

IPhO 2012

Theorieaufgaben und Lösungen · Tartu, Estland · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipro/2012/

Aufgabe 1: Skizzen im Mittelpunkt

Aufgabe T1. Skizzen im Mittelpunkt (13 Punkte)

Teil A. Ballistik (4.5 Punkte)

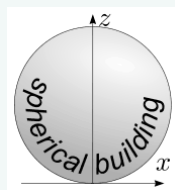
Ein Ball, der mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 geworfen wird, bewegt sich in einem homogenen Gravitationsfeld in der x - z -Ebene. Dabei verläuft die x -Achse horizontal und die z -Achse vertikal und antiparallel zur Fallbeschleunigung g . Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand.

i. (0.8 Punkte) Durch Wahl des Abwurfwinkels eines Balls, der mit einer festen Anfangsgeschwindigkeit v_0 vom Ursprung aus geworfen wird, lassen sich Ziele innerhalb des durch

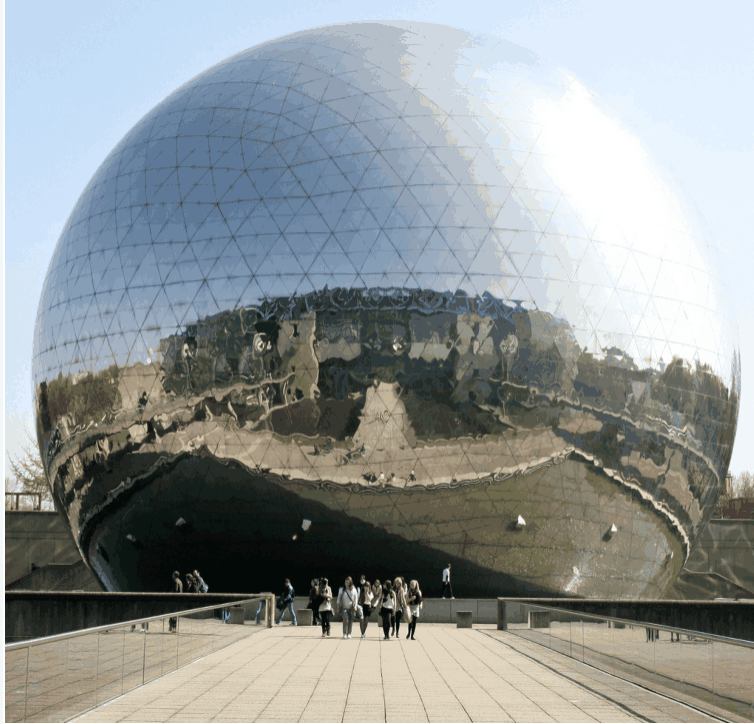
$$z \leq z_0 - kx^2$$

gegebenen Bereichs treffen. Sie dürfen diese Tatsache ohne Beweis verwenden. Bestimmen Sie die Konstanten z_0 und k .

ii. (1.2 Punkte) Der Abwurfpunkt kann nun auf Bodenhöhe $z = 0$ frei gewählt und der Abwurfwinkel nach Bedarf eingestellt werden. Ziel ist es, den höchsten Punkt eines kugelförmigen Gebäudes mit dem Radius R (siehe Abb.) mit der kleinstmöglichen Anfangsgeschwindigkeit v_0 zu treffen. Ein Abprallen vom Dach vor dem Treffen des Ziels ist nicht zulässig. Skizzieren Sie qualitativ die Form der optimalen Flugbahn des Balls (verwenden Sie das dafür vorgesehene Feld auf dem Antwortbogen). Beachten Sie, dass nur die Skizze bewertet wird.



iii. (2.5 Punkte) Welche minimale Abwurfgeschwindigkeit $v_{\min}$ ist erforderlich, um den höchsten Punkt eines kugelförmigen Gebäudes mit dem Radius R zu treffen?



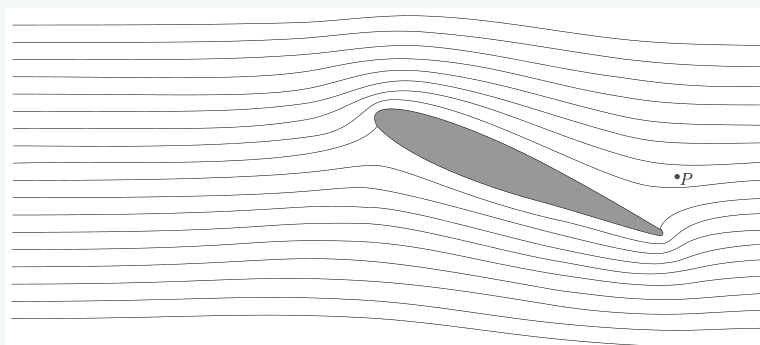
La Géode, Parc de la Villette, Paris. Foto: katchooo/flickr.com

Teil B. Luftströmung um einen Tragflügel (4 Punkte)

Für diesen Teil der Aufgabe können die folgenden Informationen hilfreich sein. Für die Strömung einer Flüssigkeit oder eines Gases in einem Rohr gilt entlang einer Stromlinie $p + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konst.}$, sofern die Geschwindigkeit v viel kleiner als die Schallgeschwindigkeit ist. Hierbei sind ρ die Dichte, h die Höhe, g die Fallbeschleunigung und p der hydrostatische Druck. Stromlinien sind als die Bahnen der Fluidteilchen definiert (unter der Annahme, dass das Strömungsbild stationär ist). Beachten Sie, dass der Term $\frac{1}{2} \rho v^2$ als dynamischer Druck bezeichnet wird.

Die folgende Abbildung zeigt einen Querschnitt durch einen Flugzeugtragflügel zusammen mit den Stromlinien der Luftströmung um den Tragflügel, betrachtet im Bezugssystem des Tragflügels. Nehmen Sie an, dass (a) die Luftströmung rein zweidimensional ist (d. h., dass die Geschwindigkeitsvektoren der Luft in der Zeichenebene liegen); (b) das Stromlinienbild unabhängig von der Flugzeuggeschwindigkeit ist; (c) kein Wind herrscht; (d) der dynamische Druck viel kleiner als der atmosphärische Druck $p_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ ist.

Sie dürfen mit einem Lineal Messungen an der Abbildung auf dem Antwortbogen vornehmen.



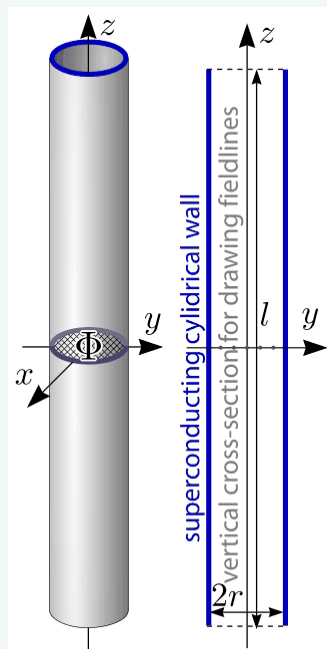
i. (0.8 Punkte) Wenn die Geschwindigkeit des Flugzeugs relativ zum Boden $v_0 = 100 \text{ m/s}$ beträgt, wie groß ist dann die Geschwindigkeit der Luft v_P am Punkt P (in der Abb. markiert) relativ zum Boden?

ii. (1.2 Punkte) Bei hoher relativer Luftfeuchtigkeit entsteht hinter dem Tragflügel ein Strom von Wassertropfchen, sobald die Geschwindigkeit des Flugzeugs relativ zum Boden einen kritischen Wert v_{crit} überschreitet. Die Tropfchen entstehen an einem bestimmten Punkt Q . Markieren Sie den Punkt Q in der Abbildung auf dem Antwortbogen. Erläutern Sie qualitativ (mit Formeln und möglichst wenig Text), wie Sie die Lage von Q bestimmt haben.

iii. (2.0 Punkte) Schätzen Sie die kritische Geschwindigkeit v_{crit} anhand folgender Daten ab: relative Luftfeuchtigkeit $r = 90\%$, spezifische Wärmekapazität der Luft bei konstantem Druck $c_p = 1.00 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, Sättigungsdampfdruck von Wasser: $p_{sa} = 2.31 \text{ kPa}$ bei der Temperatur der ungestörten Luft $T_a = 293 \text{ K}$ und $p_{sb} = 2.46 \text{ kPa}$ bei $T_b = 294 \text{ K}$. Je nach Ihren Näherungen benötigen Sie möglicherweise auch die spezifische Wärmekapazität der Luft bei konstantem Volumen $c_V = 0.717 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$. Beachten Sie, dass die relative Luftfeuchtigkeit als Verhältnis des Dampfdrucks zum Sättigungsdampfdruck bei der jeweiligen Temperatur definiert ist. Der Sättigungsdampfdruck ist der Dampfdruck, bei dem der Dampf mit der Flüssigkeit im Gleichgewicht steht.

Teil C. Magnetische Strohhalm (4.5 Punkte)

Betrachten Sie ein zylindrisches Rohr aus einem supraleitenden Material. Die Länge des Rohrs beträgt l , sein Innenradius r , wobei $l \gg r$ gilt. Der Mittelpunkt des Rohrs liegt im Ursprung, und seine Achse fällt mit der z -Achse zusammen.

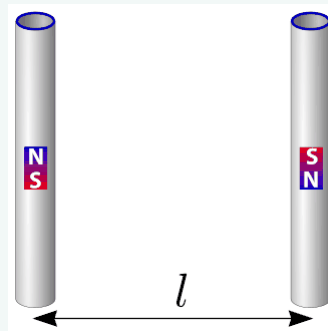


Durch den mittleren Querschnitt des Rohrs, $z = 0$, $x^2 + y^2 < r^2$, tritt ein magnetischer Fluss Φ . Ein Supraleiter ist ein Material, das jedes Magnetfeld aus seinem Inneren verdrängt (im Material ist das Feld null).

i. (0.8 Punkte) Skizzieren Sie im dafür vorgesehenen Diagramm auf dem Antwortbogen fünf magnetische Feldlinien, die durch die fünf roten Punkte im Längsschnitt durch die Rohrachse verlaufen.

ii. (1.2 Punkte) Bestimmen Sie die Zugkraft T entlang der z -Achse in der Mitte des Rohrs (d. h. die Kraft, mit der die beiden Rohrhälften $z > 0$ und $z < 0$ aufeinander wirken).

iii. (2.5 Punkte) Betrachten Sie ein weiteres Rohr, das mit dem ersten identisch und parallel zu ihm ist.



Das zweite Rohr hat dasselbe Magnetfeld, jedoch in entgegengesetzter Richtung, und sein Mittelpunkt befindet sich bei $y = l, x = z = 0$ (die Rohre bilden also gegenüberliegende Seiten eines Quadrats). Bestimmen Sie die magnetische Wechselwirkungskraft F zwischen den beiden Rohren.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- A.i. $z_0 = \frac{v_0^2}{2g}, \quad k = \frac{g}{2v_0^2}.$
- A.ii. Die optimale Parabel steigt vom Boden auf, streift die Oberseite des Gebäudes tangential, steigt noch etwas weiter an und fällt dann zum höchsten Punkt hin ab. Bei einer Annäherung von links lautet ihre Gleichung

$$z = 2R - \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{4x^2}{3R}.$$

- A.iii. $v_{\min} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}.$
- B.i. $v_P \approx 20 \text{ m/s},$ ungefähr in Bewegungsrichtung des Flugzeugs.
- B.ii. Setzen Sie Q unmittelbar oberhalb der abgerundeten Vorderkante, wo die Stromlinien auf der Oberseite am dichtesten beieinanderliegen: Dort ist die Geschwindigkeit am größten und die Temperatur am niedrigsten.
- B.iii. $v_{\text{crit}} \approx 35 \text{ m/s},$ wenn man eine maximale lokale Geschwindigkeit von etwa dem Doppelten der Flugzeuggeschwindigkeit ansetzt und die Änderung des Wasserdampfpartialdrucks berücksichtigt. Vernachlässigt man diese Druckänderung, erhält man ungefähr $32 \text{ m/s}.$
- C.i. Zeichnen Sie im Rohrinternen nahezu parallele axiale Linien. Die vier außerhalb der Achse verlaufenden Linien fächern sich jenseits der Enden auf und laufen außen zurück, ohne in die supraleitende Wand einzutreten. Die mittlere axiale Linie bleibt gerade.

- **C.ii.** $T \simeq \frac{\Phi^2}{2\mu_0\pi r^2}$, wobei sich die beiden Hälften anziehen.
- **C.iii.** Die Rohre ziehen sich mit

$$F \simeq \frac{\Phi^2}{4\pi\mu_0 l^2} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

an. Die magnetischen Ergebnisse gelten in der Näherung eines langen, dünnen Rohrs.

Lösung

A.i.

Für den Abwurfwinkel θ erhält man durch Eliminieren der Zeit aus der Wurfbewegung

$$z = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}.$$

Mit $u = \tan \theta$ folgt

$$z = xu - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + u^2).$$

Bei festem $x \neq 0$ wird diese quadratische Funktion maximal für

$$u = \frac{v_0^2}{gx}.$$

Einsetzen ergibt die Einhüllende

$$z_{\text{env}} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Bei $x = 0$ entspricht ihre Höhe zugleich der maximalen Höhe eines senkrechten Wurfs. Daher gilt

$$z_0 = \frac{v_0^2}{2g}, \quad k = \frac{g}{2v_0^2}.$$

A.ii.

Wir legen den Mittelpunkt des Gebäudes nach $(0, R)$, sodass sein höchster Punkt bei $(0, 2R)$ liegt. Wir wählen einen Abwurfpunkt links davon; Spiegelung an der z -Achse liefert eine ebenso geeignete Flugbahn.

Die gesuchte Skizze ist eine nach unten geöffnete Parabel mit folgenden Eigenschaften:

1. Sie beginnt am Boden links vom Gebäude und steigt steil an.
2. Sie streift die Oberfläche oben links tangential, ohne dass sich die Geschwindigkeit durch einen Stoß ändert.
3. Sie steigt weiter bis zu einem Scheitelpunkt, der etwas oberhalb und links vom höchsten Punkt des Gebäudes liegt.
4. Anschließend fällt sie zum höchsten Punkt hin ab.

Die unten hergeleiteten exakten charakteristischen Punkte sind:

Charakteristischer Punkt	x/R	z/R
Abwurfpunkt	$-\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{11}}{8} \approx -1.460$	0
Tangentialer Berührungspunkt	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.866$	$\frac{3}{2}$
Scheitelpunkt	$-\frac{\sqrt{3}}{8} \approx -0.217$	$\frac{33}{16} = 2.0625$
Ziel	0	2

A.iii.

Sei v_t die Geschwindigkeit, mit der der Ball das Ziel erreicht. Aus der Erhaltung der mechanischen Energie folgt

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_t^2 + mg(2R),$$

also

$$v_0^2 = v_t^2 + 4gR.$$

Die Minimierung der Abwurfgeschwindigkeit ist somit gleichbedeutend mit der Minimierung von v_t .

Wir kehren die Bewegung um. Nun werfen wir einen Körper von $(0, 2R)$ aus mit der Geschwindigkeit v_t ab. Nach A.i liegt jede solche Flugbahn unterhalb der Einhüllenden

$$z_{\text{env}}(x) = 2R + \frac{v_t^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_t^2}.$$

Eine Flugbahn, die sich dem Ziel von links nähert, muss die folgende obere Oberfläche überwinden:

$$z_s(x) = R + \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq 0.$$

Folglich darf auch die Einhüllende diese Oberfläche nicht unterschreiten.

Wir definieren

$$\lambda = \frac{v_t^2}{gR}, \quad c = \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}, \quad 0 \leq c \leq 1.$$

Die Differenz zwischen Einhüllender und Dach ist

$$\begin{aligned} \frac{z_{\text{env}} - z_s}{R} &= 1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{1 - c^2}{2\lambda} - c \\ &= \frac{(c - \lambda)^2 + 2\lambda - 1}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Für $0 < \lambda < 1/2$ wird dieser Ausdruck bei der Wahl $c = \lambda$ negativ. Dann kann keine Flugbahn das Gebäude überwinden. Daher gilt

$$v_t^2 \geq \frac{gR}{2}.$$

Im Gleichheitsfall berührt die Einhüllende das Dach bei $c = 1/2$, also bei

$$(x, z) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}R, \frac{3}{2}R \right).$$

Wir müssen außerdem zeigen, dass eine tatsächliche Flugbahn diese Schranke erreicht. Wird der Körper bei umgekehrter Bewegung unter einem Winkel von 30° über der Horizontalen nach links abgeworfen, so ergibt sich in den ursprünglichen Koordinaten

$$z(x) = 2R - \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{4x^2}{3R}.$$

Diese Parabel verläuft durch das Ziel und berührt die Kugel im oben genannten Punkt tangential. Um zu überprüfen, dass sie nirgends in das Gebäude eindringt, setzen wir $t = -x/R \geq 0$. Direktes Einsetzen ergibt

$$\frac{x^2 + (z - R)^2 - R^2}{R^2} = \frac{16}{9} t \left(t + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \geq 0.$$

Somit liegt die gesamte relevante Flugbahn außerhalb der Kugel und berührt sie vor dem Erreichen des Ziels tangential. Ein Abprallen ist nicht erforderlich.

Schließlich gilt

$$v_{\min}^2 = \frac{gR}{2} + 4gR = \frac{9}{2}gR,$$

und damit

$$v_{\min} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}.$$

Der Schnittpunkt dieser Parabel mit dem Boden und ihr Scheitelpunkt ergeben die in A.ii aufgeführten charakteristischen Punkte.

B.i.

Mit u bezeichnen wir die Luftgeschwindigkeit im Bezugssystem des Tragflügels. Da die Druckänderungen gegenüber dem atmosphärischen Druck klein sind, behandeln wir die Dichte zunächst als konstant.

Für eine schmale Stromröhre mit Einheitsbreite in Spannweitenrichtung ergibt die Kontinuitätsgleichung

$$u d = v_0 d_\infty,$$

wobei d der senkrecht zur Strömung gemessene Abstand benachbarter Stromlinien und d_∞ ihr ungestörter Abstand stromaufwärts ist. Somit gilt

$$u = v_0 \frac{d_\infty}{d}.$$

Aus der vorgegebenen Abbildung ergibt sich, dass der Abstand nahe P etwa das 1.25-Fache des Abstands stromaufwärts beträgt:

$$u_P \approx 0.80v_0 \approx 80 \text{ m/s}.$$

Wir nehmen an, dass die ungestörte Strömung im Bezugssystem des Tragflügels nach rechts gerichtet ist. Das Flugzeug bewegt sich dann relativ zum Boden nach links, sodass die Geschwindigkeitstransformation lautet:

$$\mathbf{v}_{P,\text{ground}} = \mathbf{u}_P - v_0 \hat{\mathbf{x}}.$$

Die Stromlinien bei P verlaufen nahezu horizontal. Daher gilt

$$v_P \approx |80 - 100| = 20 \text{ m/s},$$

ungefähr nach links, in Bewegungsrichtung des Flugzeugs.

Berücksichtigt man die geringe lokale Neigung, lautet der entsprechende Ausdruck

$$v_P = \sqrt{u_P^2 + v_0^2 - 2u_P v_0 \cos \theta_P}.$$

B.ii.

Wir vernachlässigen Unterschiede des Gravitationspotentials über den Tragflügel hinweg.

Kontinuitätsgleichung und Bernoulli-Gleichung liefern

$$u \propto \frac{1}{d}, \quad p = p_0 + \frac{1}{2} \rho (v_0^2 - u^2).$$

Für eine näherungsweise adiabatische Strömung ergibt die Erhaltung der Totalenthalpie

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_a + \frac{v_0^2}{2}.$$

Damit gilt

$$d \text{ am kleinsten} \implies u \text{ am größten} \implies p, T \text{ am kleinsten}.$$

Der Sättigungsdampfdruck nimmt mit sinkender Temperatur rasch ab, sodass die relative Luftfeuchtigkeit dort zuerst den Wert eins erreicht.

Setzen Sie Q unmittelbar oberhalb der abgerundeten Vorderkante in den Bereich des geringsten Stromlinienabstands auf der Oberseite des Tragflügels. Die entstehenden Tröpfchen werden anschließend stromabwärts mitgeführt.

B.iii.

Wir modellieren die Luft als ideales Gas, das vor Beginn der Kondensation eine näherungsweise adiabatische, reversible Expansion durchläuft. Seine spezifische Gaskonstante beträgt

$$R_{\text{air}} = c_p - c_V = 283 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Die Abkühlung bei Q sei $\Delta T = T_a - T_Q > 0$. Aus den angegebenen Sättigungsdampfdruckdaten ergibt sich die lokale Steigung

$$s = \frac{p_{sb} - p_{sa}}{T_b - T_a} = \frac{2460 - 2310}{294 - 293} = 150 \text{ Pa/K}.$$

Mit einer linearen Extrapolation gilt

$$p_s(T_Q) \approx p_{sa} - s \Delta T.$$

Vor der Kondensation bleibt der Stoffmengenanteil des Wasserdampfs unverändert, sodass sein Partialdruck proportional zum Gesamtdruck ist:

$$p_{v,Q} = r p_{sa} \frac{p_Q}{p_0}.$$

Die Adiabatangleichung für ein ideales Gas liefert

$$\frac{p_Q}{p_0} = \left(\frac{T_Q}{T_a} \right)^{c_p/R_{\text{air}}} \approx 1 - \frac{c_p}{R_{\text{air}} T_a} \Delta T.$$

Zu Beginn der Kondensation gilt $p_{v,Q} = p_s(T_Q)$. Daher ist

$$rp_{sa} \left(1 - \frac{c_p \Delta T}{R_{\text{air}} T_a} \right) = p_{sa} - s \Delta T,$$

woraus folgt:

$$\Delta T = \frac{(1-r)p_{sa}}{s - rp_{sa}c_p/(R_{\text{air}}T_a)}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\Delta T = \frac{0.10(2310)}{150 - \frac{0.90(2310)(1000)}{283(293)}} \approx 1.85 \text{ K}.$$

Die Kondensation beginnt somit bei ungefähr 291.2 K.

Es sei

$$\alpha = \frac{u_Q}{v_0} \approx \frac{d_\infty}{d_Q}.$$

Der geringste Abstand in der Zeichnung beträgt etwa die Hälfte des ungestörten Abstands, sodass $\alpha \approx 2$ gilt. Aus der Energiegleichung folgt dann

$$c_p \Delta T = \frac{1}{2}(u_Q^2 - v_{\text{crit}}^2) = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1)v_{\text{crit}}^2.$$

Folglich gilt

$$v_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2c_p \Delta T}{\alpha^2 - 1}} \approx \sqrt{\frac{2(1000)(1.85)}{4 - 1}} \approx 35 \text{ m/s}.$$

Die zugehörige Druckabnahme beträgt etwa 2.2%, was mit der Annahme kleiner Dichteänderungen bei der grafischen Abschätzung der Geschwindigkeit vereinbar ist.

Eine einfachere Näherung hält den Wasserdampfpartialdruck konstant. Sie ergibt

$$\Delta T \approx \frac{(1-r)p_{sa}}{s} = 1.54 \text{ K}, \quad v_{\text{crit}} \approx 32 \text{ m/s}.$$

Beide Abschätzungen ergeben einen Schwellenwert von einigen zehn Metern pro Sekunde; die um die Druckänderung korrigierte Abschätzung beträgt etwa 35 m/s.

C.i.

Wir wählen die Flussrichtung im Rohrrinneren als $+z$; durch Umkehren aller Pfeile erhält man die entgegengesetzte Konvention.

Weit von den Enden entfernt ist das Feld im Rohrrinneren nahezu homogen und axial. Zeichnen Sie fünf nahezu gerade, parallele Linien durch die markierten Punkte.

An den Öffnungen:

- Die beiden außerhalb der Achse verlaufenden Linien auf jeder Seite fächern sich jenseits des oberen Endes nach außen auf, krümmen sich außen nach unten und kehren durch die untere Öffnung zurück.
- Das Muster ist symmetrisch bezüglich der Achse und der Mittelebene.
- Linien, die näher an der Achse verlaufen, bilden größere äußere Schleifen.

- Keine Linie durchquert die supraleitende Wand; das Feld verläuft tangential zu ihren Oberflächen.

Für den Punkt auf der Achse verlangt die Axialsymmetrie eine gerade Linie entlang der z -Achse. Sie erstreckt sich in beide Richtungen bis ins Unendliche und hat keinen endlichen Endpunkt. Die Pfeile auf den anderen Linien zeigen im Rohrinernen nach oben und auf den äußeren Rückwegen nach unten.

C.ii.

Wir schreiben die innere Querschnittsfläche als

$$A = \pi r^2.$$

Da $l \gg r$ gilt, ist das Feld in der Mitte näherungsweise homogen:

$$B = \frac{\Phi}{A}.$$

Die Maxwell-Spannung entlang eines Magnetfelds ist eine Zugspannung mit dem Betrag

$$\sigma_{\parallel} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Die Integration dieser Spannung über den inneren Querschnitt in der Rohrmittle ergibt die Anziehungskraft zwischen den Hälften:

$$T \simeq \frac{B^2 A}{2\mu_0} = \boxed{\frac{\Phi^2}{2\mu_0 \pi r^2}}.$$

Das schwache äußere Rückfeld verursacht im Grenzfall eines langen Rohrs eine kleine Korrektur.

Das Ergebnis folgt auch aus der magnetischen Energie. Bei festem eingeschlossenem Fluss und festem Querschnitt gilt

$$U \simeq \frac{B^2}{2\mu_0} Al = \frac{\Phi^2 l}{2\mu_0 A}.$$

Eine Vergrößerung der Rohrlänge erfordert die Arbeit $T dl = dU$, woraus dieselbe Zugkraft folgt.

C.iii.

In Abständen, die groß gegenüber dem Rohrradius sind, verhält sich der aus einem Ende austretende Fluss wie das Feld eines effektiven magnetischen Pols. Seine Polstärke beträgt

$$q_m = \frac{\Phi}{\mu_0},$$

denn sein radiales Feld ist

$$B(s) = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi s^2} = \frac{\Phi}{4\pi s^2}.$$

Dies sind Ersatzquellen für das äußere Feld; tatsächliche magnetische Monopole sind nicht erforderlich. Die beiden Enden haben entgegengesetzte Vorzeichen.

Die Kraft zwischen zwei solchen effektiven Polen im Abstand s hat den Betrag

$$\frac{\mu_0 q_m^2}{4\pi s^2} = \frac{\Phi^2}{4\pi \mu_0 s^2}.$$

Wir setzen

$$K = \frac{\Phi^2}{4\pi\mu_0}.$$

Bei den antiparallelen Rohren müssen alle vier Wechselwirkungen zwischen den Enden berücksichtigt werden:

Endpaare	Abstand	Wechselwirkung	Gesamte Komponente zum anderen Rohr hin
Oben–oben und unten–unten	l	Anziehung	$\frac{2K}{l^2}$
Oben–unten und unten–oben	$\sqrt{2}l$	Abstoßung	$-\frac{K}{\sqrt{2}l^2}$

Für jedes diagonale Paar beträgt die Kraft $K/(2l^2)$, und ihre Querkomponente ergibt sich durch Multiplikation dieses Betrags mit $\cos 45^\circ$. Ihre vertikalen Komponenten heben sich auf.

Daher gilt

$$F \simeq \frac{\Phi^2}{4\pi\mu_0 l^2} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

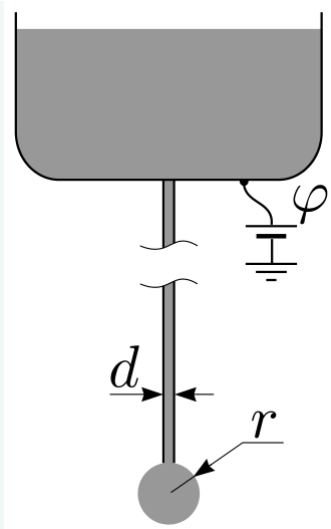
Die Kraft ist anziehend: Auf das erste Rohr wirkt sie in $+y$ -Richtung, auf das zweite in $-y$ -Richtung.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Kelvin-Wassertropfengenerator

Aufgabe T2. Kelvin-Wassertropfengenerator (8 Punkte)

Die folgenden Tatsachen zur Oberflächenspannung können für diese Aufgabe hilfreich sein. Für die Moleküle einer Flüssigkeit sind die Positionen an der Grenzfläche zwischen Flüssigkeit und Luft energetisch ungünstiger als die Positionen im Inneren der Flüssigkeit. Diese Grenzfläche wird durch die sogenannte Oberflächenenergie beschrieben, $U = \sigma S$, wobei S der Flächeninhalt der Grenzfläche und σ der Oberflächenspannungskoeffizient der Flüssigkeit ist. Außerdem ziehen sich zwei Teilflächen der Flüssigkeitsoberfläche mit einer Kraft $F = \sigma l$ gegenseitig an, wobei l die Länge einer geraden Trennlinie zwischen den Teilflächen ist.



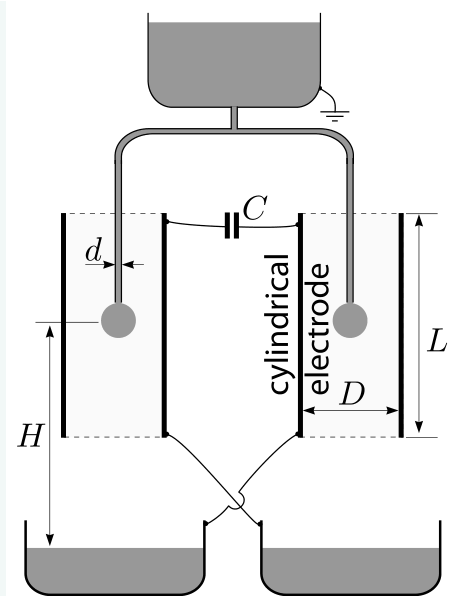
Ein langes Metallrohr mit dem Innendurchmesser d ist senkrecht nach unten gerichtet. Aus einer Düse an seinem unteren Ende tropft langsam Wasser, siehe Abbildung. Wasser kann als elektrisch leitend betrachtet werden; seine Oberflächenspannung ist σ und seine Dichte ρ . Unterhalb der Düse hängt ein Tropfen mit dem Radius r . Der Radius wächst langsam mit der Zeit, bis sich der Tropfen aufgrund der Fallbeschleunigung g von der Düse löst. Nehmen Sie stets an, dass $d \ll r$.

Teil A. Einzelnes Rohr (4 Punkte)

- i. (1.2 Punkte) Bestimmen Sie den Radius $r_{\max}$ eines Tropfens unmittelbar bevor er sich von der Düse löst.
- ii. (1.2 Punkte) Gegenüber der weit entfernten Umgebung hat das Rohr das elektrostatische Potential φ . Bestimmen Sie die Ladung Q eines Tropfens, wenn sein Radius r beträgt.
- iii. (1.6 Punkte) Betrachten Sie die Situation, in der r konstant gehalten und φ langsam erhöht wird. Der Tropfen wird instabil und zerfällt, wenn der hydrostatische Druck im Tropfen kleiner als der Atmosphärendruck wird. Bestimmen Sie das kritische Potential $\varphi_{\max}$, bei dem dies geschieht.

Teil B. Zwei Rohre (4 Punkte)

Eine als „Kelvin-Wassertropfengenerator“ bezeichnete Vorrichtung besteht aus zwei Rohren, die jeweils mit dem in Teil A beschriebenen Rohr identisch und über ein T-Stück miteinander verbunden sind, siehe Abbildung. Die Enden beider Rohre befinden sich in den Mittelpunkten zweier zylindrischer Elektroden (mit der Höhe L und dem Durchmesser D , wobei $L \gg D \gg r$). Bei beiden Rohren beträgt die Tropfrate n Tropfen pro Zeiteinheit. Die Tropfen fallen aus der Höhe H in leitende Schalen unterhalb der Düsen, die wie in der Zeichnung dargestellt über Kreuz mit den Elektroden verbunden sind. Die Elektroden sind über einen Kondensator mit der Kapazität C verbunden. Die Gesamtladung des Systems aus Schalen und Elektroden ist null. Beachten Sie, dass der obere Wasserbehälter wie dargestellt geerdet ist. Der erste fallende Tropfen trägt eine mikroskopisch kleine Ladung, die ein Ungleichgewicht zwischen den beiden Seiten und eine geringe Ladungstrennung am Kondensator verursacht.



- i. (1.2 Punkte)** Geben Sie den Betrag der Ladung Q_0 der Tropfen beim Ablösen von den Röhren zu dem Zeitpunkt an, an dem die Ladung des Kondensators q beträgt. Drücken Sie Q_0 durch $r_{\max}$ (aus Teil A-i) aus und vernachlässigen Sie den in Teil A-iii beschriebenen Effekt.
- ii. (1.5 Punkte)** Bestimmen Sie die Abhängigkeit von q von der Zeit t , indem Sie sie durch eine stetige Funktion $q(t)$ annähern und $q(0) = q_0$ annehmen.
- iii. (1.3 Punkte)** Die Funktion des Wassertropfengenerators kann durch den in Teil A-iii beschriebenen Effekt beeinträchtigt werden. Darüber hinaus setzt die elektrostatische Abstoßung zwischen einem Tropfen und der darunterliegenden Schale der erreichbaren Potentialdifferenz zwischen den Elektroden eine Grenze $U_{\max}$. Bestimmen Sie $U_{\max}$.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Hier ist ϵ_0 die elektrische Feldkonstante, und q bezeichnet den Betrag der Ladung auf jeder der beiden Kondensatorplatten.

- A-i:

$$r_{\max} = \left(\frac{3\sigma d}{4\rho g} \right)^{1/3}.$$

- A-ii:

$$Q = 4\pi\epsilon_0 r \varphi.$$

- A-iii:

$$\varphi_{\max} = 2\sqrt{\frac{\sigma r}{\epsilon_0}}.$$

Derselbe Schwellenwert gilt für den Betrag eines negativen Potentials.

- **B-i:**

$$Q_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 r_{\max}}{C} q.$$

- **B-ii:** In der kontinuierlichen Näherung bei vernachlässigbarer Verzögerung durch die Flugzeit gilt

$$q(t) = q_0 \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 n r_{\max}}{C} t\right).$$

- **B-iii:** Die durch die elektrostatische Abstoßung gesetzte Grenze ist

$$U_{\max} = r_{\max} \sqrt{\frac{2\rho g H}{3\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\sigma d H}{2\epsilon_0 r_{\max}}}.$$

Es sind keine Zahlenwerte für die Parameter angegeben.

Lösung

Teil A-i

Der langsam wachsende Tropfen befindet sich im mechanischen Gleichgewicht, bis seine Gewichtskraft die maximale Haltekraft der Oberflächenspannung übersteigt.

Der Umfang der Düse beträgt πd . Wenn die Oberflächenspannung entlang des gesamten Tropfenhalses senkrecht wirkt, beträgt ihre maximale nach oben gerichtete Kraft

$$F_\sigma = \pi d \sigma.$$

Das Volumen des Tropfenhalses und die Korrektur durch die Druckkraft an der kleinen Düsenöffnung sind für $d \ll r$ vernachlässigbar. Nähert man den Tropfen als Kugel an, so beträgt seine Gewichtskraft

$$mg = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g.$$

Beim Ablösen gilt

$$\frac{4}{3} \pi r_{\max}^3 \rho g = \pi d \sigma,$$

also

$$r_{\max} = \left(\frac{3\sigma d}{4\rho g}\right)^{1/3}.$$

Die Kugelnäherung ist mit diesem Ergebnis vereinbar: Das Verhältnis der durch die Schwerkraft verursachten Spannungen zu den Kapillarspannungen beträgt

$$\frac{\rho g r_{\max}^2}{\sigma} = \frac{3d}{4r_{\max}} \ll 1.$$

Teil A-ii

Der leitende Tropfen und das Rohr haben dasselbe Potential. Vernachlässigt man die Störung des elektrischen Feldes des Tropfens durch das dünne Rohr, so verhält sich der Tropfen wie eine leitende Kugel.

Außerhalb einer Kugel mit der Ladung Q liefert das gaußsche Gesetz

$$E(s) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 s^2}.$$

Setzt man das Potential der weit entfernten Umgebung gleich null, so gilt

$$\varphi = \int_r^\infty E(s) ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Daher ist

$$\boxed{Q = 4\pi\epsilon_0 r \varphi}.$$

Das Vorzeichen der Tropfenladung stimmt mit dem Vorzeichen von φ überein.

Teil A-iii

Die Oberflächenspannung erzeugt einen nach innen gerichteten Kapillardruck. Aus der gegebenen Oberflächenenergie

$$W_\sigma = 4\pi r^2 \sigma,$$

ergibt sich der zur Vergrößerung der Oberfläche erforderliche Druck zu

$$p_\sigma = \frac{dW_\sigma}{dV} = \frac{8\pi r \sigma}{4\pi r^2} = \frac{2\sigma}{r}.$$

Das elektrische Feld erzeugt einen nach außen gerichteten Druck. Bei einem Leiter beträgt die Oberflächenladungsdichte $\epsilon_0 E$, und das von den übrigen Ladungen erzeugte Feld, das auf diese Ladung wirkt, beträgt $E/2$. Somit gilt

$$p_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

Mit Teil A-ii folgt

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\varphi}{r}.$$

Aus dem mechanischen Gleichgewicht ergibt sich folglich

$$p_{\text{in}} - p_{\text{atm}} = p_\sigma - p_e = \frac{2\sigma}{r} - \frac{\epsilon_0 \varphi^2}{2r^2}.$$

Gemäß dem vorgegebenen Instabilitätskriterium ist der Schwellenwert erreicht, wenn der Innendruck gleich dem Atmosphärendruck ist:

$$\frac{2\sigma}{r} = \frac{\epsilon_0 \varphi_{\text{max}}^2}{2r^2}.$$

Daher gilt

$$\boxed{\varphi_{\text{max}} = 2\sqrt{\frac{\sigma r}{\epsilon_0}}}.$$

Gleichwertig dazu beträgt der entsprechende Ladungsbetrag

$$Q_{\text{crit}} = 4\pi\epsilon_0 r \varphi_{\text{max}} = 8\pi\sqrt{\epsilon_0 \sigma r^3}.$$

Teil B-i

Wir setzen

$$R = r_{\max}, \quad U = \frac{q}{C}.$$

Wir vernachlässigen Streukapazitäten gegenüber C . Aufgrund der Symmetrie und der verschwindenden Gesamtladung betragen die beiden Elektrodenpotentiale gegenüber Erde

$$V_L = +\frac{U}{2}, \quad V_R = -\frac{U}{2}.$$

Da $L \gg D$, ist das Potential nahe dem Mittelpunkt jedes Zylinders ohne Berücksichtigung des kleinen Tropfens näherungsweise gleich dem Potential des Zylinders. Da $D \gg R$, entspricht der Eigenbeitrag des Tropfens zu seinem Oberflächenpotential näherungsweise dem einer isolierten Kugel.

Das Wasser und die Rohre sind geerdet. Solange der linke Tropfen noch am Rohr hängt, gilt daher

$$0 = V_L + \frac{Q_L}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Daraus folgt

$$Q_L = -2\pi\epsilon_0 R U.$$

Entsprechend gilt

$$Q_R = +2\pi\epsilon_0 R U.$$

Die Ladung bleibt beim Ablösen erhalten. Ihr Betrag ist daher

$$Q_0 = 2\pi\epsilon_0 R U = \frac{2\pi\epsilon_0 r_{\max}}{C} q.$$

Aufgrund der Verbindungen über Kreuz fällt jeder Tropfen in eine Schale, die bereits eine Ladung mit demselben Vorzeichen wie der Tropfen trägt. Sein Auftreffen verstärkt daher die Ladungstrennung.

Teil B-ii

Wir verwenden die kontinuierliche Näherung und vernachlässigen die Verzögerung zwischen dem Ablösen und dem Auffangen. Dies setzt voraus, dass sich die Spannung während des Fluges eines Tropfens nur wenig ändert.

Jedes Rohr erzeugt n Tropfen pro Zeiteinheit. Der positiven Kondensatorplatte wird positive Ladung mit der Rate nQ_0 zugeführt, während der negativen Platte negative Ladung mit derselben Rate zugeführt wird. Daher gilt für den Betrag q auf jeder Platte

$$\frac{dq}{dt} = nQ_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 n R}{C} q.$$

Es gibt keinen zusätzlichen Faktor zwei: Ein Tropfenpaar erhöht die Plattenladungen von $+q, -q$ auf $+(q + Q_0), -(q + Q_0)$.

Durch Integration unter Berücksichtigung von $q(0) = q_0$ erhält man

$$\ln \frac{q(t)}{q_0} = \frac{2\pi\epsilon_0 n R}{C} t,$$

also

$$q(t) = q_0 \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 n r_{\max}}{C} t\right).$$

Die charakteristische Wachstumszeit ist

$$\tau = \frac{C}{2\pi\epsilon_0 n r_{\max}}.$$

Die Näherung einer vernachlässigbaren Verzögerung setzt voraus, dass die Flugzeit klein gegenüber τ ist. Das exponentielle Wachstum gilt, solange der Zerfall der Tropfen oder die elektrostatische Abstoßung das Auffangen nicht wesentlich beeinträchtigt.

Teil B-iii

Wir betrachten den Tropfen, der innerhalb der positiven Elektrode entsteht. Er trägt die Ladung $-Q_0$, und seine Auffangschale ist mit der negativen Elektrode verbunden.

Wir behandeln U während des Falls als näherungsweise konstant. Das von der Vorrichtung erzeugte Potential ändert sich von $+U/2$ nahe der Düse auf $-U/2$ an der Schale. Daher beträgt die Zunahme der elektrostatischen potentiellen Energie des Tropfens im äußeren Feld

$$\Delta W_e = (-Q_0) \left(-\frac{U}{2} - \frac{U}{2} \right) = Q_0 U.$$

Das hier verwendete Potential ist das von der Vorrichtung erzeugte Potential. Das Gesamtpotential des Tropfens, das null ist, solange er noch am Rohr hängt, umfasst auch sein eigenes Feld. Während des Fluges bleiben seine Ladung und sein Radius näherungsweise konstant, sodass seine Selbstenergie keinen Beitrag zur Translationsarbeit leistet.

Vernachlässigt man den Luftwiderstand und die anfängliche kinetische Energie, so beträgt die verfügbare potentielle Energie im Schwerfeld

$$mgH = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g H.$$

Damit das Auffangen weiterhin möglich ist, muss diese Energie ausreichen, um die Zunahme der elektrostatischen Energie zu überwinden:

$$mgH \geq Q_0 U.$$

An der energetischen Grenze gilt mit $Q_0 = 2\pi\epsilon_0 R U$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g H = 2\pi\epsilon_0 R U^2_{\max}.$$

Somit ist

$$U_{\max} = r_{\max} \sqrt{\frac{2\rho g H}{3\epsilon_0}}.$$

Mit der Ablösebedingung $mg = \pi d \sigma$ lässt sich dies auch schreiben als

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma d H}{2\epsilon_0 r_{\max}}}.$$

Der gesonderte Schwellenwert für den Tropfenzerfall aus Teil A-iii entspricht für einen Tropfen mit dem Radius $r_{\max}$

$$U_{\text{break}} = 2\varphi_{\text{max}}(r_{\text{max}}) = 4\sqrt{\frac{\sigma r_{\text{max}}}{\varepsilon_0}}.$$

Dies stellt eine zusätzliche Einschränkung für den Betrieb mit unzerfallenen Tropfen dar.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Entstehung eines Protosterns

Aufgabe T3. Entstehung eines Protosterns (9 Punkte)

Wir modellieren die Entstehung eines Sterns wie folgt. Eine kugelförmige Wolke aus dünnem interstellarem Gas, die sich zunächst in Ruhe befindet, beginnt unter ihrer eigenen Gravitation zu kollabieren. Der Anfangsradius der Kugel ist r_0 , ihre Masse ist m . Die Temperatur der Umgebung (die eine wesentlich geringere Dichte als das Gas hat) und die Anfangstemperatur des Gases betragen überall T_0 . Das Gas kann als ideal angenommen werden. Die mittlere molare Masse des Gases ist μ , und sein Adiabatenexponent ist $\gamma > \frac{4}{3}$. Es gelte $G \frac{m\mu}{r_0} \gg RT_0$, wobei R die Gaskonstante und G die Gravitationskonstante ist.

- i. **(0.8 Punkte)** Während eines Großteils des Kollapses ist das Gas so transparent, dass jegliche erzeugte Wärme sofort abgestrahlt wird, d. h., die Kugel bleibt im thermodynamischen Gleichgewicht mit ihrer Umgebung. Um welchen Faktor n steigt der Druck, wenn der Radius auf $r_1 = 0.5r_0$ halbiert wird? Nehmen Sie an, dass die Gasdichte räumlich gleichmäßig bleibt.
- ii. **(1 Punkt)** Schätzen Sie die Zeit t_2 ab, die benötigt wird, damit der Radius von r_0 auf $r_2 = 0.95r_0$ schrumpft. Vernachlässigen Sie die Änderung des Gravitationsfeldes am Ort eines fallenden Gasteilchens.
- iii. **(2.5 Punkte)** Bestimmen Sie unter der Annahme, dass der Druck vernachlässigbar bleibt, mithilfe der Keplerschen Gesetze die Zeit $t_{r \rightarrow 0}$, die die Kugel benötigt, um von r_0 auf einen wesentlich kleineren Radius zu kollabieren.
- iv. **(1.7 Punkte)** Bei einem Radius $r_3 \ll r_0$ wird das Gas so dicht, dass es für Wärmestrahlung undurchlässig wird. Berechnen Sie die Wärmemenge Q , die während des Kollapses vom Radius r_0 auf r_3 abgestrahlt wird.
- v. **(1 Punkt)** Für Radien kleiner als r_3 dürfen Sie den Wärmeverlust durch Strahlung vernachlässigen. Bestimmen Sie, wie die Temperatur T der Kugel für $r < r_3$ von ihrem Radius abhängt.
- vi. **(2 Punkte)** Schließlich können wir den Einfluss des Drucks auf die Dynamik des Gases nicht mehr vernachlässigen, und der Kollaps kommt bei $r = r_4$ (mit $r_4 \ll r_3$) zum Stillstand. Die Strahlungsverluste können jedoch weiterhin vernachlässigt werden, und die Temperatur ist noch nicht hoch genug, um die Kernfusion zu zünden. Der Druck eines solchen Protosterns ist nicht mehr räumlich gleichmäßig, doch grobe Abschätzungen mit ungenauen numerischen Vorfaktoren sind weiterhin möglich. Schätzen Sie den Endradius r_4 und die zugehörige Temperatur T_4 ab.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- i.

$$n = 8.$$

- ii.

$$t_2 \simeq \sqrt{\frac{0.10 r_0^3}{Gm}} \simeq 0.32 \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}.$$

- iii.

$$t_{r \rightarrow 0} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}} \simeq 1.11 \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}.$$

- iv.

$$Q = \frac{3mRT_0}{\mu} \ln\left(\frac{r_0}{r_3}\right).$$

- v.

$$T(r) = T_0 \left(\frac{r_3}{r}\right)^{3(\gamma-1)}.$$

- vi. Unter Weglassung numerischer Faktoren in der Energiebilanz ergeben sich die Abschätzungen

$$r_4 \sim r_3 \left(\frac{RT_0 r_3}{Gm\mu}\right)^{1/(3\gamma-4)}$$

und

$$T_4 \sim T_0 \left(\frac{Gm\mu}{RT_0 r_3}\right)^{3(\gamma-1)/(3\gamma-4)}.$$

Ein Ausdruck, der den Wärmekapazitätsfaktor und einen näherungsweisen Strukturfaktor für die Gravitationsenergie beibehält, wird im Folgenden hergeleitet.

Lösung

Die Stoffmenge des Gases sei $N = m/\mu$ Mol. Sein Volumen und sein Druck gemäß der idealen Gasgleichung sind

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}, \quad pV = NRT.$$

Die gegebene Ungleichung bedeutet, dass die anfängliche Gravitationsenergieskala die thermische Energieskala bei Weitem übersteigt. Dies rechtfertigt die Vernachlässigung des Drucks während der frühen Phase des Kollapses.

i. Druckanstieg bei isothermer Kontraktion

Das thermodynamische Gleichgewicht mit der Umgebung hält die Temperatur auf T_0 . Somit gilt

$$p = \frac{NRT_0}{V} \propto r^{-3}.$$

Folglich ist

$$n = \frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^3 = \left(\frac{1}{0.5}\right)^3 = \boxed{8}.$$

ii. Zeit für die erste Abnahme des Radius um fünf Prozent

Nach dem Newtonschen Schalentheorem erfährt ein Teilchen an der Oberfläche anfänglich die nach innen gerichtete Gravitationsbeschleunigung

$$g_0 = \frac{Gm}{r_0^2}.$$

Wenn diese Beschleunigung wie vorgegeben konstant gehalten wird und berücksichtigt wird, dass sich das Teilchen anfangs in Ruhe befindet, gilt

$$r_0 - r_2 = \frac{1}{2}g_0t_2^2.$$

Da $r_0 - r_2 = 0.05r_0$, folgt

$$t_2 \simeq \sqrt{\frac{2(0.05r_0)}{Gm/r_0^2}} = \sqrt{\frac{0.10r_0^3}{Gm}}.$$

iii. Kollapszeit aus den Keplerschen Gesetzen

Ein Teilchen an der Oberfläche bewegt sich im Gravitationsfeld der eingeschlossenen Masse m :

$$\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2}.$$

Wir betrachten seinen radialen Fall als Grenzfall einer stark exzentrischen gebundenen Keplerbahn. Das Apozentrum liegt bei r_0 , während das Perizentrum gegen null strebt, sodass die große Halbachse gegen

$$a = \frac{r_0}{2}$$

strebt. Das dritte Keplersche Gesetz liefert die Umlaufzeit

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{Gm}}.$$

Die Bewegung vom Apozentrum zum Perizentrum dauert eine halbe Umlaufzeit. Daher gilt

$$t_{r \rightarrow 0} = \frac{P}{2} = \pi\sqrt{\frac{(r_0/2)^3}{Gm}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}.$$

Für eine anfangs homogene Wolke ist dies auch die Kollapszeit jeder inneren Schale. Tatsächlich schließt eine Schale, die sich anfangs beim Radius s_0 befindet, die Masse

$$M(s_0) = m \left(\frac{s_0}{r_0} \right)^3,$$

ein, sodass ihre Kollapszeit

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{s_0^3}{GM(s_0)}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}},$$

unabhängig von s_0 ist. Dies stützt die Näherung eines homogenen, homologen Kollapses.

iv. Während der transparenten Phase abgestrahlte Wärme

Die innere Energie eines idealen Gases hängt nur von der Temperatur ab. Da $T = T_0$ gilt, bleibt seine innere Energie konstant.

Wird $\delta Q_{\text{out}} > 0$ für Wärme gewählt, die das Gas verlässt, lautet der erste Hauptsatz der Thermodynamik

$$dU = -p dV - \delta Q_{\text{out}}.$$

Mit $dU = 0$ folgt somit

$$\delta Q_{\text{out}} = -p dV = -NRT_0 \frac{dV}{V}.$$

Integration von V_0 bis V_3 ergibt

$$Q = NRT_0 \ln \left(\frac{V_0}{V_3} \right).$$

Da $V \propto r^3$, gilt

$$Q = \frac{3mRT_0}{\mu} \ln \left(\frac{r_0}{r_3} \right).$$

Die Abnahme der gravitativen potenziellen Energie wird **nicht vollständig abgestrahlt**: Während dieses schnellen Kollapses wird der größte Teil in kinetische Energie einer kohärenten, nach innen gerichteten Bewegung umgewandelt. Die hier berechnete abgestrahlte Wärme entspricht der Kompressionsarbeit, die andernfalls die innere Energie des Gases erhöhen würde.

v. Temperatur während der undurchlässigen Phase

Sobald die Strahlungsverluste vernachlässigbar werden, verläuft die Kompression innerhalb des Modells adiabatisch. Für ein ideales Gas gilt

$$pV^\gamma = \text{konstant}.$$

Zusammen mit $pV = NRT$ ergibt dies

$$TV^{\gamma-1} = \text{konstant}.$$

Zu Beginn dieser Phase gelten $r = r_3$ und $T = T_0$. Daher ist

$$T(r)V(r)^{\gamma-1} = T_0V_3^{\gamma-1},$$

und somit

$$T(r) = T_0 \left(\frac{V_3}{V(r)} \right)^{\gamma-1} = T_0 \left(\frac{r_3}{r} \right)^{3(\gamma-1)}.$$

vi. Radius und Temperatur beim Stillstand des Kollapses

Die molare Wärmekapazität beträgt

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1},$$

sodass die innere Energie

$$U = \frac{mRT}{\mu(\gamma - 1)}$$

beträgt.

Wir schreiben die gravitative potenzielle Energie im Endzustand als

$$W_4 = -\alpha \frac{Gm^2}{r_4},$$

wobei α ein dimensionsloser Strukturfaktor von der Größenordnung eins ist. Für eine homogene Kugel gilt $\alpha = 3/5$; der tatsächliche inhomogene Protostern muss nicht genau diesen Wert aufweisen.

Wenn die makroskopische Kontraktion zum Stillstand kommt, ist die kinetische Energie dieser makroskopischen Bewegung näherungsweise null. Aus der Energieerhaltung folgt

$$U_4 + W_4 = U_0 + W_0 - Q.$$

Die rechte Seite ist klein gegenüber Gm^2/r_4 . Die anfängliche Gravitationsenergie ist um einen Faktor von der Größenordnung r_4/r_0 kleiner. Die abgestrahlte Energie ist bereits klein gegenüber Gm^2/r_3 , denn

$$\frac{Q}{Gm^2/r_3} = 3 \frac{RT_0 r_0}{Gm\mu} \frac{r_3}{r_0} \ln\left(\frac{r_0}{r_3}\right) \ll 1.$$

Somit gilt mit der geforderten Genauigkeit

$$U_4 \simeq |W_4|,$$

oder

$$\frac{mRT_4}{\mu(\gamma - 1)} \simeq \alpha \frac{Gm^2}{r_4}.$$

Gleichwertig dazu ist

$$T_4 \simeq \frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{Rr_4}.$$

Die Kombination mit dem adiabatischen Temperaturgesetz,

$$T_0 \left(\frac{r_3}{r_4}\right)^{3(\gamma-1)} \simeq \frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{Rr_4},$$

ergibt

$$\left(\frac{r_3}{r_4}\right)^{3\gamma-4} \simeq \frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{RT_0 r_3}.$$

Unter Beibehaltung dieser Faktoren folgt daher

$$r_4 \simeq r_3 \left[\frac{RT_0 r_3}{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu} \right]^{1/(3\gamma-4)}$$

und

$$T_4 \simeq T_0 \left[\frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{RT_0 r_3} \right]^{3(\gamma-1)/(3\gamma-4)}.$$

Mit $\alpha = 3/5$ erhält man eine konkrete grobe Abschätzung; durch Weglassen der numerischen Faktoren ergeben sich die Skalierungsausdrücke unter **Antworten**.

Schließlich gilt

$$U \propto r^{-3(\gamma-1)}, \quad |W| \propto r^{-1}.$$

Da $\gamma > 4/3$, wächst die innere Energie während der Kontraktion schneller als der Betrag der Gravitationsenergie. Dadurch kann der Kollaps zum Stillstand kommen. Außerdem gilt

$$\frac{Gm\mu}{RT_0 r_3} \gg 1,$$

sodass die Abschätzungen $r_4 \ll r_3$ und $T_4 \gg T_0$ ergeben, im Einklang mit den Annahmen.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.