن جهدي الجاذبية عند كوبنهاغن وعند النقطة المقابلة لغرينلاند.

الكتلة النقطية التي تمثل الغطاء الجليدي هي

$$M = \rho_{\text{ice}} V_{\text{ice}} = (917)(3.4548 \times 10^{15}) = 3.17 \times 10^{18} \text{ kg}.$$

لنرمز بـ R إلى نصف قطر الأرض وبـ h إلى إزاحة صغيرة لسطح البحر عن كرة مرجعية. مساهمة الأرض في جهد الجاذبية لكل وحدة كتلة هي

$$\Phi_E(R+h) = -\frac{Gm_E}{R+h} \approx -\frac{Gm_E}{R} + gh,$$

حيث $R \ll h$ وتساهم كتلة الجليد بالجهد

$$\Phi_{\text{ice}} = -\frac{GM}{d},$$

حيث d هي المسافة المستقيمة إلى كتلة الجليد.

إلى الرتبة الأولى، يمكن حساب d على الكرة المرجعية: فالتغيرات البالغة بضعة أمتار مهمة مقارنة بمسافات تبلغ ملايين الأمتار. ولذلك يقتضي تساوي جهدي السطح أن

$$gh_{\text{CPH}} - \frac{GM}{d_{\text{CPH}}} = gh_{\text{OPP}} - \frac{GM}{d_{\text{OPP}}}.$$

إذن

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = \frac{GM}{g} \left(\frac{1}{d_{\text{CPH}}} - \frac{1}{d_{\text{OPP}}} \right).$$

المسافة المعطاة 3500 km هي طول قوس s ، ولذلك تكون الزاوية المركزية والمسافة الوترية

$$\theta = \frac{s}{R}, \quad d_{\text{CPH}} = 2R \sin \frac{\theta}{2} = 2R \sin \frac{s}{2R}.$$

عند النقطة المقابلة،

$$d_{\text{OPP}} = 2R.$$

وبالتالي،

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = \frac{GM}{2gR} \left[\frac{1}{\sin(s/(2R))} - 1 \right].$$

تعطي مساحة الأرض المذكورة $R = \sqrt{A_E/(4\pi)} \approx 6.37 \times 10^6$ m، بما يتفق مع نصف القطر المعطى. باستخدام $R = 6.38 \times 10^6$ m

$$\theta = 0.5486, \quad d_{\text{CPH}} = 3.456 \times 10^6 \text{ m}, \quad d_{\text{OPP}} = 1.276 \times 10^7 \text{ m}.$$

وعليه

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = \frac{(6.67 \times 10^{-11})(3.168 \times 10^{18})}{9.82} \left(\frac{1}{3.456 \times 10^6} - \frac{1}{1.276 \times 10^7} \right) = 4.54 \text{ m}.$$

لذلك،

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} \approx 4.5 \text{ m}.$$

تعني الإشارة الموجبة أن جذب غرينلاند الثقالي يرفع سطح المحيط المتزن عند كوينهاغن بالنسبة إلى الجانب المقابل من الأرض. وأي إزاحة مشتركة لازمة للحفاظ على حجم المحيط تلغى عند حساب هذا الفرق.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.