

المسألة 1: التركيز على الرسوم التخطيطية

المسألة T1. التركيز على الرسوم التخطيطية (13 نقطة)

الجزء A. حركة المقذوفات (4.5 نقاط)

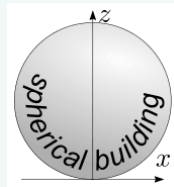
تتحرك كرة، قُذفت بسرعة ابتدائية v_0 ، في مجال جاذبية منتظم في المستوى $z-x$ ، حيث يكون المحور x أفقيًا، والمحور z رأسيًا ومعاكسًا لاتجاه تسارع السقوط الحر g . أهمل تأثير مقاومة الهواء.

i. (0.8 نقطة) بتعديل زاوية قذف كرة من نقطة الأصل بسرعة ابتدائية ثابتة v_0 ، يمكن إصابة أهداف داخل المنطقة المعطاة بالعلاقة

$$z \leq z_0 - kx^2.$$

يمكنك استخدام هذه الحقيقة دون إثباتها. أوجد الثابتين z_0 و k .

ii. (1.2 نقطة) يمكن الآن اختيار نقطة القذف بحرية على مستوى الأرض $z = 0$ ، وتعديل زاوية القذف حسب الحاجة. الهدف هو إصابة أعلى نقطة في مبنى كروي نصف قطره R (انظر الشكل) بأقل سرعة ابتدائية v_0 . لا يُسمح بالارتداد عن السطح قبل إصابة الهدف. ارسم رسمًا تخطيطيًا نوعيًا لشكل المسار الأمثل للكرة (استخدم المربع المخصص في ورقة الإجابة). لاحظ أن الدرجات تُمنح للرسم التخطيطي وحده.



iii. (2.5 نقطة) ما أقل سرعة قذف $v_{\min}$ لازمة لإصابة أعلى نقطة في مبنى كروي نصف قطره R ؟

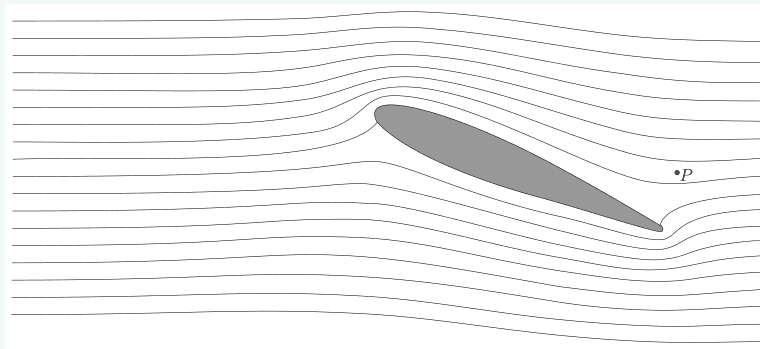


لا جيود، حديقة لا فيليت، باريس. تصوير: katchooo/flickr.com

الجزء B. تدفق الهواء حول جناح (4 نقاط)

قد تكون المعلومات التالية مفيدة لهذا الجزء من المسألة. بالنسبة إلى تدفق سائل أو غاز في أنبوب على طول خط انسياب، فإن ثابت $p + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 =$ ، بافتراض أن السرعة v أصغر بكثير من سرعة الصوت. هنا ρ هي الكثافة، و h هو الارتفاع، و g هو تسارع السقوط الحر، و p هو الضغط الهيدروستاتيكي. تُعرّف خطوط الانسياب بأنها مسارات جسيمات المائع (بافتراض أن نمط التدفق ثابت مع الزمن). لاحظ أن الحد $\frac{1}{2} \rho v^2$ يُسمى الضغط الديناميكي.

يُبين الشكل أدناه مقطعاً عرضياً لجناح طائرة مع خطوط انسياب تدفق الهواء حول الجناح، كما تُرى في الإطار المرجعي للجناح. افترض أن (a) تدفق الهواء ثنائي الأبعاد تماماً (أي إن متجهات سرعة الهواء تقع في مستوى الشكل)؛ و (b) نمط خطوط الانسياب مستقل عن سرعة الطائرة؛ و (c) لا توجد رياح؛ و (d) الضغط الديناميكي أصغر بكثير من الضغط الجوي، $p_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$. يمكنك استخدام مسطرة لأخذ قياسات من الشكل الموجود في ورقة الإجابة.



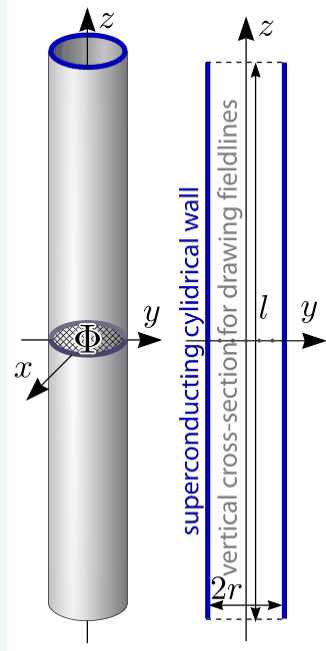
i. (0.8 نقطة) إذا كانت سرعة الطائرة بالنسبة إلى الأرض $v_0 = 100 \text{ m/s}$ ، فما سرعة الهواء v_P عند النقطة P (المحددة في الشكل) بالنسبة إلى الأرض؟

ii. (1.2 نقطة) في حالة الرطوبة النسبية العالية، عندما تزداد سرعة الطائرة بالنسبة إلى الأرض متجاوزةً قيمة حرجة v_{crit} ، يتكوّن تيار من قطرات الماء خلف الجناح. تظهر القطرات عند نقطة معينة Q . حدّد النقطة Q في الشكل الموجود في ورقة الإجابة. اشرح نوعياً (باستخدام الصيغ وأقل قدر ممكن من النص) كيف حددت موضع Q .

iii. (2.0 نقطة) قَدِّر السرعة الحرجة v_{crit} باستخدام البيانات التالية: الرطوبة النسبية للهواء $r = 90\%$ ، والسعة الحرارية النوعية للهواء عند ضغط ثابت $c_p = 1.00 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ، وضغط بخار الماء المشبع: $p_{sa} = 2.31 \text{ kPa}$ عند درجة حرارة الهواء غير المضطرب $T_a = 293 \text{ K}$ ، و $p_{sb} = 2.46 \text{ kPa}$ عند $T_b = 294 \text{ K}$. بحسب التقريبات التي تستخدمها، قد تحتاج أيضاً إلى السعة الحرارية النوعية للهواء عند حجم ثابت $c_v = 0.717 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$. لاحظ أن الرطوبة النسبية تُعرَّف بأنها نسبة ضغط البخار إلى ضغط البخار المشبع عند درجة الحرارة المعطاة. ويُعرَّف ضغط البخار المشبع بأنه ضغط البخار الذي يكون عنده البخار في حالة اتزان مع السائل.

الجزء C. ماصّات مغناطيسية (4.5 نقاط)

اعتبر أنبوباً أسطوانياً مصنوعاً من مادة فائقة التوصيل. طول الأنبوب l ، ونصف قطره الداخلي r ، حيث $l \gg r$. ينطبق مركز الأنبوب على نقطة الأصل، وينطبق محوره على المحور z .

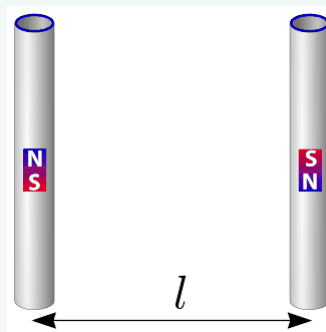


يوجد تدفق مغناطيسي Φ عبر المقطع العرضي الأوسط للأنبوب، $z = 0$ ، الموصل الفائق مادة تطرد أي مجال مغناطيسي (المجال يساوي صفراً داخل المادة).

i. (0.8 نقطة) ارسم خمسة خطوط مجال مغناطيسي تمر بالنقاط الحمراء الخمس المحددة على المقطع المحوري للأنبوب، وذلك على الرسم المخصص في ورقة الإجابة.

ii. (1.2 نقطة) أوجد قوة الشد T على طول المحور z في منتصف الأنبوب (أي القوة التي يتفاعل بها نصف الأنبوب، $z > 0$ و $z < 0$ ، أحدهما مع الآخر).

iii. (2.5 نقطة) اعتبر أنبوباً آخر مطابقاً للأول وموازياً له.



للأنبوب الثاني المجال المغناطيسي نفسه، ولكن في الاتجاه المعاكس، ويقع مركزه عند $x = z = 0$ ، $y = l$ (بحيث يشكّل الأنبوبان ضلعين متقابلين في مربع). حدّد قوة التفاعل المغناطيسي F بين الأنبوبين.

الإجابات

$$z_0 = \frac{v_0^2}{2g}, \quad k = \frac{g}{2v_0^2}. \quad \text{A.i.}$$

A.ii. يرتفع القطع المكافئ الأمثل من الأرض، ويمس الجانب العلوي من المبنى مماسياً، ثم يرتفع قليلاً بعد ذلك، ويهبط أخيراً إلى أعلى نقطة. عند الاقتراب من اليسار، تكون معادلته

$$z = 2R - \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{4x^2}{3R}.$$

$$v_{\min} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}. \quad \text{A.iii.}$$

B.i. $v_P \approx 20 \text{ m/s}$ ، في اتجاه حركة الطائرة تقريباً.

B.ii. ضع Q فوق الحافة الأمامية المستديرة مباشرة، حيث تكون خطوط الانسياب على الجانب العلوي أشد تقارباً: تكون السرعة عندها أكبر ما يمكن ودرجة الحرارة أدنى ما يمكن.

B.iii. $v_{\text{crit}} \approx 35 \text{ m/s}$ ، باستخدام سرعة موضعية قصوى تساوي نحو ضعف سرعة الطائرة، ومع أخذ تغير الضغط الجزئي للبخر في الحسبان. يعطي إهمال تغير الضغط هذا نحو 32 m/s .

C.i. ارسم خطوطاً محورية متوازية تقريباً داخل تجويف الأنبوب. تتباعد الخطوط الأربعة الواقعة خارج المحور بعد الطرفين، وتعود حول الأنبوب من الخارج، دون دخول الجدار فائق التوصيل. ويبقى الخط المحوري المركزي مستقيماً.

$$T \simeq \frac{\Phi^2}{2\mu_0\pi r^2}. \quad \text{C.ii.}$$

وهي قوة تجذب النصفين أحدهما نحو الآخر.

C.iii. يتجاذب الأنبوبان بقوة

$$F \simeq \frac{\Phi^2}{4\pi\mu_0 l^2} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

تستخدم النتائج المغناطيسية تقريب الأنبوب الطويل الضيق.

الحل

A.i.

عند زاوية قذف θ ، يعطي حذف الزمن من معادلات حركة المقذوف

$$z = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}.$$

بوضع $u = \tan \theta$

$$z = xu - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + u^2).$$

عند قيمة ثابتة لـ $x \neq 0$ ، تبلغ هذه الدالة التربيعية قيمتها العظمى عندما

$$u = \frac{v_0^2}{gx}.$$

بالتعويض نحصل على المنحنى الغلاف

$$z_{\text{env}} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

عند $x = 0$ ، يساوي ارتفاعه أيضًا أقصى ارتفاع لقذف رأسي. لذلك،

$$\boxed{z_0 = \frac{v_0^2}{2g}}, \quad \boxed{k = \frac{g}{2v_0^2}}.$$

A.ii

ضع مركز المبنى عند $(0, R)$ ، فتكون قمته عند $(0, 2R)$. اختر نقطة قذف إلى اليسار؛ يعطي الانعكاس حول المحور z مسارًا مكافئًا في جودته.

الرسم التخطيطي المطلوب قطع مكافئ مفتوح نحو الأسفل، يتصف بما يلي:

1. يبدأ من الأرض إلى يسار المبنى ويصعد بميل شديد.
2. يمس السطح العلوي الأيسر مماسيًا، دون أي تغير في السرعة ناجم عن اصطدام.
3. يواصل الصعود إلى ذروة تقع أعلى قمة المبنى قليلًا وإلى يسارها.
4. ثم يهبط إلى أعلى نقطة.

المواضع المميزة الدقيقة، التي تُشتق أدناه، هي:

الموضع المميز	x/R	z/R
القذف	$-\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{11}}{8} \approx -1.460$	0
نقطة التماس	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.866$	$\frac{3}{2}$
الذروة	$-\frac{\sqrt{3}}{8} \approx -0.217$	$\frac{33}{16} = 2.0625$
الهدف	0	2

A.iii

لتكن v_t سرعة الكرة عند بلوغها الهدف. يعطي انحفاظ الطاقة الميكانيكية

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_t^2 + mg(2R),$$

ومن ثم

$$v_0^2 = v_t^2 + 4gR.$$

إذن، فإن تصغير سرعة القذف يكافئ تصغير v_t .

اعكس الحركة. نقذف الآن مقذوفًا من $(0, 2R)$ بسرعة v_t . وفقًا للجزء A.i، يقع كل مسار من هذه المسارات تحت المنحنى الغلاف

$$z_{\text{env}}(x) = 2R + \frac{v_t^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_t^2}.$$

يجب أن يمر المسار الذي يقترب من الهدف من اليسار فوق السطح العلوي

$$z_s(x) = R + \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq 0.$$

وبالتالي، يجب أن يمر المنحنى الغلاف أيضًا فوق ذلك السطح.

عرّف

$$\lambda = \frac{v_t^2}{gR}, \quad c = \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}, \quad 0 \leq c \leq 1.$$

الفرق بين المنحنى الغلاف وسطح المبنى هو

$$\begin{aligned} \frac{z_{\text{env}} - z_s}{R} &= 1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{1 - c^2}{2\lambda} - c \\ &= \frac{(c - \lambda)^2 + 2\lambda - 1}{2\lambda}. \end{aligned}$$

إذا كان $0 < \lambda < 1/2$ ، فإن اختيار $c = \lambda$ يجعل هذا الفرق سالبًا. وعندئذ لا يمكن لأي مسار أن يتجاوز المبنى دون اختراقه. ومن ثم

$$v_t^2 \geq \frac{gR}{2}.$$

عند تحقق المساواة، يمس المنحنى الغلاف سطح المبنى عند $c = 1/2$ ، أي عند

$$(x, z) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}R, \frac{3}{2}R \right).$$

يجب أن نبين أيضًا وجود مسار فعلي يحقق هذا الحد. يعطي قذف المقذوف في الحركة المعكوسة بزاوية 30° فوق الأفقي نحو اليسار، في الإحداثيات الأصلية،

$$z(x) = 2R - \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{4x^2}{3R}.$$

يمر هذا القطع المكافئ بالهدف ويمس الكرة عند النقطة المذكورة أعلاه. للتحقق من أنه لا يخترق المبنى مطلقًا، ضع $t = -x/R \geq 0$. يعطي التعويض المباشر

$$\frac{x^2 + (z - R)^2 - R^2}{R^2} = \frac{16}{9} t \left(t + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \geq 0.$$

وهكذا يقع المسار المعني بأكمله خارج الكرة، مع تماس مماسي قبل بلوغ الهدف. ولا حاجة إلى أي ارتداد. أخيرًا،

$$v_{\min}^2 = \frac{gR}{2} + 4gR = \frac{9}{2}gR,$$

وبالتالي

$$v_{\min} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}.$$

تعطي نقطة تقاطع هذا القطع المكافئ مع الأرض وذروته المواضع المميزة المدرجة في A.ii.

B.i

لتكن u سرعة الهواء في الإطار المرجعي للجناح. بما أن تغيرات الضغط صغيرة مقارنةً بالضغط الجوي، فإننا نتعامل أولاً مع الكثافة على أنها ثابتة.

بالنسبة إلى أنبوب انسياب ضيق عرضه في الاتجاه العمودي على مستوى التدفق يساوي وحدة واحدة، تعطي معادلة الاستمرارية

$$u d = v_0 d_\infty,$$

حيث d هي المسافة بين خطي انسياب متجاورين، مقيسةً عمودياً على التدفق، و d_∞ هي المسافة بينهما في التدفق غير المضطرب قبل الجناح. إذن

$$u = v_0 \frac{d_\infty}{d}.$$

من الشكل المعطى، تساوي المسافة قرب P نحو 1.25 ضعف المسافة قبل الجناح:

$$u_P \approx 0.80v_0 \approx 80 \text{ m/s}.$$

اعتبر أن التدفق غير المضطرب في الإطار المرجعي للجناح يتجه نحو اليمين. عندئذ تتحرك الطائرة نحو اليسار بالنسبة إلى الأرض، ولذلك يكون تحويل السرعة

$$\mathbf{v}_{P,\text{ground}} = \mathbf{u}_P - v_0 \hat{\mathbf{x}}.$$

خطوط الانسياب عند P أفقية تقريباً. لذلك،

$$v_P \approx |80 - 100| = 20 \text{ m/s},$$

نحو اليسار تقريباً، في اتجاه حركة الطائرة.

إذا أخذ الميل الموضعي الصغير في الحسبان، فإن التعبير المقابل هو

$$v_P = \sqrt{u_P^2 + v_0^2 - 2u_P v_0 \cos \theta_P}.$$

.B.ii

أهمل فروق جهد الجاذبية عبر الجناح. تعطي معادلة الاستمرارية ومعادلة برنولي

$$u \propto \frac{1}{d}, \quad p = p_0 + \frac{1}{2}\rho(v_0^2 - u^2).$$

بالنسبة إلى تدفق كظومي تقريباً، يعطي انحفاظ إنتالبي الركود

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_a + \frac{v_0^2}{2}.$$

ومن ثم

$$d \text{ أصغر ما يمكن } \implies u \text{ أكبر ما يمكن } \implies p, T \text{ أصغر ما يمكن }.$$

ينخفض ضغط البخار المشبع بسرعة مع انخفاض درجة الحرارة، لذا تبلغ الرطوبة النسبية الواحد أولاً في ذلك الموضع.

ضع Q فوق الحافة الأمامية المستديرة مباشرةً، في منطقة أصغر تباعد بين خطوط الانسياب على الجانب العلوي للجناح. ثم يحمل التدفق القطرات المتكوّنة إلى الخلف.

.B.iii

نمثل الهواء بغاز مثالي يخضع لتمدد كظومي وعكوس تقريباً قبل بدء التكاثف. ثابت الغاز النوعي له هو

$$R_{\text{air}} = c_p - c_v = 283 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

ليكن مقدار التبريد عند Q هو $\Delta T = T_a - T_Q > 0$. تعطي بيانات ضغط الإشباع المعطاة الميل الموضعي

$$s = \frac{p_{sb} - p_{sa}}{T_b - T_a} = \frac{2460 - 2310}{294 - 293} = 150 \text{ Pa/K}.$$

باستخدام استقراء خطي،

$$p_s(T_Q) \approx p_{sa} - s\Delta T.$$

قبل التكاثف، يبقى الكسر المولي لبخار الماء دون تغير، ولذلك يتناسب ضغطه الجزئي مع الضغط الكلي:

$$p_{v,Q} = r p_{sa} \frac{p_Q}{p_0}.$$

تعطي العلاقة الكظومية للغاز المثالي

$$\frac{p_Q}{p_0} = \left(\frac{T_Q}{T_a} \right)^{c_p/R_{\text{air}}} \approx 1 - \frac{c_p}{R_{\text{air}} T_a} \Delta T.$$

عند بدء التكاثف، $p_{v,Q} = p_s(T_Q)$. لذلك،

$$rp_{sa} \left(1 - \frac{c_p \Delta T}{R_{\text{air}} T_a} \right) = p_{sa} - s \Delta T,$$

مما يعطي

$$\Delta T = \frac{(1-r)p_{sa}}{s - rp_{sa}c_p/(R_{\text{air}}T_a)}.$$

عددياً،

$$\Delta T = \frac{0.10(2310)}{150 - \frac{0.90(2310)(1000)}{283(293)}} \approx 1.85 \text{ K}.$$

إنَّ يبدأ التكاثف عند نحو 291.2 K.

لتكن

$$\alpha = \frac{u_Q}{v_0} \approx \frac{d_\infty}{d_Q}.$$

أصغر مسافة بين خطوط الانسياب في الرسم تساوي تقريباً نصف المسافة في التدفق غير المضطرب، مما يعطي $\alpha \approx 2$. وعندئذ تعطي معادلة الطاقة

$$c_p \Delta T = \frac{1}{2}(u_Q^2 - v_{\text{crit}}^2) = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1)v_{\text{crit}}^2.$$

وبالتالي،

$$v_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2c_p \Delta T}{\alpha^2 - 1}} \approx \sqrt{\frac{2(1000)(1.85)}{4 - 1}} \approx 35 \text{ m/s}.$$

يبلغ انخفاض الضغط المقابل نحو 2.2%، وهو ما يتسق مع اعتبار تغيرات الكثافة صغيرة عند تقدير السرعة من الرسم.

يفترض تقريب أبسط ثبات الضغط الجزئي للبخر. ويعطي

$$\Delta T \approx \frac{(1-r)p_{sa}}{s} = 1.54 \text{ K}, \quad v_{\text{crit}} \approx 32 \text{ m/s}.$$

يضع كلا التقديرين العتبة عند بضع عشرات من الأمتار في الثانية؛ ويبلغ التقدير المصحح لأثر الضغط نحو 35 m/s.

C.i

اختر اتجاه التدفق ليكون z داخل الأنبوب؛ ويعطي عكس جميع الأسهم الاصطلاح المعاكس.

بعيداً عن الطرفين، يكون المجال داخل التجويف منتظماً ومحورياً تقريباً. ارسم خمسة خطوط متوازية وشبه مستقيمة تمر بالنقاط المحددة.

عند الفتحين:

- يتباعد الخطان الواقعان خارج المحور على كل جانب نحو الخارج بعد الطرف العلوي، وينحنيان إلى الأسفل حول الأنبوب من الخارج، ثم يعودان عبر الفتحة السفلية.
- يكون النمط متناظراً حول المحور وحول المستوى الأوسط.
- تشكل الخطوط التي تمر أقرب إلى المحور حلقات خارجية أكبر.
- لا يعبر أي خط الجدار فائق التوصيل؛ ويكون المجال مماساً لسطوحه.

بالنسبة إلى النقطة الواقعة على المحور، يقتضي التناظر المحوري خطاً مستقيماً على طول المحور z . يمتد هذا الخط إلى اللانهاية في كلا الاتجاهين؛ وليست له نقطة نهاية محدودة. تتجه الأسهم على الخطوط الأخرى إلى الأعلى داخل التجويف وإلى الأسفل على امتداد أجزائها الخارجية الراجعة.

.C.ii

اكتب مساحة مقطع التجويف على الصورة

$$A = \pi r^2.$$

بما أن $r \gg l$ ، فإن المجال في الوسط منتظم تقريباً:

$$B = \frac{\Phi}{A}.$$

إجهاد ماكسويل على طول المجال المغناطيسي إجهاد شد، ومقداره

$$\sigma_{\parallel} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

يعطي تكامل هذا الإجهاد على مقطع التجويف الأوسط قوة التجاذب بين النصفين:

$$T \simeq \frac{B^2 A}{2\mu_0} = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 \pi r^2}.$$

ينتج المجال الخارجي الراجع الضعيف تصحيحاً صغيراً في حد الأنبوب الطويل.

يمكن أيضاً استنتاج النتيجة من الطاقة المغناطيسية. عند ثبات التدفق المحتجز والمقطع العرضي،

$$U \simeq \frac{B^2}{2\mu_0} Al = \frac{\Phi^2 l}{2\mu_0 A}.$$

تتطلب زيادة طول الأنبوب شغلاً $dU = T dl$ ، مما يعطي قوة الشد نفسها.

.C.iii

عند مسافات كبيرة مقارنةً بنصف قطر الأنبوب، يتصرف التدفق الخارج من أحد الطرفين كمجال قطب مغناطيسي فعال. شدته هي

$$q_m = \frac{\Phi}{\mu_0},$$

لأن مجاله الشعاعي هو

$$B(s) = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi s^2} = \frac{\Phi}{4\pi s^2}.$$

هذه مصادر مكافئة للمجال الخارجي؛ ولا يلزم وجود أقطاب مغناطيسية أحادية فعلية. وللطرفين إشارتان متعاكستان.

مقدار القوة بين قطبين فعالين من هذا النوع تفصل بينهما مسافة s هو

$$\frac{\mu_0 q_m^2}{4\pi s^2} = \frac{\Phi^2}{4\pi \mu_0 s^2}.$$

ضع

$$K = \frac{\Phi^2}{4\pi \mu_0}.$$

بالنسبة إلى الأنبوبين ذوي المجالين المتعاكسين، يجب تضمين التفاعلات الأربعة جميعها بين الأطراف:

أزواج الأطراف	المسافة الفاصلة	التفاعل	المركبة الكلية نحو الأنبوب الآخر
العلوي-العلوي والسفلي-السفلي	l	تجاذب	$\frac{2K}{l^2}$
العلوي-السفلي والسفلي-العلوي	$\sqrt{2}l$	تنافر	$-\frac{K}{\sqrt{2}l^2}$

لكل زوج قطري، مقدار القوة هو $K/(2l^2)$ ، ومركبتها المستعرضة تساوي هذا المقدار مضروباً في $\cos 45^\circ$. وتتلاشى مركباتهما الرأسيتان.
لذلك،

$$F \simeq \frac{\Phi^2}{4\pi\mu_0 l^2} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

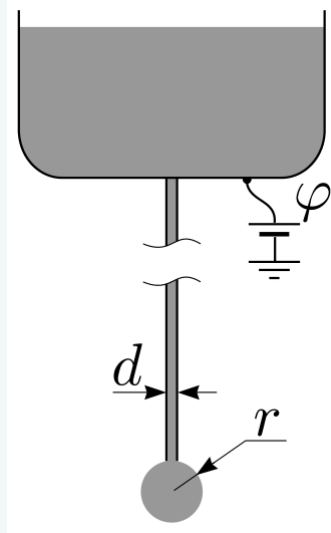
القوة تجاذبية: تؤثر في اتجاه y على الأنبوب الأول، وفي اتجاه $-y$ على الثاني.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: قطارة الماء لكلفن

المسألة T2. قطارة الماء لكلفن (8 نقاط)

قد تكون الحقائق الآتية عن التوتر السطحي مفيدة في هذه المسألة. بالنسبة إلى جزيئات السائل، تكون المواضع عند السطح الفاصل بين السائل والهواء أقل ملاءمة من المواضع داخل السائل. ويوصف هذا السطح الفاصل بما يُسمَّى الطاقة السطحية، $U = \sigma S$ ، حيث S مساحة السطح الفاصل و σ معامل التوتر السطحي للسائل. كذلك، يشدُّ كل جزء من جزأين من سطح السائل الجزء الآخر بقوة $F = \sigma l$ ، حيث l طول خط مستقيم يفصل بين الجزأين.



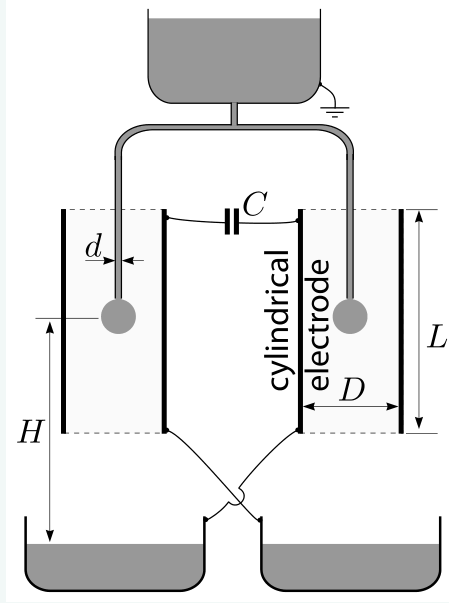
يتجه أنبوب معدني طويل، قطره الداخلي d ، رأسياً إلى الأسفل. يقطر الماء ببطء من فوهة عند طرفه السفلي، انظر الشكل. يمكن اعتبار الماء موصلاً للكهرباء؛ وتوتره السطحي σ وكثافته ρ . تتدلى أسفل الفوهة قطرة نصف قطرها r . يزداد نصف القطر ببطء مع الزمن إلى أن تنفصل القطرة عن الفوهة بفعل تسارع السقوط الحر g . افترض دائماً أن $d \ll r$.

الجزء A. أنبوب واحد (4 نقاط)

- (1.2 نقطة) أوجد نصف قطر القطرة $r_{\max}$ قبيل انفصالها عن الفوهة.
- (1.2 نقطة) الجهد الكهروستاتيكي للأنبوب بالنسبة إلى الوسط المحيط البعيد هو φ . أوجد شحنة القطرة Q عندما يكون نصف قطرها r .
- (1.6 نقطة) انظر في الحالة التي يُنْبَت فيها r ويزداد φ ببطء. تصبح القطرة غير مستقرة وتتفتت إذا أصبح الضغط الهيدروستاتيكي داخلها أقل من الضغط الجوي. أوجد الجهد الحرج $\varphi_{\max}$ الذي يحدث عنده ذلك.

الجزء B. أنبوبان (4 نقاط)

يتكوّن جهاز يُسمّى «قطّارة الماء لكلفن» من أنبوبين، كل منهما مماثل للأنبوب الموصوف في الجزء A، موصولين بوصلة على شكل T، انظر الشكل. يقع طرفا الأنبوبين في مركزي قطبين أسطوانيين (ارتفاعهما L وقطرهما D ، حيث $L \gg D \gg r$). معدل التقطير في كل من الأنبوبين هو n قطرة في وحدة الزمن. تسقط القطرات من ارتفاع H في وعاءين موصولين أسفل الفوهتين، موصولين بالقطبين توصيلاً متقاطعاً كما هو مبين في الرسم. يتصل القطبان عبر مكثف سعته C . الشحنة الصافية لمنظومة الوعاءين والقطين تساوي صفراً. لاحظ أن خزان الماء العلوي مؤرّض كما هو مبين. تحمل أول قطرة تسقط شحنة متناهية الصغر تُحدث اختلالاً في التوازن بين الجانبين وفصلاً طفيفاً للشحنات بين لوحَي المكثف.



- i. (1.2 نقطة) عبّر عن القيمة المطلقة لشحنة القطرات Q_0 عند انفصالها عن الأنبوبين، في اللحظة التي تكون فيها شحنة المكثف q . عبّر عن Q_0 بدلالة $r_{\max}$ (من الجزء A-i)، وأهمّل الأثر الموصوف في الجزء A-iii.
 - ii. (1.5 نقطة) أوجد اعتماد q على الزمن t بتقريبه بدالة متصلة $q(t)$ ، مع افتراض أن $q(0) = q_0$.
 - iii. (1.3 نقطة) قد يعيق الأثر المبين في الجزء A-iii عمل القطّارة. وإضافةً إلى ذلك، يفرض التنافر الكهروستاتيكي بين القطرة والوعاء أسفلها حداً أقصى $U_{\max}$ لفرق الجهد الممكن بلوغه بين القطبين. أوجد $U_{\max}$.
- نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

هنا ϵ_0 سماحية الفراغ، ويرمز q إلى مقدار الشحنة على أيّ من لوحَي المكثف.

• A-i:

$$r_{\max} = \left(\frac{3\sigma d}{4\rho g} \right)^{1/3}.$$

• A-ii:

$$Q = 4\pi\epsilon_0 r\varphi.$$

• A-iii:

$$\varphi_{\max} = 2\sqrt{\frac{\sigma r}{\varepsilon_0}}.$$

تنطبق العتبة نفسها على القيمة المطلقة للجهد السالب.

• B-i:

$$Q_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0 r_{\max}}{C} q.$$

• B-ii: في التقريب المتصل، مع إهمال التأخر الناجم عن زمن السقوط،

$$q(t) = q_0 \exp\left(\frac{2\pi\varepsilon_0 n r_{\max}}{C} t\right).$$

• B-iii: الحد الناتج عن التناثر الكهروستاتيكي هو

$$U_{\max} = r_{\max} \sqrt{\frac{2\rho g H}{3\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\sigma d H}{2\varepsilon_0 r_{\max}}}.$$

لم تُعطَ قيم عددية للمعطيات.

الحل

الجزء A-i

تكون القطرة التي تنمو ببطء في حالة اتزان ميكانيكي إلى أن يتجاوز وزنها أقصى قوة إسناد يوفرها التوتر السطحي.

محيط الفوهة هو πd . عندما يؤثر التوتر السطحي رأسياً حول عنق القطرة، تكون قوته القصوى المتجهة إلى الأعلى

$$F_\sigma = \pi d \sigma.$$

يمكن إهمال حجم العنق وتصحيح قوة الضغط عند فتحة الفوهة الصغيرة عندما يكون $d \ll r$. وباعتبار القطرة كروية تقريباً، يكون وزنها

$$mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g.$$

عند الانفصال،

$$\frac{4}{3}\pi r_{\max}^3 \rho g = \pi d \sigma,$$

ومن ثم

$$r_{\max} = \left(\frac{3\sigma d}{4\rho g}\right)^{1/3}.$$

يتسق التقريب الكروي مع هذه النتيجة: فنسبة إجهادات الجاذبية إلى الإجهادات الشعرية هي

$$\frac{\rho g r_{\max}^2}{\sigma} = \frac{3d}{4r_{\max}} \ll 1.$$

الجزء A-ii

للقطرة الموصلة والأنبوب الجهد نفسه. وبإهمال الاضطراب الذي يُحدثه الأنبوب الرفيع في المجال الكهربائي للقطرة، تتصرف القطرة ككرة موصلة.

خارج كرة تحمل شحنة Q ، يعطي قانون غاوس

$$E(s) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 s^2}.$$

وباعتبار جهد الوسط المحيط البعيد صفراً،

$$\varphi = \int_r^\infty E(s) ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

إذاً

$$\boxed{Q = 4\pi\epsilon_0 r\varphi}.$$

إشارة شحنة القطرة هي إشارة φ .

A-iii الجزء

يُنتج التوتر السطحي ضغطاً شعرياً متجهاً إلى الداخل. انطلاقاً من الطاقة السطحية المعطاة،

$$W_\sigma = 4\pi r^2 \sigma,$$

يكون الضغط اللازم لزيادة مساحة السطح

$$p_\sigma = \frac{dW_\sigma}{dV} = \frac{8\pi r\sigma}{4\pi r^2} = \frac{2\sigma}{r}.$$

يُنتج المجال الكهربائي ضغطاً متجهاً إلى الخارج. في الموصل، تكون كثافة الشحنة السطحية $E\epsilon_0$ ، ويكون المجال المؤثر في تلك الشحنة بفعل الشحنات الأخرى $E/2$. ومن ثم

$$p_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

باستخدام الجزء A-ii،

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\varphi}{r}.$$

وعليه، يعطي الاتزان الميكانيكي

$$p_{\text{in}} - p_{\text{atm}} = p_\sigma - p_e = \frac{2\sigma}{r} - \frac{\epsilon_0 \varphi^2}{2r^2}.$$

وفقاً لمعيار عدم الاستقرار المحدد، تُبلّغ العتبة عندما يتساوى الضغط الداخلي مع الضغط الجوي:

$$\frac{2\sigma}{r} = \frac{\epsilon_0 \varphi_{\text{max}}^2}{2r^2}.$$

إذاً

$$\boxed{\varphi_{\text{max}} = 2\sqrt{\frac{\sigma r}{\epsilon_0}}}.$$

وبصورة مكافئة، يكون مقدار الشحنة المقابل

$$Q_{\text{crit}} = 4\pi\epsilon_0 r\varphi_{\text{max}} = 8\pi\sqrt{\epsilon_0 \sigma r^3}.$$

B-i الجزء

لنكتب

$$R = r_{\text{max}}, \quad U = \frac{q}{C}.$$

نهمل السعات الطفيلية مقارنةً بـ C . وبفعل التناظر وانعدام الشحنة الصافية، يكون جهدا القطبين بالنسبة إلى الأرض

$$V_L = +\frac{U}{2}, \quad V_R = -\frac{U}{2}.$$

بما أن $L \gg D$ ، فإن الجهد بالقرب من مركز كل أسطوانة، قبل أخذ القطرة الصغيرة في الحسبان، يساوي تقريباً جهد الأسطوانة. وبما أن $D \gg R$ ، فإن مساهمة القطرة نفسها في جهد سطحها تساوي تقريباً مساهمة كرة معزولة.

الماء والأنبوبان مؤرّضة. لذا، ما دامت القطرة اليسرى متصلة بالأنبوب،

$$0 = V_L + \frac{Q_L}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

ينتج عن ذلك

$$Q_L = -2\pi\epsilon_0 R U.$$

وبالمثل،

$$Q_R = +2\pi\epsilon_0 R U.$$

تحتفظ القطرة بشحنتها عند الانفصال، ولذلك يكون مقدارها

$$Q_0 = 2\pi\epsilon_0 R U = \frac{2\pi\epsilon_0 r_{\max}}{C} q.$$

بسبب التوصيلات المتقاطعة، تسقط كل قطرة في وعاء يحمل أصلاً شحنة من الإشارة نفسها التي تحملها القطرة. ولذلك يعزّز وصولها فصل الشحنات.

الجزء B-ii

نستخدم التقريب المتصل ونهمل التأخر بين الانفصال والتجميع. يفترض ذلك أن فرق الجهد يتغير تغيراً طفيفاً خلال سقوط القطرة.

يُنتج كل أنبوب n قطرة في وحدة الزمن. يستقبل لوح المكثف الموجب شحنة موجبة بمعدل nQ_0 ، بينما يستقبل اللوح السالب شحنة سالبة بالمعدل نفسه. ومن ثم فإن مقدار الشحنة q على أيٍّ من اللوحين يحقق

$$\frac{dq}{dt} = nQ_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 nR}{C} q.$$

لا يوجد عامل إضافي مقداره اثنان: إذ يزيد زوج من القطرات شحنتي اللوحين من $-q$ إلى $+q$ ، وإلى $-(q + Q_0)$ ، $+(q + Q_0)$.

بالتكامل وفرض الشرط $q(0) = q_0$ ،

$$\ln \frac{q(t)}{q_0} = \frac{2\pi\epsilon_0 nR}{C} t,$$

إذاً

$$q(t) = q_0 \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 nR}{C} t\right).$$

الزمن المميز للنمو هو

$$\tau = \frac{C}{2\pi\epsilon_0 nR}.$$

يتطلب تقريب إهمال التأخر أن يكون زمن السقوط صغيراً مقارنةً بـ τ . ينطبق النمو الأسّي قبل أن يؤثر تفتت القطرات أو التناثر الكهروستاتيكي تأثيراً كبيراً في تجميعها.

الجزء B-iii

ننظر في القطرة المتكوّنة داخل القطب الموجب. تحمل هذه القطرة شحنة $-Q_0$ ، ووعاء تجميعها موصول بالقطب السالب.

نعتبر U ثابتاً تقريباً أثناء السقوط. يتغير الجهد الناتج عن الجهاز من $+U/2$ بالقرب من الفوهة إلى $-U/2$ عند الوعاء. لذلك تكون الزيادة في طاقة الوضع الكهروستاتيكية الخارجية للقطرة

$$\Delta W_e = (-Q_0) \left(-\frac{U}{2} - \frac{U}{2} \right) = Q_0 U.$$

الجهد المستخدم هنا هو الجهد الناتج عن الجهاز. أما الجهد الكلي للقطرة، الذي يساوي صفراً ما دامت متصلة بالأنبوب، فيشمل أيضاً مجالها الذاتي. أثناء السقوط، تبقى شحنتها ونصف قطرها ثابتين تقريباً، لذا لا تسهم طاقتها الذاتية في شغل الحركة الانتقالية.

بإهمال مقاومة الهواء والطاقة الحركية الابتدائية، تكون طاقة الجاذبية المتاحة

$$mgH = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho gH.$$

لكي يظل التجميع ممكناً، يجب أن تكون هذه الطاقة كافية للتغلب على الزيادة في الطاقة الكهروستاتيكية:

$$mgH \geq Q_0 U.$$

عند الحد الذي تفرضه الطاقة، وباستخدام $Q_0 = 2\pi\epsilon_0 R U$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho gH = 2\pi\epsilon_0 R U_{\max}^2.$$

ومن ثم

$$U_{\max} = r_{\max} \sqrt{\frac{2\rho gH}{3\epsilon_0}}.$$

وباستخدام شرط الانفصال $mg = \pi d\sigma$ ، يمكن أيضاً كتابة ذلك على الصورة

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma dH}{2\epsilon_0 r_{\max}}}.$$

عتبة التفكك المستقلة المستنتجة في الجزء A-iii، عند حسابها لقطرة نصف قطرها $r_{\max}$ ، تقابل

$$U_{\text{break}} = 2\varphi_{\max}(r_{\max}) = 4\sqrt{\frac{\sigma r_{\max}}{\epsilon_0}}.$$

وهذا يفرض قيداً إضافياً على التشغيل بقطرات تبقى سليمة.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: تشكل نجم أولي

المسألة T3. تشكل نجم أولي (9 نقاط)

لننمذج تشكل نجم على النحو الآتي. تبدأ سحابة كروية من الغاز بين النجمي المتخلخل، ساكنة في البداية، بالانهيار تحت تأثير جاذبيتها الذاتية. نصف قطر الكرة الابتدائي هو r_0 وكتلتها m . درجة حرارة الوسط المحيط (وهو أشد تخلخلاً بكثير من الغاز) ودرجة حرارة الغاز الابتدائية متساويتان ومنظمتان، وقيمتها T_0 . يمكن افتراض أن الغاز مثالي. متوسط الكتلة المولية للغاز هو μ ، ومعامله الأديباتي هو $\gamma > \frac{4}{3}$. افترض أن $G \frac{m\mu}{r_0} \gg RT_0$ ، حيث R ثابت الغازات و G ثابت الجذب العام.

i. (0.8 نقطة) خلال معظم الانهيار، يكون الغاز شفافاً إلى حد أن أي حرارة تتولد تُشع فوراً، أي إن الكرة تبقى في اتزان ديناميكي حراري مع الوسط المحيط بها. ما عدد المرات، n ، التي يزداد بها الضغط عندما ينخفض نصف القطر إلى النصف، أي إلى $r_1 = 0.5r_0$ ؟ افترض أن كثافة الغاز تبقى منتظمة.

ii. (1 نقطة) قدر الزمن t_2 اللازم لتقلص نصف القطر من r_0 إلى $r_2 = 0.95r_0$. أهمل تغيّر مجال الجاذبية عند موضع جسيم غاز ساقط.

iii. (2.5 نقطة) بافتراض أن الضغط يبقى مهماً، أوجد الزمن $t_{r \rightarrow 0}$ اللازم لانهيار الكرة من r_0 إلى نصف قطر أصغر بكثير، باستخدام قوانين كبلر.

iv. (1.7 نقطة) عند نصف قطر معيّن $r_0 \ll r_3$ ، يصبح الغاز كثيفاً بما يكفي ليكون معتماً للإشعاع الحراري. احسب كمية الحرارة Q المنبعثة بالإشعاع أثناء الانهيار من نصف القطر r_0 إلى r_3 .

v. (1 نقطة) عند أنصاف أقطار أصغر من r_3 ، يمكنك إهمال فقدان الحرارة بالإشعاع. حدّد كيف تعتمد درجة حرارة الكرة T على نصف قطرها عندما $r < r_3$.

vi. (2 نقطة) في نهاية المطاف، لا يعود بإمكاننا إهمال تأثير الضغط في ديناميكا الغاز، ويتوقف الانهيار عند $r = r_4$ (حيث $r_4 \ll r_3$). ومع ذلك، يظل بالإمكان إهمال الفقد بالإشعاع، ولا تكون درجة الحرارة قد بلغت بعد حدّاً يكفي لبدء الاندماج النووي. لم يعد ضغط هذا النجم الأولي منتظماً، لكن لا يزال بالإمكان إجراء تقديرات تقريبية بمعاملات عديدة غير دقيقة. قدّر نصف القطر النهائي r_4 ودرجة الحرارة المقابلة T_4 .

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

i. •

$$n = 8.$$

ii. •

$$t_2 \simeq \sqrt{\frac{0.10 r_0^3}{Gm}} \simeq 0.32 \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}.$$

iii. •

$$t_{r \rightarrow 0} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}} \simeq 1.11 \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}.$$

iv. •

$$Q = \frac{3mRT_0}{\mu} \ln\left(\frac{r_0}{r_3}\right).$$

v. •

$$T(r) = T_0 \left(\frac{r_3}{r}\right)^{3(\gamma-1)}.$$

vi. • بإغفال العوامل العددية في موازنة الطاقة، تكون التقديرات

$$r_4 \sim r_3 \left(\frac{RT_0 r_3}{Gm\mu}\right)^{1/(3\gamma-4)}$$

و

$$T_4 \sim T_0 \left(\frac{Gm\mu}{RT_0 r_3}\right)^{3(\gamma-1)/(3\gamma-4)}.$$

يُشتق أدناه تعبير يُبقي على عامل السعة الحرارية وعلى عامل بنية تقريبي لطاقة وضع الجاذبية.

الحل

لتكن كمية الغاز $N = m/\mu$ مولاً. حجمه وضغطه وفق قانون الغاز المثالي هما

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}, \quad pV = NRT.$$

تعني المتباينة المعطاة أن المقدار المميز لطاقة الجاذبية الابتدائية يفوق بكثير المقدار المميز للطاقة الحرارية، مما يبزر إهمال الضغط خلال المرحلة المبكرة من الانهيار.

i. زيادة الضغط أثناء التقلص المتساوي الحرارة

يحافظ الاتزان الديناميكي الحراري مع الوسط المحيط على درجة الحرارة عند T_0 . ومن ثم

$$p = \frac{NRT_0}{V} \propto r^{-3}.$$

وبالتالي،

$$n = \frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^3 = \left(\frac{1}{0.5}\right)^3 = \boxed{8}.$$

ii. الزمن اللازم لانخفاض نصف القطر بنسبة خمسة في المئة في البداية

وفقاً لمبرهنة القشرة الكروية، يخضع جسيم عند السطح في البداية لتسارع الجاذبية المتجه نحو الداخل

$$g_0 = \frac{Gm}{r_0^2}.$$

بإبقاء هذا التسارع ثابتاً، كما هو مطلوب، واستخدام شرط السكون الابتدائي،

$$r_0 - r_2 = \frac{1}{2}g_0 t_2^2.$$

وبما أن $r_0 - r_2 = 0.05r_0$ ،

$$t_2 \simeq \sqrt{\frac{2(0.05r_0)}{Gm/r_0^2}} = \sqrt{\frac{0.10r_0^3}{Gm}}.$$

iii. زمن الانهيار من قوانين كبلر

يتحرك جسيم عند السطح تحت تأثير مجال الجاذبية الناشئ عن الكتلة المحصورة داخله m :

$$\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2}.$$

لنعتبر سقوطه الشعاعي الحالة الحدية لمدار كبلري مقيد ذي اختلاف مركزي كبير جداً. يقع الأوج عند r_0 ، بينما يؤول الحضيض إلى الصفر، ولذلك يؤول نصف المحور الأكبر إلى

$$a = \frac{r_0}{2}.$$

يعطي قانون كبلر الثالث الزمن الدوري المداري

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{Gm}}.$$

تستغرق الرحلة من الأوج إلى الحضيض نصف دورة. لذلك،

$$t_{r \rightarrow 0} = \frac{P}{2} = \pi\sqrt{\frac{(r_0/2)^3}{Gm}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}}.$$

بالنسبة إلى سحابة منتظمة في البداية، يكون هذا أيضًا زمن انهيار كل قشرة داخلية. فالقشرة التي يقع نصف قطرها في البداية عند s_0 تحصر بالفعل كتلة مقدارها

$$M(s_0) = m \left(\frac{s_0}{r_0} \right)^3,$$

ومن ثم يكون زمن انهيارها

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{s_0^3}{GM(s_0)}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}},$$

وهو مستقل عن s_0 . وهذا يدعم تقريب الانهيار المنتظم المتشابه ذاتيًا.

iv. الحرارة المنبعثة بالإشعاع خلال مرحلة الشفافية

تعتمد الطاقة الداخلية للغاز المثالي على درجة الحرارة وحدها. وبما أن $T = T_0$ ، فإن طاقته الداخلية تبقى ثابتة.

باتخاذ $\delta Q_{\text{out}} > 0$ للحرارة الخارجة من الغاز، يكون القانون الأول للديناميكا الحرارية

$$dU = -p dV - \delta Q_{\text{out}}.$$

ومن ثم، مع $dU = 0$

$$\delta Q_{\text{out}} = -p dV = -NRT_0 \frac{dV}{V}.$$

بالتكامل من V_0 إلى V_3 ،

$$Q = NRT_0 \ln \left(\frac{V_0}{V_3} \right).$$

وبما أن $V \propto r^3$ ،

$$Q = \frac{3mRT_0}{\mu} \ln \left(\frac{r_0}{r_3} \right).$$

إن النقص في طاقة وضع الجاذبية لا ينبعث كله بالإشعاع: فخلال هذا الانهيار السريع، يتحول معظمه إلى طاقة حركية لحركة جماعية نحو الداخل. والحرارة المنبعثة بالإشعاع المحسوبة هنا هي شغل الانضغاط الذي كان سيزيد الطاقة الداخلية للغاز لولا فقدانه بالإشعاع.

v. درجة الحرارة خلال مرحلة العتامة

بمجرد أن تصبح فواقد الإشعاع مهملة، يكون الانضغاط أديباتيًا ضمن هذا النموذج. بالنسبة إلى الغاز المثالي،

$$pV^\gamma = \text{ثابت}.$$

بدمج هذه العلاقة مع $pV = NRT$ نحصل على

$$TV^{\gamma-1} = \text{ثابت}.$$

في بداية هذه المرحلة، يكون $r = r_3$ و $T = T_0$. ومن ثم

$$T(r)V(r)^{\gamma-1} = T_0 V_3^{\gamma-1},$$

وبالتالي

$$T(r) = T_0 \left(\frac{V_3}{V(r)} \right)^{\gamma-1} = T_0 \left(\frac{r_3}{r} \right)^{3(\gamma-1)}.$$

vi. نصف القطر ودرجة الحرارة عند توقف الانهيار

السعة الحرارية المولية هي

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1},$$

ومن ثم تكون الطاقة الداخلية

$$U = \frac{mRT}{\mu(\gamma - 1)}.$$

لنكتب طاقة وضع الجاذبية النهائية على الصورة

$$W_4 = -\alpha \frac{Gm^2}{r_4},$$

حيث α عامل بنية عديم الأبعاد من رتبة الواحد. بالنسبة إلى كرة منتظمة، يكون $\alpha = 3/5$ ؛ ولا يلزم أن تكون له هذه القيمة بالضبط في النجم الأولي الفعلي غير المنتظم.

عند توقف التقلص الكلي، تكون الطاقة الحركية للحركة الكلية صفرًا تقريبًا. ويعطي انحفاظ الطاقة

$$U_4 + W_4 = U_0 + W_0 - Q.$$

الطرف الأيمن صغير بالمقارنة مع Gm^2/r_4 . فطاقة الجاذبية الابتدائية أصغر بعامل من رتبة r_4/r_0 . والطاقة المنبعثة بالإشعاع صغيرة أصلاً بالمقارنة مع Gm^2/r_3 ، إذ إن

$$\frac{Q}{Gm^2/r_3} = 3 \frac{RT_0 r_0}{Gm\mu} \frac{r_3}{r_0} \ln\left(\frac{r_0}{r_3}\right) \ll 1.$$

ومن ثم، ضمن الدقة المطلوبة،

$$U_4 \simeq |W_4|,$$

أو

$$\frac{mRT_4}{\mu(\gamma - 1)} \simeq \alpha \frac{Gm^2}{r_4}.$$

وبصورة مكافئة،

$$T_4 \simeq \frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{Rr_4}.$$

بدمج هذه العلاقة مع قانون درجة الحرارة الأديباتي،

$$T_0 \left(\frac{r_3}{r_4}\right)^{3(\gamma-1)} \simeq \frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{Rr_4},$$

نحصل على

$$\left(\frac{r_3}{r_4}\right)^{3\gamma-4} \simeq \frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{RT_0 r_3}.$$

لذلك، مع الإبقاء على هذه العوامل،

$$r_4 \simeq r_3 \left[\frac{RT_0 r_3}{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu} \right]^{1/(3\gamma-4)}$$

و

$$T_4 \simeq T_0 \left[\frac{\alpha(\gamma - 1)Gm\mu}{RT_0 r_3} \right]^{3(\gamma-1)/(3\gamma-4)}.$$

يوفر أخذ $\alpha = 3/5$ تقديرًا تقريبيًا محددًا؛ ويعطي إغفال العوامل العددية علاقات التناسب الواردة في الإجابات.

وأخيرًا،

$$U \propto r^{-3(\gamma-1)}, \quad |W| \propto r^{-1}.$$

بما أن $\gamma > 4/3$ ، فإن الطاقة الداخلية تزداد أثناء التقلُّص أسرع من مقدار طاقة الجاذبية. وهذا يتيح توقف الانهيار. كذلك،

$$\frac{Gm\mu}{RT_0 r_3} \gg 1,$$

ومن ثم تعطي التقديرات $r_4 \ll r_3$ و $T_4 \gg T_0$ ، بما يتسق مع الافتراضات.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.