

IPhO 2012

Teorik sorular ve çözümler · Tartu, Estonya · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2012/

Soru 1: Çizimlere odaklanın

Soru T1. Çizimlere odaklanın (13 puan)

Bölüm A. Balistik (4.5 puan)

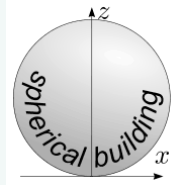
İlk hızı v_0 olan bir top, homojen bir kütleçekim alanında, x -ekseni yatay ve z -ekseni düşey olup serbest düşme ivmesi g ile zıt yönde olacak şekilde, x - z düzleminde hareket etmektedir. Hava direncinin etkisini ihmal edin.

i. (0.8 puan) Orijinden sabit bir v_0 ilk hızıyla atılan topun atış açısı ayarlanarak,

$$z \leq z_0 - kx^2.$$

ile verilen bölge içindeki hedefler vurulabilir. Bu bilgiyi kanıtlamadan kullanabilirsiniz. z_0 ve k sabitlerini bulun.

ii. (1.2 puan) Artık atış noktası $z = 0$ yer seviyesinde serbestçe seçilebilmekte ve atış açısı gerektiği gibi ayarlanabilmektedir. Amaç, R yarıçaplı küresel bir binanın (şekle bakınız) en üst noktasını en küçük v_0 ilk hızıyla vurmaktır. Hedefi vurmadan önce çatıdan sekmeye izin verilmemektedir. Topun en uygun yörüngesinin biçimini nitel olarak çizin (cevap kâğıdında ayrılan kutuyu kullanın). Puanların yalnızca çizime verileceğine dikkat edin.



iii. (2.5 puan) R yarıçaplı küresel bir binanın en üst noktasını vurmak için gereken en küçük atış hızı $v_{\min}$ nedir?



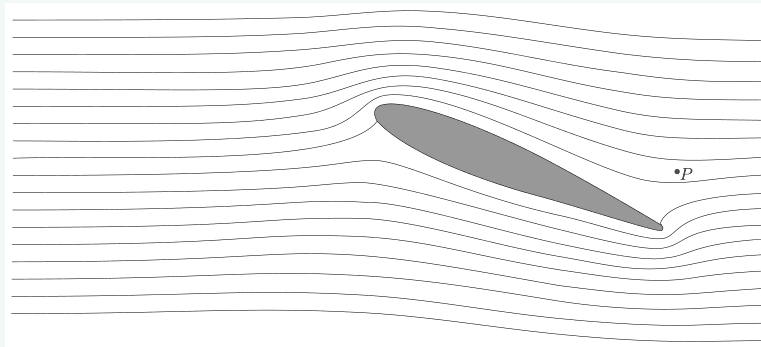
La Géode, Parc de la Villette, Paris. Fotoğraf: katchooo/flickr.com

Bölüm B. Bir kanat çevresindeki hava akışı (4 puan)

Sorunun bu bölümünde aşağıdaki bilgiler yararlı olabilir. Bir boruda bir akım çizgisi boyunca akan sıvı veya gaz için, v hızının ses hızından çok daha küçük olduğu varsayımıyla, $p + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{sabit}$ bağıntısı geçerlidir. Burada ρ yoğunluk, h yükseklik, g serbest düşme ivmesi ve p hidrostatik basınçtır. Akım çizgileri, akış deseninin zamana göre değişmediği varsayımı altında, akışkan parçacıklarının yörüngeleri olarak tanımlanır. $\frac{1}{2} \rho v^2$ teriminin dinamik basınç olarak adlandırıldığına dikkat edin.

Aşağıdaki şekilde, bir uçak kanadının kesiti, kanadın referans sisteminden görüldüğü hâliyle kanadın çevresindeki hava akışının akım çizgileriyle birlikte gösterilmiştir. Şunları varsayın: (a) hava akışı tamamen iki boyutludur (yani havanın hız vektörleri şeklin düzleminde yer alır); (b) akım çizgilerinin deseni uçağın hızından bağımsızdır; (c) rüzgâr yoktur; (d) dinamik basınç, atmosfer basıncı $p_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ değerinden çok daha küçüktür.

Cevap kâğıdındaki şekilden ölçüm yapmak için cetvel kullanabilirsiniz.



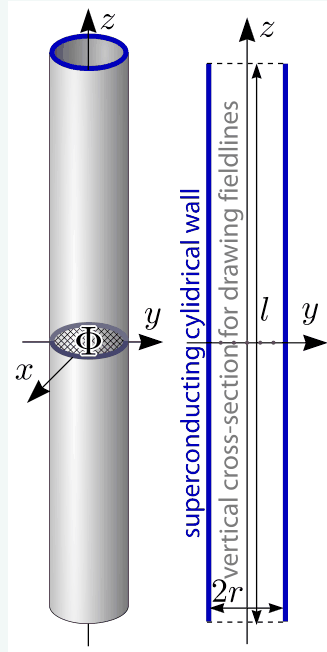
i. (0.8 puan) Uçağın yere göre hızı $v_0 = 100 \text{ m/s}$ ise, şekilde işaretlenmiş P noktasındaki havanın yere göre hızı v_P nedir?

ii. (1.2 puan) Bağıl nemin yüksek olduğu durumda, uçağın yere göre hızı bir v_{crit} kritik değerini aştığında, kanadın arkasında su damlacıklarından oluşan bir akım meydana gelir. Damlacıklar belirli bir Q noktasında ortaya çıkar. Cevap kâğıdındaki şekilde Q noktasını işaretleyin. Q noktasının yerini nasıl belirlediğinizi nitel olarak açıklayın (formüller ve mümkün olduğunca az metin kullanın).

iii. (2.0 puan) Aşağıdaki verileri kullanarak v_{crit} kritik hızını tahmin edin: havanın bağıl nemi $r = 90\%$, havanın sabit basınçtaki özgül ısı kapasitesi $c_p = 1.00 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, doymuş su buharı basıncı, bozulmamış havanın sıcaklığı olan $T_a = 293 \text{ K}$ sıcaklığında $p_{sa} = 2.31 \text{ kPa}$ ve $T_b = 294 \text{ K}$ sıcaklığında $p_{sb} = 2.46 \text{ kPa}$. Yaptığınız yaklaşıklıklara bağlı olarak, havanın sabit hacimdeki özgül ısı kapasitesi $c_V = 0.717 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ değerine de ihtiyaç duyabilirsiniz. Bağıl nemin, verilen sıcaklıkta buhar basıncının doymuş buhar basıncına oranı olarak tanımlandığına dikkat edin. Doymuş buhar basıncı, buharın sıvıyla dengede olduğu buhar basıncı olarak tanımlanır.

Bölüm C. Manyetik pipetler (4.5 puan)

Süperiletken bir malzemeden yapılmış silindirik bir boruyu ele alın. Borunun uzunluğu l , iç yarıçapı r olup $l \gg r$ koşulu sağlanmaktadır. Borunun merkezi orijinle, eksenini ise z -ekseniyle çakışmaktadır.

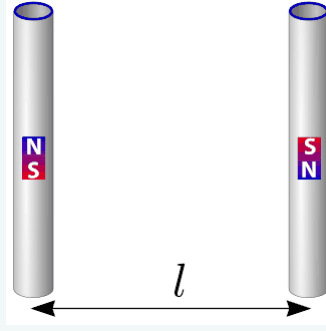


Borunun $z = 0$, $x^2 + y^2 < r^2$ ile tanımlanan orta kesitinden geçen bir Φ manyetik akısı vardır. Süperiletken, her türlü manyetik alanı dışlayan bir malzemedir (malzemenin içinde alan sıfırdır).

i. (0.8 puan) Cevap kâğıdında ayrılan diyagram üzerinde, borunun aksenal kesitinde işaretlenmiş beş kırmızı noktadan geçen beş manyetik alan çizgisi çizin.

ii. (1.2 puan) Borunun ortasında, z -ekseni doğrultusundaki T gerilme kuvvetini (yani borunun $z > 0$ ve $z < 0$ yarılarının birbirlerine uyguladığı kuvveti) bulun.

iii. (2.5 puan) Birinci boruyla özdeş ve ona paralel başka bir boruyu ele alın.



İkinci boru aynı manyetik alana, ancak zıt yönde sahiptir ve merkezi $y = l, x = z = 0$ konumundadır (böylece borular bir karenin karşılıklı kenarlarını oluşturur). İki boru arasındaki manyetik etkileşim kuvveti F' 'yi belirleyin.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **A.i.** $z_0 = \frac{v_0^2}{2g}, \quad k = \frac{g}{2v_0^2}.$
- **A.ii.** En uygun parabol yerden yükselir, binanın üst tarafına teğet olarak değer, biraz daha yükselir ve ardından en üst noktaya doğru alçalır. Soldan yaklaşma durumunda denklemi

$$z = 2R - \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{4x^2}{3R}.$$

biçimindedir.

- **A.iii.** $v_{\min} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}.$
- **B.i.** $v_P \approx 20 \text{ m/s},$ yaklaşık olarak uçağın hareket yönündedir.
- **B.ii.** Q 'yu yuvarlatılmış hücum kenarının hemen üstüne, üst taraftaki akım çizgilerinin birbirine en yakın olduğu yere yerleştirin: hız burada en büyük, sıcaklık ise en küçüktür.
- **B.iii.** En büyük yerel hızın uçak hızının yaklaşık iki katı olduğu kullanılarak ve buharın kısmi basıncındaki değişim hesaba katılarak $v_{\text{crit}} \approx 35 \text{ m/s}$ bulunur. Bu basınç değişimi ihmal edilirse yaklaşık 32 m/s elde edilir.
- **C.i.** Borunun iç boşluğunda eksene paralel, neredeyse birbirine paralel çizgiler çizin. Eksen dışındaki dört çizgi, uçların ötesinde açılır ve süperiletken duvara girmeden dışarıdan dolanarak geri döner. Eksendeki merkez çizgi düz kalır.
- **C.ii.** $T \simeq \frac{\Phi^2}{2\mu_0\pi r^2},$ iki yarıyı birbirine çeker.
- **C.iii.** Borular birbirini

$$F \simeq \frac{\Phi^2}{4\pi\mu_0 l^2} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

kuvvetiyle çeker. Manyetik sonuçlarda uzun ve dar boru yaklaşımı kullanılmıştır.

Çözüm

A.i.

Atış açısı θ için, eğik atış hareketinden zaman elendiğinde

$$z = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}.$$

elde edilir. $u = \tan \theta$ yazılırsa,

$$z = xu - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + u^2).$$

Sabit bir $x \neq 0$ için bu ikinci dereceden ifade,

$$u = \frac{v_0^2}{gx}.$$

olduğunda en büyük değerini alır. Yerine koyma işlemiyle zarf eğrisi

$$z_{\text{env}} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

olarak bulunur. $x = 0$ noktasındaki yüksekliği, aynı zamanda düşey atışın en büyük yüksekliğidir. Dolayısıyla,

$$\boxed{z_0 = \frac{v_0^2}{2g}}, \quad \boxed{k = \frac{g}{2v_0^2}}.$$

A.ii.

Binanın merkezini $(0, R)$ noktasına yerleştirelim; böylece tepesi $(0, 2R)$ olur. Solda bir atış noktası seçelim; z -eksenine göre yansıma, aynı derecede iyi bir yörünge verir.

İstenen çizim, aşağıdaki özelliklere sahip, aşağı doğru açılan bir paraboldür:

1. Binaanın solunda, yerden başlar ve dik bir biçimde yükselir.
2. Sol üst yüzeye teğet olarak değer; bir çarpma nedeniyle hızında değişiklik olmaz.
3. Binaanın tepesinin biraz üstünde ve solunda bulunan bir doruk noktasına kadar yükselmeye devam eder.
4. Ardından en üst noktaya doğru alçalır.

Aşağıda türetilen önemli noktaların tam konumları şunlardır:

Önemli nokta	x/R	z/R
Atış noktası	$-\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{11}}{8} \approx -1.460$	0
Teğet temas noktası	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.866$	$\frac{3}{2}$
Doruk noktası	$-\frac{\sqrt{3}}{8} \approx -0.217$	$\frac{33}{16} = 2.0625$
Hedef	0	2

A.iii.

Top hedefe ulaştığında hızının büyüklüğü v_t olsun. Mekanik enerjinin korunumu

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_t^2 + mg(2R),$$

bağıntısını verir; buradan

$$v_0^2 = v_t^2 + 4gR.$$

elde edilir. Dolayısıyla atış hızını en küçük yapmak, v_t 'yi en küçük yapmakla eşdeğerdir.

Hareketi tersine çevirelim. Şimdi $(0, 2R)$ noktasından v_t hızıyla bir cisim atıyoruz. A.i'ye göre bu tür her yörünge,

$$z_{\text{env}}(x) = 2R + \frac{v_t^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_t^2}.$$

zarf eğrisinin altında kalır. Hedefe soldan yaklaşan bir yörünge,

$$z_s(x) = R + \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq 0.$$

üst yüzeyinin üzerinden geçmelidir. Bu nedenle zarf eğrisi de bu yüzeyin üzerinden geçmelidir.

Şu tanımları yapalım:

$$\lambda = \frac{v_t^2}{gR}, \quad c = \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}, \quad 0 \leq c \leq 1.$$

Zarf eğrisi ile çatı arasındaki fark

$$\begin{aligned} \frac{z_{\text{env}} - z_s}{R} &= 1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{1 - c^2}{2\lambda} - c \\ &= \frac{(c - \lambda)^2 + 2\lambda - 1}{2\lambda}. \end{aligned}$$

olur. $0 < \lambda < 1/2$ ise, $c = \lambda$ seçimi bu ifadeyi negatif yapar. Bu durumda hiçbir yörünge binanın üzerinden geçemez. O hâlde

$$v_t^2 \geq \frac{gR}{2}.$$

Eşitlik durumunda zarf eğrisi çatıya $c = 1/2$ değerinde, yani

$$(x, z) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}R, \frac{3}{2}R \right).$$

noktasında değer.

Gerçek bir yörünge bu sınıra ulaştığını da göstermeliyiz. Tersine çevrilmiş harekette cismi sola doğru, yatayın 30° üstünde atmak, başlangıçtaki koordinatlarda

$$z(x) = 2R - \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{4x^2}{3R}.$$

yörüngesini verir.

Bu parabol hedeften geçer ve yukarıdaki noktada küreye teğettir. Binanın içine hiçbir zaman girmediğini doğrulamak için $t = -x/R \geq 0$ alalım. Doğrudan yerine koyarak

$$\frac{x^2 + (z - R)^2 - R^2}{R^2} = \frac{16}{9} t \left(t + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \geq 0.$$

elde edilir. Böylece yörüngenin ilgili kısmının tamamı kürenin dışındadır ve hedefe varmadan önce teğet temas gerçekleşir. Sekmeye gerek yoktur.

Son olarak,

$$v_{\min}^2 = \frac{gR}{2} + 4gR = \frac{9}{2}gR,$$

ve dolayısıyla

$$v_{\min} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}.$$

Bu parabolün yerle kesişimi ve doruk noktası, A.ii'de listelenen önemli noktaları verir.

B.i.

u , kanadın referans sistemindeki hava hızını gösterebilir. Basınç değişimleri atmosfer basıncına kıyasla küçük olduğundan, önce yoğunluğu sabit kabul ederiz.

Açıklığı bir birim olan dar bir akım tüpü için süreklilik denklemi

$$u d = v_0 d_\infty,$$

bağıntısını verir; burada d , komşu akım çizgileri arasındaki akışa dik ölçülen uzaklık, d_∞ ise akışın bozulmadığı akış yukarısı bölgesinde bu çizgiler arasındaki uzaklıktır. Böylece

$$u = v_0 \frac{d_\infty}{d}.$$

Verilen şekle göre, P yakınındaki aralık akış yukarısındaki aralığın yaklaşık 1.25 katıdır:

$$u_P \approx 0.80v_0 \approx 80 \text{ m/s}.$$

Kanadın referans sistemindeki bozulmamış akışın sağa doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda uçak yere göre sola doğru hareket eder; dolayısıyla hız dönüşümü

$$\mathbf{v}_{P,\text{ground}} = \mathbf{u}_P - v_0 \hat{\mathbf{x}}.$$

olur. P noktasındaki akım çizgileri neredeyse yataydır. Bu nedenle,

$$v_P \approx |80 - 100| = 20 \text{ m/s},$$

yaklaşık olarak sola, uçağın hareket yönüne doğrudur.

Küçük yerel eğim hesaba katılırsa, buna karşılık gelen ifade

$$v_P = \sqrt{u_P^2 + v_0^2 - 2u_P v_0 \cos \theta_P}.$$

olur.

B.ii.

Kanat boyunca kütleçekim potansiyeli farklarını ihmal edelim. Süreklilik ve Bernoulli denklemleri

$$u \propto \frac{1}{d}, \quad p = p_0 + \frac{1}{2}\rho(v_0^2 - u^2).$$

bağıntılarını verir.

Yaklaşık olarak adyabatik akış için durma entalpisinin korunumu

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_a + \frac{v_0^2}{2}.$$

bağıntısını verir. Dolayısıyla

$$d \text{ en küçük} \implies u \text{ en büyük} \implies p, T \text{ en küçük.}$$

Doymuş buhar basıncı, sıcaklık azaldıkça hızla düşer; bu nedenle bağıl nem ilk olarak burada bire ulaşır.

Q 'yu yuvarlatılmış hücum kenarının hemen üstüne, kanadın üst tarafında akım çizgileri arasındaki aralığın en küçük olduğu bölgeye yerleştirin. Oluşan damlacıklar daha sonra akış aşığına taşınır.

B.iii.

Havayı, yoğuşma başlamadan önce yaklaşık olarak adyabatik ve tersinir bir genleşme geçiren ideal bir gaz olarak modelleriz. Özgül gaz sabiti

$$R_{\text{air}} = c_p - c_V = 283 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

olur.

Q noktasındaki soğuma $\Delta T = T_a - T_Q > 0$ olsun. Verilen doymuş buhar basıncı verileri, yerel eğimi

$$s = \frac{p_{sb} - p_{sa}}{T_b - T_a} = \frac{2460 - 2310}{294 - 293} = 150 \text{ Pa/K.}$$

olarak verir.

Doğrusal bir ekstrapolasyon kullanarak,

$$p_s(T_Q) \approx p_{sa} - s\Delta T.$$

Yoğuşmadan önce su buharının mol kesri değişmez; dolayısıyla kısmi basıncı toplam basınçla orantılı olarak değişir:

$$p_{v,Q} = r p_{sa} \frac{p_Q}{p_0}.$$

İdeal gazın adyabatik bağıntısı

$$\frac{p_Q}{p_0} = \left(\frac{T_Q}{T_a} \right)^{c_p/R_{\text{air}}} \approx 1 - \frac{c_p}{R_{\text{air}} T_a} \Delta T.$$

sonucunu verir.

Yoğuşmanın başlangıcında $p_{v,Q} = p_s(T_Q)$ olur. Dolayısıyla,

$$r p_{sa} \left(1 - \frac{c_p \Delta T}{R_{\text{air}} T_a} \right) = p_{sa} - s \Delta T,$$

buradan

$$\Delta T = \frac{(1 - r) p_{sa}}{s - r p_{sa} c_p / (R_{\text{air}} T_a)}.$$

elde edilir.

Sayısal olarak,

$$\Delta T = \frac{0.10(2310)}{150 - \frac{0.90(2310)(1000)}{283(293)}} \approx 1.85 \text{ K}.$$

Böylece yoğuşma yaklaşık 291.2 K sıcaklığında başlar.

Şöyle tanımlayalım:

$$\alpha = \frac{u_Q}{v_0} \approx \frac{d_\infty}{d_Q}.$$

Çizimdeki en dar aralık, bozulmamış akıştaki aralığın yaklaşık yarısıdır; buradan $\alpha \approx 2$ elde edilir. Enerji denklemi bu durumda

$$c_p \Delta T = \frac{1}{2}(u_Q^2 - v_{\text{crit}}^2) = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1)v_{\text{crit}}^2.$$

bağıntısını verir.

Sonuç olarak,

$$v_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2c_p \Delta T}{\alpha^2 - 1}} \approx \sqrt{\frac{2(1000)(1.85)}{4 - 1}} \approx 35 \text{ m/s}.$$

Buna karşılık gelen basınç azalması yaklaşık 2.2% olup, şekilden yapılan hız tahmininde yoğunluk değişimlerini küçük kabul etmekle tutarlıdır.

Daha basit bir yaklaşımda buharın kısmi basıncı sabit tutulur. Bu yaklaşım

$$\Delta T \approx \frac{(1 - r)p_{sa}}{s} = 1.54 \text{ K}, \quad v_{\text{crit}} \approx 32 \text{ m/s}.$$

sonucunu verir.

Her iki tahmin de eşik hızını saniyede birkaç on metre olarak verir; basınç düzeltmesi içeren tahmin yaklaşık 35 m/s değerindedir.

C.i.

Borunun içindeki akı yönünü $+z$ olarak seçelim; tüm okları ters çevirmek zıt yön seçimini verir.

Uçlardan uzakta, borunun iç boşluğundaki alan neredeyse düzgün ve ekseneldir. İşaretlenmiş noktalardan geçen, neredeyse düz ve birbirine paralel beş çizgi çizin.

Açıklıklarda:

- Her iki tarafta eksen dışında kalan ikişer çizgi, üst ucun ötesinde dışa doğru açılır, dış taraftan aşağıya doğru kıvrılır ve alt açıklıktan geri döner.
- Desen, eksene ve orta düzleme göre simetriktir.
- Eksene daha yakın geçen çizgiler dışarıda daha büyük ilmekler oluşturur.
- Hiçbir çizgi süperiletken duvarı geçmez; alan, duvarın yüzeylerine teğettir.

Eksen üzerindeki nokta için eksenel simetri, z -ekseni boyunca düz bir çizgi gerektirir. Bu çizgi her iki yönde sonsuza uzanır; sonlu bir bitiş noktası yoktur. Diğer çizgilerdeki oklar, borunun iç boşluğunda yukarıya, dışarıdaki dönüş kısımlarında ise aşağıya yönelir.

C.ii.

Borunun iç boşluğunun kesit alanını

$$A = \pi r^2.$$

olarak yazalım.

$l \gg r$ olduğundan, ortadaki alan yaklaşık olarak düzgündür:

$$B = \frac{\Phi}{A}.$$

Manyetik alan doğrultusundaki Maxwell gerilmesi çekme türündedir ve büyüklüğü

$$\sigma_{\parallel} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

kadardır.

Bu gerilmeyi borunun ortasındaki iç boşluğun kesiti üzerinde integre etmek, iki yarı arasındaki çekim kuvvetini verir:

$$T \simeq \frac{B^2 A}{2\mu_0} = \boxed{\frac{\Phi^2}{2\mu_0 \pi r^2}}.$$

Dışarıdaki zayıf dönüş alanı, uzun boru limitinde küçük bir düzeltmeye yol açar.

Sonuç, manyetik enerjiden de elde edilebilir. Hapsolmuş akı ve kesit alanı sabitken,

$$U \simeq \frac{B^2}{2\mu_0} Al = \frac{\Phi^2 l}{2\mu_0 A}.$$

Borunun uzunluğunu artırmak $T dl = dU$ kadar iş gerektirir ve aynı gerilme kuvvetini verir.

C.iii.

Boru yarıçapına kıyasla büyük uzaklıklarda, bir uçtan çıkan akı etkin bir manyetik kutbun alanı gibi davranır. Kutup şiddeti

$$q_m = \frac{\Phi}{\mu_0},$$

olur; çünkü radyal alanı

$$B(s) = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi s^2} = \frac{\Phi}{4\pi s^2}.$$

biçimindedir.

Bunlar dış alan için eşdeğer kaynaklardır; gerçek manyetik tek kutuplar gerekmez. İki uç zıt işaretlidir.

Aralarında s uzaklığı bulunan bu tür iki etkin kutup arasındaki kuvvetin büyüklüğü

$$\frac{\mu_0 q_m^2}{4\pi s^2} = \frac{\Phi^2}{4\pi \mu_0 s^2}.$$

kadardır.

Şöyle tanımlayalım:

$$K = \frac{\Phi^2}{4\pi \mu_0}.$$

Alanları birbirine zıt yönlü olan paralel borular için, uçlar arasındaki dört etkileşimin tümü hesaba katılmalıdır:

Uç çiftleri	Uzaklık	Etkileşim	Diğer boruya doğru toplam bileşen
Üst-üst ve alt-alt	l	Çekme	$\frac{2K}{l^2}$
Üst-alt ve alt-üst	$\sqrt{2}l$	İtme	$-\frac{K}{\sqrt{2}l^2}$

Çapraz konumdaki her uç çifti için kuvvetin büyüklüğü $K/(2l^2)$ olup, enine bileşeni bu büyüklüğün $\cos 45^\circ$ ile çarpımıdır. Düşey bileşenleri birbirini götürür.

Dolayısıyla,

$$F \simeq \frac{\Phi^2}{4\pi\mu_0 l^2} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

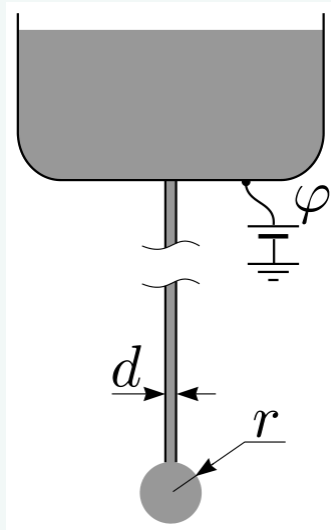
Kuvvet çekicidir: birinci boruya $+y$ yönünde, ikinci boruya ise $-y$ yönünde etki eder.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Kelvin su damlatıcısı

Soru T2. Kelvin su damlatıcısı (8 puan)

Yüzey gerilimine ilişkin aşağıdaki bilgiler bu soruda yararlı olabilir. Bir sıvının molekülleri açısından, sıvı-hava arayüzündeki konumlar sıvının içindeki konumlara göre daha az elverişlidir. Bu arayüz, yüzey enerjisi adı verilen $U = \sigma S$ ile tanımlanır; burada S arayüzün yüzey alanı, σ ise sıvının yüzey gerilimi katsayısıdır. Ayrıca, sıvı yüzeyinin iki parçası birbirini $F = \sigma l$ kuvvetiyle çeker; burada l , parçaları birbirinden ayıran düz çizginin uzunluğudur.



İç çapı d olan uzun bir metal boru düşey olarak aşağıya yönelmiştir. Alt ucundaki bir ağızdan yavaşça su damlamaktadır; şekle bakınız. Su elektriksel olarak iletken kabul edilebilir; yüzey gerilimi σ , yoğunluğu ise ρ 'dur. Ağızın altında yarıçapı r olan bir damla asılı durmaktadır. Damla,

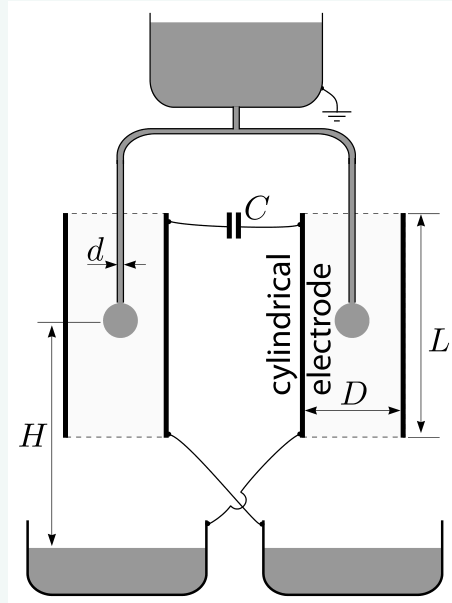
serbest düşme ivmesi g nedeniyle ağızdan kopana kadar yarıçapı zamanla yavaşça büyür. Her zaman $d \ll r$ olduğunu varsayınız.

Bölüm A. Tek boru (4 puan)

- i. (1.2 puan) Bir damlanın ağızdan kopmadan hemen önceki yarıçapını, $r_{\max}$, bulunuz.
- ii. (1.2 puan) Borunun uzaktaki çevreye göre elektrostatik potansiyeli φ 'dir. Yarıçapı r olduğunda bir damlanın Q yükünü bulunuz.
- iii. (1.6 puan) r 'nin sabit tutulduğu ve φ 'nin yavaşça artırıldığı durumu ele alınız. Damlanın içindeki hidrostatik basınç atmosfer basıncının altına düşerse damla kararsız hâle gelir ve parçalara ayrılır. Bunun gerçekleşeceği kritik potansiyeli, $\varphi_{\max}$, bulunuz.

Bölüm B. İki boru (4 puan)

"Kelvin su damlatıcısı" adı verilen düzenek, her biri Bölüm A'da açıklanan boruyla özdeş olan ve bir T-bağlantısıyla birleştirilmiş iki borudan oluşur; şekle bakınız. Her iki borunun uçları, iki silindirik elektrodun merkezlerinde bulunur (elektrotların yüksekliği L , çapı D olup $L \gg D \gg r$ 'dir). Her iki boru için de damlama hızı birim zamanda n damladır. Damlalar, H yüksekliğinden ağızların altındaki iletken kaplara düşer; bu kaplar, şekilde gösterildiği gibi elektrotlara çapraz bağlanmıştır. Elektrotlar, sığası C olan bir kondansatör aracılığıyla birbirine bağlıdır. Kaplar ve elektrotlardan oluşan sistemin net yükü sıfırdır. Üstteki su haznesinin şekilde gösterildiği gibi topraklandığına dikkat ediniz. İlk düşen damla, iki taraf arasında bir dengesizliğe ve kondansatörün plakaları arasında küçük bir yük ayrışmasına neden olacak mikroskobik bir yük taşıyacaktır.



- i. (1.2 puan) Kondansatörün yükünün q olduğu anda borulardan kopan damlaların yükünün mutlak değerini, Q_0 , ifade ediniz. Q_0 'ı (Bölüm A-i'deki) $r_{\max}$ cinsinden ifade ediniz ve Bölüm A-iii'te açıklanan etkiyi ihmal ediniz.
- ii. (1.5 puan) q 'yu sürekli bir $q(t)$ fonksiyonuyla yaklaşık olarak temsil ederek ve $q(0) = q_0$ olduğunu varsayarak q 'nın t zamanına bağlılığını bulunuz.
- iii. (1.3 puan) Bölüm A-iii'te gösterilen etki damlatıcının çalışmasını engelleyebilir. Ayrıca, bir damla ile altındaki kap arasındaki elektrostatik itme, elektrotlar arasında ulaşılacak potansiyel farkına bir $U_{\max}$ sınırı getirir. $U_{\max}$ 'ı bulunuz.

Cevaplar

Burada ε_0 boşluğun elektriksel geçirgenliğidir ve q , kondansatörün herhangi bir plakasındaki yükün büyüklüğünü belirtir.

- **A-i:**

$$r_{\max} = \left(\frac{3\sigma d}{4\rho g} \right)^{1/3}.$$

- **A-ii:**

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 r \varphi.$$

- **A-iii:**

$$\varphi_{\max} = 2\sqrt{\frac{\sigma r}{\varepsilon_0}}.$$

Aynı eşik, negatif bir potansiyelin mutlak değeri için de geçerlidir.

- **B-i:**

$$Q_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0 r_{\max}}{C} q.$$

- **B-ii:** Uçuş gecikmesinin ihmal edildiği sürekli yaklaşımda,

$$q(t) = q_0 \exp\left(\frac{2\pi\varepsilon_0 n r_{\max}}{C} t\right).$$

- **B-iii:** Elektrostatik itmeden kaynaklanan sınır

$$U_{\max} = r_{\max} \sqrt{\frac{2\rho g H}{3\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\sigma d H}{2\varepsilon_0 r_{\max}}}.$$

şeklindedir.

Parametrelerin sayısal değerleri verilmemiştir.

Çözüm

Bölüm A-i

Yavaşça büyüyen damla, ağırlığı yüzey geriliminin sağlayabileceği en büyük taşıyıcı kuvveti aşana kadar mekanik dengededir.

Ağzın çevre uzunluğu πd 'dir. Yüzey gerilimi boyun çevresinde düşey yönde etki ettiğinde, yukarı yönlü kuvvetinin en büyük değeri

$$F_\sigma = \pi d \sigma.$$

olur. $d \ll r$ için boynun hacmi ve küçük ağız açıklığındaki basınç kuvvetine ilişkin düzeltme ihmal edilebilir. Damla küresel kabul edildiğinde ağırlığı

$$mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g.$$

olur.

Kopma anında,

$$\frac{4}{3}\pi r_{\max}^3 \rho g = \pi d \sigma,$$

dolayısıyla

$$r_{\max} = \left(\frac{3\sigma d}{4\rho g} \right)^{1/3}.$$

Küresellik yaklaşımı bu sonuçla tutarlıdır: kütleçekimden kaynaklanan gerilmelerin kapiler gerilmelere oranı

$$\frac{\rho g r_{\max}^2}{\sigma} = \frac{3d}{4r_{\max}} \ll 1.$$

olur.

Bölüm A-ii

İletken damla ve boru aynı potansiyele sahiptir. İnce borunun damlanın elektrik alanında oluşturduğu pertürbasyon ihmal edildiğinde, damla iletken bir küre gibi davranır.

Q yükü taşıyan bir kürenin dışında Gauss yasası

$$E(s) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 s^2}.$$

sonucunu verir. Uzaktaki çevrenin potansiyeli sıfır alındığında,

$$\varphi = \int_r^\infty E(s) ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Dolayısıyla

$$Q = 4\pi\epsilon_0 r \varphi.$$

Damlanın yükünün işareti, φ 'nin işaretiyle aynıdır.

Bölüm A-iii

Yüzey gerilimi içeriye doğru bir kapiler basınç oluşturur. Verilen yüzey enerjisi

$$W_\sigma = 4\pi r^2 \sigma,$$

ifadesinden, yüzey alanını artırmak için gereken basınç

$$p_\sigma = \frac{dW_\sigma}{dV} = \frac{8\pi r \sigma}{4\pi r^2} = \frac{2\sigma}{r}.$$

olarak bulunur.

Elektrik alan dışarıya doğru bir basınç oluşturur. Bir iletkende yüzey yük yoğunluğu $\epsilon_0 E$ 'dir ve diğer yüklerin bu yüke uyguladığı alan $E/2$ 'dir. Böylece

$$p_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Bölüm A-ii kullanılarak,

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\varphi}{r}.$$

Buna göre mekanik dengeden

$$p_{\text{in}} - p_{\text{atm}} = p_{\sigma} - p_e = \frac{2\sigma}{r} - \frac{\varepsilon_0 \varphi^2}{2r^2}.$$

elde edilir.

Belirtilen kararsızlık ölçütüne göre, iç basınç atmosfer basıncına eşit olduğunda eşiğe ulaşılır:

$$\frac{2\sigma}{r} = \frac{\varepsilon_0 \varphi_{\text{max}}^2}{2r^2}.$$

Dolayısıyla

$$\boxed{\varphi_{\text{max}} = 2\sqrt{\frac{\sigma r}{\varepsilon_0}}}.$$

Eşdeğer olarak, buna karşılık gelen yük büyüklüğü

$$Q_{\text{crit}} = 4\pi\varepsilon_0 r \varphi_{\text{max}} = 8\pi\sqrt{\varepsilon_0 \sigma r^3}.$$

olur.

Bölüm B-i

$$R = r_{\text{max}}, \quad U = \frac{q}{C}.$$

yazalım. Parazit sığaları C' 'ye kıyasla ihmal ediyoruz. Simetri ve net yükün sıfır olması nedeniyle, iki elektrodun toprağa göre potansiyelleri

$$V_L = +\frac{U}{2}, \quad V_R = -\frac{U}{2}.$$

olur.

$L \gg D$ olduğundan, küçük damlanın etkisi hesaba katılmadan önce her silindirin merkezi yakınındaki potansiyel yaklaşık olarak silindirin potansiyelidir. $D \gg R$ olduğundan, damlanın kendi yüzey potansiyeline katkısı yaklaşık olarak yalıtılmış bir küreninkiyle aynıdır.

Su ve borular topraklanmıştır. Dolayısıyla, soldaki damla bağlı kaldığı sürece,

$$0 = V_L + \frac{Q_L}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Buradan

$$Q_L = -2\pi\varepsilon_0 R U.$$

elde edilir. Benzer biçimde,

$$Q_R = +2\pi\varepsilon_0 R U.$$

Kopma sırasında yük korunduğundan, büyüklüğü

$$Q_0 = 2\pi\epsilon_0 RU = \frac{2\pi\epsilon_0 r_{\max}}{C} q.$$

olur.

Çapraz bağlantılar nedeniyle her damla, kendisiyle aynı işaretli yükü zaten taşıyan bir kaba düşer. Bu nedenle damlanın kaba ulaşması yük ayrışmasını artırır.

Bölüm B-ii

Sürekli yaklaşımı kullanalım ve kopma ile toplanma arasındaki gecikmeyi ihmal edelim. Bu, bir damlanın uçuşu boyunca gerilimin çok az değiştiğini varsayar.

Her boru birim zamanda n damla üretir. Kondansatörün pozitif plakası nQ_0 hızıyla pozitif yük alırken, negatif plakası aynı hızla negatif yük alır. Dolayısıyla, herhangi bir plakadaki q yük büyüklüğü

$$\frac{dq}{dt} = nQ_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 nR}{C} q.$$

bağıntısına uyar. Ek bir iki çarpanı yoktur: bir damla çifti plakalardaki yükleri $+q$, $-q$ 'dan $+(q + Q_0)$, $-(q + Q_0)$ 'a çıkarır.

İntegral alıp $q(0) = q_0$ koşulunu uygulayarak,

$$\ln \frac{q(t)}{q_0} = \frac{2\pi\epsilon_0 nR}{C} t,$$

dolayısıyla

$$q(t) = q_0 \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 nR}{C} t\right).$$

elde edilir.

Karakteristik büyüme süresi

$$\tau = \frac{C}{2\pi\epsilon_0 nR}.$$

olur. Gecikmenin ihmal edildiği yaklaşım, uçuş süresinin τ 'ya kıyasla küçük olmasını gerektirir. Üstel büyüme, parçalanmanın veya elektrostatik itmenin damlaların toplanmasını önemli ölçüde engellemeye başlamasından önce geçerlidir.

Bölüm B-iii

Pozitif elektrodun içinde oluşan damlayı ele alalım. Bu damla $-Q_0$ yükünü taşır ve onu toplayan kap negatif elektroda bağlıdır.

Düşüş sırasında U 'yu yaklaşık olarak sabit kabul edelim. Düzeneğin oluşturduğu potansiyel, ağzın yakınında $+U/2$ iken kapta $-U/2$ 'ye değişir. Dolayısıyla damlanın dış alandan kaynaklanan elektrostatik potansiyel enerjisindeki artış

$$\Delta W_e = (-Q_0) \left(-\frac{U}{2} - \frac{U}{2} \right) = Q_0 U.$$

olur.

Burada kullanılan potansiyel, düzeneğin oluşturduğu potansiyeldir. Damla bağılyken sıfır olan toplam potansiyeli, kendi alanının katkısını da içerir. Uçuş sırasında yükü ve yarıçapı yaklaşık olarak sabit kaldığından, öz enerjisi öteleme sırasında yapılan işe katkıda bulunmaz.

Hava direnci ve başlangıçtaki kinetik enerji ihmal edildiğinde, kullanılabilir kütleçekim enerjisi

$$mgH = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho gH.$$

olur. Damlaların toplanabilmesi için bu enerji, elektrostatik enerji artışını karşılamaya yeterli olmalıdır:

$$mgH \geq Q_0 U.$$

Enerji sınırında, $Q_0 = 2\pi\epsilon_0 R U$ kullanılarak,

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho gH = 2\pi\epsilon_0 R U_{\max}^2.$$

Böylece

$$U_{\max} = r_{\max} \sqrt{\frac{2\rho gH}{3\epsilon_0}}.$$

$mg = \pi d\sigma$ kopma koşulu kullanılarak bu sonuç

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma dH}{2\epsilon_0 r_{\max}}}.$$

biçiminde de yazılabilir.

Bölüm A-iii'teki ayrı parçalanma eşiği, yarıçapı $r_{\max}$ olan bir damla için değerlendirildiğinde,

$$U_{\text{break}} = 2\varphi_{\max}(r_{\max}) = 4\sqrt{\frac{\sigma r_{\max}}{\epsilon_0}}.$$

değerine karşılık gelir. Bu, düzeneğin damlalar parçalanmadan çalışması için ek bir kısıtlama getirir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Önyıldız oluşumu

Soru T3. Önyıldız oluşumu (9 puan)

Bir yıldızın oluşumunu aşağıdaki gibi modelleyelim. Başlangıçta durgun olan, seyrek yıldızlararası gazdan oluşan küresel bir bulut, kendi kütleçekiminin etkisiyle çökmeye başlar. Kürenin başlangıç yarıçapı r_0 , kütlesi ise m 'dir. Çevrenin (gazdan çok daha seyrek olan ortamın) sıcaklığı ve gazın başlangıç sıcaklığı her yerde T_0 'dır. Gazın ideal olduğu kabul edilebilir. Gazın ortalama molar kütlesi μ , adyabatik indisi ise $\gamma > \frac{4}{3}$ 'tür. $G \frac{m\mu}{r_0} \gg RT_0$ olduğunu varsayın; burada R gaz sabiti, G ise kütleçekim sabitidir.

i. (0.8 puan) Çökmenin büyük bir bölümünde gaz o kadar saydamdır ki üretilen her türlü ısı hemen ışınlama dışarı verilir; yani küre, çevresiyle termodinamik dengede kalır. Yarıçap yarıya inerek $r_1 = 0.5r_0$ olduğunda basınç kaç katına çıkar? Bu kat sayısını n ile gösterin. Gaz yoğunluğunun her yerde aynı kaldığını varsayın.

ii. (1 puan) Yarıçapın r_0 'dan $r_2 = 0.95r_0$ 'a küçülmesi için gereken t_2 süresini tahmin edin. Düşen bir gaz parçacığının bulunduğu konumdaki kütleçekim alanının değişimini ihmal edin.

iii. (2.5 puan) Basıncın ihmal edilebilir düzeyde kaldığını varsayarak, Kepler yasalarını kullanıp kürenin r_0 'dan çok daha küçük bir yarıçapa kadar çökmesi için gereken $t_{r \rightarrow 0}$ süresini bulun.

iv. (1.7 puan) $r_3 \ll r_0$ olan bir yarıçapta gaz, ısı ışınlama karşı opak hâle gelecek kadar yoğunlaşır. Yarıçap r_0 'dan r_3 'e inerken gerçekleşen çökme sırasında ışınlama dışarı verilen Q ısı miktarını hesaplayın.

v. (1 puan) r_3 'ten küçük yarıçaplarda ışınlama ısı kaybını ihmal edebilirsiniz. $r < r_3$ için kürenin T sıcaklığının yarıçapına nasıl bağlı olduğunu belirleyin.

vi. (2 puan) Sonunda basıncın gazın dinamiği üzerindeki etkisi ihmal edilemez hâle gelir ve çökme $r = r_4$ 'te durur ($r_4 \ll r_3$ olmak üzere). Ancak ısıtım kaybı hâlâ ihmal edilebilir ve sıcaklık henüz nükleer füzyonu başlatacak kadar yüksek değildir. Böyle bir önyıldızın basıncı artık her yerde aynı değildir, fakat sayısal ön çarpanları kesin olmayan kaba tahminler yine de yapılabilir. Son yarıçap r_4 'ü ve buna karşılık gelen T_4 sıcaklığını tahmin edin.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

• i.

$$n = 8.$$

• ii.

$$t_2 \simeq \sqrt{\frac{0.10 r_0^3}{Gm}} \simeq 0.32 \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}.$$

• iii.

$$t_{r \rightarrow 0} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}} \simeq 1.11 \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}.$$

• iv.

$$Q = \frac{3mRT_0}{\mu} \ln\left(\frac{r_0}{r_3}\right).$$

• v.

$$T(r) = T_0 \left(\frac{r_3}{r}\right)^{3(\gamma-1)}.$$

- **vi.** Enerji dengesindeki sayısal çarpanlar göz ardı edildiğinde tahminler

$$r_4 \sim r_3 \left(\frac{RT_0 r_3}{Gm\mu} \right)^{1/(3\gamma-4)}$$

ve

$$T_4 \sim T_0 \left(\frac{Gm\mu}{RT_0 r_3} \right)^{3(\gamma-1)/(3\gamma-4)}.$$

şeklindedir. Isı kapasitesi çarpanını ve kütleçekim enerjisine ilişkin yaklaşık bir yapı çarpanını koruyan bir ifade aşağıda türetilmiştir.

Çözüm

Gaz miktarı $N = m/\mu$ mol olsun. Hacmi ve ideal gaz basıncı

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}, \quad pV = NRT.$$

ile verilir. Verilen eşitsizlik, başlangıçtaki kütleçekim enerjisi ölçeğinin ısı enerji ölçeğinden çok daha büyük olduğunu ifade eder; bu da çökmenin ilk evresinde basıncın ihmal edilmesini haklı kılar.

i. İzotermal büzülme sırasında basınç artışı

Çevreyle termodinamik denge, sıcaklığı T_0 'da tutar. Dolayısıyla

$$p = \frac{NRT_0}{V} \propto r^{-3}.$$

Bunun sonucunda,

$$n = \frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^3 = \left(\frac{1}{0.5} \right)^3 = \boxed{8}.$$

ii. Yarıçaptaki ilk yüzde beşlik azalma için geçen süre

Küresel kabuk teoremine göre, yüzeydeki bir parçacık başlangıçta içe doğru

$$g_0 = \frac{Gm}{r_0^2}.$$

kütleçekim ivmesine maruz kalır. İstendiği gibi bu ivmeyi sabit tutup başlangıçtaki durgunluk koşulunu kullanırsak,

$$r_0 - r_2 = \frac{1}{2} g_0 t_2^2.$$

$r_0 - r_2 = 0.05r_0$ olduğundan,

$$t_2 \simeq \sqrt{\frac{2(0.05r_0)}{Gm/r_0^2}} = \sqrt{\frac{0.10r_0^3}{Gm}}.$$

iii. Kepler yasalarından çökme süresi

Yüzeydeki bir parçacık, içinde kalan m kütesinin kütleçekim alanında hareket eder:

$$\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2}.$$

Parçacığın radyal düşüşünü, dışmerkezliği çok yüksek olan bağlı bir Kepler yörüngesinin limit durumu olarak ele alalım. Enöte uzaklığı r_0 iken enberi uzaklığı sıfıra yaklaşır; dolayısıyla yarı büyük eksen

$$a = \frac{r_0}{2}.$$

değerine yaklaşır. Kepler'in üçüncü yasası, yörünge periyodunu

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{Gm}}.$$

olarak verir. Enöteden enberiye yolculuk yarım periyot sürer. Bu nedenle,

$$t_{r \rightarrow 0} = \frac{P}{2} = \pi\sqrt{\frac{(r_0/2)^3}{Gm}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}.$$

Başlangıçta yoğunluğu her yerde aynı olan bir bulut için bu, aynı zamanda içerideki her kabuğun çökme süresidir. Gerçekten de başlangıçta s_0 yarıçapında bulunan bir kabuğun içinde kalan kütle

$$M(s_0) = m\left(\frac{s_0}{r_0}\right)^3,$$

olduğundan, çökme süresi

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{s_0^3}{GM(s_0)}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}},$$

olup s_0 'dan bağımsızdır. Bu, yoğunluğun her yerde aynı kaldığı homolog çökme yaklaşımını destekler.

iv. Saydam evrede ışınlama dışarı verilen ısı

İdeal bir gazın iç enerjisi yalnızca sıcaklığa bağlıdır. $T = T_0$ olduğundan iç enerjisi sabit kalır.

Gazdan dışarı çıkan ısı için $\delta Q_{\text{out}} > 0$ alındığında, termodinamiğin birinci yasası

$$dU = -p dV - \delta Q_{\text{out}}.$$

şeklindedir. Dolayısıyla $dU = 0$ için,

$$\delta Q_{\text{out}} = -p dV = -NRT_0 \frac{dV}{V}.$$

V_0 'dan V_3 'e integral alındığında,

$$Q = NRT_0 \ln\left(\frac{V_0}{V_3}\right).$$

$V \propto r^3$ olduğundan,

$$Q = \frac{3mRT_0}{\mu} \ln\left(\frac{r_0}{r_3}\right).$$

Kütleçekim potansiyel enerjisindeki azalmanın **tamamı ışınlama dışarı verilmez**: bu hızlı çökme sırasında büyük bölümü, gazın bir bütün olarak içe doğru hareketinin kinetik enerjisine dönüşür. Burada hesaplanan ışınlama dışarı verilen ısı, aksi takdirde gazın iç enerjisini artıracak olan sıkıştırma işidir.

v. Opak evrede sıcaklık

Işınım kayıpları ihmal edilebilir hâle geldiğinde, model kapsamında sıkışma adyabatiktir. İdeal bir gaz için,

$$pV^\gamma = \text{sabit.}$$

Bu bağıntı $pV = NRT$ ile birleştirilirse

$$TV^{\gamma-1} = \text{sabit.}$$

elde edilir. Bu evrenin başlangıcında $r = r_3$ ve $T = T_0$ 'dır. Dolayısıyla

$$T(r)V(r)^{\gamma-1} = T_0V_3^{\gamma-1},$$

ve buradan

$$T(r) = T_0 \left(\frac{V_3}{V(r)} \right)^{\gamma-1} = T_0 \left(\frac{r_3}{r} \right)^{3(\gamma-1)}.$$

vi. Çökmenin durduğu andaki yarıçap ve sıcaklık

Molar ısı kapasitesi

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1},$$

olduğundan, iç enerji

$$U = \frac{mRT}{\mu(\gamma - 1)}.$$

ile verilir.

Son kütleçekim potansiyel enerjisini

$$W_4 = -\alpha \frac{Gm^2}{r_4},$$

şeklinde yazalım; burada α , bir mertebesinde boyutsuz bir yapı çarpanıdır. Yoğunluğu her yerde aynı olan bir küre için $\alpha = 3/5$ 'tir; yoğunluğu her yerde aynı olmayan gerçek önyıldız için bu değerin tam olarak geçerli olması gerekmez.

Gazın bütünsel büzülmesinin durduğu anda, bütünsel hareketinin kinetik enerjisi yaklaşık sıfırdır.

Enerjinin korunumu

$$U_4 + W_4 = U_0 + W_0 - Q.$$

bağıntısını verir. Sağ taraf, Gm^2/r_4 ile karşılaştırıldığında küçüktür. Başlangıçtaki kütleçekim enerjisinin bu ölçeğe oranı r_4/r_0 mertebesinde dir. Işınım ile dışarı verilen enerji, Gm^2/r_3 ile karşılaştırıldığında bile küçüktür; çünkü

$$\frac{Q}{Gm^2/r_3} = 3 \frac{RT_0 r_0}{Gm\mu} \frac{r_3}{r_0} \ln \left(\frac{r_0}{r_3} \right) \ll 1.$$

Dolayısıyla istenen doğruluk düzeyinde,

$$U_4 \simeq |W_4|,$$

ya da

$$\frac{mRT_4}{\mu(\gamma - 1)} \simeq \alpha \frac{Gm^2}{r_4}.$$

Eşdeğer biçimde,

$$T_4 \simeq \frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{Rr_4}.$$

Bu bağıntı adyabatik sıcaklık yasasıyla birleştirildiğinde,

$$T_0 \left(\frac{r_3}{r_4} \right)^{3(\gamma-1)} \simeq \frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{Rr_4},$$

buradan

$$\left(\frac{r_3}{r_4} \right)^{3\gamma-4} \simeq \frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{RT_0 r_3}.$$

elde edilir. Bu nedenle, bu çarpanlar korunduğunda,

$$r_4 \simeq r_3 \left[\frac{RT_0 r_3}{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu} \right]^{1/(3\gamma-4)}$$

ve

$$T_4 \simeq T_0 \left[\frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{RT_0 r_3} \right]^{3(\gamma-1)/(3\gamma-4)}.$$

$\alpha = 3/5$ alınması somut bir kaba tahmin sağlar; sayısal çarpanların göz ardı edilmesi ise **Cevaplar** bölümündeki ölçekleme ifadelerini verir.

Son olarak,

$$U \propto r^{-3(\gamma-1)}, \quad |W| \propto r^{-1}.$$

$\gamma > 4/3$ olduğundan, büzülme sırasında iç enerji, kütleçekim enerjisinin büyüklüğünden daha hızlı artar. Bu, çökmenin durmasını mümkün kılar. Ayrıca,

$$\frac{Gm\mu}{RT_0 r_3} \gg 1,$$

olduğundan tahminler, varsayımlarla tutarlı biçimde $r_4 \ll r_3$ ve $T_4 \gg T_0$ verir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.