

IPhO 2011

理论题与解答 · 泰国曼谷 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/2011/

题目 1: 三体问题与 LISA

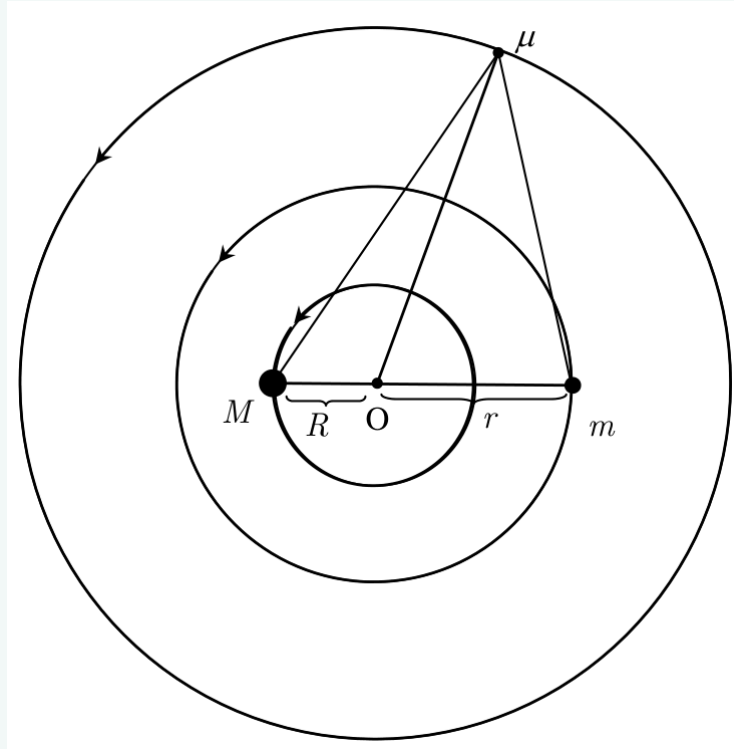


图 1 三个物体的共面轨道。

1.1 两个质量分别为 M 和 m 的物体在引力作用下，绕其共同质心分别沿半径为 R 和 r 的圆轨道运动。用 R, r, M, m 和万有引力常量 G 表示连接 M 与 m 的连线的角速度 ω_0 。

[1.5 分]

1.2 将质量为无穷小量 μ 的第三个物体置于绕同一质心的共面圆轨道上，使 μ 相对于 M 和 m 均保持静止，如图 1 所示。假设这一无穷小质量的物体与 M 和 m 不共线。用 R 和 r 表示下列各量：

[3.5 分]

1.2.1 μ 到 M 的距离。

1.2.2 μ 到 m 的距离。

1.2.3 μ 到质心的距离。

1.3 考虑 $M = m$ 的情形。如果现在给 μ 一个小的径向扰动（沿 $O\mu$ 方向），那么 μ 在未受扰动位置附近振荡的角频率是多少？用 ω_0 表示。假设 μ 的角动量守恒。

[3.2 分]

激光干涉空间天线（LISA）由三艘相同的航天器组成，用于探测低频引力波。三艘航天器分别位于一个等边三角形的三个顶点，如图 2 和图 3 所示。三角形的边（或称“臂”）长约为 5.0 百万千米。LISA 星座沿类似地球轨道的轨道绕太阳运行，落后地球 20° 。每艘航天器各自沿略有倾斜的轨道绕太阳运动。整体看来，三艘航天器似乎绕其共同中心每年转动一周。

它们不断地相互发射和接收激光信号。总体而言，它们利用干涉测量方法测量臂长的微小变化，从而探测引力波。邻近星系中黑洞等大质量天体的碰撞就是引力波源的一个例子。

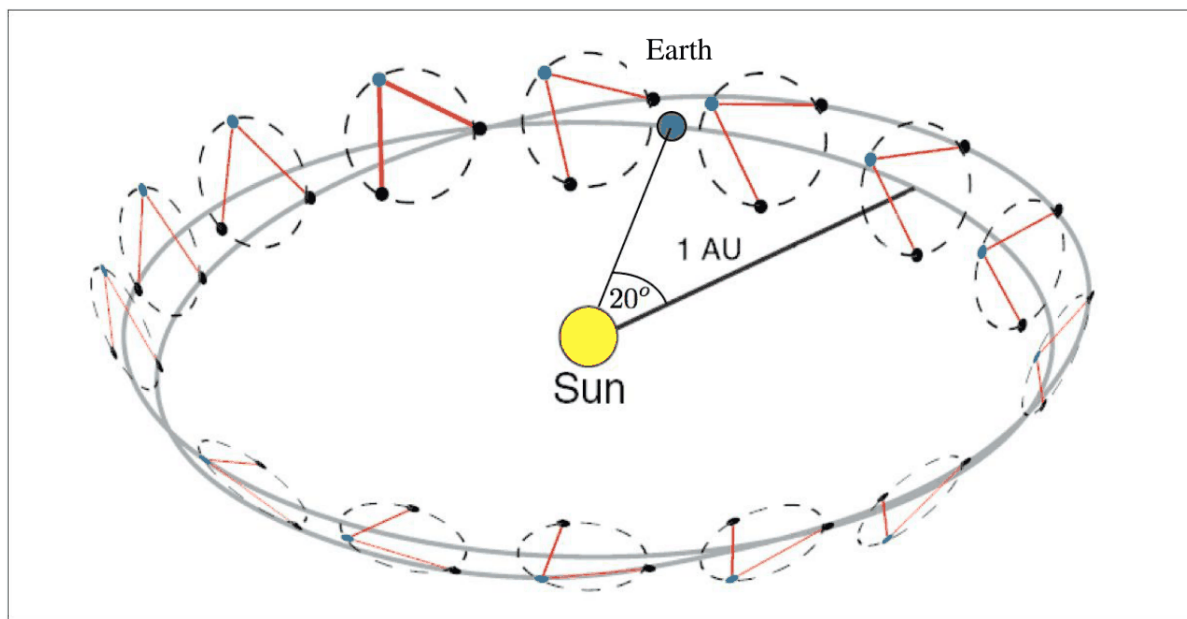


图 2 LISA 轨道示意图。三艘航天器绕其质心转动，周期为 1 年。初始时，它们落后地球 20° （图片引自 D.A. Shaddock, 《激光干涉空间天线概述》，澳大利亚天文学会出版物，2009 年，26 卷，第 128–132 页。）。

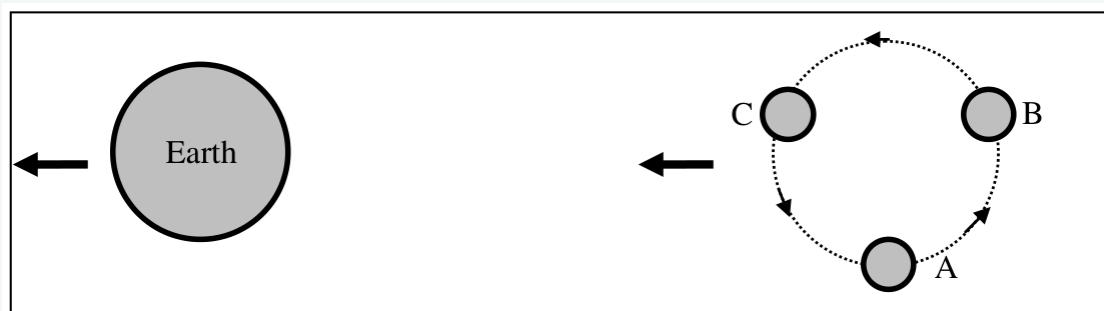


图 3 落后于地球的三艘航天器的放大图。A、B 和 C 是位于等边三角形三个顶点的三艘航天器。

1.4 在包含这三艘航天器的平面内，一艘航天器相对于另一艘的速率是多少？

[1.8 分]

题目译自官方英文原文。

答案

- 1.1

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G(M+m)}{(R+r)^3}}$$

- 1.2.1

$$d_{\mu M} = R + r$$

- 1.2.2

$$d_{\mu m} = R + r$$

- 1.2.3

$$d_{\mu O} = \sqrt{R^2 + Rr + r^2}$$

- 1.3, 利用题目规定的角动量守恒条件:

$$\omega_{\text{osc}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \omega_0$$

- 1.4, 取臂长 $L = 5.0 \times 10^9 \text{ m}$ 和转动周期 $T = 1 \text{ year}$:

$$v_{\text{rel}} = \frac{2\pi L}{T} \simeq 1.0 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} = 1.0 \text{ km s}^{-1}$$

解答

1.1

两个物体之间的距离为 $d = R + r$ 。由于 O 是它们的质心,

$$MR = mr.$$

引力为每个物体提供向心加速度:

$$M\omega_0^2 R = \frac{GMm}{d^2}, \quad m\omega_0^2 r = \frac{GMm}{d^2}.$$

分别除以各自的质量, 再将两式相加, 得到

$$\omega_0^2 (R + r) = \frac{G(M + m)}{d^2}.$$

因此,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G(M + m)}{(R + r)^3}}.$$

1.2.1 和 1.2.2

由于 μ 是无穷小量, 它不影响 M 和 m 的运动。为了相对于它们保持静止, 它必须以角速度 ω_0 绕 O 转动。

在某一选定时刻，取

$$O = (0, 0), \quad M = (-R, 0), \quad m = (r, 0), \quad \mu = (x, y),$$

其中 $y \neq 0$ 。将它到两个物体的距离记为

$$a = \sqrt{(x + R)^2 + y^2}, \quad b = \sqrt{(x - r)^2 + y^2}.$$

它的加速度为 $-\omega_0^2(x, y)$ 。因此，根据牛顿运动定律，约去试验物体的质量 μ 后，有

$$\begin{aligned} \omega_0^2 x &= \frac{GM(x + R)}{a^3} + \frac{Gm(x - r)}{b^3}, \\ \omega_0^2 y &= \frac{GM y}{a^3} + \frac{Gm y}{b^3}. \end{aligned}$$

由于 $y \neq 0$ ，第二个方程给出

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{a^3} + \frac{Gm}{b^3}.$$

从第一个方程中减去此式的 x 倍，得到

$$0 = \frac{GMR}{a^3} - \frac{Gmr}{b^3}.$$

利用 $MR = mr$ ，可得 $a = b$ 。因此，

$$\omega_0^2 = \frac{G(M + m)}{a^3}.$$

与第 1.1 问比较，可得 $a = R + r$ ，从而

$$\boxed{1.2.1: d_{\mu M} = R + r}, \quad \boxed{1.2.2: d_{\mu m} = R + r}.$$

因此，三个物体位于一个等边三角形的三个顶点。

1.2.3

连接两个有限质量物体的线段，其中点的坐标为

$$x_{\text{mid}} = \frac{r - R}{2}.$$

边长为 $R + r$ 的等边三角形，其第三个顶点到该中点的垂直距离为 $\sqrt{3}(R + r)/2$ 。因此， μ 的两个可能位置为

$$x = \frac{r - R}{2}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(R + r).$$

它到 O 的距离满足

$$d_{\mu O}^2 = x^2 + y^2 = \frac{(r - R)^2 + 3(R + r)^2}{4} = R^2 + Rr + r^2.$$

于是，

$$\boxed{d_{\mu O} = \sqrt{R^2 + Rr + r^2}}.$$

1.3

当 $M = m$ 时，由质心条件可得 $R = r$ 。因此， μ 未受扰动时的轨道半径为

$$\rho_0 = \sqrt{3}R,$$

而第 1.1 问给出

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{4R^3}.$$

在连接这两个等质量物体的线段的垂直平分线上，距 O 为 ρ 的点到每个物体的距离均为 $\sqrt{R^2 + \rho^2}$ 。两个物体产生的引力的横向分量相互抵消，因此径向向内的加速度为

$$g(\rho) = \frac{2GM\rho}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

这就确定了径向力的线性近似：由镜像对称性可知，相对于垂直平分线的小角度偏离只会在二阶引起径向分量的变化。

利用题目规定的角动量守恒条件。单位质量的角动量为

$$h = \rho^2 \dot{\theta} = \rho_0^2 \omega_0.$$

径向运动方程

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 = -g(\rho),$$

变为

$$\ddot{\rho} = \frac{h^2}{\rho^3} - \frac{2GM\rho}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

令

$$\rho = \rho_0 + \xi, \quad |\xi| \ll \rho_0,$$

并仅保留关于 ξ 的线性项。第一项展开为

$$\frac{h^2}{\rho^3} = \rho_0 \omega_0^2 - 3\omega_0^2 \xi + O(\xi^2).$$

对于向内的引力加速度，

$$g'(\rho) = \frac{2GM}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{3\rho^2}{R^2 + \rho^2} \right).$$

由于 $\rho_0^2 = 3R^2$,

$$g'(\rho_0) = \omega_0^2 \left(1 - \frac{9}{4} \right) = -\frac{5}{4} \omega_0^2.$$

因此

$$g(\rho) = \rho_0 \omega_0^2 - \frac{5}{4} \omega_0^2 \xi + O(\xi^2).$$

平衡态对应的各项相互抵消，剩下

$$\ddot{\xi} = \left(-3 + \frac{5}{4} \right) \omega_0^2 \xi = -\frac{7}{4} \omega_0^2 \xi.$$

这就是简谐振子的运动方程，因此

$$\boxed{\omega_{\text{osc}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \omega_0}.$$

这一结果使用了题目所规定的角动量守恒的径向近似。对于在两个转动物体产生的引力场中的不受限制的运动，关于 O 的角动量一般并不守恒。

1.4

将该星座视为边长恒为 L 的等边三角形，在其平面内转动，角速度为

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

设 $\mathbf{r}_A$ 和 $\mathbf{r}_B$ 为两艘航天器相对于三角形中心的位置矢量。它们的速度为

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_A, \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_B,$$

其中 $\mathbf{V}$ 为中心的共同平移速度。

两式相减，消去这一共同运动：

$$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A).$$

两艘航天器之间的位移矢量位于三角形平面内，大小为 L ，因此它垂直于 $\boldsymbol{\Omega}$ 。于是

$$v_{\text{rel}} = \Omega L = \frac{2\pi L}{T}.$$

取

$$L = 5.0 \times 10^6 \text{ km} = 5.0 \times 10^9 \text{ m}, \quad T \simeq 365 \times 24 \times 3600 \text{ s},$$

可得

$$v_{\text{rel}} \simeq 996 \text{ m s}^{-1}.$$

保留两位有效数字，

$$v_{\text{rel}} \simeq 1.0 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} = 1.0 \text{ km s}^{-1}.$$

相对速度垂直于连接两艘航天器的臂，这与该理想化运动中臂长保持不变相一致。

解答已与官方解答核对。

题目 2：带电肥皂泡

一个球形肥皂泡的内部空气密度为 ρ_i ，温度为 T_i ，半径为 R_0 ，其周围空气的密度为 ρ_a ，大气压强为 P_a ，温度为 T_a 。肥皂膜的表面张力系数为 γ ，密度为 ρ_s ，厚度为 t 。肥皂膜的质量和表面张力系数不随温度变化。假设 $R_0 \gg t$ 。

使肥皂液与空气之间的界面面积增加 dA 所需的能量增量 dE 为 $dE = \gamma dA$ ，其中 γ 为膜的表面张力系数。

2.1 求比值 $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a}$ ，用 γ 、 P_a 和 R_0 表示。[1.7 分]

2.2 利用 $\gamma = 0.0250 \text{ N m}^{-1}$ 、 $R_0 = 1.00 \text{ cm}$ 和 $P_a = 1.013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$ ，求 $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1$ 的数值。[0.4 分]

2.3 肥皂泡刚形成时，内部空气较暖。求使肥皂泡能够悬浮在静止空气中的 T_i 的最小数值。取 $T_a = 300 \text{ K}$ 、 $\rho_s = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ 、 $\rho_a = 1.30 \text{ kg m}^{-3}$ 、 $t = 100 \text{ nm}$ 和 $g = 9.80 \text{ m s}^{-2}$ 。[2.0 分]

肥皂泡形成一段时间后，将与周围环境达到热平衡。此时，静止空气中的肥皂泡自然会向地面下落。

2.4 求使达到热平衡的肥皂泡不下落所需的上升气流（向上流动的空气）的最小速度 u 。用 ρ_s 、 R_0 、 g 、 t 和空气的黏度系数 η 表示答案。可以假设速度足够小，因而斯托克斯定律适用，并忽略温度降至热平衡温度时半径的变化。斯托克斯定律给出的阻力为 $F = 6\pi\eta R_0 u$ 。[1.6 分]

2.5 取 $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ，计算 u 的数值。[0.4 分]

上述计算表明，含表面张力系数 γ 的项对结果精度的提高很小。在以下所有问题中，均可忽略表面张力项。

2.6 若现在使这个球形肥皂泡均匀带电，总电荷量为 q ，求描述其新半径 R_1 的方程，用 R_0 、 P_a 、 q 和真空介电常数 ϵ_0 表示。[2.0 分]

2.7 假设总电荷量不太大（即 $\frac{q^2}{\epsilon_0 R_0^4} \ll P_a$ ），且肥皂泡的半径仅有微小增加，求 ΔR ，其中 $R_1 = R_0 + \Delta R$ 。

已知当 $x \ll 1$ 时， $(1+x)^n \approx 1+nx$ 。[0.7 分]

2.8 为使肥皂泡在静止空气中静止悬浮，电荷量 q 的大小应为多少？用 t 、 ρ_a 、 ρ_s 、 ϵ_0 、 R_0 、 P_a 表示。并计算 q 的数值。真空介电常数 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ farad/m}$ 。[1.2 分]

题目译自官方英文原文。

答案

• 2.1

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = 1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}.$$

• 2.2

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1 = 9.87 \times 10^{-5}.$$

• 2.3

$$T_{i,\min} = T_a \frac{1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}}{1 - \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0}} = 307 \text{ K}.$$

• 2.4，忽略微小的表面张力修正：

$$u_{\min} \simeq \frac{2\rho_s R_0 t g}{3\eta}.$$

• 2.5

$$u_{\min} \simeq 0.36 \text{ m s}^{-1}.$$

• 2.6

$$R_1^4 - R_0^3 R_1 - \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 P_a} = 0, \quad R_1 \geq R_0.$$

• 2.7

$$\Delta R \simeq \frac{q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_0^3}.$$

• 2.8, 采用微小膨胀近似:

$$|q| \simeq \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}} = 2.56 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

不对膨胀作线性化处理时, 薄膜近似下的结果为

$$|q| = \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}} \left(1 + \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0}\right)^{1/6} = 2.57 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

解答

将空气视为理想气体, 且肥皂泡内外空气的成分相同。在薄膜近似下, 肥皂泡的体积和肥皂膜的质量为

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad m_s \simeq 4\pi R^2 t \rho_s.$$

膜有两个肥皂液与空气之间的界面, 但其质量仅为一个球壳的质量。

2.1

两个界面都对表面能有贡献。忽略两者半径的微小差异,

$$E_s = 2\gamma(4\pi R^2) = 8\pi\gamma R^2.$$

对于微小的向外位移 dR , 力学平衡要求

$$(P_i - P_a) dV = dE_s.$$

由于

$$dV = 4\pi R^2 dR, \quad dE_s = 16\pi\gamma R dR,$$

内部的附加压强为

$$P_i - P_a = \frac{4\gamma}{R_0}.$$

理想气体关系式 $P = \rho \mathcal{R}_{\text{air}} T$ 中, 内外空气的比气体常数相同, 因此

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = \frac{P_i}{P_a} = 1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}.$$

2.2

取 $R_0 = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$,

$$P_i - P_a = \frac{4(0.0250)}{1.00 \times 10^{-2}} = 10.0 \text{ Pa}.$$

因此

$$\boxed{\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1 = \frac{10.0}{1.013 \times 10^5} = 9.87 \times 10^{-5}}.$$

2.3

向上的浮力等于所排开周围空气的重力：

$$F_B = \rho_a V_0 g, \quad V_0 = \frac{4}{3} \pi R_0^3.$$

在恰能悬浮的最低温度下，浮力恰好与内部空气和肥皂膜的总重力平衡：

$$\rho_a V_0 g = \rho_i V_0 g + 4\pi R_0^2 t \rho_s g.$$

因此，

$$\rho_i = \rho_a - \frac{3\rho_s t}{R_0}.$$

代入数值得

$$\frac{3\rho_s t}{R_0} = \frac{3(1000)(1.00 \times 10^{-7})}{1.00 \times 10^{-2}} = 0.0300 \text{ kg m}^{-3},$$

所以中性浮力条件要求

$$\rho_i = 1.27 \text{ kg m}^{-3}.$$

利用第 2.1 问的结果，

$$T_{i,\min} = \frac{\rho_a T_a}{\rho_i} \left(1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0} \right) = T_a \frac{1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}}{1 - \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0}}.$$

于是，

$$T_{i,\min} = 300 \frac{1 + 9.8717 \times 10^{-5}}{1 - 0.0300/1.30} = 307.117 \text{ K},$$

即

$$\boxed{T_{i,\min} = 307 \text{ K}}.$$

温度更高时，内部空气的密度更低，因而合力向上。

2.4

达到热平衡时， $T_i = T_a$ 。由第 2.1 问可得

$$\rho_i - \rho_a = \rho_a \frac{4\gamma}{P_a R_0}.$$

对于静止的肥皂泡，向上的斯托克斯阻力必须与其重力减去浮力之差平衡：

$$6\pi\eta R_0 u_{\min} = 4\pi R_0^2 t \rho_s g + \frac{4}{3} \pi R_0^3 (\rho_i - \rho_a) g.$$

因此，保留表面张力项时，

$$u_{\min} = \frac{2\rho_s R_0 t g}{3\eta} + \frac{8\rho_a \gamma R_0 g}{9\eta P_a}.$$

第二项与第一项之比为

$$\frac{4\rho_a\gamma}{3P_a\rho_s t} = 4.28 \times 10^{-3}.$$

因此，表面张力使所需速度仅改变约 0.43%。忽略这一修正，便得到用题目所要求的参数表示的表达式：

$$u_{\min} \simeq \frac{2\rho_s R_0 t g}{3\eta}.$$

这里使用了题目规定的斯托克斯阻力定律，并按题意忽略了冷却过程中的半径变化。

2.5

代入给定数值，

$$u_{\min} \simeq \frac{2(1000)(1.00 \times 10^{-2})(1.00 \times 10^{-7})(9.80)}{3(1.8 \times 10^{-5})} = 0.362963 \text{ m s}^{-1}.$$

因此，

$$u_{\min} \simeq 0.36 \text{ m s}^{-1}.$$

计入表面张力后得到 $0.364516 \text{ m s}^{-1}$ ，保留两位有效数字时，答案相同。

2.6

现在按题意忽略表面张力。充电前，肥皂泡的温度为 T_a ，内部压强为 P_a 。泡内空气的质量守恒，最终状态的温度也为 T_a 。因此，由理想气体定律可得

$$P_i V_1 = P_a V_0, \quad P_i = P_a \frac{R_0^3}{R_1^3}.$$

均匀带电球壳的电场为

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R),$$

内部电场为零。其静电能为

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty E(r)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

在电荷量固定时，半径增大会使这一能量降低。相应的向外电压力为

$$p_e = -\frac{dU_e}{dV} = -\frac{dU_e/dR}{4\pi R^2} = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4}.$$

力学平衡要求

$$P_i + p_e = P_a.$$

当 $R = R_1$ 时，

$$P_a \frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R_1^4} = P_a.$$

两边乘以 R_1^4/P_a ，得到

$$R_1^4 - R_0^3 R_1 - \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 P_a} = 0.$$

当电荷量非零时，物理解满足 $R_1 > R_0$ 。

2.7

令

$$x = \frac{\Delta R}{R_0} \ll 1, \quad R_1 = R_0(1 + x).$$

第 2.6 问中的方程变为

$$R_0^4[(1 + x)^4 - (1 + x)] = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 P_a}.$$

保留到一阶，

$$(1 + x)^4 - (1 + x) \simeq (1 + 4x) - (1 + x) = 3x.$$

因此

$$3R_0^4 x = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 P_a},$$

从而

$$\boxed{\Delta R \simeq \frac{q^2}{96\pi^2\epsilon_0 P_a R_0^3}}.$$

2.8

充电使排开的空气体积增大，而肥皂泡的总质量保持不变。

充电前，内部空气的密度等于 ρ_a ，因为此时忽略表面张力，且其压强和温度均等于周围空气的相应值。因此，内部空气的质量为

$$m_i = \rho_a V_0.$$

保持不变的肥皂膜质量为

$$m_s = 4\pi R_0^2 t \rho_s.$$

这里 t 是初始厚度；膜在膨胀过程中变薄。

充电后的中性浮力条件要求

$$\rho_a V_1 g = (\rho_a V_0 + m_s)g.$$

因此

$$\rho_a \frac{4}{3}\pi(R_1^3 - R_0^3) = 4\pi R_0^2 t \rho_s,$$

即

$$R_1^3 - R_0^3 = \frac{3\rho_s t R_0^2}{\rho_a}.$$

对于微小膨胀，

$$R_1^3 - R_0^3 \simeq 3R_0^2 \Delta R,$$

所以所需的半径增量为

$$\Delta R \simeq \frac{\rho_s t}{\rho_a}.$$

代入数值得

$$\Delta R \simeq \frac{1000(1.00 \times 10^{-7})}{1.30} = 7.69 \times 10^{-5} \text{ m}, \quad \frac{\Delta R}{R_0} \simeq 0.00769.$$

将此增量与第 2.7 问的结果相等, 得到

$$\frac{q^2}{96\pi^2\epsilon_0 P_a R_0^3} = \frac{\rho_s t}{\rho_a},$$

因此

$$|q| \simeq \sqrt{\frac{96\pi^2\epsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}}.$$

代入数值得

$$|q| \simeq \sqrt{\frac{96\pi^2(8.85 \times 10^{-12})(1.013 \times 10^5)(1000)(1.00 \times 10^{-7})(1.00 \times 10^{-2})^3}{1.30}},$$

所以

$$|q| \simeq 2.56 \times 10^{-7} \text{ C} = 0.256 \text{ } \mu\text{C}.$$

也可以不对膨胀作线性化处理来求得结果。由中性浮力条件可得

$$R_1 = R_0 \left(1 + \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0} \right)^{1/3}.$$

将其与第 2.6 问的结果结合,

$$q^2 = 32\pi^2\epsilon_0 P_a R_1 (R_1^3 - R_0^3) = \frac{96\pi^2\epsilon_0 P_a \rho_s t R_0^2 R_1}{\rho_a}.$$

因此, 未作展开的薄膜近似结果为

$$|q| = \sqrt{\frac{96\pi^2\epsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}} \left(1 + \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0} \right)^{1/6} = 2.57 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

无论电荷为正还是为负, 产生的膨胀都相同, 因为电压力取决于 q^2 。

解答已与官方解答核对。

题目 3：纪念卢瑟福发现原子核一百周年：中性原子对离子的散射

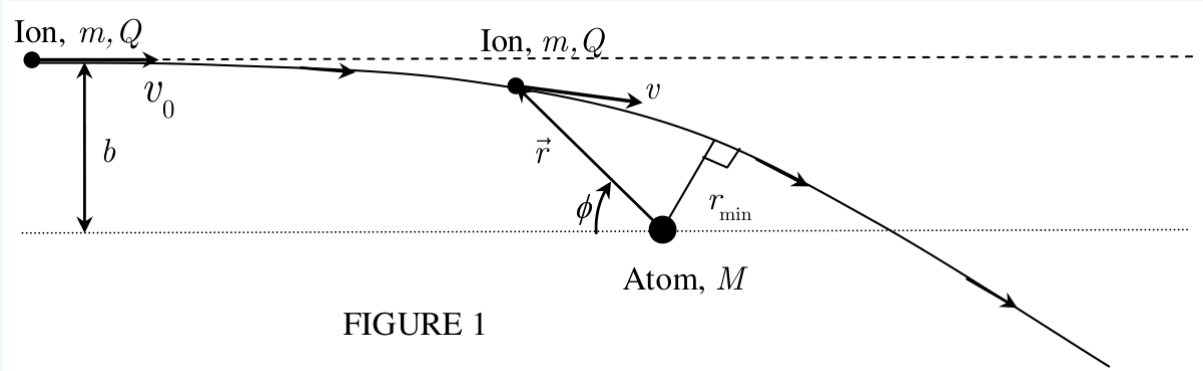


图 1

一个质量为 m 、电荷量为 Q 的离子，以非相对论性的初速度 v_0 从很远处向一个中性原子附近运动。该原子的质量为 $M \gg m$ ，电极化率为 α 。碰撞参数为 b ，如图 1 所示。

原子在入射（正在接近的）离子产生的电场 $\vec{E}$ 中瞬时发生极化。由此产生的原子电偶极矩为 $\vec{p} = \alpha \vec{E}$ 。本题忽略任何辐射损失。

3.1 一个理想电偶极子 $\vec{p}$ 位于原点 O ，求图 2 中沿 $\vec{p}$ 方向、距原点为 r 处的电场强度 $\vec{E}_p$ 。[1.2 分]

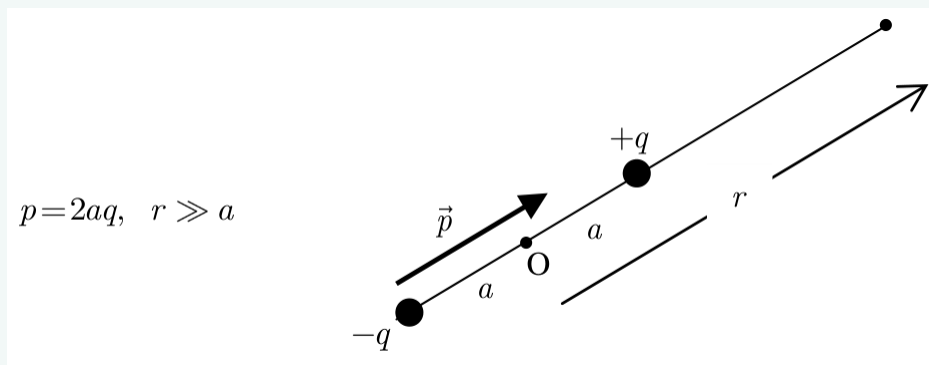


图 2

3.2 求极化后的原子作用在离子上的力 $\vec{f}$ 的表达式。证明无论离子的电荷为正还是为负，该力均为吸引力。[3.0 分]

3.3 用 α 、 Q 和 r 表示离子与原子相互作用电势能。[0.9 分]

3.4 求图 1 所示的最近接近距离 $r_{\min}$ 的表达式。[2.4 分]

3.5 如果碰撞参数 b 小于某一临界值 b_0 ，离子将沿螺旋轨道向原子靠近。在这种情况下，离子将被中和，而原子则变为带电状态。这一过程称为“电荷交换”相互作用。从离子的角度看，原子发生这种“电荷交换”碰撞的截面积 $A = \pi b_0^2$ 是多少？[2.5 分]

题目译自官方英文原文。

答案

令 $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ ，并令 $\hat{r}$ 从原子指向离子。取 $U(\infty) = 0$ 。

• 3.1

$$\vec{E}_p = \frac{2k}{r^3} \vec{p}.$$

• 3.2

$$\vec{f} = -\frac{2\alpha k^2 Q^2}{r^5} \hat{\mathbf{r}}.$$

无论 Q 为正还是为负，该力均为吸引力。

• 3.3

$$U(r) = -\frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4} = -\frac{\alpha Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}.$$

• 3.4 对于散射轨道， $b > b_0$,

$$r_{\min} = \left[\frac{b^2 + \sqrt{b^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}}}{2} \right]^{1/2}.$$

当 $b = b_0$ 时，离子渐近地接近 $r = b_0/\sqrt{2}$ 。当 $b < b_0$ 时，不存在正的径向转折点。

• 3.5

$$b_0 = \left(\frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} \right)^{1/4},$$

$$A = \frac{2\pi k|Q|}{v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \frac{|Q|}{2\epsilon_0 v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}}.$$

解答

由于 $M \gg m$ ，我们忽略原子的反冲，将其位置视为固定。采用题目指定的理想感应电偶极子模型，其中 $\alpha > 0$ 。

3.1

用相距 $2a$ 的电荷 $+q$ 和 $-q$ 表示电偶极子，于是 $p = 2aq$ 。在轴线上沿 $\vec{p}$ 方向的一点，该点到两个电荷的距离分别为 $r - a$ 和 $r + a$ 。

两个电荷产生的电场方向相反，因此

$$\vec{E}_p = kq \left[\frac{1}{(r - a)^2} - \frac{1}{(r + a)^2} \right] \hat{\mathbf{p}},$$

其中 $\hat{\mathbf{p}}$ 为沿电偶极矩方向的单位矢量。

将分式通分合并，得

$$\vec{E}_p = \frac{4kqar}{(r^2 - a^2)^2} \hat{\mathbf{p}}.$$

在理想电偶极子极限 $a/r \rightarrow 0$ 下，保持 $p = 2aq$ 不变，得

$$\vec{E}_p = \frac{2kp}{r^3} \hat{\mathbf{p}} = \frac{2k}{r^3} \vec{p}.$$

电偶极子轴线另一侧的电场也沿 $\vec{p}$ 方向，且在相同距离处具有相同的大小。

3.2

设离子相对于原子的位置为 $\vec{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ 。离子在原子处产生的电场为

$$\vec{E}_{\text{ion}} = -\frac{kQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

因此，感应电偶极矩为

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_{\text{ion}} = -\frac{\alpha kQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

离子位于该电偶极子的轴线上。利用 3.1 的结果，得

$$\vec{E}_p = \frac{2k}{r^3} \vec{p} = -\frac{2\alpha k^2 Q}{r^5} \hat{\mathbf{r}}.$$

因此，离子所受的力为

$$\vec{f} = Q\vec{E}_p = -\frac{2\alpha k^2 Q^2}{r^5} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 r^5} \hat{\mathbf{r}}.$$

由于 $\alpha > 0$ ，且电荷量以 Q^2 的形式出现，无论 Q 为正还是为负，力总是指向原子。

3.3

对于保守有心力，

$$f_r = -\frac{dU}{dr}.$$

选取无穷远处为势能零点，

$$U(r) = -\int_{\infty}^r f_r(s) ds = -\int_{\infty}^r \left(-\frac{2\alpha k^2 Q^2}{s^5} \right) ds.$$

因此，

$$U(r) = -\frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4}.$$

等价地，

$$U = -\frac{1}{2} \alpha E_{\text{ion}}^2.$$

因子 $1/2$ 体现了诱导产生电偶极子所需的能量。事实上，将极化能 $p^2/(2\alpha)$ 与耦合能 $-pE_{\text{ion}}$ 相加，在 $p = \alpha E_{\text{ion}}$ 时便得到 $-\alpha E_{\text{ion}}^2/2$ 。

3.4

该力为有心力，因此离子相对于原子的角动量守恒。角动量的大小由入射轨道确定：

$$L = mv_0 b.$$

机械能也守恒。在无穷远处，势能为零，因此

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} mv_0^2.$$

将动能分为径向和横向两部分，得

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

在散射轨道的最近接近点， $\dot{r} = 0$ 。代入 $L = mv_0 b$ ，得

$$\frac{mv_0^2 b^2}{2r_{\min}^2} - \frac{\alpha k^2 Q^2}{2r_{\min}^4} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

两边乘以 $2r_{\min}^4/(mv_0^2)$ ，得

$$r_{\min}^4 - b^2 r_{\min}^2 + \frac{\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} = 0.$$

这是关于 $r_{\min}^2$ 的一元二次方程，其根为

$$r_{\pm}^2 = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}}}{2}.$$

从无穷远处入射的离子首先到达较大根所对应的位置。因此

$$r_{\min} = \left[\frac{b^2 + \sqrt{b^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}}}{2} \right]^{1/2}.$$

当 $b > b_0$ 时，两根互不相同，其中 b_0 将在下文确定。作为检验，当相互作用趋于零时，该表达式给出 $r_{\min} \rightarrow b$ ，与直线运动的预期相符。

3.5

径向运动由有效势能决定：

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4}.$$

当角动量非零时，在远距离处，正的离心项占主导；在近距离处，吸引项占主导。由此形成的势垒可以阻止离子到达原子。

当两个径向转折点合并时，便出现临界轨道。因此，3.4 中得到的判别式必须为零：

$$b_0^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} = 0.$$

由此可得

$$b_0 = \left(\frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} \right)^{1/4}.$$

当 $b < b_0$ 时，径向能量方程

$$\dot{r}^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{b^2}{r^2} + \frac{\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2 r^4} \right)$$

不存在正的零点。因此，入射离子会继续向内运动，并在题目的假设下发生电荷交换。

当恰好满足 $b = b_0$ 时，

$$\dot{r}^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{b_0^2}{2r^2} \right)^2.$$

入射离子渐近地接近不稳定圆轨道的半径

$$r_c = \frac{b_0}{\sqrt{2}}$$

所对应的位置。这一边界在碰撞参数平面内的面积为零，因此不影响截面。

被俘获的轨道在该平面内占据一个半径为 b_0 的圆盘。因此，

$$A = \pi b_0^2 = \pi \sqrt{\frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}},$$

或者

$$A = \frac{2\pi k|Q|}{v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \frac{|Q|}{2\varepsilon_0 v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}}.$$

当输入量采用国际单位制时， A 的单位为 m^2 。题目未给出任何参数的具体数值。

解答已与官方解答核对。