

IPhO 2011

Теоретические задачи и решения · Бангкок, Таиланд · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipro/2011/

Задача 1: Задача трёх тел и LISA

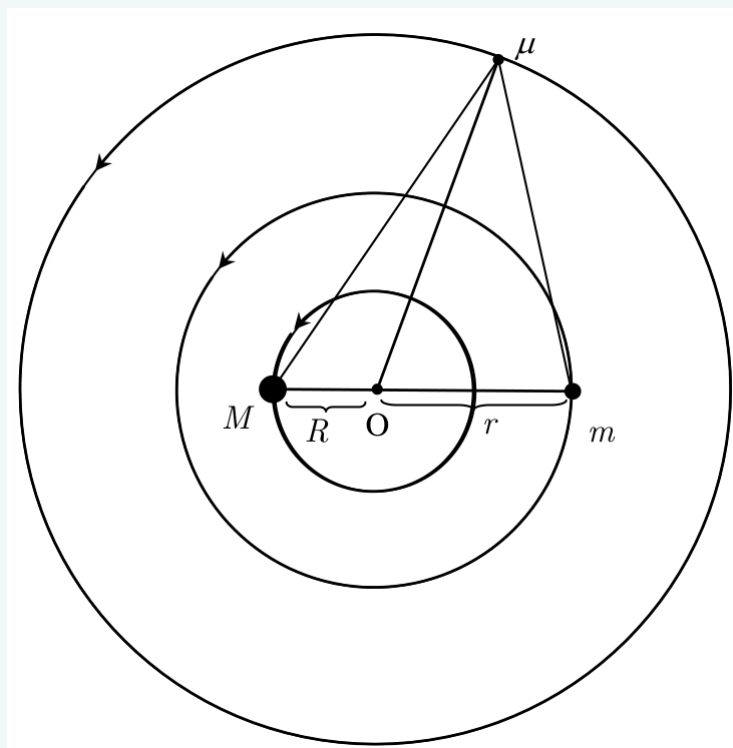


РИСУНОК 1 Орбиты трёх тел, лежащие в одной плоскости.

1.1 Два тела с массами M и m , взаимодействующие гравитационно, движутся по круговым орбитам радиусами R и r соответственно вокруг общего центра масс. Найдите угловую скорость ω_0 вращения прямой, соединяющей M и m , через R, r, M, m и гравитационную постоянную G .

[1.5 балла]

1.2 Третье тело с бесконечно малой массой μ помещают на круговую орбиту вокруг того же центра масс, лежащую в той же плоскости, так, что μ остаётся неподвижным относительно как M , так и m , как показано на рисунке 1. Предположите, что тело с бесконечно малой массой не лежит на одной прямой с M и m . Найдите значения следующих величин через R и r :

[3.5 балла]

1.2.1 расстояние от μ до M .

1.2.2 расстояние от μ до m .

1.2.3 расстояние от μ до центра масс.

1.3 Рассмотрите случай $M = m$. Если теперь сообщить телу μ малое радиальное возмущение (вдоль $O\mu$), какова будет угловая частота колебаний μ около невозмущённого положения, выраженная через ω_0 ? Предположите, что момент импульса μ сохраняется.

[3.2 балла]

Космическая антенна для лазерной интерферометрии (LISA) представляет собой группу из трёх одинаковых космических аппаратов, предназначенную для регистрации низкочастотных гравитационных волн. Космические аппараты расположены в вершинах равностороннего треугольника, как показано на рисунках 2 и 3. Длина сторон (или «плеч») составляет около 5.0 миллионов километров. Группировка LISA движется вокруг Солнца по орбите, подобной земной, отставая от Земли на 20° . Каждый аппарат движется вокруг Солнца по собственной слегка наклонённой орбите. В результате три космических аппарата выглядят вращающимися вокруг общего центра, совершая один оборот в год.

Они непрерывно передают друг другу и принимают лазерные сигналы. В целом они регистрируют гравитационные волны, измеряя интерферометрическими методами крошечные изменения длин плеч. Примером источника гравитационных волн служит столкновение массивных объектов, таких как чёрные дыры, в близлежащих галактиках.

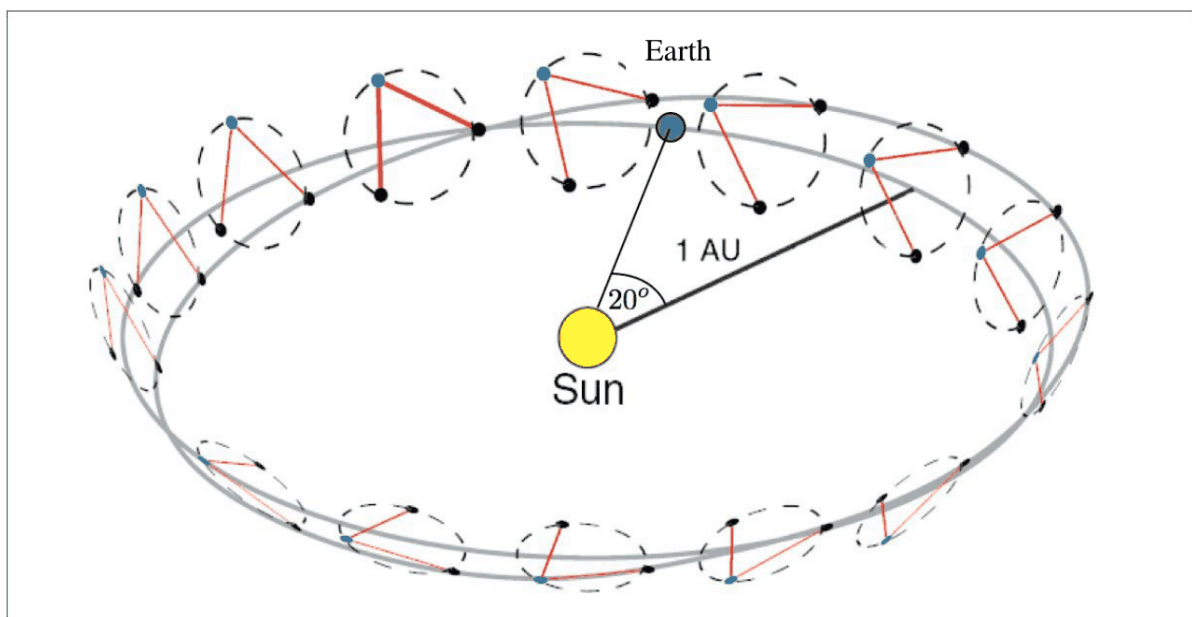


РИСУНОК 2 Схема орбиты LISA. Три космических аппарата вращаются вокруг своего центра масс с периодом 1 год. В начальный момент они отстают от Земли на 20° (Изображение из статьи D.A. Shaddock, «Обзор космической антенны лазерного интерферометра», Публикации Астрономического общества Австралии, 2009, **26**, с.128-132.).

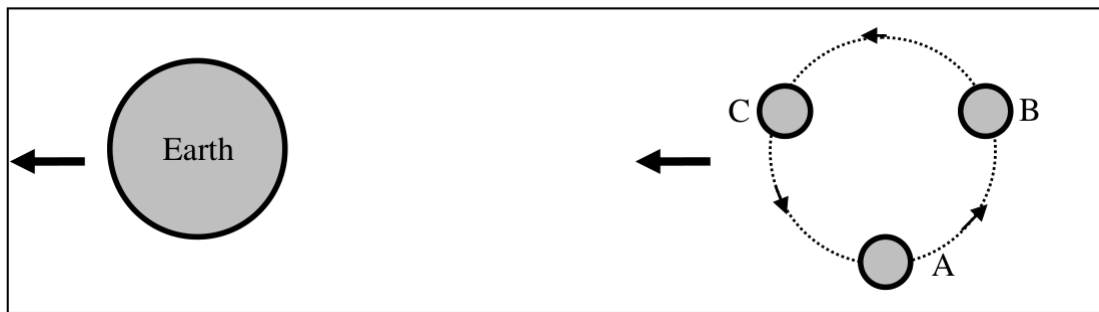


РИСУНОК 3 Увеличенное изображение трёх космических аппаратов, отстающих от Земли. А, В и С — три космических аппарата в вершинах равностороннего треугольника.

1.4 Какова скорость одного космического аппарата относительно другого в плоскости, содержащей три аппарата?

[1.8 балла]

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- 1.1

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G(M+m)}{(R+r)^3}}$$

- 1.2.1

$$d_{\mu M} = R + r$$

- 1.2.2

$$d_{\mu m} = R + r$$

- 1.2.3

$$d_{\mu O} = \sqrt{R^2 + Rr + r^2}$$

- 1.3, с использованием оговорённого в условии сохранения момента импульса:

$$\omega_{\text{osc}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \omega_0$$

- 1.4, при длине плеча $L = 5.0 \times 10^9 \text{ m}$ и периоде вращения $T = 1 \text{ year}$:

$$v_{\text{rel}} = \frac{2\pi L}{T} \simeq 1.0 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} = 1.0 \text{ km s}^{-1}$$

Решение

1.1

Расстояние между телами равно $d = R + r$. Поскольку O — их центр масс,

$$MR = mr.$$

Сила тяготения сообщает каждому телу центростремительное ускорение:

$$M\omega_0^2 R = \frac{GMm}{d^2}, \quad m\omega_0^2 r = \frac{GMm}{d^2}.$$

Деля уравнения на соответствующие массы и складывая их, получаем

$$\omega_0^2(R + r) = \frac{G(M + m)}{d^2}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{G(M + m)}{(R + r)^3}}}.$$

1.2.1 и 1.2.2

Поскольку масса μ бесконечно мала, она не влияет на движение M и m . Чтобы оставаться неподвижным относительно них, тело должно обращаться вокруг O с угловой скоростью ω_0 .

В выбранный момент времени положим

$$O = (0, 0), \quad M = (-R, 0), \quad m = (r, 0), \quad \mu = (x, y),$$

где $y \neq 0$. Обозначим расстояния от него до двух тел через

$$a = \sqrt{(x + R)^2 + y^2}, \quad b = \sqrt{(x - r)^2 + y^2}.$$

Его ускорение равно $-\omega_0^2(x, y)$. Поэтому закон Ньютона после сокращения на пробную массу μ даёт

$$\begin{aligned} \omega_0^2 x &= \frac{GM(x + R)}{a^3} + \frac{Gm(x - r)}{b^3}, \\ \omega_0^2 y &= \frac{GM y}{a^3} + \frac{Gm y}{b^3}. \end{aligned}$$

Поскольку $y \neq 0$, из второго уравнения следует

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{a^3} + \frac{Gm}{b^3}.$$

Вычитая это уравнение, умноженное на x , из первого, получаем

$$0 = \frac{GMR}{a^3} - \frac{Gmr}{b^3}.$$

Используя $MR = mr$, получаем $a = b$. Следовательно,

$$\omega_0^2 = \frac{G(M + m)}{a^3}.$$

Сравнение с пунктом 1.1 даёт $a = R + r$, откуда

$$\boxed{1.2.1: d_{\mu M} = R + r}, \quad \boxed{1.2.2: d_{\mu m} = R + r}.$$

Таким образом, три тела находятся в вершинах равностороннего треугольника.

1.2.3

Середина отрезка, соединяющего два тела с конечными массами, имеет координату

$$x_{\text{mid}} = \frac{r - R}{2}.$$

Третья вершина равностороннего треугольника со стороной $R + r$ находится на перпендикуляре к этому отрезку на расстоянии $\sqrt{3}(R + r)/2$ от его середины. Поэтому два возможных положения μ задаются координатами

$$x = \frac{r - R}{2}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(R + r).$$

Расстояние от него до O удовлетворяет соотношению

$$d_{\mu O}^2 = x^2 + y^2 = \frac{(r - R)^2 + 3(R + r)^2}{4} = R^2 + Rr + r^2.$$

Таким образом,

$$d_{\mu O} = \sqrt{R^2 + Rr + r^2}.$$

1.3

При $M = m$ условие для центра масс даёт $R = r$. Поэтому радиус невозмущённой орбиты μ равен

$$\rho_0 = \sqrt{3}R,$$

а из пункта 1.1 следует

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{4R^3}.$$

На серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему равные массы, точка на расстоянии ρ от O находится на расстоянии $\sqrt{R^2 + \rho^2}$ от каждой массы. Поперечные составляющие создаваемых ими гравитационных ускорений взаимно компенсируются, поэтому направленное к центру радиальное ускорение равно

$$g(\rho) = \frac{2GM\rho}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

Это определяет радиальную силу в линейном приближении: в силу зеркальной симметрии малое угловое отклонение от серединного перпендикуляра изменяет радиальную составляющую лишь во втором порядке.

Воспользуемся сохранением момента импульса, предписанным в условии. Момент импульса на единицу массы равен

$$h = \rho^2 \dot{\theta} = \rho_0^2 \omega_0.$$

Радиальное уравнение движения

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 = -g(\rho),$$

принимает вид

$$\ddot{\rho} = \frac{h^2}{\rho^3} - \frac{2GM\rho}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

Положим

$$\rho = \rho_0 + \xi, \quad |\xi| \ll \rho_0,$$

и сохраним только члены, линейные по ξ . Первый член раскладывается следующим образом:

$$\frac{h^2}{\rho^3} = \rho_0 \omega_0^2 - 3\omega_0^2 \xi + O(\xi^2).$$

Для направленного к центру гравитационного ускорения

$$g'(\rho) = \frac{2GM}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{3\rho^2}{R^2 + \rho^2} \right).$$

Поскольку $\rho_0^2 = 3R^2$,

$$g'(\rho_0) = \omega_0^2 \left(1 - \frac{9}{4} \right) = -\frac{5}{4} \omega_0^2.$$

Таким образом,

$$g(\rho) = \rho_0 \omega_0^2 - \frac{5}{4} \omega_0^2 \xi + O(\xi^2).$$

Члены, соответствующие равновесию, сокращаются, и остаётся

$$\ddot{\xi} = \left(-3 + \frac{5}{4} \right) \omega_0^2 \xi = -\frac{7}{4} \omega_0^2 \xi.$$

Это уравнение гармонического осциллятора, поэтому

$$\omega_{\text{osc}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \omega_0.$$

Этот результат получен в рамках заданного радиального приближения с сохранением момента импульса. При движении без ограничений во вращающемся гравитационном поле двух масс момент импульса относительно O в общем случае не сохраняется.

1.4

Рассмотрим группировку как равносторонний треугольник с постоянной длиной стороны L , вращающийся в своей плоскости с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Пусть $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$ — радиус-векторы двух космических аппаратов относительно центра треугольника. Их скорости равны

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_A, \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_B,$$

где $\mathbf{V}$ — общая скорость поступательного движения центра.

При вычитании это общее движение исключается:

$$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A).$$

Вектор, соединяющий аппараты, лежит в плоскости треугольника и имеет модуль L , поэтому он перпендикулярен $\boldsymbol{\Omega}$. Следовательно,

$$v_{\text{rel}} = \Omega L = \frac{2\pi L}{T}.$$

При

$$L = 5.0 \times 10^6 \text{ km} = 5.0 \times 10^9 \text{ m}, \quad T \simeq 365 \times 24 \times 3600 \text{ s},$$

получаем

$$v_{\text{rel}} \simeq 996 \text{ m s}^{-1}.$$

С двумя значащими цифрами

$$v_{\text{rel}} \simeq 1.0 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} = 1.0 \text{ km s}^{-1}.$$

Относительная скорость перпендикулярна плечу, соединяющему космические аппараты, что согласуется с постоянством длины плеча при таком идеализированном движении.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Электрически заряженный мыльный пузырь

Сферический мыльный пузырь с плотностью воздуха внутри ρ_i , температурой T_i и радиусом R_0 окружён воздухом с плотностью ρ_a , атмосферным давлением P_a и температурой T_a . Мыльная плёнка имеет поверхностное натяжение γ , плотность ρ_s и толщину t . Масса и поверхностное натяжение мыльной плёнки не зависят от температуры. Считайте, что $R_0 \gg t$.

Приращение энергии dE , необходимое для увеличения площади поверхности раздела мыльная плёнка–воздух на dA , определяется выражением $dE = \gamma dA$, где γ — поверхностное натяжение плёнки.

2.1 Найдите отношение $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a}$, выразив его через γ , P_a и R_0 . **[1.7 балла]**

2.2 Найдите численное значение $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1$, используя $\gamma = 0.0250 \text{ N m}^{-1}$, $R_0 = 1.00 \text{ cm}$ и $P_a = 1.013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$. **[0.4 балла]**

2.3 Изначально пузырь образуется с более тёплым воздухом внутри. Найдите минимальное численное значение T_i , при котором пузырь может находиться во взвешенном состоянии в неподвижном воздухе. Используйте $T_a = 300 \text{ K}$, $\rho_s = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_a = 1.30 \text{ kg m}^{-3}$, $t = 100 \text{ nm}$ и $g = 9.80 \text{ m s}^{-2}$. **[2.0 балла]**

Через некоторое время после образования пузырь придёт в тепловое равновесие с окружающей средой. В неподвижном воздухе такой пузырь будет естественным образом опускаться к земле.

2.4 Найдите минимальную скорость u восходящего потока воздуха, которая удержит пузырь от падения при тепловом равновесии. Выразите ответ через ρ_s , R_0 , g , t и коэффициент вязкости воздуха η . Можно считать, что скорость достаточно мала для применимости закона Стокса, и пренебречь изменением радиуса при понижении температуры до равновесной. Сила сопротивления по закону Стокса равна $F = 6\pi\eta R_0 u$. **[1.6 балла]**

2.5 Вычислите численное значение u , используя $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. **[0.4 балла]**

Приведённые выше расчёты показывают, что учёт слагаемых, содержащих поверхностное натяжение γ , лишь незначительно повышает точность результата. Во всех последующих вопросах слагаемыми, связанными с поверхностным натяжением, можно пренебречь.

2.6 Если теперь этому сферическому пузырю сообщить равномерно распределённый по его поверхности суммарный заряд q , найдите уравнение, определяющее новый радиус R_1 через R_0 , P_a , q и электрическую постоянную ε_0 . **[2.0 балла]**

2.7 Считая, что суммарный заряд не слишком велик (то есть $\frac{q^2}{\varepsilon_0 R_0^4} \ll P_a$) и радиус пузыря увеличивается лишь незначительно, найдите ΔR , где $R_1 = R_0 + \Delta R$.

Дано: $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ при $x \ll 1$. **[0.7 балла]**

2.8 Каким должен быть модуль заряда q , выраженный через t , ρ_a , ρ_s , ε_0 , R_0 , P_a , чтобы пузырь неподвижно висел в неподвижном воздухе? Вычислите также численное значение q . Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ farad/m. **[1.2 балла]**

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

• 2.1

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = 1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}.$$

• 2.2

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1 = 9.87 \times 10^{-5}.$$

• 2.3

$$T_{i,\min} = T_a \frac{1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}}{1 - \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0}} = 307 \text{ K}.$$

• 2.4, пренебрегая малой поправкой, обусловленной поверхностным натяжением:

$$u_{\min} \simeq \frac{2\rho_s R_0 t g}{3\eta}.$$

• 2.5

$$u_{\min} \simeq 0.36 \text{ m s}^{-1}.$$

• 2.6

$$R_1^4 - R_0^3 R_1 - \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 P_a} = 0, \quad R_1 \geq R_0.$$

• 2.7

$$\Delta R \simeq \frac{q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_0^3}.$$

• 2.8, в приближении малого расширения:

$$|q| \simeq \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}} = 2.56 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

Без линеаризации расширения результат в приближении тонкой плёнки имеет вид

$$|q| = \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}} \left(1 + \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0}\right)^{1/6} = 2.57 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

Решение

Будем считать воздух идеальным газом с одинаковым составом внутри и снаружи пузыря. В приближении тонкой плёнки объём пузыря и масса мыльной плёнки равны

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad m_s \simeq 4\pi R^2 t \rho_s.$$

У плёнки две поверхности раздела с воздухом, но её масса равна массе одной оболочки.

2.1

Обе поверхности раздела вносят вклад в поверхностную энергию. Пренебрегая малым различием их радиусов, получаем

$$E_s = 2\gamma(4\pi R^2) = 8\pi\gamma R^2.$$

При малом смещении наружу dR условие механического равновесия имеет вид

$$(P_i - P_a) dV = dE_s.$$

Поскольку

$$dV = 4\pi R^2 dR, \quad dE_s = 16\pi\gamma R dR,$$

избыточное давление внутри пузыря равно

$$P_i - P_a = \frac{4\gamma}{R_0}.$$

Из уравнения идеального газа $P = \rho \mathcal{R}_{\text{air}} T$ с одинаковой удельной газовой постоянной по обе стороны плёнки следует

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = \frac{P_i}{P_a} = 1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}.$$

2.2

При $R_0 = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$

$$P_i - P_a = \frac{4(0.0250)}{1.00 \times 10^{-2}} = 10.0 \text{ Pa}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1 = \frac{10.0}{1.013 \times 10^5} = 9.87 \times 10^{-5}}.$$

2.3

Направленная вверх сила Архимеда равна весу вытесненного окружающего воздуха:

$$F_B = \rho_a V_0 g, \quad V_0 = \frac{4}{3} \pi R_0^3.$$

При минимальной температуре, позволяющей пузырю оставаться во взвешенном состоянии, сила Архимеда в точности уравнивает суммарную силу тяжести, действующую на воздух внутри пузыря и мыльную плёнку:

$$\rho_a V_0 g = \rho_i V_0 g + 4\pi R_0^2 t \rho_s g.$$

Поэтому

$$\rho_i = \rho_a - \frac{3\rho_s t}{R_0}.$$

Численно

$$\frac{3\rho_s t}{R_0} = \frac{3(1000)(1.00 \times 10^{-7})}{1.00 \times 10^{-2}} = 0.0300 \text{ kg m}^{-3},$$

так что для нейтральной плавучести необходимо

$$\rho_i = 1.27 \text{ kg m}^{-3}.$$

Используя результат пункта 2.1, получаем

$$T_{i,\min} = \frac{\rho_a T_a}{\rho_i} \left(1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0} \right) = T_a \frac{1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}}{1 - \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0}}.$$

Следовательно,

$$T_{i,\min} = 300 \frac{1 + 9.8717 \times 10^{-5}}{1 - 0.0300/1.30} = 307.117 \text{ K},$$

или

$$\boxed{T_{i,\min} = 307 \text{ K}}.$$

При более высокой температуре плотность воздуха внутри пузыря меньше, и поэтому равнодействующая сил направлена вверх.

2.4

При тепловом равновесии $T_i = T_a$. Тогда из пункта 2.1 следует

$$\rho_i - \rho_a = \rho_a \frac{4\gamma}{P_a R_0}.$$

Для неподвижного пузыря направленная вверх сила сопротивления Стокса должна уравнивать разность силы тяжести и силы Архимеда:

$$6\pi\eta R_0 u_{\min} = 4\pi R_0^2 t \rho_s g + \frac{4}{3}\pi R_0^3 (\rho_i - \rho_a)g.$$

Следовательно, с учётом поверхностного натяжения

$$u_{\min} = \frac{2\rho_s R_0 t g}{3\eta} + \frac{8\rho_a \gamma R_0 g}{9\eta P_a}.$$

Отношение второго слагаемого к первому равно

$$\frac{4\rho_a \gamma}{3P_a \rho_s t} = 4.28 \times 10^{-3}.$$

Таким образом, поверхностное натяжение изменяет требуемую скорость лишь примерно на 0.43%. Пренебрегая этой поправкой, получаем выражение через указанные в условии параметры:

$$u_{\min} \simeq \frac{2\rho_s R_0 t g}{3\eta}.$$

Здесь использованы заданный закон сопротивления Стокса и указание пренебречь изменением радиуса при охлаждении.

2.5

Подставляя заданные значения, получаем

$$u_{\min} \simeq \frac{2(1000)(1.00 \times 10^{-2})(1.00 \times 10^{-7})(9.80)}{3(1.8 \times 10^{-5})} = 0.362963 \text{ m s}^{-1}.$$

Следовательно,

$$u_{\min} \simeq 0.36 \text{ m s}^{-1}.$$

Учёт поверхностного натяжения даёт $0.364516 \text{ m s}^{-1}$, что при округлении до двух значащих цифр приводит к тому же ответу.

2.6

Теперь, согласно условию, пренебрежём поверхностным натяжением. До сообщения заряда пузырёк имеет температуру T_a , а давление внутри него равно P_a . Масса заключённого в нём воздуха сохраняется, и в конечном состоянии температура также равна T_a . Поэтому из уравнения идеального газа следует

$$P_i V_1 = P_a V_0, \quad P_i = P_a \frac{R_0^3}{R_1^3}.$$

Равномерно заряженная сферическая оболочка создаёт электрическое поле

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R),$$

а внутри неё поле равно нулю. Её электростатическая энергия равна

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty E(r)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

При постоянном заряде увеличение радиуса уменьшает эту энергию. Соответствующее электрическое давление, действующее наружу, равно

$$p_e = -\frac{dU_e}{dV} = -\frac{dU_e/dR}{4\pi R^2} = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}.$$

Условие механического равновесия имеет вид

$$P_i + p_e = P_a.$$

При $R = R_1$

$$P_a \frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R_1^4} = P_a.$$

Умножая на R_1^4/P_a , получаем

$$\boxed{R_1^4 - R_0^3 R_1 - \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 P_a} = 0}.$$

При ненулевом заряде физическому решению соответствует $R_1 > R_0$.

2.7

Пусть

$$x = \frac{\Delta R}{R_0} \ll 1, \quad R_1 = R_0(1 + x).$$

Уравнение из пункта 2.6 принимает вид

$$R_0^4[(1+x)^4 - (1+x)] = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 P_a}.$$

В первом порядке

$$(1+x)^4 - (1+x) \simeq (1+4x) - (1+x) = 3x.$$

Таким образом,

$$3R_0^4 x = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 P_a},$$

и

$$\boxed{\Delta R \simeq \frac{q^2}{96\pi^2\varepsilon_0 P_a R_0^3}}.$$

2.8

Сообщение заряда увеличивает объём вытесненного воздуха, оставляя полную массу пузыря неизменной.

До сообщения заряда плотность воздуха внутри пузыря равна ρ_a , поскольку поверхностным натяжением теперь пренебрегаем, а давление и температура внутри равны соответствующим значениям в окружающем воздухе. Поэтому масса воздуха внутри пузыря равна

$$m_i = \rho_a V_0.$$

Сохраняющаяся масса мыльной плёнки равна

$$m_s = 4\pi R_0^2 t \rho_s.$$

Здесь t — первоначальная толщина; при расширении плёнка становится тоньше.

Для нейтральной плавучести после сообщения заряда необходимо

$$\rho_a V_1 g = (\rho_a V_0 + m_s) g.$$

Следовательно,

$$\rho_a \frac{4}{3} \pi (R_1^3 - R_0^3) = 4\pi R_0^2 t \rho_s,$$

или

$$R_1^3 - R_0^3 = \frac{3\rho_s t R_0^2}{\rho_a}.$$

При малом расширении

$$R_1^3 - R_0^3 \simeq 3R_0^2 \Delta R,$$

поэтому требуемое увеличение радиуса равно

$$\Delta R \simeq \frac{\rho_s t}{\rho_a}.$$

Численно

$$\Delta R \simeq \frac{1000(1.00 \times 10^{-7})}{1.30} = 7.69 \times 10^{-5} \text{ m}, \quad \frac{\Delta R}{R_0} \simeq 0.00769.$$

Приравнявая это увеличение результату пункта 2.7, получаем

$$\frac{q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_0^3} = \frac{\rho_s t}{\rho_a},$$

и, следовательно,

$$|q| \simeq \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}}.$$

Подстановка даёт

$$|q| \simeq \sqrt{\frac{96\pi^2 (8.85 \times 10^{-12}) (1.013 \times 10^5) (1000) (1.00 \times 10^{-7}) (1.00 \times 10^{-2})^3}{1.30}},$$

так что

$$|q| \simeq 2.56 \times 10^{-7} \text{ C} = 0.256 \text{ } \mu\text{C}.$$

Результат можно получить и без линеаризации расширения. Из условия нейтральной плавучести следует

$$R_1 = R_0 \left(1 + \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0} \right)^{1/3}.$$

Объединяя это с результатом пункта 2.6, получаем

$$q^2 = 32\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_1 (R_1^3 - R_0^3) = \frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^2 R_1}{\rho_a}.$$

Таким образом, результат в приближении тонкой плёнки без разложения имеет вид

$$|q| = \sqrt{\frac{96\pi^2\epsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a} \left(1 + \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0}\right)^{1/6}} = 2.57 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

Заряд любого знака вызывает одинаковое расширение, поскольку электрическое давление зависит от q^2 .

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: К столетию открытия атомного ядра Резерфордом: рассеяние иона на нейтральном атоме

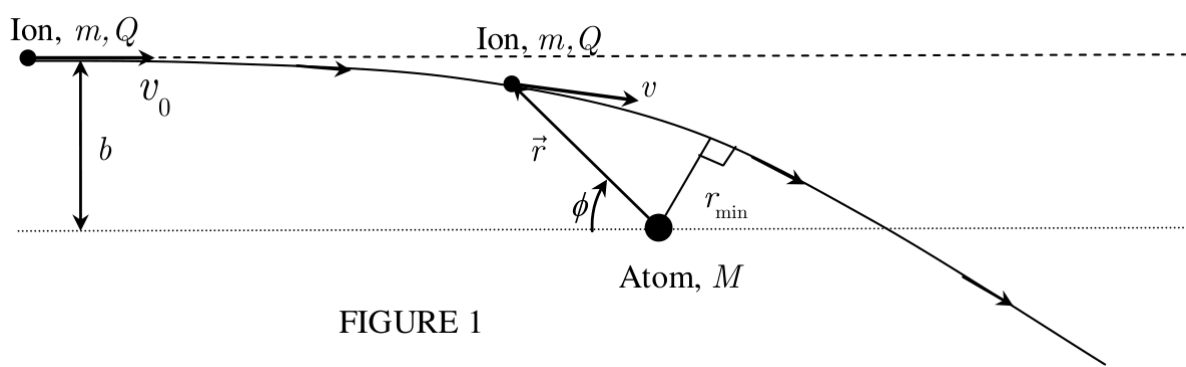


FIGURE 1

РИСУНОК 1

Ион массой m с зарядом Q движется издалека с начальной нерелятивистской скоростью v_0 к нейтральному атому массой $M \gg m$ с электрической поляризуемостью α . Прицельный параметр равен b , как показано на рисунке 1.

Атом мгновенно поляризуется электрическим полем $\vec{E}$ налетающего (приближающегося) иона. Возникающий электрический дипольный момент атома равен $\vec{p} = \alpha \vec{E}$. В этой задаче пренебрегайте любыми потерями энергии на излучение.

3.1 Вычислите напряжённость электрического поля $\vec{E}_p$ на расстоянии r от идеального электрического диполя $\vec{p}$, находящегося в начале координат O , в направлении $\vec{p}$, показанном на рисунке 2. **[1.2 балла]**

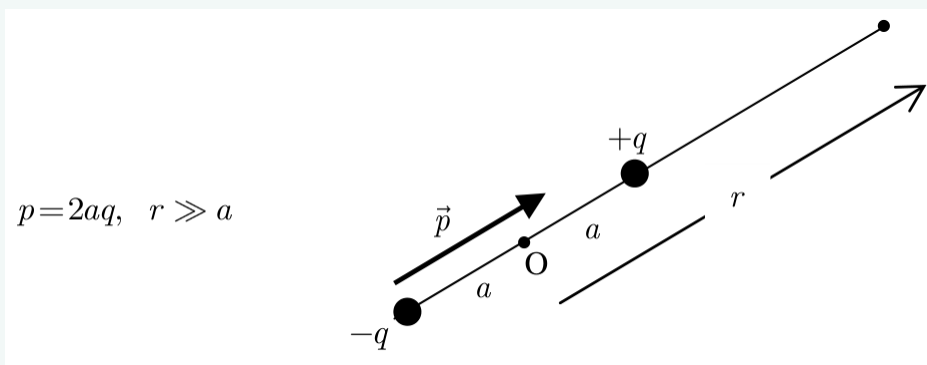


РИСУНОК 2

3.2 Найдите выражение для силы $\vec{f}$, действующей на ион со стороны поляризованного атома. Покажите, что эта сила является силой притяжения независимо от знака заряда иона. [3.0 балла]

3.3 Чему равна электрическая потенциальная энергия взаимодействия иона с атомом, выраженная через α , Q и r ? [0.9 балла]

3.4 Найдите выражение для $r_{\min}$ — расстояния наибольшего сближения, показанного на рисунке 1. [2.4 балла]

3.5 Если прицельный параметр b меньше некоторого критического значения b_0 , ион будет приближаться к атому по спирали. В этом случае ион нейтрализуется, а атом, в свою очередь, приобретёт заряд. Этот процесс называется «перезарядкой». Чему равно сечение $A = \pi b_0^2$ столкновения с «перезарядкой», которое атом представляет для налетающего иона? [2.5 балла]

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Пусть $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$, а $\hat{\mathbf{r}}$ направлен от атома к иону. Положим $U(\infty) = 0$.

- 3.1

$$\vec{E}_p = \frac{2k}{r^3} \vec{p}.$$

- 3.2

$$\vec{f} = -\frac{2\alpha k^2 Q^2}{r^5} \hat{\mathbf{r}}.$$

Сила является силой притяжения при любом знаке Q .

- 3.3

$$U(r) = -\frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4} = -\frac{\alpha Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}.$$

- 3.4 Для траектории рассеяния, $b > b_0$,

$$r_{\min} = \left[\frac{b^2 + \sqrt{b^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}}}{2} \right]^{1/2}.$$

При $b = b_0$ ион асимптотически приближается к $r = b_0/\sqrt{2}$. При $b < b_0$ положительной радиальной точки поворота нет.

• 3.5

$$b_0 = \left(\frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} \right)^{1/4},$$

$$A = \frac{2\pi k|Q|}{v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \frac{|Q|}{2\varepsilon_0 v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}}.$$

Решение

Поскольку $M \gg m$, пренебрежём отдачей атома и будем считать его неподвижным. Используем заданную в условии модель идеального индуцированного диполя с $\alpha > 0$.

3.1

Представим диполь в виде зарядов $+q$ и $-q$, разделённых расстоянием $2a$, так что $p = 2aq$. В точке на оси, расположенной в направлении $\vec{p}$, расстояния до этих двух зарядов равны $r - a$ и $r + a$.

Поля двух зарядов направлены противоположно, поэтому

$$\vec{E}_p = kq \left[\frac{1}{(r - a)^2} - \frac{1}{(r + a)^2} \right] \hat{\mathbf{p}},$$

где $\hat{\mathbf{p}}$ — единичный вектор, направленный вдоль дипольного момента.

Приводя дроби к общему знаменателю, получаем

$$\vec{E}_p = \frac{4kqar}{(r^2 - a^2)^2} \hat{\mathbf{p}}.$$

В пределе идеального диполя $a/r \rightarrow 0$, при фиксированном $p = 2aq$,

$$\vec{E}_p = \frac{2kp}{r^3} \hat{\mathbf{p}} = \frac{2k}{r^3} \vec{p}.$$

Поле на противоположной стороне оси диполя также направлено вдоль $\vec{p}$ и на том же расстоянии имеет такой же модуль.

3.2

Пусть положение иона относительно атома задаётся радиус-вектором $\vec{r} = r\hat{\mathbf{r}}$. Электрическое поле, создаваемое ионом в месте нахождения атома, равно

$$\vec{E}_{\text{ion}} = -\frac{kQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Следовательно, индуцированный дипольный момент равен

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_{\text{ion}} = -\frac{\alpha kQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Ион находится на оси этого диполя. Используя результат пункта 3.1, получаем

$$\vec{E}_p = \frac{2k}{r^3} \vec{p} = -\frac{2\alpha k^2 Q}{r^5} \hat{\mathbf{r}}.$$

Таким образом, сила, действующая на ион, равна

$$\vec{f} = Q\vec{E}_p = -\frac{2\alpha k^2 Q^2}{r^5}\hat{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha Q^2}{8\pi^2 \varepsilon_0^2 r^5}\hat{\mathbf{r}}.$$

Поскольку $\alpha > 0$, а заряд входит в выражение в виде Q^2 , сила всегда направлена к атому независимо от знака Q .

3.3

Для центральной консервативной силы

$$f_r = -\frac{dU}{dr}.$$

Выбирая нулевую потенциальную энергию на бесконечности, получаем

$$U(r) = -\int_{\infty}^r f_r(s) ds = -\int_{\infty}^r \left(-\frac{2\alpha k^2 Q^2}{s^5}\right) ds.$$

Следовательно,

$$U(r) = -\frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4}.$$

Эквивалентная запись:

$$U = -\frac{1}{2}\alpha E_{\text{ion}}^2.$$

Множитель $1/2$ учитывает энергию, необходимую для индуцирования диполя. Действительно, энергия поляризации $p^2/(2\alpha)$ вместе с энергией взаимодействия $-pE_{\text{ion}}$ даёт $-\alpha E_{\text{ion}}^2/2$ при $p = \alpha E_{\text{ion}}$.

3.4

Сила является центральной, поэтому момент импульса относительно атома сохраняется. Его модуль определяется траекторией налетающего иона:

$$L = mv_0 b.$$

Механическая энергия также сохраняется. На бесконечности потенциальная энергия обращается в нуль, поэтому

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Разделяя кинетическую энергию на радиальную и поперечную составляющие, получаем

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

В точке наибольшего сближения на траектории рассеяния $\dot{r} = 0$. Подставляя $L = mv_0 b$, получаем

$$\frac{mv_0^2 b^2}{2r_{\min}^2} - \frac{\alpha k^2 Q^2}{2r_{\min}^4} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Умножение на $2r_{\min}^4/(mv_0^2)$ даёт

$$r_{\min}^4 - b^2 r_{\min}^2 + \frac{\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно $r_{\min}^2$, корни которого равны

$$r_{\pm}^2 = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}}}{2}.$$

Ион, прилетающий из бесконечности, сначала достигает расстояния, соответствующего большему корню. Следовательно,

$$r_{\min} = \left[\frac{b^2 + \sqrt{b^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}}}{2} \right]^{1/2}.$$

Два корня различны при $b > b_0$, где b_0 определяется ниже. Для проверки заметим, что при стремлении взаимодействия к нулю это выражение даёт $r_{\min} \rightarrow b$, как и должно быть при прямолинейном движении.

3.5

Радиальное движение определяется эффективным потенциалом

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4}.$$

При ненулевом моменте импульса на больших расстояниях преобладает положительный центробежный член, а на малых — член, описывающий притяжение. Возникающий потенциальный барьер может помешать иону достичь атома.

Критической траектории соответствует слияние двух радиальных точек поворота. Поэтому дискриминант, найденный в пункте 3.4, должен обращаться в нуль:

$$b_0^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$b_0 = \left(\frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} \right)^{1/4}.$$

При $b < b_0$ уравнение энергии радиального движения

$$\dot{r}^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{b^2}{r^2} + \frac{\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2 r^4} \right)$$

не имеет положительного значения радиуса, при котором правая часть обращается в нуль. Поэтому налетающий ион продолжает приближаться к атому и, согласно предположению в условии, испытывает перезарядку.

При точном равенстве $b = b_0$

$$\dot{r}^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{b_0^2}{2r^2} \right)^2.$$

Налетающий ион приближается к радиусу неустойчивой круговой орбиты

$$r_c = \frac{b_0}{\sqrt{2}}$$

асимптотически. Эта граница имеет нулевую площадь в плоскости прицельных параметров и не влияет на сечение.

Траектории захвата занимают в этой плоскости круг радиусом b_0 . Поэтому

$$A = \pi b_0^2 = \pi \sqrt{\frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}},$$

или

$$A = \frac{2\pi k|Q|}{v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \frac{|Q|}{2\varepsilon_0 v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}}.$$

Если исходные величины выражены в единицах СИ, то A выражается в м². Численные значения параметров не заданы.

Решение проверено по официальному решению.