

IPhO 2012

理论题与解答 · 爱沙尼亚塔尔图 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/2012/

题目 1: 聚焦示意图

题目 T1. 聚焦示意图 (13 分)

部分 A. 弹道运动 (4.5 分)

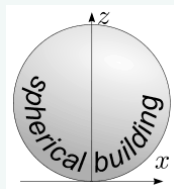
一个以初速度 v_0 抛出的小球在均匀重力场中的 x - z 平面内运动，其中 x 轴水平， z 轴竖直，方向与自由落体加速度 g 相反。忽略空气阻力的影响。

i. (0.8 分) 从原点以固定初速度 v_0 抛出小球，通过调节抛射角，可以击中下列区域内的目标：

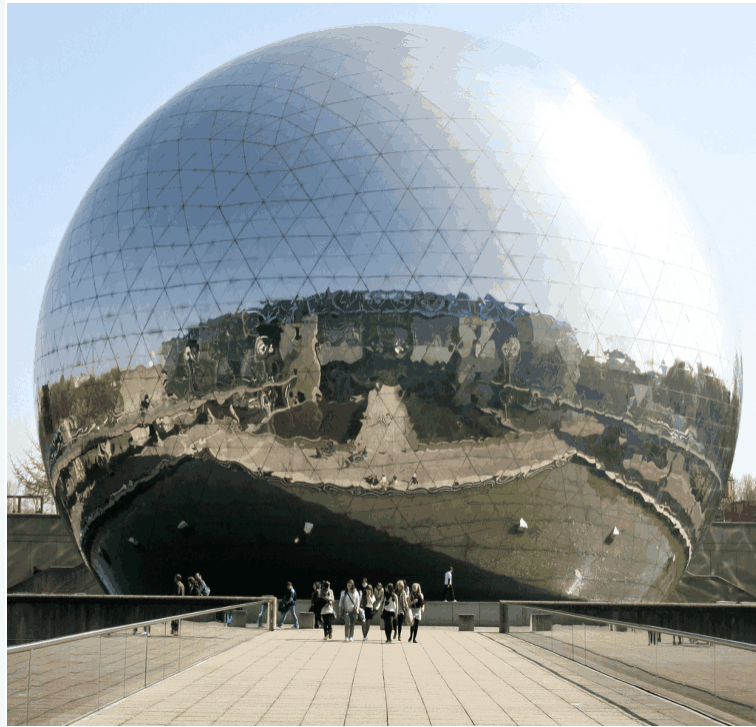
$$z \leq z_0 - kx^2.$$

你可以直接使用这一结论，无须证明。求常数 z_0 和 k 。

ii. (1.2 分) 现在可以在地面 $z = 0$ 上自由选择抛射点，并根据需要调节抛射角。目标是以最小的初速度 v_0 击中半径为 R 的球形建筑物的最高点（见图）。在击中目标之前，不允许小球在屋顶上发生反弹。定性画出小球最优轨迹的形状（画在答题纸上指定的方框内）。注意，本问仅根据示意图评分。



iii. (2.5 分) 要击中半径为 R 的球形建筑物的最高点，所需的最小抛射速度 $v_{\min}$ 是多少？



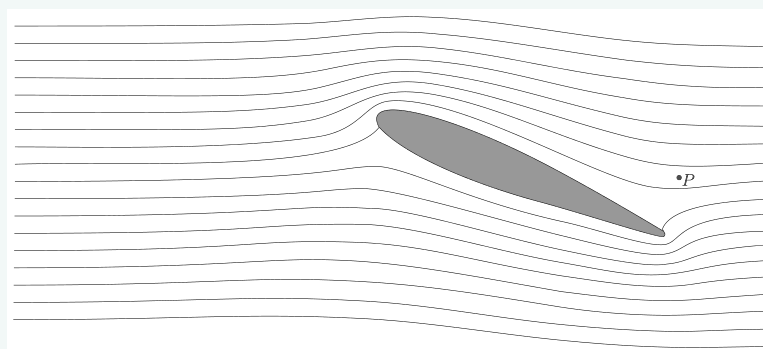
巴黎拉维莱特公园的 La Géode 球幕影院。摄影：katchooo/flickr.com

部分 B. 机翼周围的气流（4 分）

以下信息可能对解答本部分有所帮助。对于管道内沿一条流线流动的液体或气体，若流速 v 远小于声速，则有 $p + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{常数}$ 。其中， ρ 为密度， h 为高度， g 为自由落体加速度， p 为流体静压。流线定义为流体质点的运动轨迹（假定流动形态不随时间变化）。注意， $\frac{1}{2}\rho v^2$ 这一项称为动压。

下图是在机翼参考系中观察到的飞机机翼截面及其周围气流的流线。假设 (a) 气流是纯二维的（即空气的速度矢量均位于图示平面内）；(b) 流线形态与飞机速度无关；(c) 无风；(d) 动压远小于大气压 $p_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。

你可以使用直尺在答题纸的图中进行测量。



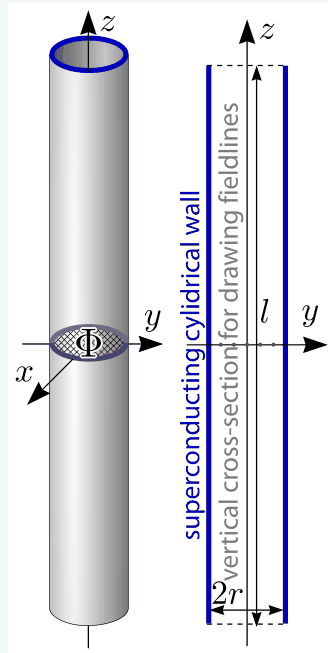
i. (0.8 分) 若飞机相对于地面的速度为 $v_0 = 100 \text{ m/s}$ ，则 P 点（图中已标出）处空气相对于地面的速率 v_P 是多少？

ii. (1.2 分) 在相对湿度较高时，当飞机的对地速度增大到超过某个临界值 v_{crit} 后，机翼后方会形成一股水滴流。水滴在某一点 Q 开始出现。在答题纸的图中标出 Q 点。定性说明你如何确定 Q 的位置（使用公式，并尽量少用文字）。

iii. (2.0 分) 利用以下数据估算临界速度 v_{crit} ：空气的相对湿度为 $r = 90\%$ ，空气的定压比热容为 $c_p = 1.00 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ；在未受扰动空气的温度 $T_a = 293 \text{ K}$ 下，水的饱和蒸气压为 $p_{sa} = 2.31 \text{ kPa}$ ，在 $T_b = 294 \text{ K}$ 下为 $p_{sb} = 2.46 \text{ kPa}$ 。根据所采用的近似，你可能还需要空气的定容比热容 $c_V = 0.717 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ 。注意，相对湿度定义为蒸气压与给定温度下饱和蒸气压的比值。饱和蒸气压定义为蒸气与液体处于平衡时的蒸气压。

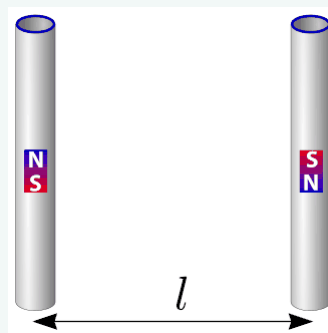
部分 C. 磁性吸管 (4.5 分)

考虑一根由超导材料制成的圆柱形管。管长为 l ，内半径为 r ，且 $l \gg r$ 。管的中心与原点重合，轴线与 z 轴重合。



穿过管中央横截面 $z = 0$ 、 $x^2 + y^2 < r^2$ 的磁通量为 Φ 。超导体是一种排斥任何磁场的材料（材料内部的磁场为零）。

- (0.8 分) 在答题纸指定的图中，画出通过管的轴截面上所标五个红点的五条磁感线。
- (1.2 分) 求管中部沿 z 轴方向的张力 T （即管的两半部分 $z > 0$ 和 $z < 0$ 之间的相互作用力）。
- (2.5 分) 考虑另一根与第一根相同且平行的管。



第二根管中的磁场与第一根管中的磁场大小相同、方向相反，其中心位于 $y = l$ 、 $x = z = 0$ 处（使两根管构成一个正方形的两条对边）。求两根管之间的磁相互作用力 F 。

题目译自官方英文原文。

答案

- A.i. $z_0 = \frac{v_0^2}{2g}$, $k = \frac{g}{2v_0^2}$.
- A.ii. 最优抛物线从地面向上延伸，与建筑物上部表面相切掠过，再略微上升，随后下降至最高点。若从左侧接近，其方程为

$$z = 2R - \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{4x^2}{3R}.$$

- A.iii. $v_{\min} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}$.
- B.i. $v_P \approx 20 \text{ m/s}$ ，方向大致与飞机的运动方向相同。
- B.ii. 将 Q 标在圆弧形前缘的正上方，即上侧流线最密集的位置：此处流速最大，温度最低。
- B.iii. $v_{\text{crit}} \approx 35 \text{ m/s}$ ，这里取最大局部流速约为飞机速度的两倍，并计入了水蒸气分压的变化。忽略该分压变化时，结果约为 32 m/s 。
- C.i. 在管腔内部画出近似平行于轴线的磁感线。四条不在轴线上的磁感线在管端外侧向外散开，并绕过管外部返回，不进入超导管壁。中央轴线上的磁感线保持笔直。
- C.ii. $T \simeq \frac{\Phi^2}{2\mu_0\pi r^2}$ ，使两半部分相互吸引。
- C.iii. 两根管相互吸引，作用力为

$$F \simeq \frac{\Phi^2}{4\pi\mu_0 l^2} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

磁学部分的结果采用了细长管近似。

解答

A.i.

对于抛射角 θ ，从抛体运动方程中消去时间，得到

$$z = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}.$$

令 $u = \tan \theta$ ，则

$$z = xu - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + u^2).$$

对于固定的 $x \neq 0$ ，此二次式在下列条件下取得最大值：

$$u = \frac{v_0^2}{gx}.$$

代入可得包络线

$$z_{\text{env}} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

在 $x = 0$ 处，包络线的高度也等于竖直上抛所能达到的最大高度。因此，

$$\boxed{z_0 = \frac{v_0^2}{2g}}, \quad \boxed{k = \frac{g}{2v_0^2}}.$$

A.ii.

将建筑物的中心设在 $(0, R)$ ，则其顶点为 $(0, 2R)$ 。选择左侧的一个抛射点；将轨迹关于 z 轴反射，可得到一条同样好的轨迹。

所要求的示意图是一条开口向下的抛物线，具有以下特征：

1. 从建筑物左侧的地面出发，陡峭地上升。
2. 与左上方表面相切掠过，速度不因碰撞而发生改变。
3. 继续上升至最高点，该点位于建筑物顶点略偏左上方。
4. 随后下降至建筑物的最高点。

下文将推导各关键点的精确位置，列示如下：

关键点	x/R	z/R
抛射点	$-\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{11}}{8} \approx -1.460$	0
相切掠过点	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.866$	$\frac{3}{2}$
轨迹最高点	$-\frac{\sqrt{3}}{8} \approx -0.217$	$\frac{33}{16} = 2.0625$
目标点	0	2

A.iii.

设小球到达目标时的速率为 v_t 。由机械能守恒得

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_t^2 + mg(2R),$$

因此

$$v_0^2 = v_t^2 + 4gR.$$

所以，使抛射速度最小等价于使 v_t 最小。

将运动过程反向。现在从 $(0, 2R)$ 处以速率 v_t 抛出一个物体。根据 A.i，所有这样的轨迹都位于下列包络线下方：

$$z_{\text{env}}(x) = 2R + \frac{v_t^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_t^2}.$$

从左侧接近目标的轨迹必须越过上表面

$$z_s(x) = R + \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq 0.$$

因此，包络线也必须不低于该表面。

定义

$$\lambda = \frac{v_t^2}{gR}, \quad c = \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}, \quad 0 \leq c \leq 1.$$

包络线与屋顶的高度差为

$$\begin{aligned} \frac{z_{\text{env}} - z_s}{R} &= 1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{1 - c^2}{2\lambda} - c \\ &= \frac{(c - \lambda)^2 + 2\lambda - 1}{2\lambda}. \end{aligned}$$

若 $0 < \lambda < 1/2$, 取 $c = \lambda$ 就会使此差值为负。此时不存在能够越过建筑物的轨迹。因此

$$v_t^2 \geq \frac{gR}{2}.$$

等号成立时, 包络线在 $c = 1/2$ 处接触屋顶, 即

$$(x, z) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}R, \frac{3}{2}R \right).$$

还必须证明, 确实存在一条实际轨迹能够达到这一界限。将反向运动的抛体朝左、以高于水平线 30° 的角度抛出, 在原坐标系中得到

$$z(x) = 2R - \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{4x^2}{3R}.$$

这条抛物线经过目标点, 并在上述点与球面相切。为验证它从不进入建筑物内部, 令 $t = -x/R \geq 0$ 。直接代入可得

$$\frac{x^2 + (z - R)^2 - R^2}{R^2} = \frac{16}{9}t \left(t + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \geq 0.$$

因此, 相关的整段轨迹都在球体外部, 并在到达目标之前与球面相切接触, 无须反弹。

最后,

$$v_{\min}^2 = \frac{gR}{2} + 4gR = \frac{9}{2}gR,$$

所以

$$v_{\min} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}.$$

由这条抛物线与地面的交点及其顶点, 可得到 A.ii 中列出的关键点位置。

B.i.

用 u 表示机翼参考系中的空气速率。由于压强变化远小于大气压, 首先将密度视为常量。

对于展向宽度为一个单位的细流管, 连续性方程给出

$$u d = v_0 d_\infty,$$

其中, d 为沿垂直于流动方向测量的相邻流线间距, d_∞ 为上游未受扰动处的流线间距。因此

$$u = v_0 \frac{d_\infty}{d}.$$

由所给图可见, P 点附近的间距约为上游间距的 1.25 倍:

$$u_P \approx 0.80v_0 \approx 80 \text{ m/s}.$$

取机翼参考系中未受扰动的气流方向为向右。于是飞机相对于地面向左运动，因此速度变换为

$$\mathbf{v}_{P,\text{ground}} = \mathbf{u}_P - v_0 \hat{\mathbf{x}}.$$

P 点处的流线近似水平。因此，

$$v_P \approx |80 - 100| = 20 \text{ m/s},$$

方向近似向左，与飞机的运动方向相同。

若保留局部流线的小倾角，则相应表达式为

$$v_P = \sqrt{u_P^2 + v_0^2 - 2u_P v_0 \cos \theta_P}.$$

B.ii.

忽略机翼各处的重力势能差。连续性方程和伯努利方程给出

$$u \propto \frac{1}{d}, \quad p = p_0 + \frac{1}{2} \rho (v_0^2 - u^2).$$

对于近似绝热的流动，由滞止焓守恒得

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_a + \frac{v_0^2}{2}.$$

因此

$$d \text{ 最小} \implies u \text{ 最大} \implies p, T \text{ 最低}.$$

饱和蒸气压随温度降低而迅速下降，因此该处的相对湿度最先达到 1。

将 Q 标在圆弧形前缘的正上方，即机翼上侧流线间距最小的区域。产生的水滴随后被气流带向下游。

B.iii.

将空气视为理想气体，在凝结开始前经历近似绝热的可逆膨胀。其比气体常数为

$$R_{\text{air}} = c_p - c_V = 283 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

设 Q 处的温降为 $\Delta T = T_a - T_Q > 0$ 。由所给饱和蒸气压数据得到局部斜率

$$s = \frac{p_{sb} - p_{sa}}{T_b - T_a} = \frac{2460 - 2310}{294 - 293} = 150 \text{ Pa/K}.$$

采用线性外推，

$$p_s(T_Q) \approx p_{sa} - s \Delta T.$$

凝结发生前，水蒸气的摩尔分数不变，因此其分压与总压强成正比：

$$p_{v,Q} = r p_{sa} \frac{p_Q}{p_0}.$$

理想气体的绝热关系给出

$$\frac{p_Q}{p_0} = \left(\frac{T_Q}{T_a} \right)^{c_p/R_{\text{air}}} \approx 1 - \frac{c_p}{R_{\text{air}} T_a} \Delta T.$$

凝结开始时， $p_{v,Q} = p_s(T_Q)$ 。因此，

$$r p_{sa} \left(1 - \frac{c_p \Delta T}{R_{\text{air}} T_a} \right) = p_{sa} - s \Delta T,$$

由此得

$$\Delta T = \frac{(1-r)p_{sa}}{s - rp_{sa}c_p/(R_{\text{air}}T_a)}.$$

代入数值得

$$\Delta T = \frac{0.10(2310)}{150 - \frac{0.90(2310)(1000)}{283(293)}} \approx 1.85 \text{ K}.$$

因此，凝结开始时的温度约为 291.2 K。

令

$$\alpha = \frac{u_Q}{v_0} \approx \frac{d_\infty}{d_Q}.$$

图中最窄的间距约为未受扰动处间距的一半，因此 $\alpha \approx 2$ 。于是能量方程给出

$$c_p \Delta T = \frac{1}{2}(u_Q^2 - v_{\text{crit}}^2) = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1)v_{\text{crit}}^2.$$

从而，

$$v_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2c_p \Delta T}{\alpha^2 - 1}} \approx \sqrt{\frac{2(1000)(1.85)}{4 - 1}} \approx 35 \text{ m/s}.$$

相应的压强降幅约为 2.2%，这与根据图形估算流速时将密度变化视为小量的做法相符。

一种更简单的近似是将水蒸气分压视为常量。由此得到

$$\Delta T \approx \frac{(1-r)p_{sa}}{s} = 1.54 \text{ K}, \quad v_{\text{crit}} \approx 32 \text{ m/s}.$$

两种估算都表明临界速度为每秒几十米；计入压强修正后的估算值约为 35 m/s。

C.i.

选择管内磁通量的方向为 $+z$ ；将所有箭头反向即可得到相反的方向约定。

在远离管端的区域，管腔内的磁场近似均匀，并沿轴向。画出通过所标各点的五条近似笔直、彼此平行的磁感线。

在管口处：

- 轴线两侧各有两条不在轴线上的磁感线，它们在上端之外向外呈扇形散开，绕过外部向下弯曲，再从下端管口返回。
- 图形关于轴线以及中间平面均对称。
- 通过更靠近轴线的点的磁感线，在外部形成更大的回路。
- 没有磁感线穿过超导管壁；磁场与管壁表面相切。

对于轴线上的点，轴对称性要求磁感线是一条沿 z 轴的直线。它向两个方向延伸至无穷远，没有有限的端点。其他磁感线上的箭头在管腔内部向上，在外部返回段向下。

C.ii.

将管腔截面积记为

$$A = \pi r^2.$$

由于 $l \gg r$ ，中央区域的磁场近似均匀：

$$B = \frac{\Phi}{A}.$$

沿磁场方向的麦克斯韦应力为拉应力，其大小为

$$\sigma_{\parallel} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

在管腔中央横截面上对该应力积分，得到两半部分之间的吸引力：

$$T \simeq \frac{B^2 A}{2\mu_0} = \boxed{\frac{\Phi^2}{2\mu_0 \pi r^2}}.$$

在长管极限下，外部微弱的返回磁场仅带来很小的修正。

也可以由磁场能量得到这一结果。在俘获磁通量和横截面积保持不变时，

$$U \simeq \frac{B^2}{2\mu_0} Al = \frac{\Phi^2 l}{2\mu_0 A}.$$

增加管长需要做功 $T dl = dU$ ，由此得到相同的张力。

C.iii.

在距离远大于管半径的地方，从一端流出的磁通所产生的磁场，可以视为一个等效磁极的磁场。其磁极强度为

$$q_m = \frac{\Phi}{\mu_0},$$

因为其径向磁场为

$$B(s) = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi s^2} = \frac{\Phi}{4\pi s^2}.$$

这些磁极是外部磁场的等效源，并不要求存在真实的磁单极子。两端的磁极符号相反。

相距 s 的两个此类等效磁极之间的作用力大小为

$$\frac{\mu_0 q_m^2}{4\pi s^2} = \frac{\Phi^2}{4\pi \mu_0 s^2}.$$

令

$$K = \frac{\Phi^2}{4\pi \mu_0}.$$

对于磁场方向反平行的两根管，必须计入全部四对管端之间的相互作用：

管端配对	间距	相互作用	指向另一根管的合力分量
上端—上端和下端—下端	l	吸引	$\frac{2K}{l^2}$
上端—下端和下端—上端	$\sqrt{2}l$	排斥	$-\frac{K}{\sqrt{2}l^2}$

对于每一对处于对角位置的管端，作用力大小为 $K/(2l^2)$ ，其横向分量等于该大小乘以 $\cos 45^\circ$ 。它们的竖直分量相互抵消。

因此，

$$F \simeq \frac{\Phi^2}{4\pi\mu_0 l^2} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

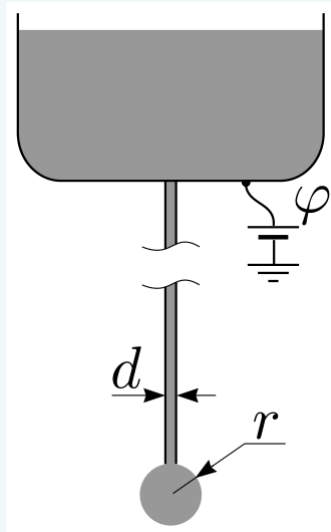
该力为吸引力：第一根管所受力沿 $+y$ 方向，第二根管所受力沿 $-y$ 方向。

解答已与官方解答核对。

题目 2：开尔文滴水起电机

题目 T2. 开尔文滴水起电机（8 分）

以下有关表面张力的知识可能有助于解答本题。对于液体分子而言，与处于液体内部相比，处于液体与空气的界面上在能量上更不利。这个界面可用所谓的表面能来描述： $U = \sigma S$ ，其中 S 是界面的表面积， σ 是液体的表面张力系数。此外，液体表面的两个部分以大小为 $F = \sigma l$ 的力相互拉引，其中 l 是分隔这两个部分的直线的长度。



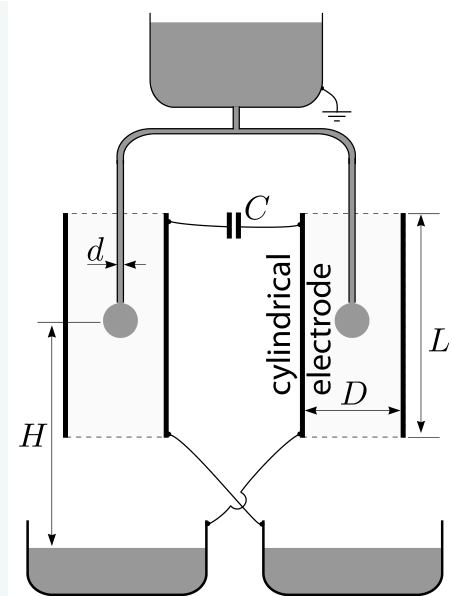
一根内径为 d 的长金属管竖直朝下。水从其下端的喷嘴缓慢滴落，如图所示。可以认为水是导电的；其表面张力系数为 σ ，密度为 ρ 。一个半径为 r 的水滴悬挂在喷嘴下方。水滴的半径随时间缓慢增大，直到水滴在重力加速度 g 的作用下脱离喷嘴。始终假设 $d \ll r$ 。

部分 A. 单管（4 分）

- (1.2 分) 求水滴即将脱离喷嘴时的半径 $r_{\max}$ 。
- (1.2 分) 相对于远处的周围环境，金属管的静电势为 φ 。求水滴半径为 r 时所带的电荷量 Q 。
- (1.6 分) 考虑保持 r 不变而缓慢增大 φ 的情形。如果水滴内部的流体静压小于大气压，水滴就会失稳并破碎。求发生这一现象时的临界电势 $\varphi_{\max}$ 。

部分 B. 双管（4 分）

一种称为“开尔文滴水起电机”的装置由两根管子组成，每根都与部分 A 中描述的管子相同，两根管子通过一个 T 形接头连接，如图所示。两根管子的末端分别位于两个圆柱形电极的中心（电极的高度为 L ，直径为 D ，且 $L \gg D \gg r$ ）。两根管子的滴水速率均为每单位时间 n 滴。水滴从高度 H 处落入喷嘴下方的导电碗中，导电碗与电极按图示交叉连接。两个电极通过一个电容为 C 的电容器连接。由导电碗和电极组成的系统的净电荷为零。注意，顶部的储水容器如图所示接地。最先落下的水滴会带有微量电荷，使两侧出现不平衡，并使电容器两端产生少量电荷分离。



- i. (1.2 分) 当电容器的电荷量为 q 时, 写出刚脱离管子水滴所带电荷量的绝对值 Q_0 的表达式。用 $r_{\max}$ (由部分 A-i 求得) 表示 Q_0 , 并忽略部分 A-iii 中描述的效应。
- ii. (1.5 分) 将 q 近似为连续函数 $q(t)$, 并假设 $q(0) = q_0$, 求 q 随时间 t 的变化关系。
- iii. (1.3 分) 部分 A-iii 中所述的效应会妨碍滴水起电机的工作。此外, 水滴与其下方导电碗之间的静电斥力也会使电极间可达到的电势差存在上限 $U_{\max}$ 。求 $U_{\max}$ 。

题目译自官方英文原文。

答案

这里, ε_0 为真空介电常数, q 表示电容器任一极板上电荷量的大小。

- A-i:

$$r_{\max} = \left(\frac{3\sigma d}{4\rho g} \right)^{1/3}.$$

- A-ii:

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 r \varphi.$$

- A-iii:

$$\varphi_{\max} = 2\sqrt{\frac{\sigma r}{\varepsilon_0}}.$$

同一阈值也适用于负电势的绝对值。

- B-i:

$$Q_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0 r_{\max}}{C} q.$$

- B-ii: 在连续近似下, 忽略飞行延迟, 有

$$q(t) = q_0 \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 n r_{\max}}{C} t\right).$$

- B-iii: 静电斥力所导致的上限为

$$U_{\max} = r_{\max} \sqrt{\frac{2\rho g H}{3\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\sigma d H}{2\epsilon_0 r_{\max}}}.$$

题目未给出任何参数的数值。

解答

部分 A-i

缓慢增大的水滴处于力学平衡状态, 直到其重力超过表面张力所能提供的最大支撑力。

喷嘴的周长为 πd 。当表面张力沿颈部周缘竖直作用时, 其向上的力最大为

$$F_\sigma = \pi d \sigma.$$

当 $d \ll r$ 时, 颈部的体积以及喷嘴小孔处压力所产生的力的修正均可忽略。将水滴近似为球形, 其重力为

$$mg = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g.$$

在脱离时,

$$\frac{4}{3} \pi r_{\max}^3 \rho g = \pi d \sigma,$$

因此

$$r_{\max} = \left(\frac{3\sigma d}{4\rho g}\right)^{1/3}.$$

球形近似与这一结果相容: 重力应力与毛细应力之比为

$$\frac{\rho g r_{\max}^2}{\sigma} = \frac{3d}{4r_{\max}} \ll 1.$$

部分 A-ii

导电水滴与金属管具有相同的电势。忽略细管对水滴电场的扰动, 水滴可视为一个导体球。

在带电荷量为 Q 的球体外部, 由高斯定律得

$$E(s) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 s^2}.$$

取远处周围环境的电势为零,

$$\varphi = \int_r^\infty E(s) ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

因此

$$Q = 4\pi\epsilon_0 r \varphi.$$

水滴所带电荷的符号与 φ 的符号相同。

部分 A-iii

表面张力产生向内的毛细压强。由给定的表面能,

$$W_\sigma = 4\pi r^2 \sigma,$$

增大表面积所需的压强为

$$p_\sigma = \frac{dW_\sigma}{dV} = \frac{8\pi r \sigma}{4\pi r^2} = \frac{2\sigma}{r}.$$

电场产生向外的压强。对于导体, 表面电荷密度为 $\varepsilon_0 E$, 而其他电荷在该表面电荷处产生的电场为 $E/2$ 。因此

$$p_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

利用部分 A-ii 的结果,

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\varphi}{r}.$$

因此, 由力学平衡得

$$p_{\text{in}} - p_{\text{atm}} = p_\sigma - p_e = \frac{2\sigma}{r} - \frac{\varepsilon_0 \varphi^2}{2r^2}.$$

根据题目规定的失稳判据, 当内部压强等于大气压时达到阈值:

$$\frac{2\sigma}{r} = \frac{\varepsilon_0 \varphi_{\text{max}}^2}{2r^2}.$$

因此

$$\boxed{\varphi_{\text{max}} = 2\sqrt{\frac{\sigma r}{\varepsilon_0}}}.$$

等价地, 相应的电荷量大小为

$$Q_{\text{crit}} = 4\pi\varepsilon_0 r \varphi_{\text{max}} = 8\pi\sqrt{\varepsilon_0 \sigma r^3}.$$

部分 B-i

记

$$R = r_{\text{max}}, \quad U = \frac{q}{C}.$$

与 C 相比, 忽略杂散电容。由对称性以及净电荷为零, 两个电极相对于地的电势为

$$V_L = +\frac{U}{2}, \quad V_R = -\frac{U}{2}.$$

由于 $L \gg D$, 在不计小水滴的影响时, 每个圆柱中心附近的电势近似等于该圆柱的电势。由于 $D \gg R$, 水滴自身对其表面电势的贡献近似等于一个孤立球的贡献。

水和管子均接地。因此, 在左侧水滴尚未脱离时,

$$0 = V_L + \frac{Q_L}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

由此得

$$Q_L = -2\pi\varepsilon_0 R U.$$

类似地,

$$Q_R = +2\pi\epsilon_0 RU.$$

水滴脱离时保留其电荷, 因此电荷量的大小为

$$Q_0 = 2\pi\epsilon_0 RU = \frac{2\pi\epsilon_0 r_{\max}}{C} q.$$

由于采用交叉连接, 每个水滴都落入一个已带有与水滴同号电荷的导电碗中。因此, 水滴的到达会加强电荷分离。

部分 B-ii

采用连续近似, 并忽略从水滴脱离到被收集之间的延迟。这一近似假设水滴飞行期间电压变化很小。

每根管子每单位时间产生 n 个水滴。电容器正极板以 nQ_0 的速率接收正电荷, 负极板则以相同的速率接收负电荷。因此, 任一极板上电荷量的大小 q 满足

$$\frac{dq}{dt} = nQ_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 nR}{C} q.$$

这里没有额外的因子 2: 一对水滴使极板上的电荷量从 $+q, -q$ 增加到 $+(q + Q_0), -(q + Q_0)$ 。

积分并代入条件 $q(0) = q_0$, 得

$$\ln \frac{q(t)}{q_0} = \frac{2\pi\epsilon_0 nR}{C} t,$$

所以

$$q(t) = q_0 \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 nR}{C} t\right).$$

特征增长时间为

$$\tau = \frac{C}{2\pi\epsilon_0 nR}.$$

忽略延迟的近似要求飞行时间远小于 τ 。在水滴破碎或静电斥力显著妨碍水滴收集之前, 指数增长规律适用。

部分 B-iii

考虑在正电极内形成的水滴。它带有电荷 $-Q_0$, 而收集它的导电碗与负电极连接。

认为下落期间 U 近似保持不变。装置产生的电势从喷嘴附近的 $+U/2$ 变化到导电碗处的 $-U/2$ 。因此, 水滴在外电场中的静电势能增加量为

$$\Delta W_e = (-Q_0) \left(-\frac{U}{2} - \frac{U}{2} \right) = Q_0 U.$$

这里使用的电势是装置产生的电势。水滴在尚未脱离时的总电势为零, 其中也包含水滴自身电场的贡献。在飞行过程中, 水滴的电荷量和半径近似保持不变, 因此其自能不影响平移过程中的功。

忽略空气阻力和初始动能, 可利用的重力势能为

$$mgH = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho gH.$$

要使水滴仍能被收集, 这一能量必须足以克服静电势能的增加:

$$mgH \geq Q_0 U.$$

在能量极限处，利用 $Q_0 = 2\pi\epsilon_0 RU$ ，得

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g H = 2\pi\epsilon_0 R U_{\max}^2.$$

因此

$$U_{\max} = r_{\max} \sqrt{\frac{2\rho g H}{3\epsilon_0}}.$$

利用脱离条件 $mg = \pi d\sigma$ ，也可写成

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma d H}{2\epsilon_0 r_{\max}}}.$$

对于半径为 $r_{\max}$ 的水滴，部分 A-iii 给出的另一项破碎阈值对应于

$$U_{\text{break}} = 2\varphi_{\max}(r_{\max}) = 4\sqrt{\frac{\sigma r_{\max}}{\epsilon_0}}.$$

这为保持水滴完整的工作状态提供了一个额外限制。

解答已与官方解答核对。

题目 3：原恒星的形成

题目 T3. 原恒星的形成 (9 分)

我们用如下模型描述恒星的形成。一个起初静止的稀薄星际气体球形云团，在自身引力作用下开始坍缩。气体球的初始半径为 r_0 ，质量为 m 。周围环境（比云团中的气体稀薄得多）的温度和气体的初始温度均为 T_0 ，且处处均匀。可将气体视为理想气体。气体的平均摩尔质量为 μ ，绝热指数为 $\gamma > \frac{4}{3}$ 。假设 $G \frac{m\mu}{r_0} \gg RT_0$ ，其中 R 为气体常量， G 为引力常量。

- (0.8 分) 在坍缩过程的大部分时间内，气体的透明度很高，产生的任何热量都会立即辐射出去，即气体球始终与周围环境保持热力学平衡。当半径减小到原来的一半，即 $r_1 = 0.5r_0$ 时，压强变为原来的多少倍 n ？假设气体密度始终均匀。
- (1 分) 估算半径从 r_0 缩小到 $r_2 = 0.95r_0$ 所需的时间 t_2 。忽略下落气体粒子所在位置处引力场的变化。
- (2.5 分) 假设压强始终可以忽略，利用开普勒定律求气体球从 r_0 坍缩到远小于该值的半径所需的时间 $t_{r \rightarrow 0}$ 。
- (1.7 分) 当半径达到某个值 $r_3 \ll r_0$ 时，气体变得足够致密，以致热辐射无法透过。计算从半径 r_0 坍缩到 r_3 的过程中辐射出去的热量 Q 。
- (1 分) 当半径小于 r_3 时，可以忽略辐射造成的热量损失。确定在 $r < r_3$ 时气体球的温度 T 与半径的关系。
- (2 分) 最终，压强对气体运动的影响不能再忽略，坍缩在 $r = r_4$ 处停止（其中 $r_4 \ll r_3$ ）。不过，辐射损失仍可忽略，温度也尚未高到足以引发核聚变。这样的原恒星内部压强已不再均匀，但仍可进行数值前因子不甚精确的粗略估算。估算最终半径 r_4 及相应的温度 T_4 。

答案

- i.

$$n = 8.$$

- ii.

$$t_2 \simeq \sqrt{\frac{0.10 r_0^3}{Gm}} \simeq 0.32 \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}.$$

- iii.

$$t_{r \rightarrow 0} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}} \simeq 1.11 \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}.$$

- iv.

$$Q = \frac{3mRT_0}{\mu} \ln\left(\frac{r_0}{r_3}\right).$$

- v.

$$T(r) = T_0 \left(\frac{r_3}{r}\right)^{3(\gamma-1)}.$$

- vi. 在能量平衡中略去数值因子，可得估算结果

$$r_4 \sim r_3 \left(\frac{RT_0 r_3}{Gm\mu}\right)^{1/(3\gamma-4)}$$

以及

$$T_4 \sim T_0 \left(\frac{Gm\mu}{RT_0 r_3}\right)^{3(\gamma-1)/(3\gamma-4)}.$$

下文将推导保留热容因子和近似引力结构因子的表达式。

解答

设气体的物质的量为 $N = m/\mu$ 摩尔。其体积和理想气体压强满足

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}, \quad pV = NRT.$$

题给不等式表明，初始引力能的量级远大于热能的量级，因此在坍缩初期可以忽略压强。

i. 等温收缩过程中的压强增大

与周围环境保持热力学平衡使温度维持在 T_0 。因此

$$p = \frac{NRT_0}{V} \propto r^{-3}.$$

于是,

$$n = \frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^3 = \left(\frac{1}{0.5}\right)^3 = \boxed{8}.$$

ii. 半径最初减小百分之五所需的时间

由球壳定理, 表面处的粒子最初受到的向内引力加速度为

$$g_0 = \frac{Gm}{r_0^2}.$$

按题目要求将此加速度视为常量, 并利用初始静止条件, 得

$$r_0 - r_2 = \frac{1}{2}g_0 t_2^2.$$

由于 $r_0 - r_2 = 0.05r_0$,

$$t_2 \simeq \sqrt{\frac{2(0.05r_0)}{Gm/r_0^2}} = \sqrt{\frac{0.10r_0^3}{Gm}}.$$

iii. 由开普勒定律求坍缩时间

表面处的粒子在其内部所包围质量 m 产生的引力场中运动:

$$\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2}.$$

将其径向下落看作偏心率极高的束缚开普勒轨道的极限情形。远心点距离为 r_0 , 而近心点距离趋于零, 因此半长轴趋于

$$a = \frac{r_0}{2}.$$

由开普勒第三定律, 轨道周期为

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{Gm}}.$$

从远心点运动到近心点需要半个周期。因此,

$$t_{r \rightarrow 0} = \frac{P}{2} = \pi\sqrt{\frac{(r_0/2)^3}{Gm}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}.$$

对于初始密度均匀的云团, 这也是内部每个球壳的坍缩时间。事实上, 初始半径为 s_0 的球壳所包围的质量为

$$M(s_0) = m\left(\frac{s_0}{r_0}\right)^3,$$

所以其坍缩时间为

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{s_0^3}{GM(s_0)}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}},$$

与 s_0 无关。这支持了密度均匀的同源坍缩近似。

iv. 透明阶段辐射出去的热量

理想气体的内能只取决于温度。由于 $T = T_0$ ，其内能保持不变。

取 $\delta Q_{\text{out}} > 0$ 表示气体向外放出的热量，则热力学第一定律为

$$dU = -p dV - \delta Q_{\text{out}}.$$

因此，由 $dU = 0$ ，得

$$\delta Q_{\text{out}} = -p dV = -NRT_0 \frac{dV}{V}.$$

从 V_0 积分至 V_3 ，得

$$Q = NRT_0 \ln\left(\frac{V_0}{V_3}\right).$$

由于 $V \propto r^3$ ，

$$Q = \frac{3mRT_0}{\mu} \ln\left(\frac{r_0}{r_3}\right).$$

减少的引力势能**并非全部辐射出去**：在这一快速坍缩过程中，大部分引力势能转化为整体向内运动的动能。这里计算的辐射热量对应于压缩功，若没有辐射，这部分功就会使气体内能增加。

v. 不透明阶段的温度

一旦辐射损失可以忽略，在本模型中压缩过程就是绝热的。对于理想气体，

$$pV^\gamma = \text{常量}.$$

将其与 $pV = NRT$ 联立，得

$$TV^{\gamma-1} = \text{常量}.$$

在这一阶段开始时， $r = r_3$ 且 $T = T_0$ 。因此

$$T(r)V(r)^{\gamma-1} = T_0 V_3^{\gamma-1},$$

从而

$$T(r) = T_0 \left(\frac{V_3}{V(r)}\right)^{\gamma-1} = T_0 \left(\frac{r_3}{r}\right)^{3(\gamma-1)}.$$

vi. 坍缩停止时的半径和温度

摩尔定容热容为

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1},$$

所以内能为

$$U = \frac{mRT}{\mu(\gamma - 1)}.$$

将最终的引力势能写成

$$W_4 = -\alpha \frac{Gm^2}{r_4},$$

其中 α 是量级为一的无量纲结构因子。对于均匀球体， $\alpha = 3/5$ ；实际的非均匀原恒星不一定恰好取这一数值。

当整体收缩停止时，整体运动的动能近似为零。由能量守恒，得

$$U_4 + W_4 = U_0 + W_0 - Q.$$

右端与 Gm^2/r_4 相比很小。初始引力能与之相比的比值量级为 r_4/r_0 。辐射能量相对于 Gm^2/r_3 就已经很小，因为

$$\frac{Q}{Gm^2/r_3} = 3 \frac{RT_0 r_0}{Gm\mu} \frac{r_3}{r_0} \ln\left(\frac{r_0}{r_3}\right) \ll 1.$$

因此，在题目要求的精度下，

$$U_4 \simeq |W_4|,$$

即

$$\frac{mRT_4}{\mu(\gamma-1)} \simeq \alpha \frac{Gm^2}{r_4}.$$

等价地，

$$T_4 \simeq \frac{\alpha(\gamma-1)Gm\mu}{Rr_4}.$$

将其与绝热温度关系联立，

$$T_0 \left(\frac{r_3}{r_4}\right)^{3(\gamma-1)} \simeq \frac{\alpha(\gamma-1)Gm\mu}{Rr_4},$$

得

$$\left(\frac{r_3}{r_4}\right)^{3\gamma-4} \simeq \frac{\alpha(\gamma-1)Gm\mu}{RT_0 r_3}.$$

因此，保留这些因子，可得

$$r_4 \simeq r_3 \left[\frac{RT_0 r_3}{\alpha(\gamma-1)Gm\mu} \right]^{1/(3\gamma-4)}$$

以及

$$T_4 \simeq T_0 \left[\frac{\alpha(\gamma-1)Gm\mu}{RT_0 r_3} \right]^{3(\gamma-1)/(3\gamma-4)}.$$

取 $\alpha = 3/5$ 就给出一种具体的粗略估算；略去数值因子则得到答案中的标度关系式。

最后，

$$U \propto r^{-3(\gamma-1)}, \quad |W| \propto r^{-1}.$$

由于 $\gamma > 4/3$ ，收缩过程中内能的增长速度快于引力能绝对值的增长速度。这使坍缩能够停止。此外，

$$\frac{Gm\mu}{RT_0 r_3} \gg 1,$$

因此，估算结果满足 $r_4 \ll r_3$ 和 $T_4 \gg T_0$ ，与假设一致。

解答已与官方解答核对。