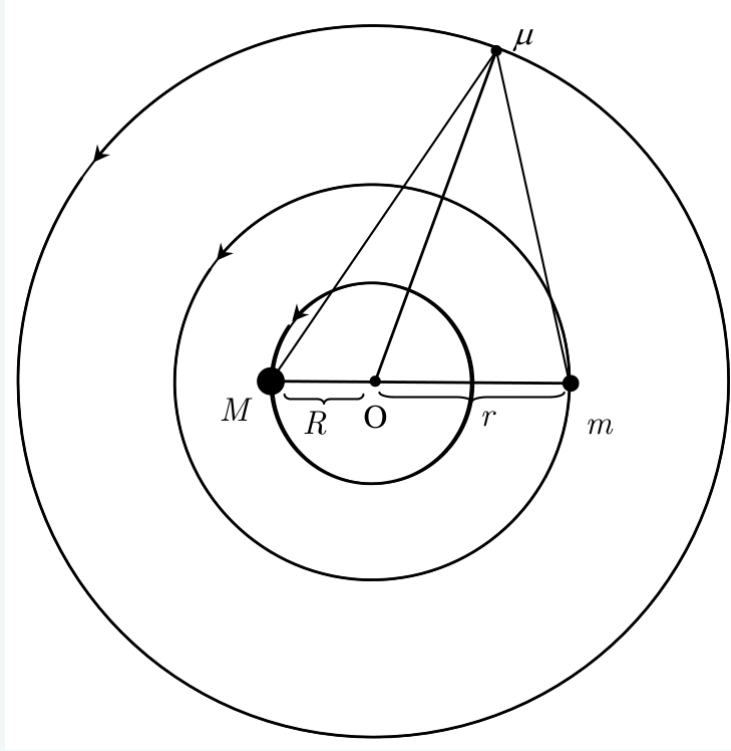


IPhO 2011

Teorik sorular ve çözümler · Bangkok, Tayland · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2011/

Soru 1: Bir Üç Cisim Problemi ve LISA



ŞEKİL 1 Üç cismin aynı düzlemdeki yörüngeleri.

1.1 Birbirlerini kütleçekim kuvvetiyle çeken M ve m kütleleri, ortak kütle merkezleri etrafında sırasıyla R ve r yarıçaplı dairesel yörüngelerde hareket etmektedir. M ile m 'yi birleştiren doğrunun ω_0 açısal hızını R, r, M, m ve evrensel kütleçekim sabiti G cinsinden bulunuz.

[1.5 puan]

1.2 Sonsuz küçük μ kütleli üçüncü bir cisim, Şekil 1'de gösterildiği gibi hem M 'ye hem de m 'ye göre durgun kalacak biçimde, aynı kütle merkezi etrafında ve diğer yörüngelerle aynı düzlemde bulunan dairesel bir yörüngeye yerleştirilmektedir. Sonsuz küçük kütleli M ve m ile aynı doğru üzerinde olmadığını varsayınız. Aşağıdaki büyüklüklerin değerlerini R ve r cinsinden bulunuz:

[3.5 puan]

1.2.1 μ 'nün M 'ye uzaklığı.

1.2.2 μ 'nün m 'ye uzaklığı.

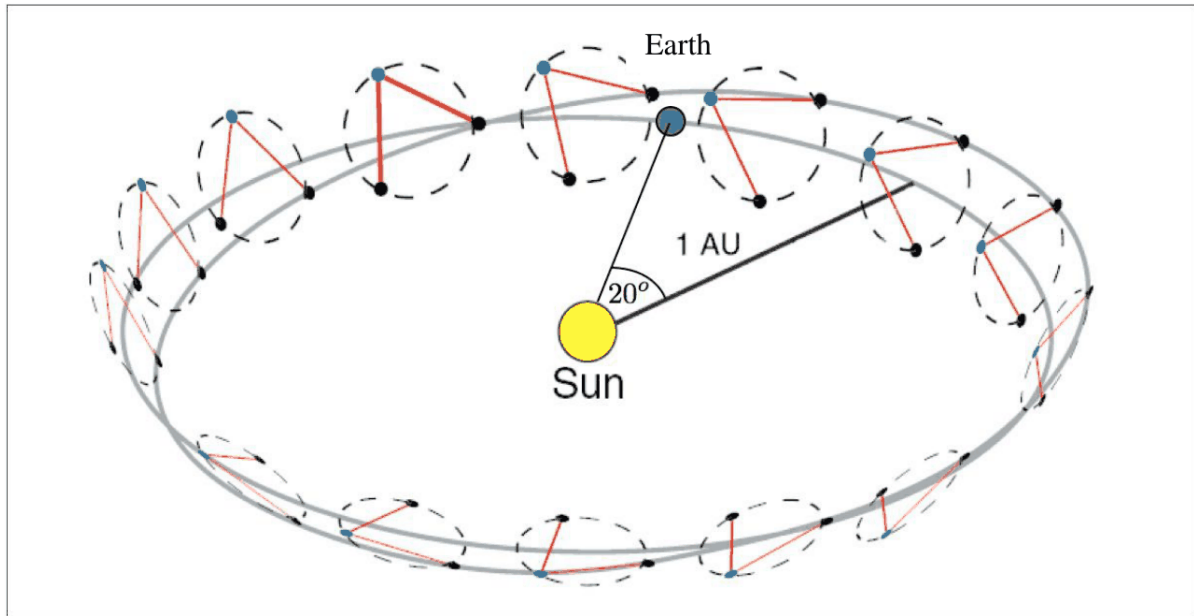
1.2.3 μ 'nün kütle merkezine uzaklığı.

1.3 $M = m$ durumunu ele alınız. Şimdi μ 'ye küçük bir radyal pertürbasyon ($O\mu$ doğrultusunda) uygulanırsa, μ 'nün pertürbasyon uygulanmamış konumu etrafındaki salınımının açısal frekansı ω_0 cinsinden nedir? μ 'nün açısal momentumunun korunduğunu varsayınız.

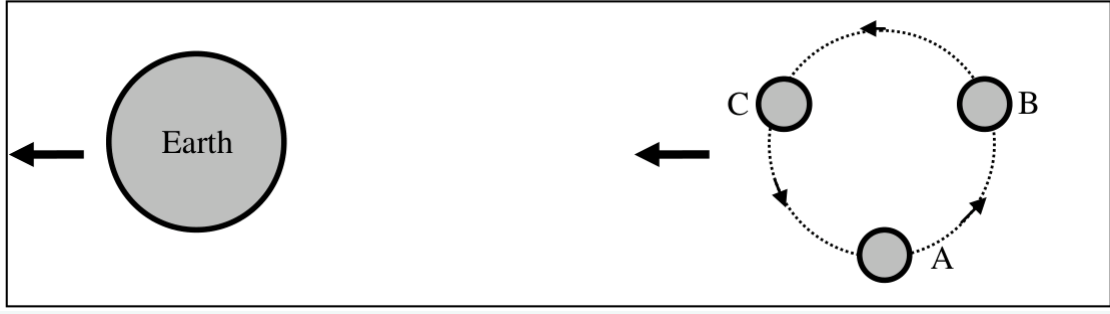
[3.2 puan]

Lazer İnterferometrisi Uzay Anteni (LISA), düşük frekanslı kütleçekim dalgalarını algılamak için kullanılan üç özdeş uzay aracından oluşan bir gruptur. Uzay araçlarının her biri, Şekil 2 ve Şekil 3'te gösterildiği gibi bir eşkenar üçgenin köşelerine yerleştirilmiştir. Kenarlar (ya da 'kollar') yaklaşık 5.0 milyon kilometre uzunluğundadır. LISA takımı yıldızı, Güneş etrafında Dünya'ninkine benzer bir yörüngede, Dünya'yı 20° geriden takip eder. Araçların her biri, Güneş etrafında hafifçe eğik ayrı bir yörüngede hareket eder. Sonuç olarak üç uzay aracı, ortak merkezleri etrafında yılda bir tur dönmüş gibi görünür.

Birbirlerine sürekli olarak lazer sinyalleri gönderir ve birbirlerinden gelen sinyalleri alırlar. Genel olarak, girişimölçüm yöntemleriyle kol uzunluklarındaki çok küçük değişimleri ölçerek kütleçekim dalgalarını algırlar. Yakın galaksilerde karadelikler gibi büyük kütleli cisimlerin çarpışması, kütleçekim dalgası kaynaklarına bir örnektir.



ŞEKİL 2 LISA yörüngesinin gösterimi. Üç uzay aracı, kütle merkezleri etrafında 1 yıllık periyotla döner. Başlangıçta Dünya'yı 20° geriden takip ederler (Görsel: D.A. Shaddock, "Lazer İnterferometrisi Uzay Antenine Genel Bir Bakış", *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 2009, **26**, ss.128-132.).



ŞEKİL 3 Dünya'yı geriden takip eden üç uzay aracının büyütülmüş görünümü. A, B ve C, eşkenar üçgenin köşelerindeki üç uzay aracıdır.

1.4 Üç uzay aracını içeren düzlemde, bir uzay aracının diğerine göre bağlı sürati nedir?

[1.8 puan]

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- 1.1

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G(M+m)}{(R+r)^3}}$$

- 1.2.1

$$d_{\mu M} = R + r$$

- 1.2.2

$$d_{\mu m} = R + r$$

- 1.2.3

$$d_{\mu O} = \sqrt{R^2 + Rr + r^2}$$

- 1.3, belirtilen açısal momentumun korunumu varsayımı kullanılarak:

$$\omega_{\text{osc}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \omega_0$$

- 1.4, kol uzunluğu $L = 5.0 \times 10^9 \text{ m}$ ve dönme periyodu $T = 1 \text{ year}$ için:

$$v_{\text{rel}} = \frac{2\pi L}{T} \simeq 1.0 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} = 1.0 \text{ km s}^{-1}$$

Çözüm

1.1

Kütleler arasındaki uzaklık $d = R + r$ 'dir. O bu kütlelerin kütle merkezi olduğundan,

$$MR = mr.$$

Her kütlenin merkezci ivmesini kütleçekim kuvveti sağlar:

$$M\omega_0^2 R = \frac{GMm}{d^2}, \quad m\omega_0^2 r = \frac{GMm}{d^2}.$$

Denklemler karşılık gelen kütlelere bölünüp toplandığında

$$\omega_0^2(R + r) = \frac{G(M + m)}{d^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{G(M + m)}{(R + r)^3}}}.$$

1.2.1 ve 1.2.2

μ sonsuz küçük olduğundan, M ve m 'nin hareketini etkilemez. Onlara göre durgun kalabilmesi için O etrafında ω_0 açısal hızıyla dolanması gerekir.

Seçilen bir anda,

$$O = (0, 0), \quad M = (-R, 0), \quad m = (r, 0), \quad \mu = (x, y),$$

alalım; burada $y \neq 0$ 'dır. İki kütleyle olan uzaklıklarını

$$a = \sqrt{(x + R)^2 + y^2}, \quad b = \sqrt{(x - r)^2 + y^2}$$

olarak yazalım.

İvmesi $-\omega_0^2(x, y)$ 'dir. Dolayısıyla Newton yasası, deneme kütlesi μ sadeleştirildikten sonra,

$$\begin{aligned} \omega_0^2 x &= \frac{GM(x + R)}{a^3} + \frac{Gm(x - r)}{b^3}, \\ \omega_0^2 y &= \frac{GM y}{a^3} + \frac{Gm y}{b^3} \end{aligned}$$

sonucunu verir. $y \neq 0$ olduğundan, ikinci denklemden

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{a^3} + \frac{Gm}{b^3}$$

elde edilir. Bu denklemin x katı birinci denklemden çıkarıldığında

$$0 = \frac{GMR}{a^3} - \frac{Gmr}{b^3}$$

bulunur. $MR = mr$ kullanılarak $a = b$ elde edilir. Bunun sonucunda,

$$\omega_0^2 = \frac{G(M + m)}{a^3}.$$

1.1 kısmıyla karşılaştırıldığında $a = R + r$ bulunur ve dolayısıyla

$$\boxed{1.2.1: d_{\mu M} = R + r}, \quad \boxed{1.2.2: d_{\mu m} = R + r}.$$

Böylece üç cisim bir eşkenar üçgenin köşelerinde bulunur.

1.2.3

Sonlu kütleli iki cismi birleştiren doğru parçasının orta noktasının koordinatı

$$x_{\text{mid}} = \frac{r - R}{2}$$

şeklindedir. Kenar uzunluğu $R + r$ olan bir eşkenar üçgenin üçüncü köşesinin bu orta noktaya dik doğrultudaki uzaklığı $\sqrt{3}(R + r)/2$ 'dir. Dolayısıyla μ 'nün olası iki konumu

$$x = \frac{r - R}{2}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(R + r)$$

şeklindedir. O 'ya uzaklığı

$$d_{\mu O}^2 = x^2 + y^2 = \frac{(r - R)^2 + 3(R + r)^2}{4} = R^2 + Rr + r^2$$

bağıntısını sağlar. Böylece,

$$d_{\mu O} = \sqrt{R^2 + Rr + r^2}.$$

1.3

$M = m$ olduğunda, kütle merkezi koşulu $R = r$ verir. Dolayısıyla μ 'nün pertürbasyon uygulanmamış yörüngesinin yarıçapı

$$\rho_0 = \sqrt{3}R,$$

olur ve 1.1 kısmından

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{4R^3}$$

elde edilir.

Eşit kütleleri birleştiren doğru parçasının orta dikmesi üzerinde, O 'ya uzaklığı ρ olan bir noktanın her bir kütleyle uzaklığı $\sqrt{R^2 + \rho^2}$ 'dir. Kütleçekim ivmelerinin enine bileşenleri birbirini götürür; dolayısıyla içeriye doğru radyal ivme

$$g(\rho) = \frac{2GM\rho}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

olur. Bu, radyal kuvveti doğrusal mertebede belirler: yansıma simetrisi nedeniyle, orta dikmeden küçük bir açısal sapma radyal bileşeni ancak ikinci mertebede değiştirir.

Soruda belirtilen açısal momentumun korunumu varsayımını kullanalım. Birim kütle başına açısal momentum

$$h = \rho^2 \dot{\theta} = \rho_0^2 \omega_0$$

şeklindedir. Radyal hareket denklemi olan

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 = -g(\rho),$$

şu hâle gelir:

$$\ddot{\rho} = \frac{h^2}{\rho^3} - \frac{2GM\rho}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

$$\rho = \rho_0 + \xi, \quad |\xi| \ll \rho_0,$$

koyalım ve yalnızca ξ 'ye göre doğrusal terimleri turalım. İlk terimin açılımı

$$\frac{h^2}{\rho^3} = \rho_0 \omega_0^2 - 3\omega_0^2 \xi + O(\xi^2)$$

şeklindedir. İçeriye doğru kütleçekim ivmesi için,

$$g'(\rho) = \frac{2GM}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{3\rho^2}{R^2 + \rho^2} \right).$$

$\rho_0^2 = 3R^2$ olduğundan,

$$g'(\rho_0) = \omega_0^2 \left(1 - \frac{9}{4} \right) = -\frac{5}{4} \omega_0^2.$$

Böylece

$$g(\rho) = \rho_0 \omega_0^2 - \frac{5}{4} \omega_0^2 \xi + O(\xi^2).$$

Denge terimleri birbirini götürür ve geriye

$$\ddot{\xi} = \left(-3 + \frac{5}{4} \right) \omega_0^2 \xi = -\frac{7}{4} \omega_0^2 \xi$$

kalır. Bu, basit harmonik salınıcı denklemdir; dolayısıyla

$$\boxed{\omega_{\text{osc}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \omega_0}.$$

Bu sonuç, açısal momentumun korunduğunun kabul edildiği radyal yaklaşıma dayanır. Dönen iki kütleli kütleçekim alanında kısıtlanmamış hareket için O 'ya göre açısal momentum genel olarak korunmaz.

1.4

Takımyıldızı, kenar uzunluğu sabit L olan ve kendi düzleminde

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}$$

açısal hızıyla dönen bir eşkenar üçgen olarak ele alalım. $\mathbf{r}_A$ ve $\mathbf{r}_B$, iki uzay aracının üçgenin merkezine göre konumları olsun. Hızları

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_A, \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_B,$$

şeklindedir; burada $\mathbf{V}$, merkezin ortak öteleme hızıdır.

Çıkarma işlemi bu ortak hareketi ortadan kaldırır:

$$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A).$$

İki araç arasındaki konum farkı vektörü üçgenin düzleminde yer alır ve büyüklüğü L 'dir; dolayısıyla $\boldsymbol{\Omega}$ 'ya diktir. Bu nedenle

$$v_{\text{rel}} = \Omega L = \frac{2\pi L}{T}.$$

$$L = 5.0 \times 10^6 \text{ km} = 5.0 \times 10^9 \text{ m}, \quad T \simeq 365 \times 24 \times 3600 \text{ s},$$

değerleriyle

$$v_{\text{rel}} \simeq 996 \text{ m s}^{-1}$$

elde edilir. İki anlamlı basamakla,

$$\boxed{v_{\text{rel}} \simeq 1.0 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} = 1.0 \text{ km s}^{-1}}.$$

Bağıl hız, uzay araçlarını birleştiren kola diktir; bu da idealize edilmiş bu harekette kol uzunluğunun sabit olmasıyla tutarlıdır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Elektrikle Yüklenmiş Bir Sabun Köpüğü

İçindeki havanın yoğunluğu ρ_i , sıcaklığı T_i ve yarıçapı R_0 olan küresel bir sabun köpüğü, yoğunluğu ρ_a , atmosfer basıncı P_a ve sıcaklığı T_a olan havayla çevrilidir. Sabun zarının yüzey gerilimi γ , yoğunluğu ρ_s ve kalınlığı t 'dir. Sabunun kütlesi ve yüzey gerilimi sıcaklıkla değişmez. $R_0 \gg t$ olduğunu varsayın.

Bir sabun-hava ara yüzeyinin alanını dA kadar artırmak için gereken enerji artışı dE , $dE = \gamma dA$ bağıntısıyla verilir; burada γ , zarın yüzey gerilimidir.

2.1 $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a}$ oranını γ , P_a ve R_0 cinsinden bulun. **[1.7 puan]**

2.2 $\gamma = 0.0250 \text{ N m}^{-1}$, $R_0 = 1.00 \text{ cm}$ ve $P_a = 1.013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$ değerlerini kullanarak $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1$ ifadesinin sayısal değerini bulun. **[0.4 puan]**

2.3 Köpük başlangıçta, içinde daha sıcak hava olacak şekilde oluşturulmuştur. Köpüğün durgun havada asılı kalabilmesi için T_i 'nin alması gereken en küçük sayısal değeri bulun. $T_a = 300 \text{ K}$, $\rho_s = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_a = 1.30 \text{ kg m}^{-3}$, $t = 100 \text{ nm}$ ve $g = 9.80 \text{ m s}^{-2}$ değerlerini kullanın. **[2.0 puan]**

Köpük, oluşumundan bir süre sonra çevresiyle ısıl dengeye ulaşacaktır. Durgun havadaki bu köpük doğal olarak yere doğru düşecektir.

2.4 Isıl dengedeki köpüğün düşmesini önleyecek yukarı yönlü bir hava akımının (yukarı doğru akan havanın) en küçük u hızını bulun. Yanıtınızı ρ_s , R_0 , g , t ve havanın viskozite katsayısı η cinsinden verin. Hızın, Stokes yasasının geçerli olacağı kadar küçük olduğunu varsayabilir ve sıcaklık denge değerine düşerken yarıçapta meydana gelen değişimi ihmal edebilirsiniz. Stokes yasasına göre sürüklenme kuvveti $F = 6\pi\eta R_0 u$ 'dur. **[1.6 puan]**

2.5 $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ değerini kullanarak u 'nun sayısal değerini hesaplayın. **[0.4 puan]**

Yukarıdaki hesaplamalar, yüzey gerilimi γ 'yı içeren terimlerin sonucun doğruluğuna çok az katkı sağladığını göstermektedir. Aşağıdaki soruların tümünde yüzey gerilimi terimlerini ihmal edebilirsiniz.

2.6 Bu küresel köpük şimdi, toplam yükü q olacak şekilde düzgün olarak elektrikle yüklenirse, yeni yarıçap R_1 'i R_0 , P_a , q ve boşluğun elektriksel geçirgenliği ϵ_0 cinsinden tanımlayan bir denklem bulun. **[2.0 puan]**

2.7 Toplam yükün çok büyük olmadığını (yani $\frac{q^2}{\epsilon_0 R_0^4} \ll P_a$ olduğunu) ve köpüğün yarıçapında yalnızca küçük bir artış meydana geldiğini varsayarak, $R_1 = R_0 + \Delta R$ eşitliğindeki ΔR 'yi bulun.

$x \ll 1$ için $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ olduğu verilmiştir. **[0.7 puan]**

2.8 Köpüğün durgun havada hareketsiz olarak asılı kalabilmesi için bu q yükünün büyüklüğü $t, \rho_a, \rho_s, \varepsilon_0, R_0, P_a$ cinsinden ne olmalıdır? q 'nın sayısal değerini de hesaplayın. Boşluğun elektriksel geçirgenliği $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ farad/m'dir. **[1.2 puan]**

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

• 2.1

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = 1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}.$$

• 2.2

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1 = 9.87 \times 10^{-5}.$$

• 2.3

$$T_{i,\min} = T_a \frac{1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}}{1 - \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0}} = 307 \text{ K}.$$

• 2.4, yüzey geriliminden kaynaklanan küçük düzeltme ihmal edildiğinde:

$$u_{\min} \simeq \frac{2\rho_s R_0 t g}{3\eta}.$$

• 2.5

$$u_{\min} \simeq 0.36 \text{ m s}^{-1}.$$

• 2.6

$$R_1^4 - R_0^3 R_1 - \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 P_a} = 0, \quad R_1 \geq R_0.$$

• 2.7

$$\Delta R \simeq \frac{q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_0^3}.$$

- 2.8, küçük genleşme yaklaşımı kullanıldığında:

$$|q| \simeq \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}} = 2.56 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

Genleşme doğrusallaştırılmadan elde edilen ince zar sonucu şöyledir:

$$|q| = \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}} \left(1 + \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0}\right)^{1/6} = 2.57 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

Çözüm

Havayı, içeride ve dışarıda aynı bileşime sahip bir ideal gaz olarak ele alıyoruz. İnce zar yaklaşımında köpüğün hacmi ve sabunun kütlesi şöyledir:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad m_s \simeq 4\pi R^2 t \rho_s.$$

Zarın iki sabun-hava ara yüzeyi vardır, ancak kütlesi tek bir kabuğun kütlesidir.

2.1

Her iki ara yüzey de yüzey enerjisine katkıda bulunur. Yarıçapları arasındaki küçük fark ihmal edildiğinde,

$$E_s = 2\gamma(4\pi R^2) = 8\pi\gamma R^2.$$

Dışarı doğru küçük bir dR yer değiştirmesi için mekanik denge şu koşulu gerektirir:

$$(P_i - P_a) dV = dE_s.$$

$$dV = 4\pi R^2 dR, \quad dE_s = 16\pi\gamma R dR,$$

olduğundan, iç basıncın dış basınca göre fazlalığı şöyledir:

$$P_i - P_a = \frac{4\gamma}{R_0}.$$

Her iki tarafta da özgül gaz sabitinin aynı olduğu $P = \rho \mathcal{R}_{\text{air}} T$ ideal gaz bağıntısı şu sonucu verir:

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = \frac{P_i}{P_a} = 1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}.$$

2.2

$R_0 = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$ için,

$$P_i - P_a = \frac{4(0.0250)}{1.00 \times 10^{-2}} = 10.0 \text{ Pa}.$$

Böylece,

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1 = \frac{10.0}{1.013 \times 10^5} = 9.87 \times 10^{-5}.$$

2.3

Yukarı yönlü kaldırma kuvveti, yer değiştirilen çevre havasının ağırlığına eşittir:

$$F_B = \rho_a V_0 g, \quad V_0 = \frac{4}{3} \pi R_0^3.$$

Havada asılı kalmayı sağlayan en düşük sıcaklıkta kaldırma kuvveti, içerideki hava ile sabunun toplam ağırlığını tam olarak dengeler:

$$\rho_a V_0 g = \rho_i V_0 g + 4\pi R_0^2 t \rho_s g.$$

Dolayısıyla,

$$\rho_i = \rho_a - \frac{3\rho_s t}{R_0}.$$

Sayısal olarak,

$$\frac{3\rho_s t}{R_0} = \frac{3(1000)(1.00 \times 10^{-7})}{1.00 \times 10^{-2}} = 0.0300 \text{ kg m}^{-3},$$

olduğundan, nötr yüzebilirlik koşulu şunu gerektirir:

$$\rho_i = 1.27 \text{ kg m}^{-3}.$$

2.1 kısmındaki sonuç kullanıldığında,

$$T_{i,\min} = \frac{\rho_a T_a}{\rho_i} \left(1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0} \right) = T_a \frac{1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}}{1 - \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0}}.$$

Bunun sonucunda,

$$T_{i,\min} = 300 \frac{1 + 9.8717 \times 10^{-5}}{1 - 0.0300/1.30} = 307.117 \text{ K},$$

ya da

$$\boxed{T_{i,\min} = 307 \text{ K}}.$$

Daha yüksek bir sıcaklık, içerideki havanın yoğunluğunu düşürür ve dolayısıyla yukarı yönlü bir net kuvvet oluşturur.

2.4

Isıl dengede $T_i = T_a$ 'dır. Bu durumda 2.1 kısmındaki sonuç şunu verir:

$$\rho_i - \rho_a = \rho_a \frac{4\gamma}{P_a R_0}.$$

Hareketsiz bir köpük için yukarı yönlü Stokes sürüklenme kuvveti, ağırlık ile kaldırma kuvvetinin farkını dengelemelidir:

$$6\pi\eta R_0 u_{\min} = 4\pi R_0^2 t \rho_s g + \frac{4}{3} \pi R_0^3 (\rho_i - \rho_a) g.$$

Dolayısıyla, yüzey gerilimi hesaba katıldığında,

$$u_{\min} = \frac{2\rho_s R_0 t g}{3\eta} + \frac{8\rho_a \gamma R_0 g}{9\eta P_a}.$$

İkinci terimin birinci terime oranı şöyledir:

$$\frac{4\rho_a \gamma}{3P_a \rho_s t} = 4.28 \times 10^{-3}.$$

Böylece yüzey gerilimi, gereken hızı yalnızca yaklaşık 0.43% kadar değiştirir. Bu düzeltme ihmal edildiğinde, istenen parametreler cinsinden şu ifade elde edilir:

$$u_{\min} \simeq \frac{2\rho_s R_0 t g}{3\eta}.$$

Burada, soruda belirtilen Stokes sürüklenme yasası ve soğuma sırasında yarıçap değişiminin ihmal edilmesi yönündeki talimat kullanılmıştır.

2.5

Verilen değerler yerine konulduğunda,

$$u_{\min} \simeq \frac{2(1000)(1.00 \times 10^{-2})(1.00 \times 10^{-7})(9.80)}{3(1.8 \times 10^{-5})} = 0.362963 \text{ m s}^{-1}.$$

Dolayısıyla,

$$u_{\min} \simeq 0.36 \text{ m s}^{-1}.$$

Yüzey gerilimi hesaba katıldığında $0.364516 \text{ m s}^{-1}$ elde edilir; bu değer iki anlamlı basamağa yuvarlandığında aynı sonucu verir.

2.6

Şimdi, belirtildiği üzere yüzey gerilimini ihmal ediyoruz. Yüklenmeden önce köpüğün sıcaklığı T_a , iç basıncı ise P_a 'dır. İçerideki havanın kütlesi korunur ve son durumda sıcaklık yine T_a 'dır. Dolayısıyla ideal gaz yasası şu sonucu verir:

$$P_i V_1 = P_a V_0, \quad P_i = P_a \frac{R_0^3}{R_1^3}.$$

Düzgün yüklü küresel bir kabuğun elektrik alanı

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R),$$

olup içerideki alan sıfırdır. Elektrostatik enerjisi şöyledir:

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty E(r)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Yük sabitken yarıçapın artması bu enerjiyi azaltır. Buna karşılık gelen dışarı yönlü elektriksel basınç şöyledir:

$$p_e = -\frac{dU_e}{dV} = -\frac{dU_e/dR}{4\pi R^2} = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4}.$$

Mekanik denge şu koşulu gerektirir:

$$P_i + p_e = P_a.$$

$R = R_1$ için,

$$P_a \frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R_1^4} = P_a.$$

R_1^4/P_a ile çarpıldığında,

$$\boxed{R_1^4 - R_0^3 R_1 - \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 P_a} = 0}.$$

Sıfırdan farklı bir yük için fiziksel çözüm $R_1 > R_0$ koşulunu sağlar.

2.7

Şöyle tanımlayalım:

$$x = \frac{\Delta R}{R_0} \ll 1, \quad R_1 = R_0(1 + x).$$

2.6 kısmındaki denklem şu hâle gelir:

$$R_0^4 [(1 + x)^4 - (1 + x)] = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 P_a}.$$

Birinci mertebeye kadar,

$$(1 + x)^4 - (1 + x) \simeq (1 + 4x) - (1 + x) = 3x.$$

Böylece,

$$3R_0^4 x = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 P_a},$$

ve

$$\boxed{\Delta R \simeq \frac{q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_0^3}}.$$

2.8

Yükleme, köpüğün toplam kütesini değiştirmeden yer değiştirilen havanın hacmini artırır.

Yüklenmeden önce içerideki havanın yoğunluğu ρ_a 'ya eşittir; çünkü artık yüzey gerilimi ihmal edilmektedir ve hem basıncı hem de sıcaklığı çevredeki değerlerle aynıdır. Dolayısıyla kütlesi şöyledir:

$$m_i = \rho_a V_0.$$

Korunan sabun kütlesi şöyledir:

$$m_s = 4\pi R_0^2 t \rho_s.$$

Burada t başlangıçtaki kalınlıktır; zar geniştikçe inceler.

Yükleme sonrasında nötr yüzebilirlik şu koşulu gerektirir:

$$\rho_a V_1 g = (\rho_a V_0 + m_s) g.$$

Buradan,

$$\rho_a \frac{4}{3} \pi (R_1^3 - R_0^3) = 4\pi R_0^2 t \rho_s,$$

ya da

$$R_1^3 - R_0^3 = \frac{3\rho_s t R_0^2}{\rho_a}.$$

Küçük bir genişleme için,

$$R_1^3 - R_0^3 \simeq 3R_0^2 \Delta R,$$

olduğundan, gereken yarıçap artışı şöyledir:

$$\Delta R \simeq \frac{\rho_s t}{\rho_a}.$$

Sayısal olarak,

$$\Delta R \simeq \frac{1000(1.00 \times 10^{-7})}{1.30} = 7.69 \times 10^{-5} \text{ m}, \quad \frac{\Delta R}{R_0} \simeq 0.00769.$$

Bu artış, 2.7 kısımdaki sonuca eşitlendiğinde,

$$\frac{q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_0^3} = \frac{\rho_s t}{\rho_a},$$

ve dolayısıyla

$$|q| \simeq \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}}.$$

Değerler yerine konulduğunda,

$$|q| \simeq \sqrt{\frac{96\pi^2 (8.85 \times 10^{-12}) (1.013 \times 10^5) (1000) (1.00 \times 10^{-7}) (1.00 \times 10^{-2})^3}{1.30}},$$

böylece

$$|q| \simeq 2.56 \times 10^{-7} \text{ C} = 0.256 \text{ } \mu\text{C}.$$

Sonuç, genleşme doğrusallaştırılmadan da elde edilebilir. Nötr yüzebilirlik şu sonucu verir:

$$R_1 = R_0 \left(1 + \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0} \right)^{1/3}.$$

Bu sonuç 2.6 kısımdaki sonuçla birleştirildiğinde,

$$q^2 = 32\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_1 (R_1^3 - R_0^3) = \frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^2 R_1}{\rho_a}.$$

Böylece, açılım yapılmadan elde edilen ince zar sonucu şöyledir:

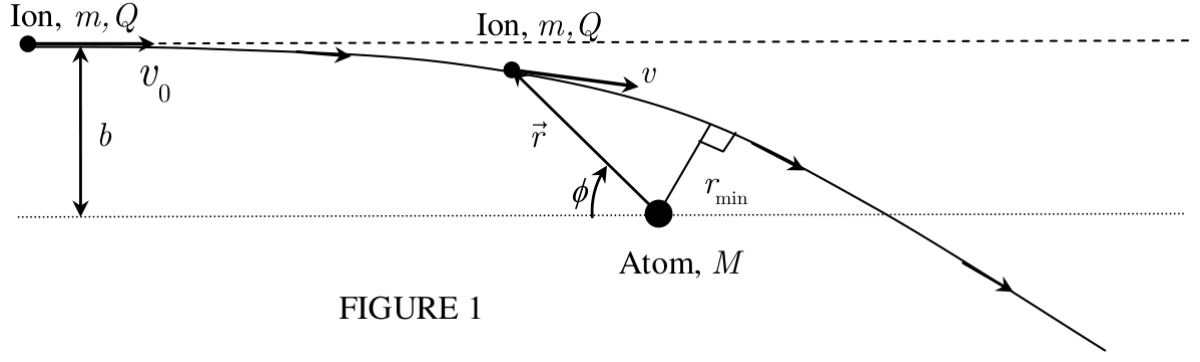
$$|q| = \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a} \left(1 + \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0} \right)^{1/6}} = 2.57 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

Elektriksel basınç q^2 'ye bağlı olduğundan, yükün her iki işareti de aynı genleşmeyi oluşturur.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Rutherford'un Atom Çekirdeğinin Yüzüncü Yılı Anısına: Bir

İyonun Nötr Bir Atom Tarafından Saçılması

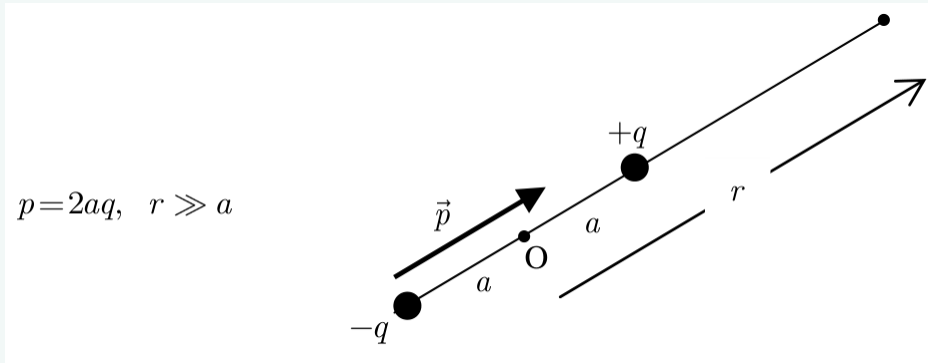


ŞEKİL 1

Kütlesi m , yükü Q olan bir iyon, çok uzak bir noktadan, kütlesi $M \gg m$ ve elektriksel kutuplanabilirliği α olan nötr bir atomun yakınına doğru, göreceli olmayan bir v_0 ilk süratıyla hareket etmektedir. Çarpma parametresi, Şekil 1'de gösterildiği gibi b 'dir.

Atom, gelen (yaklaşan) iyonun $\vec{E}$ elektrik alanı tarafından anında kutuplanır. Atomda oluşan elektrik dipol momentini $\vec{p} = \alpha \vec{E}$ 'dir. Bu soruda ışıınım yoluyla oluşan tüm enerji kayıplarını ihmal ediniz.

3.1 Şekil 2'de, O başlangıç noktasında bulunan ideal bir $\vec{p}$ elektrik dipolünden $\vec{p}$ yönünde r uzaklıktaki $\vec{E}_p$ elektrik alan şiddetini hesaplayınız. **[1.2 puan]**



ŞEKİL 2

3.2 Kutuplanmış atomun iyonla uyguladığı $\vec{f}$ kuvvetinin ifadesini bulunuz. İyonun yükünün işaretinden bağımsız olarak bu kuvvetin çekici olduğunu gösteriniz. **[3.0 puan]**

3.3 İyon-atom etkileşiminin elektriksel potansiyel enerjisi α , Q ve r cinsinden nedir? **[0.9 puan]**

3.4 Şekil 1'de gösterilen en yakın yaklaşma uzaklığı $r_{\min}$ 'in ifadesini bulunuz. **[2.4 puan]**

3.5 Çarpma parametresi b , kritik bir b_0 değerinden küçükse iyon, bir sarmal boyunca atoma doğru ilerleyecektir. Böyle bir durumda iyon nötrleşirken atom da yüklenecektir. Bu süreç, "yük değişimi" etkileşimi olarak bilinir. İyonun gördüğü şekliyle atomun bu "yük değişimi" çarpışmasına ait $A = \pi b_0^2$ tesir kesiti nedir? **[2.5 puan]**

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

$k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ olsun ve $\hat{\mathbf{r}}$ atomdan iyon doğru yönelsin. $U(\infty) = 0$ seçilsin.

- 3.1

$$\vec{E}_p = \frac{2k}{r^3} \vec{p}.$$

- 3.2

$$\vec{f} = -\frac{2\alpha k^2 Q^2}{r^5} \hat{\mathbf{r}}.$$

Kuvvet, Q 'nun her iki işareti için de çekicidir.

- 3.3

$$U(r) = -\frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4} = -\frac{\alpha Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}.$$

- 3.4 Saçılmayla sonuçlanan bir yörünge için, $b > b_0$,

$$r_{\min} = \left[\frac{b^2 + \sqrt{b^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}}}{2} \right]^{1/2}.$$

$b = b_0$ olduğunda iyon, $r = b_0/\sqrt{2}$ uzaklığına asimptotik olarak yaklaşır. $b < b_0$ için pozitif bir radyal dönüm noktası yoktur.

- 3.5

$$b_0 = \left(\frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} \right)^{1/4},$$

$$A = \frac{2\pi k |Q|}{v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \frac{|Q|}{2\epsilon_0 v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}}.$$

Çözüm

$M \gg m$ olduğundan atomun geri tepmesini ihmal eder ve konumunu sabit kabul ederiz. Soruda belirtilen ideal indüklenmiş dipol modelini, $\alpha > 0$ olmak üzere kullanırız.

3.1

Dipolü, aralarındaki uzaklık $2a$ olan $+q$ ve $-q$ yükleriyle temsil edelim; böylece $p = 2aq$ olur. Eksen üzerinde, $\vec{p}$ yönündeki bir noktanın iki yüke olan uzaklıkları $r - a$ ve $r + a$ 'dır.

İki yükün alanları zıt yönlüdür; dolayısıyla

$$\vec{E}_p = kq \left[\frac{1}{(r - a)^2} - \frac{1}{(r + a)^2} \right] \hat{\mathbf{p}},$$

burada $\hat{\mathbf{p}}$, dipol momenti yönündeki birim vektördür.

Kesirler birleştirildiğinde,

$$\vec{E}_p = \frac{4kqar}{(r^2 - a^2)^2} \hat{\mathbf{p}}.$$

$p = 2aq$ sabit tutularak alınan $a/r \rightarrow 0$ ideal dipol limitinde,

$$\boxed{\vec{E}_p = \frac{2kp}{r^3} \hat{\mathbf{p}} = \frac{2k}{r^3} \vec{p}.$$

Dipol ekseninin karşı tarafındaki alan da $\vec{p}$ yönündedir ve aynı uzaklıkta aynı büyüklüğe sahiptir.

3.2

İyonun atoma göre konumu $\vec{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ olsun. İyonun atomun bulunduğu noktada oluşturduğu elektrik alan

$$\vec{E}_{\text{ion}} = -\frac{kQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Buna göre, indüklenen dipol momenti

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_{\text{ion}} = -\frac{\alpha kQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

İyon, bu dipolün ekseninde bulunur. 3.1'deki sonuç kullanılırsa,

$$\vec{E}_p = \frac{2k}{r^3} \vec{p} = -\frac{2\alpha k^2 Q}{r^5} \hat{\mathbf{r}}.$$

Böylece iyonla etki eden kuvvet

$$\boxed{\vec{f} = Q\vec{E}_p = -\frac{2\alpha k^2 Q^2}{r^5} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 r^5} \hat{\mathbf{r}}.$$

$\alpha > 0$ olduğundan ve yük ifadeye Q^2 olarak girdiğinden, kuvvet Q 'nun işaretinden bağımsız olarak her zaman atoma doğru yönelir.

3.3

Merkezî ve korunumlu bir kuvvet için,

$$f_r = -\frac{dU}{dr}.$$

Sonsuzdaki potansiyel enerji sıfır seçildiğinde,

$$U(r) = -\int_{\infty}^r f_r(s) ds = -\int_{\infty}^r \left(-\frac{2\alpha k^2 Q^2}{s^5} \right) ds.$$

Dolayısıyla,

$$\boxed{U(r) = -\frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4}.$$

Eşdeğer olarak,

$$U = -\frac{1}{2} \alpha E_{\text{ion}}^2.$$

$1/2$ çarpanı, dipolü indüklemek için gereken enerjiyi hesaba katar. Nitekim $p^2/(2\alpha)$ kutuplanma enerjisi ile $-pE_{\text{ion}}$ etkileşim enerjisinin toplamı, $p = \alpha E_{\text{ion}}$ olduğunda $-\alpha E_{\text{ion}}^2/2$ verir.

3.4

Kuvvet merkezi olduğundan, atoma göre açısal momentum korunur. Büyüklüğü, iyonun geliş yörüngesi tarafından belirlenir:

$$L = mv_0 b.$$

Mekanik enerji de korunur. Sonsuzda potansiyel enerji sıfır olduğundan,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Kinetik enerji radyal ve enine katkılara ayrıldığında,

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Saçılmayla sonuçlanan bir yörüngenin en yakın yaklaşma noktasında $\dot{r} = 0$ olur. $L = mv_0 b$ yerine yazılırsa,

$$\frac{mv_0^2 b^2}{2r_{\min}^2} - \frac{\alpha k^2 Q^2}{2r_{\min}^4} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

$2r_{\min}^4/(mv_0^2)$ ile çarpıldığında,

$$r_{\min}^4 - b^2 r_{\min}^2 + \frac{\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} = 0.$$

Bu, $r_{\min}^2$ değişkenine göre ikinci dereceden bir denklemdir ve kökleri

$$r_{\pm}^2 = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}}}{2}.$$

Sonsuzdan gelen bir iyon önce büyük kökle karşılaşır. Bu nedenle

$$r_{\min} = \left[\frac{b^2 + \sqrt{b^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}}}{2} \right]^{1/2}.$$

Aşağıda belirlenecek b_0 değeri için, $b > b_0$ olduğunda iki kök birbirinden farklıdır. Bir kontrol olarak, etkileşim sıfıra yaklaşırken bu ifade, doğrusal hareket için beklendiği gibi $r_{\min} \rightarrow b$ sonucunu verir.

3.5

Radyal hareketi belirleyen etkin potansiyel

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4}.$$

Açısal momentum sıfırdan farklı olduğunda, büyük uzaklıklarda pozitif merkezkaç terimi baskınken, küçük uzaklıklarda çekici terim baskındır. Ortaya çıkan potansiyel engeli, iyonun atoma ulaşmasını önleyebilir.

Kritik yörünge, iki radyal dönüm noktası birleştiğinde ortaya çıkar. Bu nedenle 3.4'te bulunan diskriminant sıfır olmalıdır:

$$b_0^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} = 0.$$

Buradan

$$b_0 = \left(\frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} \right)^{1/4}.$$

$b < b_0$ için radyal enerji denkleminin

$$\dot{r}^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{b^2}{r^2} + \frac{\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2 r^4} \right)$$

pozitif bir kökü yoktur. Dolayısıyla gelen iyon içeriye doğru ilerlemeyi sürdürür ve sorudaki varsayım uyarınca yük değişimine uğrar.

Tam olarak $b = b_0$ olduğunda,

$$\dot{r}^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{b_0^2}{2r^2} \right)^2.$$

Gelen iyon, kararsız dairesel yörüngenin

$$r_c = \frac{b_0}{\sqrt{2}}$$

yarıçapına asimptotik olarak yaklaşır. Bu sınırın çarpma parametresi düzlemindeki alanı sıfırdır ve tesir kesitini etkilemez.

Yakalanmayla sonuçlanan yörüngeler, bu düzlemde b_0 yarıçaplı bir disk kaplar. Dolayısıyla,

$$A = \pi b_0^2 = \pi \sqrt{\frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}},$$

ya da

$$A = \frac{2\pi k|Q|}{v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \frac{|Q|}{2\varepsilon_0 v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}}.$$

Girdiler SI birimlerinde verildiğinde, A 'nın birimi m^2 olur. Parametreler için sayısal değerler verilmemiştir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.