

IPhO 2012

Теоретические задачи и решения · Тарту, Эстония · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/2012/

Задача 1: Внимание — эскизам

Задача Т1. Внимание — эскизам (13 баллов)

Часть А. Баллистика (4.5 балла)

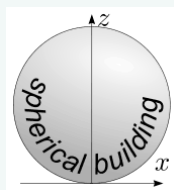
Мяч, брошенный с начальной скоростью v_0 , движется в однородном поле тяжести в плоскости x - z , где ось x горизонтальна, а ось z вертикальна и направлена противоположно ускорению свободного падения g . Сопротивлением воздуха пренебречь.

i. (0.8 балла) Изменяя угол броска мяча из начала координат при фиксированной начальной скорости v_0 , можно попасть в цели, расположенные в области

$$z \leq z_0 - kx^2.$$

Этим фактом можно пользоваться без доказательства. Найдите постоянные z_0 и k .

ii. (1.2 балла) Теперь точку броска можно свободно выбирать на уровне земли $z = 0$, а угол броска — изменять по мере необходимости. Требуется попасть в самую верхнюю точку сферического здания радиуса R (см. рис.) с минимальной начальной скоростью v_0 . Отскок от крыши до попадания в цель не допускается. Качественно изобразите оптимальную траекторию мяча (в специально отведённой рамке на листе ответов). Обратите внимание, что баллы начисляются только за эскиз.



iii. (2.5 балла) Какова минимальная начальная скорость $v_{\min}$, необходимая для попадания в самую верхнюю точку сферического здания радиуса R ?



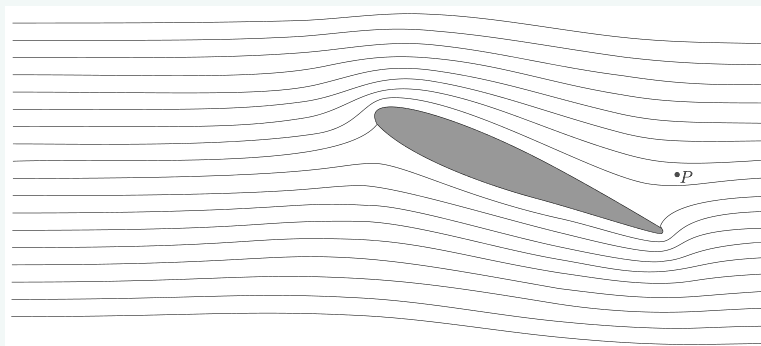
«Жеода», парк Ла-Виллет, Париж. Фото: katchooo/flickr.com

Часть В. Обтекание крыла воздухом (4 балла)

В этой части задачи могут пригодиться следующие сведения. При течении жидкости или газа в трубе вдоль линии тока выполняется соотношение $p + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const.}$, если скорость v значительно меньше скорости звука. Здесь ρ — плотность, h — высота, g — ускорение свободного падения, а p — гидростатическое давление. Линии тока определяются как траектории частиц жидкости или газа (при условии стационарности картины течения). Обратите внимание, что слагаемое $\frac{1}{2}\rho v^2$ называется динамическим давлением.

На приведённом ниже рисунке изображены поперечное сечение крыла самолёта и линии тока воздуха, обтекающего крыло, в системе отсчёта крыла. Считайте, что (a) течение воздуха строго двумерно (то есть векторы скорости воздуха лежат в плоскости рисунка); (b) картина линий тока не зависит от скорости самолёта; (c) ветра нет; (d) динамическое давление значительно меньше атмосферного давления $p_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ Па}$.

Для измерений по рисунку на листе ответов можно пользоваться линейкой.



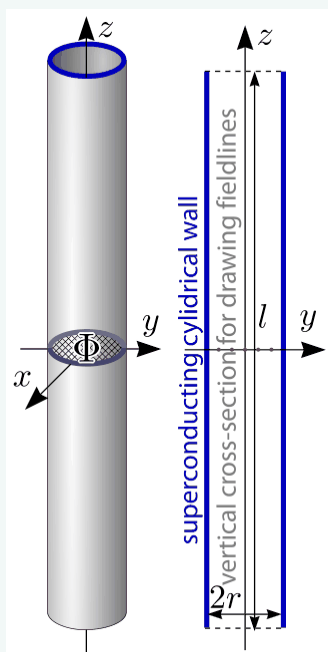
i. (0.8 балла) Если скорость самолёта относительно земли равна $v_0 = 100 \text{ м/с}$, какова скорость воздуха v_P в точке P (отмеченной на рисунке) относительно земли?

ii. (1.2 балла) При высокой относительной влажности, когда скорость самолёта относительно земли превышает критическое значение v_{crit} , за крылом возникает поток капель воды. Капли появляются в некоторой точке Q . Отметьте точку Q на рисунке на листе ответов. Качественно объясните (используя формулы и как можно меньше текста), как вы определили положение Q .

iii. (2.0 балла) Оцените критическую скорость v_{crit} , используя следующие данные: относительная влажность воздуха $r = 90\%$, удельная теплоёмкость воздуха при постоянном давлении $c_p = 1.00 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, давление насыщенного водяного пара $p_{sa} = 2.31 \text{ kPa}$ при температуре невозмущённого воздуха $T_a = 293 \text{ K}$ и $p_{sb} = 2.46 \text{ kPa}$ при $T_b = 294 \text{ K}$. В зависимости от используемых приближений вам может также понадобиться удельная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме $c_V = 0.717 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$. Напомним, что относительная влажность определяется как отношение давления пара к давлению насыщенного пара при данной температуре. Давление насыщенного пара — это давление, при котором пар находится в равновесии с жидкостью.

Часть С. Магнитные соломинки (4.5 балла)

Рассмотрим цилиндрическую трубку из сверхпроводящего материала. Длина трубки равна l , внутренний радиус равен r , причём $l \gg r$. Центр трубки совпадает с началом координат, а её ось — с осью z .

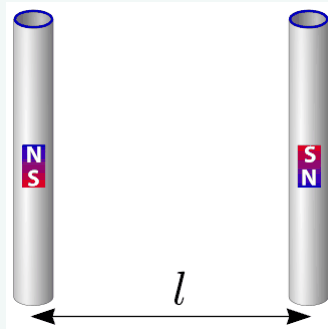


Через центральное поперечное сечение трубки, $z = 0$, $x^2 + y^2 < r^2$, проходит магнитный поток Φ . Сверхпроводник — это материал, вытесняющий любое магнитное поле (внутри материала поле равно нулю).

i. (0.8 балла) На специально отведённом рисунке на листе ответов изобразите пять линий магнитного поля, проходящих через пять красных точек, отмеченных на осевом сечении трубки.

ii. (1.2 балла) Найдите силу натяжения T вдоль оси z в середине трубки (то есть силу, с которой две половины трубки, $z > 0$ и $z < 0$, взаимодействуют друг с другом).

iii. (2.5 балла) Рассмотрим вторую трубку, идентичную первой и параллельную ей.



Во второй трубке магнитное поле имеет ту же величину, но противоположное направление, а её центр расположен в точке $y = l, x = z = 0$ (так что трубки образуют противоположные стороны квадрата). Определите силу магнитного взаимодействия F между трубками.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- A.i. $z_0 = \frac{v_0^2}{2g}, \quad k = \frac{g}{2v_0^2}.$
- A.ii. Оптимальная парабола поднимается от земли, касается верхней боковой поверхности здания, затем поднимается ещё немного и после этого опускается к самой верхней точке. При подлёте слева её уравнение имеет вид

$$z = 2R - \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{4x^2}{3R}.$$

- A.iii. $v_{\min} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}.$
- B.i. $v_P \approx 20 \text{ m/s}$, приблизительно в направлении движения самолёта.
- B.ii. Поместите Q непосредственно над закруглённой передней кромкой, где линии тока с верхней стороны расположены наиболее тесно: здесь скорость наибольшая, а температура наименьшая.
- B.iii. $v_{\text{crit}} \approx 35 \text{ m/s}$, если принять максимальную местную скорость примерно вдвое большей скорости самолёта и учесть изменение парциального давления пара. Пренебрежение этим изменением давления даёт приблизительно 32 m/s .
- C.i. Проведите внутри полости трубки почти параллельные линии вдоль оси. Четыре линии вне оси расходятся за концами трубки и возвращаются снаружи, не входя в сверхпроводящую стенку. Центральная осевая линия остаётся прямой.
- C.ii. $T \simeq \frac{\Phi^2}{2\mu_0\pi r^2},$ сила притягивает половины друг к другу.

- **C.iii.** Трубки притягиваются с силой

$$F \simeq \frac{\Phi^2}{4\pi\mu_0 l^2} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Результаты для магнитного поля получены в приближении длинной узкой трубки.

Решение

A.i.

Для угла броска θ исключение времени из уравнений движения тела даёт

$$z = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}.$$

Полагая $u = \tan \theta$, получаем

$$z = xu - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + u^2).$$

При фиксированном $x \neq 0$ этот квадратный трёхчлен достигает максимума при

$$u = \frac{v_0^2}{gx}.$$

Подстановка даёт огибающую

$$z_{\text{env}} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

При $x = 0$ её высота также равна максимальной высоте вертикального броска. Следовательно,

$$z_0 = \frac{v_0^2}{2g}, \quad k = \frac{g}{2v_0^2}.$$

A.ii.

Поместим центр здания в точку $(0, R)$, тогда его вершина находится в точке $(0, 2R)$. Выберем точку броска слева; отражение относительно оси z даёт столь же подходящую траекторию.

На требуемом эскизе должна быть изображена парабола с ветвями, направленными вниз, обладающая следующими свойствами:

1. Она начинается на земле слева от здания и круто поднимается вверх.
2. Она касается верхней левой части поверхности, причём скорость не изменяется вследствие удара.
3. Она продолжает подниматься до вершины, расположенной немного выше и левее самой верхней точки здания.
4. Затем она спускается к самой верхней точке.

Точные положения характерных точек, выведенные ниже:

Характерная точка	x/R	z/R
Точка броска	$-\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{11}}{8} \approx -1.460$	0
Точка касания	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.866$	$\frac{3}{2}$
Вершина траектории	$-\frac{\sqrt{3}}{8} \approx -0.217$	$\frac{33}{16} = 2.0625$
Цель	0	2

A.iii.

Пусть v_t — скорость мяча в момент достижения цели. Закон сохранения механической энергии даёт

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_t^2 + mg(2R),$$

откуда

$$v_0^2 = v_t^2 + 4gR.$$

Таким образом, минимизация начальной скорости эквивалентна минимизации v_t .

Обратим движение. Теперь бросим мяч из точки $(0, 2R)$ со скоростью v_t . Согласно A.i, любая такая траектория лежит ниже огибающей

$$z_{\text{env}}(x) = 2R + \frac{v_t^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_t^2}.$$

Траектория, по которой мяч подлетает к цели слева, должна проходить не ниже верхней поверхности

$$z_s(x) = R + \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq 0.$$

Следовательно, огибающая также должна проходить не ниже этой поверхности.

Введём обозначения

$$\lambda = \frac{v_t^2}{gR}, \quad c = \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}, \quad 0 \leq c \leq 1.$$

Разность высот огибающей и крыши равна

$$\begin{aligned} \frac{z_{\text{env}} - z_s}{R} &= 1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{1 - c^2}{2\lambda} - c \\ &= \frac{(c - \lambda)^2 + 2\lambda - 1}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Если $0 < \lambda < 1/2$, то при $c = \lambda$ это выражение отрицательно. В таком случае ни одна траектория не позволяет обойти здание. Поэтому

$$v_t^2 \geq \frac{gR}{2}.$$

При равенстве огибающая касается крыши при $c = 1/2$, а именно в точке

$$(x, z) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}R, \frac{3}{2}R \right).$$

Необходимо также показать, что существует реальная траектория, достигающая этой границы. При броске в обратном движении под углом 30° к горизонту вверх и влево в исходных координатах получаем

$$z(x) = 2R - \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{4x^2}{3R}.$$

Эта парабола проходит через цель и касается сферы в указанной выше точке. Чтобы убедиться, что она нигде не проникает внутрь здания, положим $t = -x/R \geq 0$. Непосредственная подстановка даёт

$$\frac{x^2 + (z - R)^2 - R^2}{R^2} = \frac{16}{9}t \left(t + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \geq 0.$$

Таким образом, весь рассматриваемый участок траектории находится вне сферы, причём до достижения цели происходит касание. Отскок не требуется.

Наконец,

$$v_{\min}^2 = \frac{gR}{2} + 4gR = \frac{9}{2}gR,$$

и, следовательно,

$$v_{\min} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}.$$

Точка пересечения этой параболы с землёй и её вершина дают характерные точки, перечисленные в A.ii.

B.i.

Обозначим через u скорость воздуха в системе отсчёта крыла. Поскольку изменения давления малы по сравнению с атмосферным давлением, сначала будем считать плотность постоянной.

Для узкой трубки тока единичной ширины вдоль размаха крыла уравнение неразрывности даёт

$$u d = v_0 d_\infty,$$

где d — расстояние между соседними линиями тока, измеренное перпендикулярно потоку, а d_∞ — расстояние между ними в невозмущённом набегающем потоке. Таким образом,

$$u = v_0 \frac{d_\infty}{d}.$$

Согласно приведённому рисунку, расстояние между линиями вблизи P приблизительно в 1.25 раза больше, чем в набегающем потоке:

$$u_P \approx 0.80v_0 \approx 80 \text{ m/s}.$$

Будем считать, что невозмущённый поток в системе отсчёта крыла направлен вправо. Тогда самолёт движется относительно земли влево, поэтому преобразование скорости имеет вид

$$\mathbf{v}_{P,\text{ground}} = \mathbf{u}_P - v_0 \hat{\mathbf{x}}.$$

Линии тока в точке P почти горизонтальны. Следовательно,

$$v_P \approx |80 - 100| = 20 \text{ m/s},$$

а направление — приблизительно влево, по направлению движения самолёта.

Если учесть небольшой местный наклон, соответствующее выражение имеет вид

$$v_P = \sqrt{u_P^2 + v_0^2 - 2u_P v_0 \cos \theta_P}.$$

B.ii.

Пренебрежём разностями гравитационного потенциала в пределах крыла. Уравнение неразрывности и уравнение Бернулли дают

$$u \propto \frac{1}{d}, \quad p = p_0 + \frac{1}{2} \rho (v_0^2 - u^2).$$

Для приближённо адиабатического течения сохранение энтальпии торможения даёт

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_a + \frac{v_0^2}{2}.$$

Отсюда

$$d \text{ наименьшее} \implies u \text{ наибольшая} \implies p, T \text{ наименьшие.}$$

Давление насыщенного пара быстро уменьшается с понижением температуры, поэтому относительная влажность впервые достигает единицы именно здесь.

Поместите Q непосредственно над закруглённой передней кромкой, в области наименьшего расстояния между линиями тока с верхней стороны крыла. Образующиеся капли затем уносятся вниз по потоку.

B.iii.

Будем моделировать воздух как идеальный газ, который до начала конденсации расширяется приближённо адиабатически и обратимо. Его удельная газовая постоянная равна

$$R_{\text{air}} = c_p - c_V = 283 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Пусть понижение температуры в точке Q равно $\Delta T = T_a - T_Q > 0$. Приведённые данные о давлении насыщенного пара дают локальный наклон зависимости

$$s = \frac{p_{sb} - p_{sa}}{T_b - T_a} = \frac{2460 - 2310}{294 - 293} = 150 \text{ Pa/K}.$$

Используя линейную экстраполяцию, получаем

$$p_s(T_Q) \approx p_{sa} - s \Delta T.$$

До начала конденсации мольная доля водяного пара остаётся неизменной, поэтому его парциальное давление пропорционально полному давлению:

$$p_{v,Q} = r p_{sa} \frac{p_Q}{p_0}.$$

Адиабатическое соотношение для идеального газа даёт

$$\frac{p_Q}{p_0} = \left(\frac{T_Q}{T_a} \right)^{c_p/R_{\text{air}}} \approx 1 - \frac{c_p}{R_{\text{air}} T_a} \Delta T.$$

В момент начала конденсации $p_{v,Q} = p_s(T_Q)$. Следовательно,

$$rp_{sa} \left(1 - \frac{c_p \Delta T}{R_{\text{air}} T_a} \right) = p_{sa} - s \Delta T,$$

откуда

$$\Delta T = \frac{(1-r)p_{sa}}{s - rp_{sa}c_p/(R_{\text{air}}T_a)}.$$

Численно получаем

$$\Delta T = \frac{0.10(2310)}{150 - \frac{0.90(2310)(1000)}{283(293)}} \approx 1.85 \text{ K}.$$

Таким образом, конденсация начинается при температуре приблизительно 291.2 K.

Положим

$$\alpha = \frac{u_Q}{v_0} \approx \frac{d_\infty}{d_Q}.$$

Наименьшее расстояние между линиями на рисунке составляет примерно половину расстояния в невозмущённом потоке, что даёт $\alpha \approx 2$. Тогда уравнение энергии принимает вид

$$c_p \Delta T = \frac{1}{2}(u_Q^2 - v_{\text{crit}}^2) = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1)v_{\text{crit}}^2.$$

Следовательно,

$$v_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2c_p \Delta T}{\alpha^2 - 1}} \approx \sqrt{\frac{2(1000)(1.85)}{4 - 1}} \approx 35 \text{ m/s}.$$

Соответствующее падение давления составляет около 2.2%, что согласуется с предположением о малости изменений плотности при графической оценке скорости.

В более простом приближении парциальное давление пара считается постоянным. Это даёт

$$\Delta T \approx \frac{(1-r)p_{sa}}{s} = 1.54 \text{ K}, \quad v_{\text{crit}} \approx 32 \text{ m/s}.$$

Обе оценки дают пороговую скорость порядка нескольких десятков метров в секунду; оценка с учётом изменения давления составляет около 35 m/s.

C.i.

Выберем направление потока внутри трубки вдоль $+z$; обращение всех стрелок соответствует противоположному выбору.

Вдали от концов поле в полости трубки почти однородно и направлено вдоль оси. Проведите через отмеченные точки пять почти прямых параллельных линий.

У отверстий:

- Две внеосевые линии с каждой стороны расходятся веером за верхним концом, огибают трубку снаружи, изгибаясь вниз, и возвращаются через нижнее отверстие.
- Картина симметрична относительно оси и средней плоскости.

- Линии, проходящие ближе к оси, образуют более крупные внешние петли.
- Ни одна линия не пересекает сверхпроводящую стенку; поле направлено по касательной к её поверхностям.

Для точки на оси осевая симметрия требует прямой линии вдоль оси z . Она уходит в бесконечность в обоих направлениях и не имеет конечной точки окончания. Стрелки на остальных линиях направлены вверх внутри полости трубки и вниз на их внешних возвратных участках.

С.ii.

Обозначим площадь сечения полости через

$$A = \pi r^2.$$

Поскольку $l \gg r$, поле в центральной части приближённо однородно:

$$B = \frac{\Phi}{A}.$$

Напряжение Максвелла вдоль магнитного поля является растягивающим и имеет величину

$$\sigma_{\parallel} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Интегрируя это напряжение по центральному сечению полости, получаем силу притяжения между половинами:

$$T \simeq \frac{B^2 A}{2\mu_0} = \boxed{\frac{\Phi^2}{2\mu_0 \pi r^2}}.$$

Слабое внешнее возвратное поле даёт малую поправку в пределе длинной трубки.

Этот результат также следует из энергии магнитного поля. При фиксированных захваченном магнитном потоке и площади поперечного сечения

$$U \simeq \frac{B^2}{2\mu_0} Al = \frac{\Phi^2 l}{2\mu_0 A}.$$

Для увеличения длины трубки необходимо совершить работу $T dl = dU$, что даёт ту же силу натяжения.

С.iii.

На расстояниях, больших по сравнению с радиусом трубки, поле потока, выходящего из её конца, ведёт себя как поле эффективного магнитного полюса. Его величина равна

$$q_m = \frac{\Phi}{\mu_0},$$

поскольку его радиальное поле имеет вид

$$B(s) = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi s^2} = \frac{\Phi}{4\pi s^2}.$$

Это эквивалентные источники внешнего поля; существование реальных магнитных монополей не требуется. Два конца имеют противоположные знаки.

Модуль силы между двумя такими эффективными полюсами, разделёнными расстоянием s , равен

$$\frac{\mu_0 q_m^2}{4\pi s^2} = \frac{\Phi^2}{4\pi\mu_0 s^2}.$$

Положим

$$K = \frac{\Phi^2}{4\pi\mu_0}.$$

Для трубок с противоположно направленными полями необходимо учесть все четыре взаимодействия между концами:

Пары концов	Расстояние	Взаимодействие	Суммарная составляющая в направлении другой трубки
Верхний–верхний и нижний–нижний	l	Притяжение	$\frac{2K}{l^2}$
Верхний–нижний и нижний–верхний	$\sqrt{2}l$	Отталкивание	$-\frac{K}{\sqrt{2}l^2}$

Для каждой диагональной пары модуль силы равен $K/(2l^2)$, а её поперечная составляющая равна этому модулю, умноженному на $\cos 45^\circ$. Их вертикальные составляющие взаимно компенсируются.

Следовательно,

$$F \simeq \frac{\Phi^2}{4\pi\mu_0 l^2} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

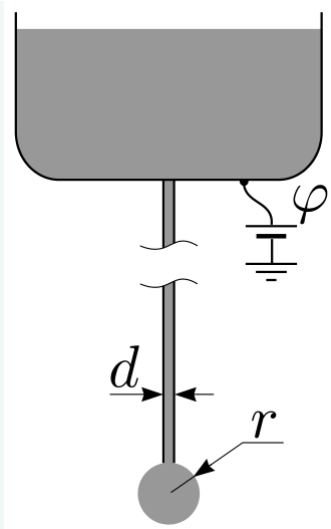
Сила является силой притяжения: на первую трубку она действует в направлении $+y$, а на вторую — в направлении $-y$.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Капельница Кельвина

Задача Т2. Капельница Кельвина (8 баллов)

При решении этой задачи могут оказаться полезными следующие сведения о поверхностном натяжении. Для молекул жидкости положения на границе раздела жидкости и воздуха менее выгодны, чем положения в объёме жидкости. Эта граница раздела характеризуется так называемой поверхностной энергией $U = \sigma S$, где S — площадь поверхности раздела, а σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Кроме того, два участка поверхности жидкости притягивают друг друга с силой $F = \sigma l$, где l — длина прямой линии, разделяющей эти участки.



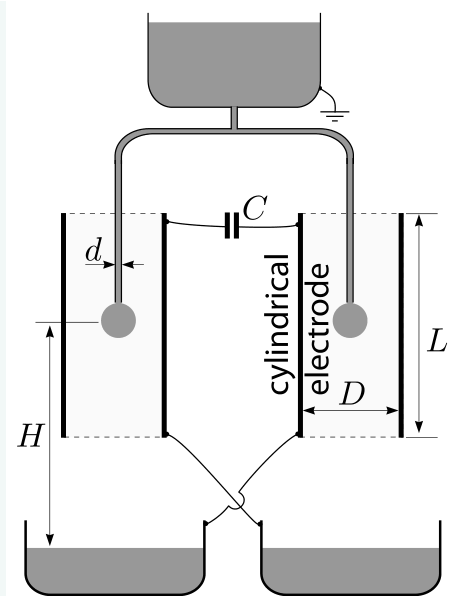
Длинная металлическая трубка с внутренним диаметром d направлена вертикально вниз. Из сопла на её нижнем конце медленно капает вода, см. рисунок. Воду можно считать электропроводящей; её коэффициент поверхностного натяжения равен σ , а плотность — ρ . Под соплом висит капля радиуса r . Радиус медленно увеличивается со временем, пока капля не отрывается от сопла под действием силы тяжести при ускорении свободного падения g . Во всех случаях считайте, что $d \ll r$.

Часть А. Одна трубка (4 балла)

- i. (1.2 балла) Найдите радиус $r_{\max}$ капли непосредственно перед её отрывом от сопла.
- ii. (1.2 балла) Электростатический потенциал трубки относительно удалённых окружающих тел равен φ . Найдите заряд Q капли, когда её радиус равен r .
- iii. (1.6 балла) Рассмотрите ситуацию, в которой r поддерживается постоянным, а φ медленно увеличивается. Капля становится неустойчивой и распадается на части, если гидростатическое давление внутри неё становится меньше атмосферного. Найдите критический потенциал $\varphi_{\max}$, при котором это произойдёт.

Часть В. Две трубки (4 балла)

Устройство, называемое «капельницей Кельвина», состоит из двух трубок, каждая из которых идентична описанной в части А; трубки соединены через тройник, см. рисунок. Концы обеих трубок находятся в центрах двух цилиндрических электродов (высотой L и диаметром D , причём $L \gg D \gg r$). Из каждой трубки вытекает n капля в единицу времени. Капли падают с высоты H в проводящие чаши, расположенные под соплами и соединённые с электродами крест-накрест, как показано на схеме. Между электродами подключён конденсатор ёмкостью C . Суммарный заряд системы чаш и электродов равен нулю. Обратите внимание, что верхний резервуар с водой заземлён, как показано на рисунке. Первая упавшая капля будет иметь некоторый микроскопически малый заряд, который нарушит равновесие между двумя сторонами и приведёт к небольшому разделению зарядов на обкладках конденсатора.



- i. (1.2 балла) Выразите модуль заряда Q_0 капли при их отрыве от трубок в тот момент, когда заряд конденсатора равен q . Выразите Q_0 через $r_{\max}$ (из части A-i) и пренебрегите эффектом, описанным в части A-iii.
- ii. (1.5 балла) Найдите зависимость q от времени t , приближённо описывая её непрерывной функцией $q(t)$ и полагая, что $q(0) = q_0$.
- iii. (1.3 балла) Работе капельницы может препятствовать эффект, рассмотренный в части A-iii. Кроме того, электростатическое отталкивание между каплями и расположенной под ней чашей устанавливает предел $U_{\max}$ достижимой разности потенциалов между электродами. Найдите $U_{\max}$.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Здесь ε_0 — электрическая постоянная, а q обозначает модуль заряда на каждой из обкладок конденсатора.

- A-i:

$$r_{\max} = \left(\frac{3\sigma d}{4\rho g} \right)^{1/3}.$$

- A-ii:

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 r \varphi.$$

- A-iii:

$$\varphi_{\max} = 2\sqrt{\frac{\sigma r}{\varepsilon_0}}.$$

То же пороговое значение справедливо для модуля отрицательного потенциала.

- **B-i:**

$$Q_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 r_{\max}}{C} q.$$

- **B-ii:** В непрерывном приближении при пренебрежимо малой задержке, связанной с полётом капель,

$$q(t) = q_0 \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 n r_{\max}}{C} t\right).$$

- **B-iii:** Предел, обусловленный электростатическим отталкиванием, равен

$$U_{\max} = r_{\max} \sqrt{\frac{2\rho g H}{3\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\sigma d H}{2\epsilon_0 r_{\max}}}.$$

Численные значения параметров не заданы.

Решение

Часть A-i

Медленно растущая капля находится в механическом равновесии, пока действующая на неё сила тяжести не превысит максимальную удерживающую силу поверхностного натяжения.

Длина окружности сопла равна πd . Когда сила поверхностного натяжения по всей окружности шейки направлена вертикально, её максимальное значение, направленное вверх, равно

$$F_\sigma = \pi d \sigma.$$

При $d \ll r$ объёмом шейки и поправкой, связанной с силой давления на малое отверстие сопла, можно пренебречь. Считая каплю сферической, получаем для силы тяжести

$$mg = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g.$$

В момент отрыва

$$\frac{4}{3} \pi r_{\max}^3 \rho g = \pi d \sigma,$$

откуда

$$r_{\max} = \left(\frac{3\sigma d}{4\rho g}\right)^{1/3}.$$

Приближение сферической формы согласуется с этим результатом: отношение напряжений, обусловленных силой тяжести, к капиллярным напряжениям равно

$$\frac{\rho g r_{\max}^2}{\sigma} = \frac{3d}{4r_{\max}} \ll 1.$$

Часть A-ii

Проводящая капля и трубка имеют одинаковый потенциал. Если пренебречь возмущением электрического поля капли, вносимым тонкой трубкой, капля ведёт себя как проводящая сфера.

Вне сферы с зарядом Q теорема Гаусса даёт

$$E(s) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 s^2}.$$

Принимая потенциал удалённых окружающих тел равным нулю, получаем

$$\varphi = \int_r^\infty E(s) ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Следовательно,

$$\boxed{Q = 4\pi\epsilon_0 r\varphi}.$$

Знак заряда капли совпадает со знаком φ .

Часть A-iii

Поверхностное натяжение создаёт направленное внутрь капиллярное давление. Из заданного выражения для поверхностной энергии

$$W_\sigma = 4\pi r^2 \sigma,$$

получаем давление, необходимое для увеличения площади поверхности:

$$p_\sigma = \frac{dW_\sigma}{dV} = \frac{8\pi r\sigma}{4\pi r^2} = \frac{2\sigma}{r}.$$

Электрическое поле создаёт давление, направленное наружу. Для проводника поверхностная плотность заряда равна $\epsilon_0 E$, а поле, действующее на этот заряд со стороны остальных зарядов, равно $E/2$. Поэтому

$$p_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

Используя результат части A-ii, получаем

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\varphi}{r}.$$

Таким образом, условие механического равновесия даёт

$$p_{\text{in}} - p_{\text{atm}} = p_\sigma - p_e = \frac{2\sigma}{r} - \frac{\epsilon_0 \varphi^2}{2r^2}.$$

Согласно указанному критерию неустойчивости, порог достигается, когда внутреннее давление становится равным атмосферному:

$$\frac{2\sigma}{r} = \frac{\epsilon_0 \varphi_{\text{max}}^2}{2r^2}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\varphi_{\text{max}} = 2\sqrt{\frac{\sigma r}{\epsilon_0}}}.$$

Эквивалентно, соответствующий модуль заряда равен

$$Q_{\text{crit}} = 4\pi\epsilon_0 r\varphi_{\text{max}} = 8\pi\sqrt{\epsilon_0 \sigma r^3}.$$

Часть В-і

Обозначим

$$R = r_{\max}, \quad U = \frac{q}{C}.$$

Пренебрежём паразитными ёмкостями по сравнению с C . В силу симметрии и равенства суммарного заряда нулю потенциалы двух электродов относительно земли равны

$$V_L = +\frac{U}{2}, \quad V_R = -\frac{U}{2}.$$

Поскольку $L \gg D$, потенциал вблизи центра каждого цилиндра без учёта малой капли приблизительно равен потенциалу цилиндра. Поскольку $D \gg R$, собственный вклад капли в потенциал её поверхности приблизительно равен потенциалу изолированной сферы.

Вода и трубки заземлены. Поэтому, пока левая капля остаётся соединённой с трубкой,

$$0 = V_L + \frac{Q_L}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Отсюда следует, что

$$Q_L = -2\pi\epsilon_0 R U.$$

Аналогично,

$$Q_R = +2\pi\epsilon_0 R U.$$

При отрыве заряд сохраняется, поэтому его модуль равен

$$Q_0 = 2\pi\epsilon_0 R U = \frac{2\pi\epsilon_0 r_{\max}}{C} q.$$

Благодаря перекрёстным соединениям каждая капля падает в чашу, уже несущую заряд того же знака, что и капля. Поэтому её попадание в чашу усиливает разделение зарядов.

Часть В-ii

Используем непрерывное приближение и пренебрежём задержкой между отрывом капли и её попаданием в чашу. Это предполагает, что за время полёта капли напряжение изменяется мало.

Из каждой трубки вытекает n капель в единицу времени. На положительную обкладку конденсатора поступает положительный заряд со скоростью nQ_0 , а на отрицательную обкладку с той же скоростью поступает отрицательный заряд. Поэтому модуль заряда q на каждой обкладке удовлетворяет уравнению

$$\frac{dq}{dt} = nQ_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 n R}{C} q.$$

Дополнительного множителя два нет: пара капель увеличивает заряды обкладок с $+q$, $-q$ до $+(q + Q_0)$, $-(q + Q_0)$.

Интегрируя и учитывая условие $q(0) = q_0$, получаем

$$\ln \frac{q(t)}{q_0} = \frac{2\pi\epsilon_0 n R}{C} t,$$

так что

$$q(t) = q_0 \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 n r_{\max}}{C} t\right).$$

Характерное время роста равно

$$\tau = \frac{C}{2\pi\epsilon_0 n r_{\max}}.$$

Чтобы задержкой можно было пренебречь, время полёта должно быть мало по сравнению с τ . Экспоненциальный рост имеет место до тех пор, пока распад капля или электростатическое отталкивание не начинают существенно препятствовать их попаданию в чаши.

Часть B-iii

Рассмотрим каплю, образовавшуюся внутри положительного электрода. Она несёт заряд $-Q_0$, а чаша, в которую она падает, соединена с отрицательным электродом.

Будем считать U приблизительно постоянным за время падения. Потенциал, создаваемый устройством, изменяется от $+U/2$ вблизи сопла до $-U/2$ у чаши. Поэтому увеличение электростатической потенциальной энергии капли во внешнем поле равно

$$\Delta W_e = (-Q_0) \left(-\frac{U}{2} - \frac{U}{2} \right) = Q_0 U.$$

Здесь используется потенциал, создаваемый устройством. Полный потенциал капли, равный нулю, пока она соединена с трубкой, включает также вклад её собственного поля. Во время полёта её заряд и радиус остаются приблизительно постоянными, поэтому собственная энергия капли не вносит вклада в работу при её поступательном перемещении.

Если пренебречь сопротивлением воздуха и начальной кинетической энергией, доступная энергия силы тяжести равна

$$mgH = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g H.$$

Чтобы капля могла попасть в чашу, этой энергии должно быть достаточно для преодоления увеличения электростатической энергии:

$$mgH \geq Q_0 U.$$

На энергетическом пределе, используя $Q_0 = 2\pi\epsilon_0 R U$, получаем

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g H = 2\pi\epsilon_0 R U^2_{\max}.$$

Следовательно,

$$U_{\max} = r_{\max} \sqrt{\frac{2\rho g H}{3\epsilon_0}}.$$

Используя условие отрыва $mg = \pi d\sigma$, этот результат можно также записать в виде

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma d H}{2\epsilon_0 r_{\max}}}.$$

Отдельный порог распада из части A-iii, вычисленный для капли радиуса $r_{\max}$, соответствует

$$U_{\text{break}} = 2\varphi_{\text{max}}(r_{\text{max}}) = 4\sqrt{\frac{\sigma r_{\text{max}}}{\varepsilon_0}}.$$

Это накладывает дополнительное ограничение на работу устройства с целыми каплями.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Образование протозвезды

Задача Т3. Образование протозвезды (9 баллов)

Рассмотрим следующую модель образования звезды. Сферическое облако разреженного межзвёздного газа, первоначально находящееся в покое, начинает сжиматься под действием собственной гравитации. Начальный радиус шара равен r_0 , а его масса — m . Температура окружающей среды (гораздо более разреженной, чем газ) и начальная температура газа всюду равны T_0 . Газ можно считать идеальным. Средняя молярная масса газа равна μ , а его показатель адиабаты — $\gamma > \frac{4}{3}$. Считайте, что $G \frac{m\mu}{r_0} \gg RT_0$, где R — универсальная газовая постоянная, а G — гравитационная постоянная.

- i. **(0.8 балла)** На протяжении большей части сжатия газ настолько прозрачен, что всё выделяющееся тепло немедленно излучается, то есть шар остаётся в термодинамическом равновесии с окружающей средой. Во сколько раз, n , увеличивается давление, когда радиус уменьшается вдвое до $r_1 = 0.5r_0$? Считайте, что плотность газа остаётся однородной.
- ii. **(1 балл)** Оцените время t_2 , необходимое для уменьшения радиуса от r_0 до $r_2 = 0.95r_0$. Пренебрегите изменением гравитационного поля в точке нахождения падающей частицы газа.
- iii. **(2.5 балла)** Считая, что давлением по-прежнему можно пренебречь, найдите с помощью законов Кеплера время $t_{r \rightarrow 0}$, необходимое для сжатия шара от r_0 до гораздо меньшего радиуса.
- iv. **(1.7 балла)** При некотором радиусе $r_3 \ll r_0$ газ становится достаточно плотным, чтобы быть непрозрачным для теплового излучения. Вычислите количество теплоты Q , излучённое при сжатии от радиуса r_0 до r_3 .
- v. **(1 балл)** При радиусах меньше r_3 можно пренебречь потерями тепла за счёт излучения. Определите зависимость температуры T шара от его радиуса при $r < r_3$.
- vi. **(2 балла)** В конце концов влиянием давления на динамику газа уже нельзя пренебрегать, и сжатие останавливается при $r = r_4$ (причём $r_4 \ll r_3$). Однако потерями энергии на излучение по-прежнему можно пренебречь, а температура ещё недостаточно высока для начала термоядерного синтеза. Давление в такой протозвезде уже не является однородным, но всё ещё можно получить грубые оценки с неточными численными коэффициентами. Оцените конечный радиус r_4 и соответствующую температуру T_4 .

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- i.

$$n = 8.$$

- ii.

$$t_2 \simeq \sqrt{\frac{0.10 r_0^3}{Gm}} \simeq 0.32 \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}.$$

- iii.

$$t_{r \rightarrow 0} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}} \simeq 1.11 \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}.$$

- iv.

$$Q = \frac{3mRT_0}{\mu} \ln\left(\frac{r_0}{r_3}\right).$$

- v.

$$T(r) = T_0 \left(\frac{r_3}{r}\right)^{3(\gamma-1)}.$$

- vi. Если опустить численные коэффициенты в балансе энергии, получаются оценки

$$r_4 \sim r_3 \left(\frac{RT_0 r_3}{Gm\mu}\right)^{1/(3\gamma-4)}$$

и

$$T_4 \sim T_0 \left(\frac{Gm\mu}{RT_0 r_3}\right)^{3(\gamma-1)/(3\gamma-4)}.$$

Ниже выведено выражение, сохраняющее множитель, связанный с теплоёмкостью, и приближённый коэффициент, учитывающий влияние структуры на гравитационную энергию.

Решение

Пусть количество вещества газа равно $N = m/\mu$ молей. Его объём и давление идеального газа определяются соотношениями

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}, \quad pV = NRT.$$

Заданное неравенство означает, что характерная начальная гравитационная энергия значительно превосходит характерную тепловую энергию, что позволяет пренебречь давлением на ранней стадии сжатия.

i. Увеличение давления при изотермическом сжатии

Термодинамическое равновесие с окружающей средой поддерживает температуру равной T_0 . Поэтому

$$p = \frac{NRT_0}{V} \propto r^{-3}.$$

Следовательно,

$$n = \frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^3 = \left(\frac{1}{0.5}\right)^3 = \boxed{8}.$$

ii. Время уменьшения радиуса на первые пять процентов

Согласно теореме о гравитационном поле сферической оболочки, частица на поверхности в начальный момент имеет направленное к центру гравитационное ускорение

$$g_0 = \frac{Gm}{r_0^2}.$$

Считая это ускорение постоянным, как указано в условии, и учитывая, что в начальный момент частица покоится, получаем

$$r_0 - r_2 = \frac{1}{2}g_0t_2^2.$$

Поскольку $r_0 - r_2 = 0.05r_0$,

$$t_2 \simeq \sqrt{\frac{2(0.05r_0)}{Gm/r_0^2}} = \sqrt{\frac{0.10r_0^3}{Gm}}.$$

iii. Время коллапса из законов Кеплера

Частица на поверхности движется в гравитационном поле заключённой внутри массы m :

$$\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2}.$$

Рассмотрим её радиальное падение как предельный случай движения по замкнутой кеплеровской орбите с очень большим эксцентриситетом. Расстояние в апоцентре равно r_0 , а расстояние в перигентре стремится к нулю, поэтому большая полуось стремится к

$$a = \frac{r_0}{2}.$$

Третий закон Кеплера даёт период обращения

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{Gm}}.$$

Движение от апоцентра до перигентра занимает половину периода. Следовательно,

$$t_{r \rightarrow 0} = \frac{P}{2} = \pi\sqrt{\frac{(r_0/2)^3}{Gm}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}.$$

Для первоначально однородного облака это также время коллапса каждого внутреннего сферического слоя. Действительно, слой, первоначально находящийся на радиусе s_0 , охватывает массу

$$M(s_0) = m \left(\frac{s_0}{r_0} \right)^3,$$

поэтому время его коллапса равно

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{s_0^3}{GM(s_0)}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}},$$

независимо от s_0 . Это обосновывает приближение гомологичного коллапса с сохранением однородности.

iv. Теплота, излучённая на прозрачной стадии

Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры. Поскольку $T = T_0$, его внутренняя энергия остаётся постоянной.

Принимая $\delta Q_{\text{out}} > 0$ для теплоты, покидающей газ, запишем первое начало термодинамики:

$$dU = -p dV - \delta Q_{\text{out}}.$$

Таким образом, при $dU = 0$,

$$\delta Q_{\text{out}} = -p dV = -NRT_0 \frac{dV}{V}.$$

Интегрируя от V_0 до V_3 , получаем

$$Q = NRT_0 \ln \left(\frac{V_0}{V_3} \right).$$

Поскольку $V \propto r^3$,

$$Q = \frac{3mRT_0}{\mu} \ln \left(\frac{r_0}{r_3} \right).$$

Убыль гравитационной потенциальной энергии **не целиком уходит в излучение**: при этом быстром сжатии большая её часть превращается в кинетическую энергию упорядоченного движения к центру. Вычисленная здесь излучённая теплота равна работе сжатия, которая в противном случае увеличила бы внутреннюю энергию газа.

v. Температура на непрозрачной стадии

Когда потерями энергии на излучение можно пренебречь, сжатие в рамках модели становится адиабатическим. Для идеального газа

$$pV^\gamma = \text{постоянная}.$$

Объединяя это соотношение с $pV = NRT$, получаем

$$TV^{\gamma-1} = \text{постоянная}.$$

В начале этой стадии $r = r_3$ и $T = T_0$. Следовательно,

$$T(r)V(r)^{\gamma-1} = T_0 V_3^{\gamma-1},$$

и поэтому

$$T(r) = T_0 \left(\frac{V_3}{V(r)} \right)^{\gamma-1} = T_0 \left(\frac{r_3}{r} \right)^{3(\gamma-1)}.$$

vi. Радиус и температура при остановке коллапса

Молярная теплоёмкость равна

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1},$$

поэтому внутренняя энергия равна

$$U = \frac{mRT}{\mu(\gamma - 1)}.$$

Запишем конечную гравитационную потенциальную энергию в виде

$$W_4 = -\alpha \frac{Gm^2}{r_4},$$

где α — безразмерный коэффициент порядка единицы, зависящий от структуры. Для однородного шара $\alpha = 3/5$; для реальной неоднородной протозвезды этот коэффициент не обязательно имеет именно такое значение.

В момент остановки сжатия кинетическая энергия макроскопического движения вещества приблизительно равна нулю. Закон сохранения энергии даёт

$$U_4 + W_4 = U_0 + W_0 - Q.$$

Правая часть мала по сравнению с Gm^2/r_4 . Отношение начальной гравитационной энергии к этой величине по порядку величины равно r_4/r_0 . Излучённая энергия мала уже по сравнению с Gm^2/r_3 , поскольку

$$\frac{Q}{Gm^2/r_3} = 3 \frac{RT_0 r_0}{Gm\mu} \frac{r_3}{r_0} \ln \left(\frac{r_0}{r_3} \right) \ll 1.$$

Таким образом, с требуемой точностью

$$U_4 \simeq |W_4|,$$

или

$$\frac{mRT_4}{\mu(\gamma - 1)} \simeq \alpha \frac{Gm^2}{r_4}.$$

Эквивалентно,

$$T_4 \simeq \frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{Rr_4}.$$

Объединяя это с адиабатическим законом изменения температуры,

$$T_0 \left(\frac{r_3}{r_4} \right)^{3(\gamma-1)} \simeq \frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{Rr_4},$$

получаем

$$\left(\frac{r_3}{r_4} \right)^{3\gamma-4} \simeq \frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{RT_0 r_3}.$$

Следовательно, сохраняя эти множители,

$$r_4 \simeq r_3 \left[\frac{RT_0 r_3}{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu} \right]^{1/(3\gamma-4)}$$

и

$$T_4 \simeq T_0 \left[\frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{RT_0 r_3} \right]^{3(\gamma-1)/(3\gamma-4)}.$$

Приняв $\alpha = 3/5$, получаем одну конкретную грубую оценку; если опустить численные коэффициенты, получаются зависимости, приведённые в разделе **Ответы**.

Наконец,

$$U \propto r^{-3(\gamma-1)}, \quad |W| \propto r^{-1}.$$

Поскольку $\gamma > 4/3$, при сжатии внутренняя энергия растёт быстрее, чем модуль гравитационной энергии. Благодаря этому коллапс может остановиться. Кроме того,

$$\frac{Gm\mu}{RT_0 r_3} \gg 1,$$

поэтому оценки дают $r_4 \ll r_3$ и $T_4 \gg T_0$, в согласии с предположениями.

Решение проверено по официальному решению.