

IPhO 2012

Problemas teóricos y soluciones · Tartu, Estonia · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipro/2012/

Problema 1: Énfasis en los esquemas

Problema T1. Énfasis en los esquemas (13 puntos)

Parte A. Balística (4.5 puntos)

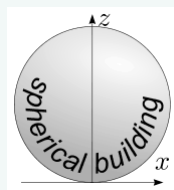
Una pelota, lanzada con una rapidez inicial v_0 , se mueve en un campo gravitatorio homogéneo en el plano x - z , donde el eje x es horizontal y el eje z es vertical y antiparalelo a la aceleración de caída libre g . Desprecie el efecto de la resistencia del aire.

i. (0.8 puntos) Ajustando el ángulo de lanzamiento de una pelota lanzada desde el origen con una rapidez inicial fija v_0 , se pueden alcanzar blancos dentro de la región dada por

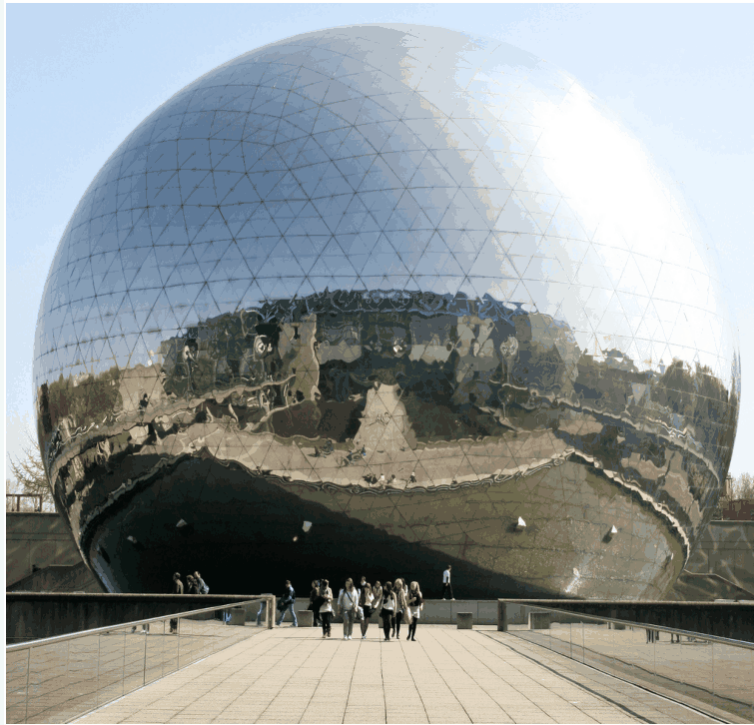
$$z \leq z_0 - kx^2.$$

Puede utilizar este hecho sin demostrarlo. Halle las constantes z_0 y k .

ii. (1.2 puntos) Ahora se puede elegir libremente el punto de lanzamiento al nivel del suelo $z = 0$, y el ángulo de lanzamiento se puede ajustar según sea necesario. El objetivo es alcanzar el punto más alto de un edificio esférico de radio R (véase la figura) con la mínima rapidez inicial v_0 . No se permite rebotar en el tejado antes de alcanzar el blanco. Esboce cualitativamente la forma de la trayectoria óptima de la pelota (utilice el recuadro destinado a ello en la hoja de respuestas). Tenga en cuenta que solo se puntuará el esquema.



iii. (2.5 puntos) ¿Cuál es la rapidez mínima de lanzamiento $v_{\min}$ necesaria para alcanzar el punto más alto de un edificio esférico de radio R ?



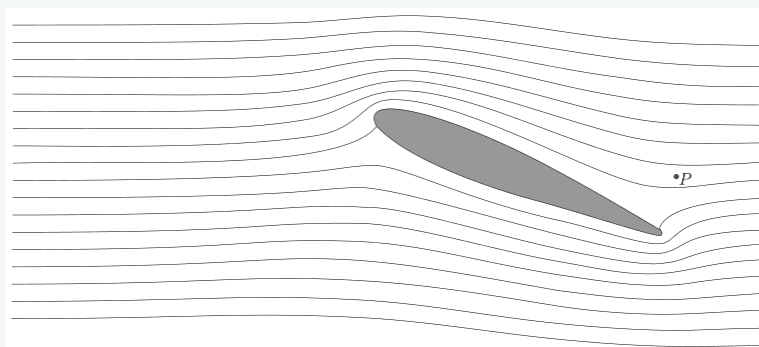
La Géode, Parc de la Villette, París. Foto: katchooo/flickr.com

Parte B. Flujo de aire alrededor de un ala (4 puntos)

Para esta parte del problema, la siguiente información puede resultar útil. Para un flujo de líquido o gas en un tubo a lo largo de una línea de corriente, $p + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.}$, suponiendo que la velocidad v es mucho menor que la velocidad del sonido. Aquí ρ es la densidad, h es la altura, g es la aceleración de caída libre y p es la presión hidrostática. Las líneas de corriente se definen como las trayectorias de las partículas del fluido (suponiendo que el flujo es estacionario). Tenga en cuenta que el término $\frac{1}{2} \rho v^2$ se denomina presión dinámica.

En la figura que se muestra a continuación se representa una sección transversal del ala de un avión junto con las líneas de corriente del flujo de aire alrededor del ala, vistas en el sistema de referencia del ala. Suponga que (a) el flujo de aire es puramente bidimensional (es decir, que los vectores velocidad del aire están en el plano de la figura); (b) el patrón de líneas de corriente es independiente de la rapidez del avión; (c) no hay viento; (d) la presión dinámica es mucho menor que la presión atmosférica, $p_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$.

Puede utilizar una regla para tomar medidas en la figura de la hoja de respuestas.



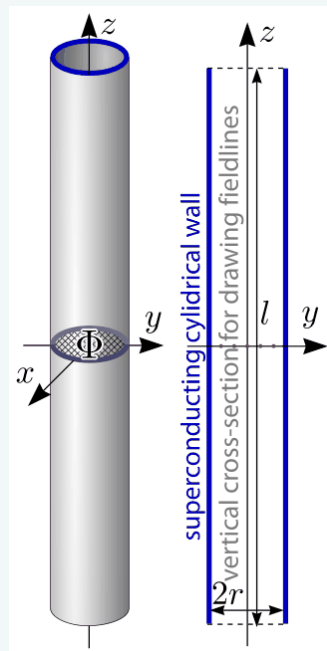
i. (0.8 puntos) Si la rapidez del avión respecto al suelo es $v_0 = 100 \text{ m/s}$, ¿cuál es la rapidez del aire, v_P , en el punto P (marcado en la figura) respecto al suelo?

ii. (1.2 puntos) En condiciones de humedad relativa elevada, cuando la rapidez del avión respecto al suelo supera un valor crítico v_{crit} , se forma una corriente de gotas de agua detrás del ala. Las gotas aparecen en un cierto punto Q . Marque el punto Q en la figura de la hoja de respuestas. Explique cualitativamente (utilizando fórmulas y la menor cantidad de texto posible) cómo ha determinado la posición de Q .

iii. (2.0 puntos) Estime la rapidez crítica v_{crit} utilizando los siguientes datos: la humedad relativa del aire es $r = 90\%$, la capacidad calorífica específica del aire a presión constante es $c_p = 1.00 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, la presión de vapor de agua saturado es $p_{sa} = 2.31 \text{ kPa}$ a la temperatura del aire no perturbado $T_a = 293 \text{ K}$ y $p_{sb} = 2.46 \text{ kPa}$ a $T_b = 294 \text{ K}$. Según las aproximaciones que utilice, también puede necesitar la capacidad calorífica específica del aire a volumen constante $c_V = 0.717 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$. Tenga en cuenta que la humedad relativa se define como el cociente entre la presión de vapor y la presión de vapor saturado a la temperatura dada. La presión de vapor saturado se define como la presión de vapor a la que el vapor está en equilibrio con el líquido.

Parte C. Pajitas magnéticas (4.5 puntos)

Considere un tubo cilíndrico hecho de un material superconductor. La longitud del tubo es l y su radio interior es r , con $l \gg r$. El centro del tubo coincide con el origen y su eje coincide con el eje z .

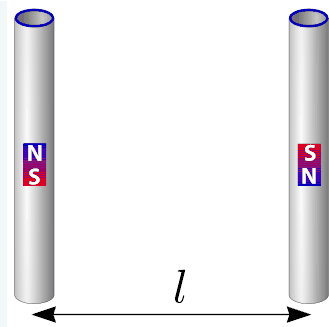


Hay un flujo magnético Φ a través de la sección transversal central del tubo, $z = 0$, $x^2 + y^2 < r^2$. Un superconductor es un material que expulsa cualquier campo magnético (el campo es nulo dentro del material).

i. (0.8 puntos) En el diagrama destinado a ello en la hoja de respuestas, dibuje cinco líneas de campo magnético que pasen por los cinco puntos rojos marcados en la sección axial del tubo.

ii. (1.2 puntos) Halle la fuerza de tensión T a lo largo del eje z en la mitad del tubo (es decir, la fuerza con la que las dos mitades del tubo, $z > 0$ y $z < 0$, interactúan entre sí).

iii. (2.5 puntos) Considere otro tubo, idéntico al primero y paralelo a él.



El segundo tubo tiene el mismo campo magnético, pero en sentido opuesto, y su centro está situado en $y = l, x = z = 0$ (de modo que los tubos forman lados opuestos de un cuadrado). Determine la fuerza de interacción magnética F entre los dos tubos.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **A.i.** $z_0 = \frac{v_0^2}{2g}, \quad k = \frac{g}{2v_0^2}.$

- **A.ii.** La parábola óptima asciende desde el suelo, roza tangencialmente la parte superior del edificio, asciende un poco más y luego desciende hasta el punto más alto. Si se aproxima desde la izquierda, su ecuación es

$$z = 2R - \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{4x^2}{3R}.$$

- **A.iii.** $v_{\min} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}.$

- **B.i.** $v_P \approx 20 \text{ m/s}$, aproximadamente en la dirección y el sentido del movimiento del avión.
- **B.ii.** Sitúe Q inmediatamente por encima del borde de ataque redondeado, donde las líneas de corriente de la parte superior están más juntas: allí la rapidez es máxima y la temperatura mínima.

- **B.iii.** $v_{\text{crit}} \approx 35 \text{ m/s}$, utilizando una rapidez local máxima de aproximadamente el doble de la rapidez del avión e incluyendo la variación de la presión parcial del vapor. Si se desprecia esa variación de presión, se obtiene aproximadamente 32 m/s .

- **C.i.** Dibuje líneas axiales casi paralelas en el interior hueco del tubo. Las cuatro líneas situadas fuera del eje se abren más allá de los extremos y regresan por el exterior, sin penetrar en la pared superconductora. La línea axial central permanece recta.

- **C.ii.** $T \simeq \frac{\Phi^2}{2\mu_0\pi r^2},$ que atrae las dos mitades entre sí.

- **C.iii.** Los tubos se atraen con una fuerza

$$F \simeq \frac{\Phi^2}{4\pi\mu_0 l^2} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Los resultados magnéticos utilizan la aproximación de un tubo largo y estrecho.

Solución

A.i.

Para un ángulo de lanzamiento θ , al eliminar el tiempo de las ecuaciones del movimiento del proyectil se obtiene

$$z = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}.$$

Escribiendo $u = \tan \theta$,

$$z = xu - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + u^2).$$

Para un valor fijo de $x \neq 0$, esta expresión cuadrática alcanza su máximo cuando

$$u = \frac{v_0^2}{gx}.$$

Al sustituir se obtiene la envolvente

$$z_{\text{env}} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

En $x = 0$, su altura es también la altura máxima de un lanzamiento vertical. Por tanto,

$$z_0 = \frac{v_0^2}{2g}, \quad k = \frac{g}{2v_0^2}.$$

A.ii.

Situemos el centro del edificio en $(0, R)$, de modo que su punto más alto sea $(0, 2R)$. Elijamos un punto de lanzamiento a la izquierda; la reflexión respecto al eje z proporciona una trayectoria igualmente válida.

El esquema solicitado es una parábola abierta hacia abajo con estas características:

1. Parte del suelo a la izquierda del edificio y asciende con una gran pendiente.
2. Roza tangencialmente la superficie superior izquierda, sin que se produzca un cambio de velocidad debido a un impacto.
3. Continúa ascendiendo hasta un vértice situado ligeramente por encima y a la izquierda del punto más alto del edificio.
4. Después desciende hasta el punto más alto.

Los puntos característicos exactos, que se deducen a continuación, son:

Punto característico	x/R	z/R
Lanzamiento	$-\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{11}}{8} \approx -1.460$	0
Punto de contacto tangencial	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.866$	$\frac{3}{2}$
Vértice	$-\frac{\sqrt{3}}{8} \approx -0.217$	$\frac{33}{16} = 2.0625$
Blanco	0	2

A.iii.

Sea v_t la rapidez de la pelota al alcanzar el blanco. La conservación de la energía mecánica da

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_t^2 + mg(2R),$$

por lo que

$$v_0^2 = v_t^2 + 4gR.$$

Así, minimizar la rapidez de lanzamiento equivale a minimizar v_t .

Invirtamos el movimiento. Ahora lanzamos un proyectil desde $(0, 2R)$ con rapidez v_t . Según A.i, toda trayectoria de este tipo queda por debajo de la envolvente

$$z_{\text{env}}(x) = 2R + \frac{v_t^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_t^2}.$$

Una trayectoria que se aproxima al blanco desde la izquierda debe pasar por encima de la superficie superior

$$z_s(x) = R + \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq 0.$$

En consecuencia, la envolvente también debe pasar por encima de esa superficie.

Definamos

$$\lambda = \frac{v_t^2}{gR}, \quad c = \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}, \quad 0 \leq c \leq 1.$$

La diferencia entre la envolvente y el tejado es

$$\begin{aligned} \frac{z_{\text{env}} - z_s}{R} &= 1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{1 - c^2}{2\lambda} - c \\ &= \frac{(c - \lambda)^2 + 2\lambda - 1}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Si $0 < \lambda < 1/2$, al elegir $c = \lambda$ esta diferencia resulta negativa. En ese caso, ninguna trayectoria puede salvar el edificio. Por tanto,

$$v_t^2 \geq \frac{gR}{2}.$$

Cuando se alcanza la igualdad, la envolvente toca el tejado en $c = 1/2$, es decir, en

$$(x, z) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}R, \frac{3}{2}R \right).$$

También debemos demostrar que una trayectoria real alcanza esta cota. Al lanzar el proyectil con el movimiento invertido 30° por encima de la horizontal hacia la izquierda, se obtiene, en las coordenadas originales,

$$z(x) = 2R - \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{4x^2}{3R}.$$

Esta parábola pasa por el blanco y es tangente a la esfera en el punto anterior. Para comprobar que nunca penetra en el edificio, hagamos $t = -x/R \geq 0$. La sustitución directa da

$$\frac{x^2 + (z - R)^2 - R^2}{R^2} = \frac{16}{9} t \left(t + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \geq 0.$$

Así, toda la trayectoria pertinente queda fuera de la esfera, con un contacto tangencial antes de llegar al blanco. No se necesita ningún rebote.

Finalmente,

$$v_{\min}^2 = \frac{gR}{2} + 4gR = \frac{9}{2}gR,$$

y, por tanto,

$$v_{\min} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}.$$

La intersección de esta parábola con el suelo y su vértice proporcionan los puntos característicos indicados en A.ii.

B.i.

Sea u la rapidez del aire en el sistema de referencia del ala. Como las variaciones de presión son pequeñas en comparación con la presión atmosférica, primero consideramos que la densidad es constante.

Para un tubo de corriente estrecho de anchura unidad en la dirección de la envergadura, la ecuación de continuidad da

$$u d = v_0 d_\infty,$$

donde d es la separación entre líneas de corriente adyacentes, medida perpendicularmente al flujo, y d_∞ es su separación aguas arriba, donde el flujo no está perturbado. Así,

$$u = v_0 \frac{d_\infty}{d}.$$

Según la figura proporcionada, la separación cerca de P es aproximadamente 1.25 veces la separación aguas arriba:

$$u_P \approx 0.80v_0 \approx 80 \text{ m/s}.$$

Tomemos el flujo no perturbado en el sistema de referencia del ala dirigido hacia la derecha. El avión se mueve entonces hacia la izquierda respecto al suelo, por lo que la transformación de velocidades es

$$\mathbf{v}_{P,\text{ground}} = \mathbf{u}_P - v_0 \hat{\mathbf{x}}.$$

Las líneas de corriente en P son casi horizontales. Por tanto,

$$v_P \approx |80 - 100| = 20 \text{ m/s},$$

aproximadamente hacia la izquierda, en la dirección y el sentido del movimiento del avión.

Si se tiene en cuenta la pequeña inclinación local, la expresión correspondiente es

$$v_P = \sqrt{u_P^2 + v_0^2 - 2u_P v_0 \cos \theta_P}.$$

B.ii.

Despreciemos las diferencias de potencial gravitatorio entre los puntos del ala. La ecuación de continuidad y la ecuación de Bernoulli dan

$$u \propto \frac{1}{d}, \quad p = p_0 + \frac{1}{2} \rho (v_0^2 - u^2).$$

Para un flujo aproximadamente adiabático, la conservación de la entalpía de remanso da

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_a + \frac{v_0^2}{2}.$$

Por tanto,

$$d \text{ mínima} \implies u \text{ máxima} \implies p, T \text{ mínimas}.$$

La presión de vapor saturado disminuye rápidamente al disminuir la temperatura, por lo que la humedad relativa alcanza la unidad primero en ese lugar.

Sitúe Q justo por encima del borde de ataque redondeado, en la región de separación mínima entre líneas de corriente en la parte superior del ala. Las gotas que aparecen son transportadas después aguas abajo.

B.iii.

Modelamos el aire como un gas ideal que experimenta una expansión aproximadamente adiabática y reversible antes de que comience la condensación. Su constante específica de los gases es

$$R_{\text{air}} = c_p - c_V = 283 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Sea $\Delta T = T_a - T_Q > 0$ el enfriamiento en Q . Los datos proporcionados de presión de saturación dan la pendiente local

$$s = \frac{p_{sb} - p_{sa}}{T_b - T_a} = \frac{2460 - 2310}{294 - 293} = 150 \text{ Pa/K}.$$

Utilizando una extrapolación lineal,

$$p_s(T_Q) \approx p_{sa} - s \Delta T.$$

Antes de la condensación, la fracción molar del vapor de agua permanece invariable, de modo que su presión parcial varía proporcionalmente a la presión total:

$$p_{v,Q} = r p_{sa} \frac{p_Q}{p_0}.$$

La relación adiabática para un gas ideal da

$$\frac{p_Q}{p_0} = \left(\frac{T_Q}{T_a} \right)^{c_p/R_{\text{air}}} \approx 1 - \frac{c_p}{R_{\text{air}} T_a} \Delta T.$$

Al comenzar la condensación, $p_{v,Q} = p_s(T_Q)$. Por tanto,

$$rp_{sa} \left(1 - \frac{c_p \Delta T}{R_{\text{air}} T_a} \right) = p_{sa} - s \Delta T,$$

de donde se obtiene

$$\Delta T = \frac{(1-r)p_{sa}}{s - rp_{sa}c_p/(R_{\text{air}}T_a)}.$$

Numéricamente,

$$\Delta T = \frac{0.10(2310)}{150 - \frac{0.90(2310)(1000)}{283(293)}} \approx 1.85 \text{ K}.$$

Así, la condensación comienza aproximadamente a 291.2 K.

Sea

$$\alpha = \frac{u_Q}{v_0} \approx \frac{d_\infty}{d_Q}.$$

La separación más estrecha del dibujo es aproximadamente la mitad de la separación en el flujo no perturbado, lo que da $\alpha \approx 2$. La ecuación de la energía da entonces

$$c_p \Delta T = \frac{1}{2}(u_Q^2 - v_{\text{crit}}^2) = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1)v_{\text{crit}}^2.$$

En consecuencia,

$$v_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2c_p \Delta T}{\alpha^2 - 1}} \approx \sqrt{\frac{2(1000)(1.85)}{4 - 1}} \approx 35 \text{ m/s}.$$

La disminución de presión correspondiente es de aproximadamente un 2.2%, lo que es coherente con considerar pequeñas las variaciones de densidad para la estimación gráfica de la velocidad.

Una aproximación más sencilla mantiene constante la presión parcial del vapor. Se obtiene

$$\Delta T \approx \frac{(1-r)p_{sa}}{s} = 1.54 \text{ K}, \quad v_{\text{crit}} \approx 32 \text{ m/s}.$$

Ambas estimaciones sitúan el umbral en unas pocas decenas de metros por segundo; la estimación corregida por la variación de presión es de aproximadamente 35 m/s.

C.i.

Elijamos el sentido del flujo como $+z$ dentro del tubo; invertir todas las flechas da la convención opuesta.

Lejos de los extremos, el campo en el interior hueco del tubo es casi uniforme y axial. Dibuje cinco líneas casi rectas y paralelas que pasen por los puntos marcados.

En las aberturas:

- Las dos líneas situadas fuera del eje a cada lado se abren hacia fuera más allá del extremo superior, se curvan hacia abajo por el exterior y regresan por la abertura inferior.
- El patrón es simétrico respecto al eje y respecto al plano medio.
- Las líneas que pasan más cerca del eje forman bucles exteriores más grandes.
- Ninguna línea atraviesa la pared superconductora; el campo es tangente a sus superficies.

Para el punto situado en el eje, la simetría axial exige una línea recta a lo largo del eje z . Esta se extiende hasta el infinito en ambos sentidos; no tiene ningún extremo finito. Las flechas de las demás líneas apuntan hacia arriba en el interior hueco del tubo y hacia abajo a lo largo de sus tramos de retorno por el exterior.

C.ii.

Escribamos el área de la sección interior como

$$A = \pi r^2.$$

Como $l \gg r$, el campo central es aproximadamente uniforme:

$$B = \frac{\Phi}{A}.$$

El esfuerzo de Maxwell a lo largo de un campo magnético es de tracción, con magnitud

$$\sigma_{\parallel} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Al integrar este esfuerzo sobre la sección interior central se obtiene la atracción entre las mitades:

$$T \simeq \frac{B^2 A}{2\mu_0} = \boxed{\frac{\Phi^2}{2\mu_0 \pi r^2}}.$$

El débil campo exterior de retorno produce una pequeña corrección en el límite de un tubo largo.

El resultado también se deduce de la energía magnética. Para un flujo atrapado y una sección transversal fijos,

$$U \simeq \frac{B^2}{2\mu_0} Al = \frac{\Phi^2 l}{2\mu_0 A}.$$

Aumentar la longitud del tubo requiere un trabajo $T dl = dU$, lo que da la misma tensión.

C.iii.

A distancias grandes en comparación con el radio del tubo, el flujo que emerge de un extremo se comporta como el campo de un polo magnético efectivo. Su intensidad es

$$q_m = \frac{\Phi}{\mu_0},$$

porque su campo radial es

$$B(s) = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi s^2} = \frac{\Phi}{4\pi s^2}.$$

Estas son fuentes equivalentes del campo exterior; no se requieren monopolos magnéticos reales. Los dos extremos tienen signos opuestos.

La fuerza entre dos de estos polos efectivos separados por una distancia s tiene una magnitud

$$\frac{\mu_0 q_m^2}{4\pi s^2} = \frac{\Phi^2}{4\pi \mu_0 s^2}.$$

Definamos

$$K = \frac{\Phi^2}{4\pi \mu_0}.$$

Para los tubos antiparalelos, hay que incluir las cuatro interacciones entre extremos:

Pares de extremos	Separación	Interacción	Componente combinada hacia el otro tubo
Superior–superior e inferior–inferior	l	Atracción	$\frac{2K}{l^2}$
Superior–inferior e inferior–superior	$\sqrt{2}l$	Repulsión	$-\frac{K}{\sqrt{2}l^2}$

Para cada par diagonal, la magnitud de la fuerza es $K/(2l^2)$, y su componente transversal es esta magnitud multiplicada por $\cos 45^\circ$. Sus componentes verticales se anulan.

Por tanto,

$$F \simeq \frac{\Phi^2}{4\pi\mu_0 l^2} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

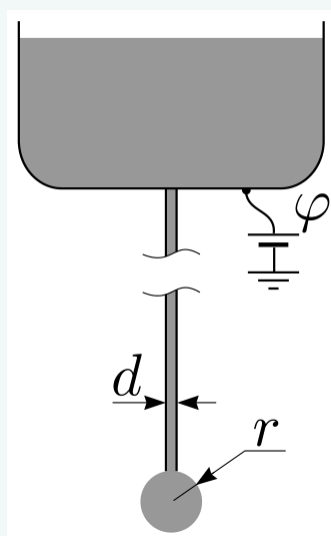
La fuerza es atractiva: actúa en el sentido $+y$ sobre el primer tubo y en el sentido $-y$ sobre el segundo.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Gotero de Kelvin

Problema T2. Gotero de Kelvin (8 puntos)

Los siguientes hechos sobre la tensión superficial pueden resultar útiles para este problema. Para las moléculas de un líquido, las posiciones en la interfaz líquido-aire son menos favorables que las posiciones en el seno del líquido. Esta interfaz se describe mediante la denominada energía superficial, $U = \sigma S$, donde S es el área de la interfaz y σ es el coeficiente de tensión superficial del líquido. Además, dos porciones de la superficie del líquido se atraen entre sí con una fuerza $F = \sigma l$, donde l es la longitud de una línea recta que separa ambas porciones.



Un tubo metálico largo de diámetro interior d apunta verticalmente hacia abajo. De una boquilla situada en su extremo inferior gotea agua lentamente; véase la figura. El agua puede considerarse conductora de la electricidad; su tensión superficial es σ y su densidad es ρ . Una gota de radio r

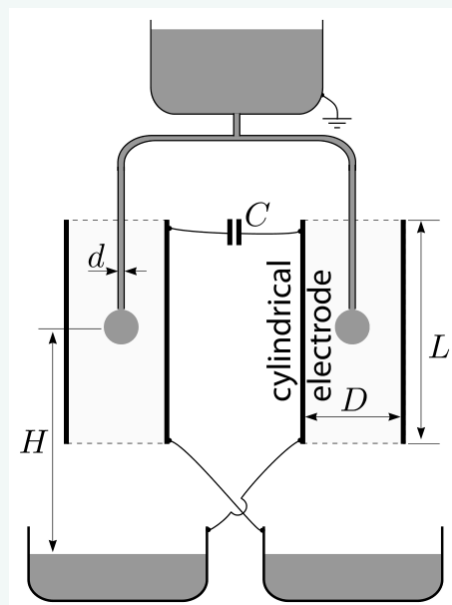
cuelga de la boquilla. El radio aumenta lentamente con el tiempo hasta que la gota se desprende de la boquilla debido a la aceleración de caída libre g . Supóngase siempre que $d \ll r$.

Parte A. Un solo tubo (4 puntos)

- i. (1.2 puntos) Halle el radio $r_{\max}$ de una gota justo antes de que se desprenda de la boquilla.
- ii. (1.2 puntos) El potencial electrostático del tubo con respecto al entorno lejano es φ . Halle la carga Q de una gota cuando su radio es r .
- iii. (1.6 puntos) Considere la situación en la que r se mantiene constante y φ aumenta lentamente. La gota se vuelve inestable y se fragmenta si la presión hidrostática en su interior se hace menor que la presión atmosférica. Halle el potencial crítico $\varphi_{\max}$ al que esto sucede.

Parte B. Dos tubos (4 puntos)

Un aparato denominado «gotero de Kelvin» consta de dos tubos, cada uno idéntico al descrito en la Parte A, conectados mediante una unión en T; véase la figura. Los extremos de ambos tubos se encuentran en los centros de dos electrodos cilíndricos (de altura L y diámetro D , con $L \gg D \gg r$). En ambos tubos, la frecuencia de goteo es de n gotas por unidad de tiempo. Las gotas caen desde una altura H a unos recipientes conductores situados debajo de las boquillas y conectados de forma cruzada a los electrodos, como se muestra en el esquema. Los electrodos están conectados mediante una capacidad C . La carga neta del sistema de recipientes y electrodos es nula. Obsérvese que el depósito de agua superior está conectado a tierra, como se muestra. La primera gota que caiga tendrá una pequeña carga microscópica que causará un desequilibrio entre los dos lados y una pequeña separación de cargas entre las placas del condensador.



- i. (1.2 puntos) Exprese el valor absoluto de la carga Q_0 de las gotas al desprenderse de los tubos, en el instante en que la carga del condensador es q . Exprese Q_0 en función de $r_{\max}$ (de la Parte A-i) y desprecie el efecto descrito en la Parte A-iii.
- ii. (1.5 puntos) Halle la dependencia de q con el tiempo t , aproximándola mediante una función continua $q(t)$ y suponiendo que $q(0) = q_0$.

iii. (1.3 puntos) El funcionamiento del gotero puede verse dificultado por el efecto descrito en la Parte A-iii. Además, la repulsión electrostática entre una gota y el recipiente situado debajo de ella establece un límite $U_{\max}$ para la diferencia de potencial que puede alcanzarse entre los electrodos. Halle $U_{\max}$.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Aquí ε_0 es la permitividad del vacío, y q denota el módulo de la carga de cualquiera de las placas del condensador.

- A-i:

$$r_{\max} = \left(\frac{3\sigma d}{4\rho g} \right)^{1/3}.$$

- A-ii:

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 r \varphi.$$

- A-iii:

$$\varphi_{\max} = 2\sqrt{\frac{\sigma r}{\varepsilon_0}}.$$

El mismo umbral se aplica al valor absoluto de un potencial negativo.

- B-i:

$$Q_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0 r_{\max}}{C} q.$$

- B-ii: En la aproximación continua con un tiempo de vuelo despreciable,

$$q(t) = q_0 \exp\left(\frac{2\pi\varepsilon_0 n r_{\max}}{C} t\right).$$

- B-iii: El límite debido a la repulsión electrostática es

$$U_{\max} = r_{\max} \sqrt{\frac{2\rho g H}{3\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\sigma d H}{2\varepsilon_0 r_{\max}}}.$$

No se proporcionan valores numéricos de los parámetros.

Solución

Parte A-i

La gota, que crece lentamente, se encuentra en equilibrio mecánico hasta que su peso supera la fuerza máxima de sustentación debida a la tensión superficial.

La circunferencia de la boquilla es πd . Cuando la tensión superficial actúa verticalmente alrededor del cuello, su fuerza máxima hacia arriba es

$$F_\sigma = \pi d \sigma.$$

El volumen del cuello y la corrección debida a la fuerza de presión en la pequeña abertura de la boquilla son despreciables para $d \ll r$. Aproximando la gota por una esfera, su peso es

$$mg = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g.$$

En el momento del desprendimiento,

$$\frac{4}{3} \pi r_{\max}^3 \rho g = \pi d \sigma,$$

de donde

$$r_{\max} = \left(\frac{3\sigma d}{4\rho g} \right)^{1/3}.$$

La aproximación esférica es coherente con este resultado: el cociente entre los esfuerzos gravitatorios y los capilares es

$$\frac{\rho g r_{\max}^2}{\sigma} = \frac{3d}{4r_{\max}} \ll 1.$$

Parte A-ii

La gota conductora y el tubo tienen el mismo potencial. Despreciando la perturbación que el tubo delgado produce en el campo eléctrico de la gota, esta se comporta como una esfera conductora.

Fuera de una esfera con carga Q , la ley de Gauss da

$$E(s) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 s^2}.$$

Tomando como nulo el potencial del entorno lejano,

$$\varphi = \int_r^\infty E(s) ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Por tanto,

$$Q = 4\pi\epsilon_0 r \varphi.$$

El signo de la carga de la gota es el signo de φ .

Parte A-iii

La tensión superficial produce una presión capilar hacia dentro. A partir de la energía superficial dada,

$$W_\sigma = 4\pi r^2 \sigma,$$

la presión necesaria para aumentar el área superficial es

$$p_\sigma = \frac{dW_\sigma}{dV} = \frac{8\pi r \sigma}{4\pi r^2} = \frac{2\sigma}{r}.$$

El campo eléctrico produce una presión hacia fuera. En un conductor, la densidad superficial de carga es $\epsilon_0 E$, y el campo que actúa sobre esa carga debido a las demás cargas es $E/2$. Así,

$$p_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Utilizando la Parte A-ii,

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\varphi}{r}.$$

En consecuencia, el equilibrio mecánico da

$$p_{\text{in}} - p_{\text{atm}} = p_{\sigma} - p_e = \frac{2\sigma}{r} - \frac{\varepsilon_0 \varphi^2}{2r^2}.$$

Según el criterio de inestabilidad especificado, el umbral se alcanza cuando la presión interna es igual a la presión atmosférica:

$$\frac{2\sigma}{r} = \frac{\varepsilon_0 \varphi_{\text{max}}^2}{2r^2}.$$

Por tanto,

$$\varphi_{\text{max}} = 2\sqrt{\frac{\sigma r}{\varepsilon_0}}.$$

De forma equivalente, el módulo de la carga correspondiente es

$$Q_{\text{crit}} = 4\pi\varepsilon_0 r \varphi_{\text{max}} = 8\pi\sqrt{\varepsilon_0 \sigma r^3}.$$

Parte B-i

Escribamos

$$R = r_{\text{max}}, \quad U = \frac{q}{C}.$$

Despreciamos las capacidades parásitas frente a C . Por simetría y al ser nula la carga neta, los potenciales de los dos electrodos con respecto a tierra son

$$V_L = +\frac{U}{2}, \quad V_R = -\frac{U}{2}.$$

Como $L \gg D$, el potencial cerca del centro de cada cilindro, antes de tener en cuenta la pequeña gota, es aproximadamente el potencial del cilindro. Como $D \gg R$, la contribución de la propia gota al potencial de su superficie es aproximadamente la de una esfera aislada.

El agua y los tubos están conectados a tierra. Así, mientras la gota izquierda permanece unida al tubo,

$$0 = V_L + \frac{Q_L}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Se deduce que

$$Q_L = -2\pi\varepsilon_0 R U.$$

Análogamente,

$$Q_R = +2\pi\varepsilon_0 R U.$$

La carga se conserva al desprenderse la gota, por lo que su módulo es

$$Q_0 = 2\pi\varepsilon_0 R U = \frac{2\pi\varepsilon_0 r_{\text{max}}}{C} q.$$

Debido a las conexiones cruzadas, cada gota cae en un recipiente que ya tiene carga del mismo signo que ella. Por tanto, su llegada refuerza la separación de cargas.

Parte B-ii

Utilicemos la aproximación continua y despreciemos el retraso entre el desprendimiento y la recogida de la gota. Esto supone que la tensión varía poco durante el vuelo de una gota.

Cada tubo produce n gotas por unidad de tiempo. La placa positiva del condensador recibe carga positiva a un ritmo nQ_0 , mientras que la placa negativa recibe carga negativa al mismo ritmo. Por tanto, el módulo q de la carga de cualquiera de las placas satisface

$$\frac{dq}{dt} = nQ_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 nR}{C} q.$$

No hay ningún factor dos adicional: un par de gotas hace que las cargas de las placas pasen de $+q$, $-q$ a $+(q + Q_0)$, $-(q + Q_0)$.

Integrando e imponiendo $q(0) = q_0$,

$$\ln \frac{q(t)}{q_0} = \frac{2\pi\epsilon_0 nR}{C} t,$$

de modo que

$$q(t) = q_0 \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 nR_{\max}}{C} t\right).$$

El tiempo característico de crecimiento es

$$\tau = \frac{C}{2\pi\epsilon_0 nR_{\max}}.$$

La aproximación de retraso despreciable requiere que el tiempo de vuelo sea pequeño frente a τ . El crecimiento exponencial es válido antes de que la fragmentación o la repulsión electrostática dificulten significativamente la recogida de las gotas.

Parte B-iii

Consideremos la gota formada dentro del electrodo positivo. Tiene carga $-Q_0$, y el recipiente que la recoge está conectado al electrodo negativo.

Tratemos U como aproximadamente constante durante la caída. El potencial producido por el aparato cambia de $+U/2$ cerca de la boquilla a $-U/2$ en el recipiente. Por tanto, el aumento de la energía potencial electrostática externa de la gota es

$$\Delta W_e = (-Q_0) \left(-\frac{U}{2} - \frac{U}{2} \right) = Q_0 U.$$

El potencial utilizado aquí es el producido por el aparato. El potencial total nulo de la gota mientras permanece unida al tubo incluye también su propio campo. Durante el vuelo, su carga y su radio permanecen aproximadamente constantes, por lo que su energía propia no contribuye al trabajo de traslación.

Despreciando la resistencia del aire y la energía cinética inicial, la energía gravitatoria disponible es

$$mgH = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho gH.$$

Para que la recogida siga siendo posible, esta energía debe ser suficiente para superar el aumento de energía electrostática:

$$mgH \geq Q_0 U.$$

En el límite energético, utilizando $Q_0 = 2\pi\epsilon_0 R U$,

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g H = 2\pi\epsilon_0 R U_{\max}^2.$$

Así,

$$U_{\max} = r_{\max} \sqrt{\frac{2\rho g H}{3\epsilon_0}}.$$

Utilizando la condición de desprendimiento $mg = \pi d\sigma$, esto también puede escribirse como

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma d H}{2\epsilon_0 r_{\max}}}.$$

El umbral independiente de fragmentación de la Parte A-iii, evaluado para una gota de radio $r_{\max}$, corresponde a

$$U_{\text{break}} = 2\varphi_{\max}(r_{\max}) = 4\sqrt{\frac{\sigma r_{\max}}{\epsilon_0}}.$$

Esto impone una restricción adicional al funcionamiento con gotas intactas.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Formación de una protoestrella

Problema T3. Formación de una protoestrella (9 puntos)

Modelemos la formación de una estrella del siguiente modo. Una nube esférica de gas interestelar tenue, inicialmente en reposo, comienza a colapsar debido a su propia gravedad. El radio inicial de la esfera es r_0 y su masa es m . La temperatura del entorno (mucho más tenue que el gas) y la temperatura inicial del gas son uniformemente iguales a T_0 . Puede suponerse que el gas es ideal. La masa molar media del gas es μ y su índice adiabático es $\gamma > \frac{4}{3}$. Suponga que $G \frac{m\mu}{r_0} \gg RT_0$, donde R es la constante de los gases y G es la constante de gravitación universal.

- i. **(0.8 puntos)** Durante gran parte del colapso, el gas es tan transparente que cualquier calor generado se emite inmediatamente por radiación, es decir, la esfera permanece en equilibrio termodinámico con su entorno. ¿Por qué factor n aumenta la presión cuando el radio se reduce a la mitad, hasta $r_1 = 0.5r_0$? Suponga que la densidad del gas permanece uniforme.
- ii. **(1 punto)** Estime el tiempo t_2 necesario para que el radio disminuya de r_0 a $r_2 = 0.95r_0$. Desprecie la variación del campo gravitatorio en la posición de una partícula de gas en caída.
- iii. **(2.5 puntos)** Suponiendo que la presión sigue siendo despreciable, halle el tiempo $t_{r \rightarrow 0}$ necesario para que la esfera colapse desde r_0 hasta un radio mucho menor, utilizando las leyes de Kepler.

iv. (1.7 puntos) Al alcanzar cierto radio $r_3 \ll r_0$, el gas se vuelve lo suficientemente denso como para ser opaco a la radiación térmica. Calcule la cantidad de calor Q emitida por radiación durante el colapso desde el radio r_0 hasta r_3 .

v. (1 punto) Para radios menores que r_3 , puede despreciar la pérdida de calor por radiación. Determine cómo depende la temperatura T de la esfera de su radio para $r < r_3$.

vi. (2 puntos) Finalmente, ya no podemos despreciar el efecto de la presión sobre la dinámica del gas y el colapso se detiene en $r = r_4$ (con $r_4 \ll r_3$). Sin embargo, la pérdida por radiación sigue siendo despreciable y la temperatura aún no es lo suficientemente alta como para iniciar la fusión nuclear. La presión de esta protoestrella ya no es uniforme, pero todavía pueden hacerse estimaciones aproximadas con prefactores numéricos poco precisos. Estime el radio final r_4 y la temperatura correspondiente T_4 .

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

• i.

$$n = 8.$$

• ii.

$$t_2 \simeq \sqrt{\frac{0.10 r_0^3}{Gm}} \simeq 0.32 \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}.$$

• iii.

$$t_{r \rightarrow 0} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}} \simeq 1.11 \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}.$$

• iv.

$$Q = \frac{3mRT_0}{\mu} \ln\left(\frac{r_0}{r_3}\right).$$

• v.

$$T(r) = T_0 \left(\frac{r_3}{r}\right)^{3(\gamma-1)}.$$

- **vi.** Omitiendo los factores numéricos en el balance de energía, las estimaciones son

$$r_4 \sim r_3 \left(\frac{RT_0 r_3}{Gm\mu} \right)^{1/(3\gamma-4)}$$

y

$$T_4 \sim T_0 \left(\frac{Gm\mu}{RT_0 r_3} \right)^{3(\gamma-1)/(3\gamma-4)}.$$

Más adelante se deduce una expresión que conserva el factor de capacidad calorífica y un factor aproximado de estructura gravitatoria.

Solución

Sea $N = m/\mu$ la cantidad de gas en moles. Su volumen y su presión de gas ideal son

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}, \quad pV = NRT.$$

La desigualdad dada significa que la escala inicial de energía gravitatoria supera ampliamente la escala de energía térmica, lo que justifica despreciar la presión durante la fase inicial del colapso.

i. Aumento de presión durante la contracción isotérmica

El equilibrio termodinámico con el entorno mantiene la temperatura en T_0 . Así,

$$p = \frac{NRT_0}{V} \propto r^{-3}.$$

Por consiguiente,

$$n = \frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^3 = \left(\frac{1}{0.5} \right)^3 = \boxed{8}.$$

ii. Tiempo necesario para la primera disminución del cinco por ciento del radio

Por el teorema de las capas esféricas, una partícula en la superficie experimenta inicialmente una aceleración gravitatoria dirigida hacia el centro,

$$g_0 = \frac{Gm}{r_0^2}.$$

Manteniendo constante esta aceleración, como se indica, y utilizando la condición inicial de reposo,

$$r_0 - r_2 = \frac{1}{2} g_0 t_2^2.$$

Como $r_0 - r_2 = 0.05r_0$,

$$t_2 \simeq \sqrt{\frac{2(0.05r_0)}{Gm/r_0^2}} = \sqrt{\frac{0.10r_0^3}{Gm}}.$$

iii. Tiempo de colapso a partir de las leyes de Kepler

Una partícula de la superficie se mueve bajo la acción del campo gravitatorio de la masa encerrada m :

$$\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2}.$$

Consideremos su caída radial como el límite de una órbita kepleriana ligada muy excéntrica. El apocentro es r_0 , mientras que el pericentro tiende a cero, por lo que el semieje mayor tiende a

$$a = \frac{r_0}{2}.$$

La tercera ley de Kepler da el período orbital

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{Gm}}.$$

El recorrido del apocentro al pericentro dura medio período. Por tanto,

$$t_{r \rightarrow 0} = \frac{P}{2} = \pi\sqrt{\frac{(r_0/2)^3}{Gm}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}.$$

Para una nube inicialmente uniforme, este es también el tiempo de colapso de cada capa interior. En efecto, una capa situada inicialmente en el radio s_0 encierra

$$M(s_0) = m\left(\frac{s_0}{r_0}\right)^3,$$

de modo que su tiempo de colapso es

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{s_0^3}{GM(s_0)}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}},$$

independientemente de s_0 . Esto respalda la aproximación de un colapso uniforme y homólogo.

iv. Calor emitido por radiación durante la etapa transparente

La energía interna de un gas ideal depende únicamente de la temperatura. Como $T = T_0$, su energía interna permanece constante.

Tomando $\delta Q_{\text{out}} > 0$ para el calor que sale del gas, el primer principio de la termodinámica se escribe

$$dU = -p dV - \delta Q_{\text{out}}.$$

Así, con $dU = 0$,

$$\delta Q_{\text{out}} = -p dV = -NRT_0 \frac{dV}{V}.$$

Integrando desde V_0 hasta V_3 ,

$$Q = NRT_0 \ln\left(\frac{V_0}{V_3}\right).$$

Como $V \propto r^3$,

$$Q = \frac{3mRT_0}{\mu} \ln\left(\frac{r_0}{r_3}\right).$$

La disminución de la energía potencial gravitatoria **no se emite íntegramente por radiación**: durante este rápido colapso, la mayor parte se convierte en energía cinética de movimiento coherente hacia el centro. El calor emitido por radiación que se calcula aquí es el trabajo de compresión que, de otro

modo, aumentaría la energía interna del gas.

v. Temperatura durante la etapa opaca

Una vez que las pérdidas por radiación se vuelven despreciables, la compresión es adiabática dentro del modelo. Para un gas ideal,

$$pV^\gamma = \text{constante}.$$

Combinando esto con $pV = NRT$, se obtiene

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}.$$

Al comienzo de esta etapa, $r = r_3$ y $T = T_0$. Por ello,

$$T(r)V(r)^{\gamma-1} = T_0V_3^{\gamma-1},$$

y, por tanto,

$$T(r) = T_0 \left(\frac{V_3}{V(r)} \right)^{\gamma-1} = T_0 \left(\frac{r_3}{r} \right)^{3(\gamma-1)}.$$

vi. Radio y temperatura al detenerse el colapso

La capacidad calorífica molar es

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1},$$

de modo que la energía interna es

$$U = \frac{mRT}{\mu(\gamma - 1)}.$$

Escribamos la energía potencial gravitatoria final como

$$W_4 = -\alpha \frac{Gm^2}{r_4},$$

donde α es un factor de estructura adimensional de orden unidad. Una esfera uniforme tiene $\alpha = 3/5$; la protoestrella real, no uniforme, no tiene por qué presentar precisamente este valor.

Cuando se detiene la contracción global, la energía cinética de su movimiento global es aproximadamente cero. La conservación de la energía da

$$U_4 + W_4 = U_0 + W_0 - Q.$$

El miembro derecho es pequeño en comparación con Gm^2/r_4 . La energía gravitatoria inicial es menor por un factor de orden r_4/r_0 . La energía emitida por radiación ya es pequeña en comparación con Gm^2/r_3 , puesto que

$$\frac{Q}{Gm^2/r_3} = 3 \frac{RT_0 r_0}{Gm\mu} \frac{r_3}{r_0} \ln \left(\frac{r_0}{r_3} \right) \ll 1.$$

Así, con la precisión solicitada,

$$U_4 \simeq |W_4|,$$

o bien

$$\frac{mRT_4}{\mu(\gamma - 1)} \simeq \alpha \frac{Gm^2}{r_4}.$$

De forma equivalente,

$$T_4 \simeq \frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{Rr_4}.$$

Combinando esto con la ley adiabática de la temperatura,

$$T_0 \left(\frac{r_3}{r_4} \right)^{3(\gamma-1)} \simeq \frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{Rr_4},$$

se obtiene

$$\left(\frac{r_3}{r_4} \right)^{3\gamma-4} \simeq \frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{RT_0 r_3}.$$

Por tanto, conservando estos factores,

$$r_4 \simeq r_3 \left[\frac{RT_0 r_3}{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu} \right]^{1/(3\gamma-4)}$$

y

$$T_4 \simeq T_0 \left[\frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{RT_0 r_3} \right]^{3(\gamma-1)/(3\gamma-4)}.$$

Tomar $\alpha = 3/5$ proporciona una estimación aproximada concreta; omitir los factores numéricos de las expresiones de escala de **Respuestas**.

Finalmente,

$$U \propto r^{-3(\gamma-1)}, \quad |W| \propto r^{-1}.$$

Como $\gamma > 4/3$, la energía interna crece durante la contracción más rápidamente que el valor absoluto de la energía gravitatoria. Esto permite que el colapso se detenga. Además,

$$\frac{Gm\mu}{RT_0 r_3} \gg 1,$$

por lo que las estimaciones dan $r_4 \ll r_3$ y $T_4 \gg T_0$, de acuerdo con las hipótesis.

La solución se comprobó con la solución oficial.