

IPhO 2011

Problemas teóricos y soluciones · Bangkok, Tailandia · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/2011/

Problema 1: Un problema de tres cuerpos y LISA

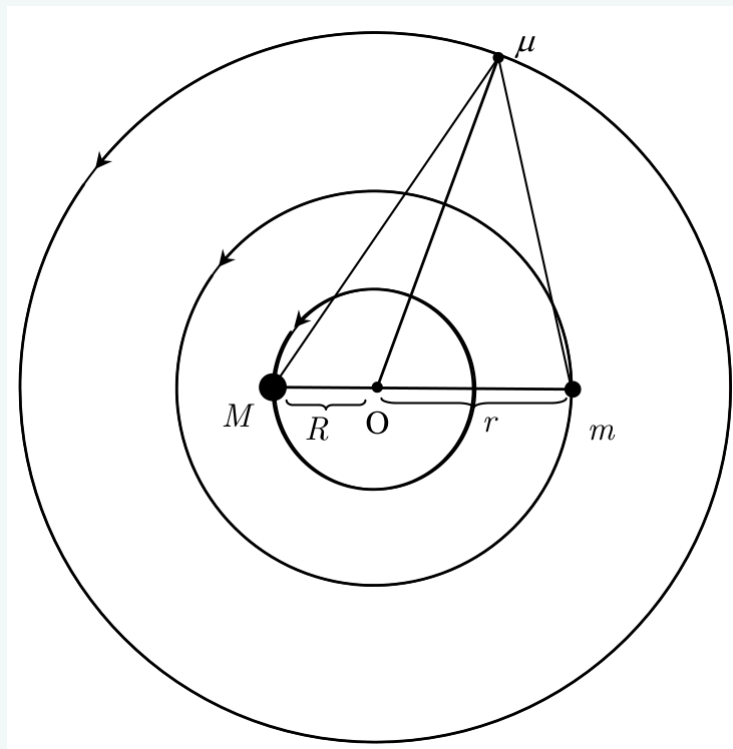


FIGURA 1 Órbitas coplanarias de tres cuerpos.

1.1 Dos masas M y m que interactúan gravitatoriamente se mueven en órbitas circulares de radios R y r , respectivamente, alrededor de su centro de masas común. Halle la velocidad angular ω_0 de la recta que une M y m en función de R , r , M , m y de la constante de gravitación universal G .

[1.5 puntos]

1.2 Se coloca un tercer cuerpo de masa infinitesimal μ en una órbita circular coplanaria alrededor del mismo centro de masas, de modo que μ permanece en reposo con respecto tanto a M como a m , como se muestra en la Figura 1. Suponga que la masa infinitesimal no está alineada con M y m . Halle los valores de los siguientes parámetros en función de R y r :

[3.5 puntos]

1.2.1 distancia de μ a M .

1.2.2 distancia de μ a m .

1.2.3 distancia de μ al centro de masas.

1.3 Considere el caso $M = m$. Si ahora se aplica a μ una pequeña perturbación radial (a lo largo de $O\mu$), ¿cuál es la frecuencia angular de oscilación de μ alrededor de la posición no perturbada en función de ω_0 ? Suponga que el momento angular de μ se conserva.

[3.2 puntos]

La Antena Espacial de Interferometría Láser (LISA) es un conjunto de tres naves espaciales idénticas destinado a detectar ondas gravitacionales de baja frecuencia. Las naves espaciales están situadas en los vértices de un triángulo equilátero, como se muestra en la Figura 2 y la Figura 3. Los lados (o «brazos») tienen una longitud de unos 5.0 millones de kilómetros. La constelación LISA se encuentra en una órbita alrededor del Sol similar a la terrestre, siguiendo a la Tierra con un retraso de 20° . Cada una de las naves se mueve en una órbita individual ligeramente inclinada alrededor del Sol. En conjunto, las tres naves espaciales parecen girar alrededor de su centro común, completando una vuelta por año.

Las naves transmiten y reciben continuamente señales láser entre sí. En conjunto, detectan las ondas gravitacionales midiendo cambios diminutos en las longitudes de los brazos mediante técnicas interferométricas. Una colisión de objetos masivos, como agujeros negros, en galaxias cercanas es un ejemplo de fuente de ondas gravitacionales.

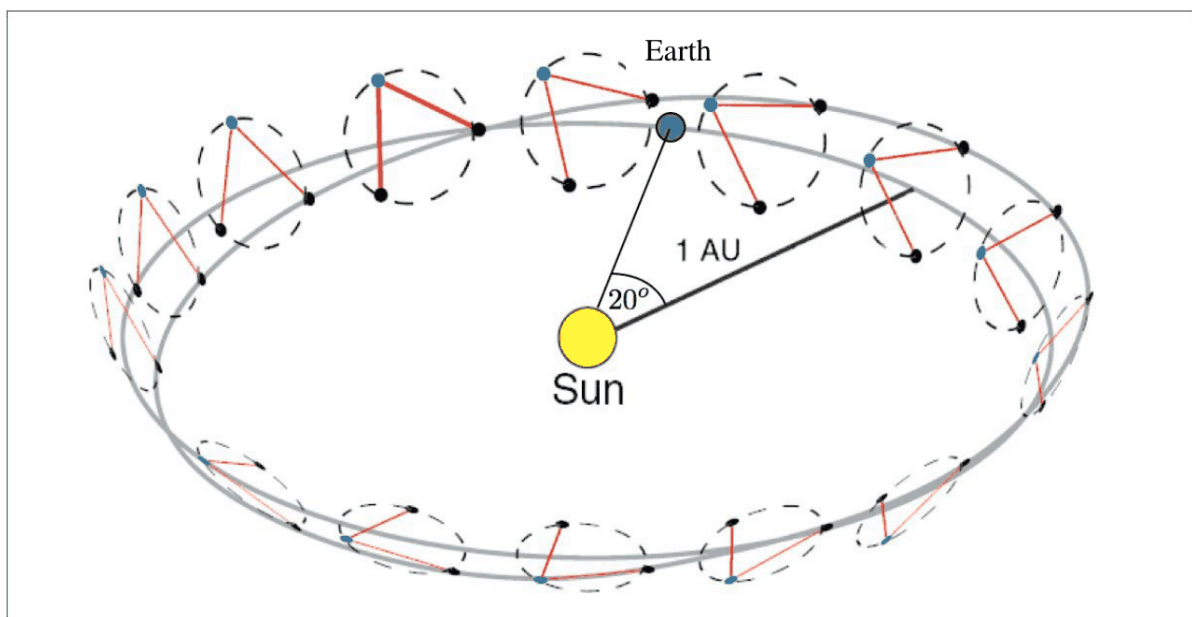


FIGURA 2 Ilustración de la órbita de LISA. Las tres naves espaciales giran alrededor de su centro de masas con un período de 1 año. Inicialmente, siguen a la Tierra con un retraso de 20° (Imagen de D.A. Shaddock, «Una visión general de la Antena Espacial de Interferometría Láser», *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 2009, **26**, pp.128-132.).

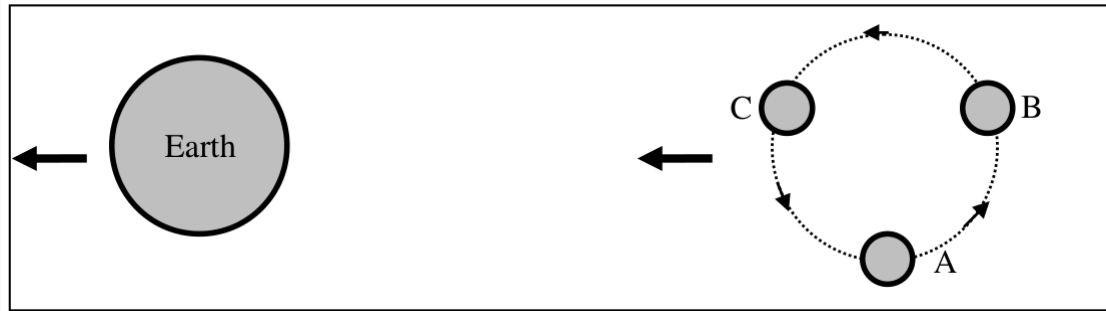


FIGURA 3 Vista ampliada de las tres naves espaciales que siguen a la Tierra. A, B y C son las tres naves espaciales situadas en los vértices del triángulo equilátero.

1.4 En el plano que contiene las tres naves espaciales, ¿cuál es la rapidez relativa de una nave espacial con respecto a otra?

[1.8 puntos]

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- 1.1

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G(M+m)}{(R+r)^3}}$$

- 1.2.1

$$d_{\mu M} = R + r$$

- 1.2.2

$$d_{\mu m} = R + r$$

- 1.2.3

$$d_{\mu O} = \sqrt{R^2 + Rr + r^2}$$

- 1.3, usando la conservación del momento angular estipulada:

$$\omega_{\text{osc}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \omega_0$$

- 1.4, con una longitud de brazo $L = 5.0 \times 10^9 \text{ m}$ y un período de rotación $T = 1 \text{ year}$:

$$v_{\text{rel}} = \frac{2\pi L}{T} \simeq 1.0 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} = 1.0 \text{ km s}^{-1}$$

Solución

1.1

La distancia entre las masas es $d = R + r$. Puesto que O es su centro de masas,

$$MR = mr.$$

La gravedad proporciona la aceleración centrípeta de cada masa:

$$M\omega_0^2 R = \frac{GMm}{d^2}, \quad m\omega_0^2 r = \frac{GMm}{d^2}.$$

Al dividir por las respectivas masas y sumar, se obtiene

$$\omega_0^2(R + r) = \frac{G(M + m)}{d^2}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{G(M + m)}{(R + r)^3}}}.$$

1.2.1 y 1.2.2

Como μ es infinitesimal, no afecta al movimiento de M y m . Para permanecer en reposo con respecto a ellas, debe girar alrededor de O con velocidad angular ω_0 .

En un instante elegido, tomemos

$$O = (0, 0), \quad M = (-R, 0), \quad m = (r, 0), \quad \mu = (x, y),$$

donde $y \neq 0$. Escribamos sus distancias a las dos masas como

$$a = \sqrt{(x + R)^2 + y^2}, \quad b = \sqrt{(x - r)^2 + y^2}.$$

Su aceleración es $-\omega_0^2(x, y)$. Por tanto, la ley de Newton, tras cancelar la masa de prueba μ , da

$$\begin{aligned} \omega_0^2 x &= \frac{GM(x + R)}{a^3} + \frac{Gm(x - r)}{b^3}, \\ \omega_0^2 y &= \frac{GM y}{a^3} + \frac{Gm y}{b^3}. \end{aligned}$$

Como $y \neq 0$, la segunda ecuación implica

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{a^3} + \frac{Gm}{b^3}.$$

Al restar de la primera ecuación esta última multiplicada por x , resulta

$$0 = \frac{GMR}{a^3} - \frac{Gmr}{b^3}.$$

Usando $MR = mr$, obtenemos $a = b$. En consecuencia,

$$\omega_0^2 = \frac{G(M + m)}{a^3}.$$

La comparación con el apartado 1.1 da $a = R + r$, y, por tanto,

$$\boxed{1.2.1: d_{\mu M} = R + r}, \quad \boxed{1.2.2: d_{\mu m} = R + r}.$$

Así pues, los tres cuerpos ocupan los vértices de un triángulo equilátero.

1.2.3

El punto medio del segmento que une las dos masas finitas tiene la coordenada

$$x_{\text{mid}} = \frac{r - R}{2}.$$

El tercer vértice de un triángulo equilátero de lado $R + r$ se encuentra a una distancia perpendicular $\sqrt{3}(R + r)/2$ de este punto medio. Por tanto, las dos posiciones posibles de μ son

$$x = \frac{r - R}{2}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(R + r).$$

Su distancia a O satisface

$$d_{\mu O}^2 = x^2 + y^2 = \frac{(r - R)^2 + 3(R + r)^2}{4} = R^2 + Rr + r^2.$$

Así,

$$d_{\mu O} = \sqrt{R^2 + Rr + r^2}.$$

1.3

Cuando $M = m$, la condición del centro de masas da $R = r$. El radio orbital no perturbado de μ es, por tanto,

$$\rho_0 = \sqrt{3}R,$$

y el apartado 1.1 da

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{4R^3}.$$

En la mediatriz del segmento que une las masas iguales, un punto situado a una distancia ρ de O se encuentra a una distancia $\sqrt{R^2 + \rho^2}$ de cada masa. Las componentes transversales de las aceleraciones gravitatorias se cancelan, de modo que la aceleración radial hacia el centro es

$$g(\rho) = \frac{2GM\rho}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

Esto determina la fuerza radial linealizada: por simetría de reflexión, una pequeña desviación angular respecto de la mediatriz solo modifica la componente radial a segundo orden.

Utilicemos la conservación del momento angular prescrita en el enunciado. El momento angular por unidad de masa es

$$h = \rho^2 \dot{\theta} = \rho_0^2 \omega_0.$$

La ecuación radial del movimiento,

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 = -g(\rho),$$

se convierte en

$$\ddot{\rho} = \frac{h^2}{\rho^3} - \frac{2GM\rho}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

Hagamos

$$\rho = \rho_0 + \xi, \quad |\xi| \ll \rho_0,$$

y conservemos únicamente los términos lineales en ξ . El desarrollo del primer término es

$$\frac{h^2}{\rho^3} = \rho_0 \omega_0^2 - 3\omega_0^2 \xi + O(\xi^2).$$

Para la aceleración gravitatoria hacia el centro,

$$g'(\rho) = \frac{2GM}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{3\rho^2}{R^2 + \rho^2} \right).$$

Como $\rho_0^2 = 3R^2$,

$$g'(\rho_0) = \omega_0^2 \left(1 - \frac{9}{4} \right) = -\frac{5}{4} \omega_0^2.$$

Así,

$$g(\rho) = \rho_0 \omega_0^2 - \frac{5}{4} \omega_0^2 \xi + O(\xi^2).$$

Los términos de equilibrio se cancelan, y queda

$$\ddot{\xi} = \left(-3 + \frac{5}{4} \right) \omega_0^2 \xi = -\frac{7}{4} \omega_0^2 \xi.$$

Esta es la ecuación del oscilador armónico simple, por lo que

$$\omega_{\text{osc}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \omega_0.$$

Este resultado utiliza la aproximación radial impuesta que conserva el momento angular. El momento angular respecto de O no se conserva en general para un movimiento sin restricciones en el campo gravitatorio rotatorio de las dos masas.

1.4

Consideremos la constelación como un triángulo equilátero de longitud de lado constante L , que gira en su plano con velocidad angular

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Sean $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ las posiciones de dos naves espaciales respecto del centro del triángulo. Sus velocidades son

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_A, \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_B,$$

donde $\mathbf{V}$ es la velocidad de traslación común del centro.

Al restar se elimina este movimiento común:

$$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A).$$

El vector de separación está en el plano del triángulo y tiene módulo L , por lo que es perpendicular a $\boldsymbol{\Omega}$. Por tanto,

$$v_{\text{rel}} = \Omega L = \frac{2\pi L}{T}.$$

Con

$$L = 5.0 \times 10^6 \text{ km} = 5.0 \times 10^9 \text{ m}, \quad T \simeq 365 \times 24 \times 3600 \text{ s},$$

obtenemos

$$v_{\text{rel}} \simeq 996 \text{ m s}^{-1}.$$

Con dos cifras significativas,

$$v_{\text{rel}} \simeq 1.0 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} = 1.0 \text{ km s}^{-1}.$$

La velocidad relativa es perpendicular al brazo que une las naves espaciales, en consonancia con la longitud constante del brazo en este movimiento idealizado.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Una burbuja de jabón electrizada

Una burbuja esférica de jabón que contiene aire de densidad ρ_i y temperatura T_i , y cuyo radio es R_0 , está rodeada de aire de densidad ρ_a , presión atmosférica P_a y temperatura T_a . La película de jabón tiene tensión superficial γ , densidad ρ_s y espesor t . La masa y la tensión superficial del jabón no varían con la temperatura. Suponga que $R_0 \gg t$.

El incremento de energía, dE , necesario para aumentar en dA el área de una interfaz jabón-aire viene dado por $dE = \gamma dA$, donde γ es la tensión superficial de la película.

2.1 Halle el cociente $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a}$ en función de γ , P_a y R_0 . **[1.7 puntos]**

2.2 Halle el valor numérico de $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1$ utilizando $\gamma = 0.0250 \text{ N m}^{-1}$, $R_0 = 1.00 \text{ cm}$ y $P_a = 1.013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$. **[0.4 puntos]**

2.3 La burbuja se forma inicialmente con aire más caliente en su interior. Halle el valor numérico mínimo de T_i para que la burbuja pueda flotar en aire en reposo. Utilice $T_a = 300 \text{ K}$, $\rho_s = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_a = 1.30 \text{ kg m}^{-3}$, $t = 100 \text{ nm}$ y $g = 9.80 \text{ m s}^{-2}$. **[2.0 puntos]**

Transcurrido cierto tiempo desde su formación, la burbuja estará en equilibrio térmico con el entorno. En aire en reposo, esta burbuja caerá de forma natural hacia el suelo.

2.4 Halle la velocidad mínima u de una corriente ascendente (aire que fluye hacia arriba) que impida que la burbuja caiga cuando se encuentre en equilibrio térmico. Exprese su respuesta en función de ρ_s , R_0 , g , t y el coeficiente de viscosidad del aire η . Puede suponer que la velocidad es lo suficientemente pequeña como para que se cumpla la ley de Stokes, y despreciar la variación del radio cuando la temperatura desciende hasta alcanzar el equilibrio. La fuerza de arrastre según la ley de Stokes es $F = 6\pi\eta R_0 u$. **[1.6 puntos]**

2.5 Calcule el valor numérico de u utilizando $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. **[0.4 puntos]**

Los cálculos anteriores sugieren que los términos que contienen la tensión superficial γ contribuyen muy poco a la precisión del resultado. En todas las preguntas siguientes, puede despreciar los términos de tensión superficial.

2.6 Si ahora esta burbuja esférica se electriza uniformemente con una carga total q , halle una ecuación que describa el nuevo radio R_1 en función de R_0 , P_a , q y la permitividad del vacío ϵ_0 . **[2.0 puntos]**

2.7 Suponga que la carga total no es demasiado grande (es decir, $\frac{q^2}{\varepsilon_0 R_0^4} \ll P_a$) y que el radio de la burbuja solo experimenta un pequeño aumento; halle ΔR , donde $R_1 = R_0 + \Delta R$.

Se da que $(1+x)^n \approx 1+nx$, donde $x \ll 1$. **[0.7 puntos]**

2.8 ¿Cuál debe ser el módulo de esta carga q , en función de $t, \rho_a, \rho_s, \varepsilon_0, R_0, P_a$, para que la burbuja flote inmóvil en aire en reposo? Calcule también el valor numérico de q . La permitividad del vacío es $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ farad/m. **[1.2 puntos]**

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

• 2.1

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = 1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}.$$

• 2.2

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1 = 9.87 \times 10^{-5}.$$

• 2.3

$$T_{i,\min} = T_a \frac{1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}}{1 - \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0}} = 307 \text{ K}.$$

• 2.4, despreciando la pequeña corrección debida a la tensión superficial:

$$u_{\min} \simeq \frac{2\rho_s R_0 t g}{3\eta}.$$

• 2.5

$$u_{\min} \simeq 0.36 \text{ m s}^{-1}.$$

• 2.6

$$R_1^4 - R_0^3 R_1 - \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 P_a} = 0, \quad R_1 \geq R_0.$$

• 2.7

$$\Delta R \simeq \frac{q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_0^3}.$$

- **2.8**, utilizando la aproximación de expansión pequeña:

$$|q| \simeq \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}} = 2.56 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

Sin linealizar la expansión, el resultado en la aproximación de película delgada es

$$|q| = \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}} \left(1 + \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0}\right)^{1/6} = 2.57 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

Solución

Tratamos el aire como un gas ideal con la misma composición en el interior y en el exterior. En la aproximación de película delgada, el volumen de la burbuja y la masa de jabón son

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad m_s \simeq 4\pi R^2 t \rho_s.$$

La película tiene dos interfaces jabón-aire, pero su masa es la de una sola capa esférica.

2.1

Ambas interfaces contribuyen a la energía superficial. Despreciando la pequeña diferencia entre sus radios,

$$E_s = 2\gamma(4\pi R^2) = 8\pi\gamma R^2.$$

Para un pequeño desplazamiento hacia fuera dR , el equilibrio mecánico exige

$$(P_i - P_a) dV = dE_s.$$

Como

$$dV = 4\pi R^2 dR, \quad dE_s = 16\pi\gamma R dR,$$

el exceso de presión interna es

$$P_i - P_a = \frac{4\gamma}{R_0}.$$

La relación del gas ideal $P = \rho \mathcal{R}_{\text{air}} T$, con la misma constante específica del gas a ambos lados, da

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = \frac{P_i}{P_a} = 1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}.$$

2.2

Con $R_0 = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$,

$$P_i - P_a = \frac{4(0.0250)}{1.00 \times 10^{-2}} = 10.0 \text{ Pa}.$$

Por tanto,

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1 = \frac{10.0}{1.013 \times 10^5} = 9.87 \times 10^{-5}.$$

2.3

La fuerza de empuje ascendente es igual al peso del aire ambiente desplazado:

$$F_B = \rho_a V_0 g, \quad V_0 = \frac{4}{3} \pi R_0^3.$$

A la temperatura mínima que permite la flotación, el empuje equilibra exactamente el peso conjunto del aire interior y del jabón:

$$\rho_a V_0 g = \rho_i V_0 g + 4\pi R_0^2 t \rho_s g.$$

Por lo tanto,

$$\rho_i = \rho_a - \frac{3\rho_s t}{R_0}.$$

Numéricamente,

$$\frac{3\rho_s t}{R_0} = \frac{3(1000)(1.00 \times 10^{-7})}{1.00 \times 10^{-2}} = 0.0300 \text{ kg m}^{-3},$$

de modo que la flotación neutra requiere

$$\rho_i = 1.27 \text{ kg m}^{-3}.$$

Utilizando el apartado 2.1,

$$T_{i,\min} = \frac{\rho_a T_a}{\rho_i} \left(1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0} \right) = T_a \frac{1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}}{1 - \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0}}.$$

En consecuencia,

$$T_{i,\min} = 300 \frac{1 + 9.8717 \times 10^{-5}}{1 - 0.0300/1.30} = 307.117 \text{ K},$$

o bien

$$\boxed{T_{i,\min} = 307 \text{ K}}.$$

Una temperatura mayor produce una menor densidad del aire interior y, por tanto, una fuerza neta ascendente.

2.4

En equilibrio térmico, $T_i = T_a$. El apartado 2.1 da entonces

$$\rho_i - \rho_a = \rho_a \frac{4\gamma}{P_a R_0}.$$

Para una burbuja inmóvil, la fuerza de arrastre ascendente de Stokes debe equilibrar su peso menos el empuje:

$$6\pi\eta R_0 u_{\min} = 4\pi R_0^2 t \rho_s g + \frac{4}{3} \pi R_0^3 (\rho_i - \rho_a) g.$$

Por consiguiente, conservando la tensión superficial,

$$u_{\min} = \frac{2\rho_s R_0 t g}{3\eta} + \frac{8\rho_a \gamma R_0 g}{9\eta P_a}.$$

El cociente entre el segundo término y el primero es

$$\frac{4\rho_a\gamma}{3P_a\rho_s t} = 4.28 \times 10^{-3}.$$

Así pues, la tensión superficial modifica la velocidad necesaria en tan solo un 0.43% aproximadamente. Al despreciar esta corrección se obtiene la expresión en función de los parámetros solicitados:

$$u_{\min} \simeq \frac{2\rho_s R_0 t g}{3\eta}.$$

Aquí se utiliza la ley de arrastre de Stokes indicada y se sigue la instrucción de despreciar la variación del radio durante el enfriamiento.

2.5

Sustituyendo los valores dados,

$$u_{\min} \simeq \frac{2(1000)(1.00 \times 10^{-2})(1.00 \times 10^{-7})(9.80)}{3(1.8 \times 10^{-5})} = 0.362963 \text{ m s}^{-1}.$$

Por lo tanto,

$$u_{\min} \simeq 0.36 \text{ m s}^{-1}.$$

Al incluir la tensión superficial se obtiene $0.364516 \text{ m s}^{-1}$, que, al redondear a dos cifras significativas, da la misma respuesta.

2.6

Ahora despreciamos la tensión superficial, tal como se indica. Antes de cargarla, la burbuja está a la temperatura T_a , con una presión interna P_a . La masa de aire encerrada se conserva, y el estado final también está a la temperatura T_a . Por tanto, la ley de los gases ideales da

$$P_i V_1 = P_a V_0, \quad P_i = P_a \frac{R_0^3}{R_1^3}.$$

Una capa esférica cargada uniformemente tiene un campo eléctrico

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R),$$

y un campo nulo en su interior. Su energía electrostática es

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty E(r)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Con carga constante, un aumento del radio reduce esta energía. La presión eléctrica correspondiente, dirigida hacia fuera, es

$$p_e = -\frac{dU_e}{dV} = -\frac{dU_e/dR}{4\pi R^2} = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4}.$$

El equilibrio mecánico exige

$$P_i + p_e = P_a.$$

Para $R = R_1$,

$$P_a \frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 R_1^4} = P_a.$$

Multiplicando por R_1^4/P_a se obtiene

$$\boxed{R_1^4 - R_0^3 R_1 - \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 P_a} = 0}.$$

Para una carga no nula, la solución física cumple $R_1 > R_0$.

2.7

Sea

$$x = \frac{\Delta R}{R_0} \ll 1, \quad R_1 = R_0(1 + x).$$

La ecuación del apartado 2.6 se convierte en

$$R_0^4 [(1 + x)^4 - (1 + x)] = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 P_a}.$$

A primer orden,

$$(1 + x)^4 - (1 + x) \simeq (1 + 4x) - (1 + x) = 3x.$$

Por tanto,

$$3R_0^4 x = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 P_a},$$

y

$$\boxed{\Delta R \simeq \frac{q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_0^3}}.$$

2.8

La electrización aumenta el volumen de aire desplazado, mientras que la masa total de la burbuja permanece invariable.

Antes de cargarla, la densidad del aire interior es igual a ρ_a , porque ahora se desprecia la tensión superficial y tanto su presión como su temperatura son iguales a las del ambiente. Por tanto, su masa es

$$m_i = \rho_a V_0.$$

La masa de jabón, que se conserva, es

$$m_s = 4\pi R_0^2 t \rho_s.$$

Aquí t es el espesor original; la película se hace más delgada al expandirse.

La flotación neutra después de cargarla requiere

$$\rho_a V_1 g = (\rho_a V_0 + m_s) g.$$

Por consiguiente,

$$\rho_a \frac{4}{3} \pi (R_1^3 - R_0^3) = 4\pi R_0^2 t \rho_s,$$

o bien

$$R_1^3 - R_0^3 = \frac{3\rho_s t R_0^2}{\rho_a}.$$

Para una expansión pequeña,

$$R_1^3 - R_0^3 \simeq 3R_0^2 \Delta R,$$

de modo que el aumento de radio necesario es

$$\Delta R \simeq \frac{\rho_s t}{\rho_a}.$$

Numéricamente,

$$\Delta R \simeq \frac{1000(1.00 \times 10^{-7})}{1.30} = 7.69 \times 10^{-5} \text{ m}, \quad \frac{\Delta R}{R_0} \simeq 0.00769.$$

Igualando este aumento al resultado del apartado 2.7 se obtiene

$$\frac{q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_0^3} = \frac{\rho_s t}{\rho_a},$$

y, por tanto,

$$|q| \simeq \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}}.$$

La sustitución da

$$|q| \simeq \sqrt{\frac{96\pi^2 (8.85 \times 10^{-12}) (1.013 \times 10^5) (1000) (1.00 \times 10^{-7}) (1.00 \times 10^{-2})^3}{1.30}},$$

de modo que

$$|q| \simeq 2.56 \times 10^{-7} \text{ C} = 0.256 \text{ } \mu\text{C}.$$

El resultado también puede obtenerse sin linealizar la expansión. La flotación neutra da

$$R_1 = R_0 \left(1 + \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0} \right)^{1/3}.$$

Combinando esto con el apartado 2.6,

$$q^2 = 32\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_1 (R_1^3 - R_0^3) = \frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^2 R_1}{\rho_a}.$$

Así pues, el resultado en la aproximación de película delgada, sin desarrollar en serie, es

$$|q| = \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}} \left(1 + \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0} \right)^{1/6} = 2.57 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

Cualquiera de los dos signos de la carga produce la misma expansión, porque la presión eléctrica depende de q^2 .

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Conmemoración del centenario del núcleo atómico de Rutherford: la dispersión de un ion por un átomo neutro

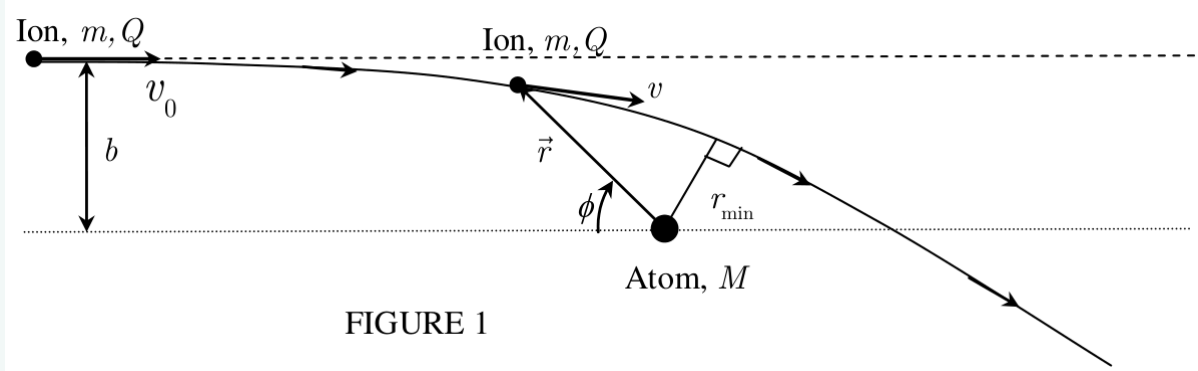


FIGURA 1

Un ion de masa m y carga Q se mueve con una rapidez inicial no relativista v_0 desde una gran distancia hacia las proximidades de un átomo neutro de masa $M \gg m$ y polarizabilidad eléctrica α . El parámetro de impacto es b , como se muestra en la Figura 1.

El átomo se polariza instantáneamente por efecto del campo eléctrico $\vec{E}$ del ion incidente (que se aproxima). El momento dipolar eléctrico resultante del átomo es $\vec{p} = \alpha \vec{E}$. Desprecie cualquier pérdida por radiación en este problema.

3.1 Calcule la intensidad del campo eléctrico $\vec{E}_p$ a una distancia r de un dipolo eléctrico ideal $\vec{p}$ situado en el origen O , en la dirección y el sentido de $\vec{p}$ en la Figura 2. **[1.2 puntos]**

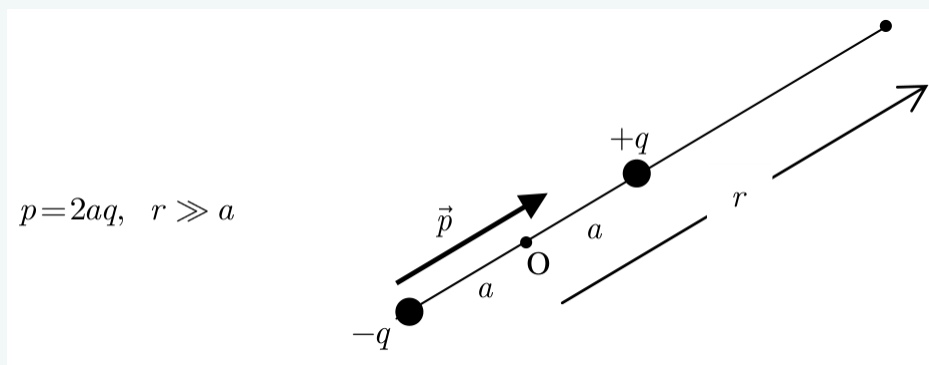


FIGURA 2

3.2 Halle la expresión de la fuerza $\vec{f}$ que actúa sobre el ion debido al átomo polarizado. Demuestre que esta fuerza es atractiva independientemente del signo de la carga del ion. **[3.0 puntos]**

3.3 ¿Cuál es la energía potencial eléctrica de la interacción ion-átomo en función de α , Q y r ? **[0.9 puntos]**

3.4 Halle la expresión de $r_{\min}$, la distancia de máxima aproximación, que se muestra en la Figura 1. **[2.4 puntos]**

3.5 Si el parámetro de impacto b es menor que un valor crítico b_0 , el ion descenderá en espiral hacia el átomo. En tal caso, el ion se neutralizará y el átomo, a su vez, quedará cargado. Este proceso se conoce como interacción de «intercambio de carga». ¿Cuál es la sección eficaz $A = \pi b_0^2$ del átomo para esta colisión de «intercambio de carga», vista por el ion? **[2.5 puntos]**

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Sea $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$, y sea $\hat{\mathbf{r}}$ el vector unitario que apunta desde el átomo hacia el ion. Tomamos $U(\infty) = 0$.

- **3.1**

$$\vec{E}_p = \frac{2k}{r^3} \vec{p}.$$

- **3.2**

$$\vec{f} = -\frac{2\alpha k^2 Q^2}{r^5} \hat{\mathbf{r}}.$$

La fuerza es atractiva para ambos signos de Q .

- **3.3**

$$U(r) = -\frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4} = -\frac{\alpha Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}.$$

- **3.4** Para una trayectoria de dispersión, $b > b_0$,

$$r_{\min} = \left[\frac{b^2 + \sqrt{b^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}}}{2} \right]^{1/2}.$$

Cuando $b = b_0$, el ion se aproxima asintóticamente a $r = b_0/\sqrt{2}$. Para $b < b_0$, no existe ningún punto de retorno radial a una distancia positiva.

- **3.5**

$$b_0 = \left(\frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} \right)^{1/4},$$

$$A = \frac{2\pi k |Q|}{v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \frac{|Q|}{2\epsilon_0 v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}}.$$

Solución

Dado que $M \gg m$, despreciamos el retroceso del átomo y consideramos que su posición es fija. Utilizamos el modelo de dipolo inducido ideal especificado en el enunciado, con $\alpha > 0$.

3.1

Representamos el dipolo mediante las cargas $+q$ y $-q$, separadas por $2a$, de modo que $p = 2aq$. En un punto del eje situado en la dirección y el sentido de $\vec{p}$, las distancias a las dos cargas son $r - a$ y $r + a$.

Los campos de las dos cargas apuntan en sentidos opuestos, lo que da

$$\vec{E}_p = kq \left[\frac{1}{(r - a)^2} - \frac{1}{(r + a)^2} \right] \hat{\mathbf{p}},$$

donde $\hat{\mathbf{p}}$ es el vector unitario en la dirección y el sentido del momento dipolar.

Al reducir las fracciones a un denominador común,

$$\vec{E}_p = \frac{4kqar}{(r^2 - a^2)^2} \hat{\mathbf{p}}.$$

En el límite de dipolo ideal $a/r \rightarrow 0$, manteniendo fijo $p = 2aq$,

$$\boxed{\vec{E}_p = \frac{2kp}{r^3} \hat{\mathbf{p}} = \frac{2k}{r^3} \vec{p}.}$$

El campo en el lado opuesto del eje del dipolo también apunta en la dirección y el sentido de $\vec{p}$ y tiene el mismo módulo a la misma distancia.

3.2

Sea $\vec{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ la posición del ion respecto al átomo. El campo eléctrico producido por el ion en el átomo es

$$\vec{E}_{\text{ion}} = -\frac{kQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Por consiguiente, el momento dipolar inducido es

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_{\text{ion}} = -\frac{\alpha kQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

El ion se encuentra sobre el eje de este dipolo. Utilizando el resultado de 3.1,

$$\vec{E}_p = \frac{2k}{r^3} \vec{p} = -\frac{2\alpha k^2 Q}{r^5} \hat{\mathbf{r}}.$$

Por tanto, la fuerza sobre el ion es

$$\boxed{\vec{f} = Q\vec{E}_p = -\frac{2\alpha k^2 Q^2}{r^5} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 r^5} \hat{\mathbf{r}}.}$$

Como $\alpha > 0$ y la carga aparece como Q^2 , la fuerza siempre apunta hacia el átomo, independientemente del signo de Q .

3.3

Para una fuerza central conservativa,

$$f_r = -\frac{dU}{dr}.$$

Tomando la energía potencial nula en el infinito,

$$U(r) = - \int_{\infty}^r f_r(s) ds = - \int_{\infty}^r \left(-\frac{2\alpha k^2 Q^2}{s^5} \right) ds.$$

Por lo tanto,

$$U(r) = -\frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4}.$$

De forma equivalente,

$$U = -\frac{1}{2}\alpha E_{\text{ion}}^2.$$

El factor $1/2$ tiene en cuenta la energía necesaria para inducir el dipolo. En efecto, la energía de polarización $p^2/(2\alpha)$, junto con la energía de acoplamiento $-pE_{\text{ion}}$, da $-\alpha E_{\text{ion}}^2/2$ cuando $p = \alpha E_{\text{ion}}$.

3.4

La fuerza es central, por lo que se conserva el momento angular respecto al átomo. Su módulo viene determinado por la trayectoria incidente:

$$L = mv_0 b.$$

La energía mecánica también se conserva. En el infinito, la energía potencial es nula, por lo que

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Al separar la energía cinética en las contribuciones radial y transversal, se obtiene

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

En el punto de máxima aproximación de una trayectoria de dispersión, $\dot{r} = 0$. Sustituyendo $L = mv_0 b$,

$$\frac{mv_0^2 b^2}{2r_{\min}^2} - \frac{\alpha k^2 Q^2}{2r_{\min}^4} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Al multiplicar por $2r_{\min}^4/(mv_0^2)$, se obtiene

$$r_{\min}^4 - b^2 r_{\min}^2 + \frac{\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} = 0.$$

Esta es una ecuación de segundo grado en $r_{\min}^2$, cuyas raíces son

$$r_{\pm}^2 = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}}}{2}.$$

Un ion que llega desde el infinito alcanza primero la raíz mayor. Por tanto,

$$r_{\min} = \left[\frac{b^2 + \sqrt{b^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}}}{2} \right]^{1/2}.$$

Las dos raíces son distintas para $b > b_0$, donde b_0 se determina a continuación. Como comprobación, cuando la interacción tiende a cero, esta expresión da $r_{\min} \rightarrow b$, como cabe esperar para un movimiento rectilíneo.

3.5

El movimiento radial está regido por el potencial efectivo

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4}.$$

Para un momento angular no nulo, el término centrífugo positivo domina a grandes distancias, mientras que el término atractivo domina a distancias cortas. La barrera de potencial resultante puede impedir que el ion alcance el átomo.

La trayectoria crítica se produce cuando los dos puntos de retorno radial coinciden. Por tanto, el discriminante hallado en 3.4 debe anularse:

$$b_0^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} = 0.$$

De ello se deduce que

$$b_0 = \left(\frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} \right)^{1/4}.$$

Para $b < b_0$, la ecuación de la energía radial

$$\dot{r}^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{b^2}{r^2} + \frac{\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2 r^4} \right)$$

no tiene ningún cero positivo. Por consiguiente, el ion incidente continúa acercándose al átomo y, bajo la hipótesis del enunciado, experimenta un intercambio de carga.

Exactamente cuando $b = b_0$,

$$\dot{r}^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{b_0^2}{2r^2} \right)^2.$$

El ion incidente se aproxima al radio de la órbita circular inestable

$$r_c = \frac{b_0}{\sqrt{2}}$$

asintóticamente. Esta frontera tiene área nula en el plano de los parámetros de impacto y no afecta a la sección eficaz.

Las trayectorias capturadas ocupan un disco de radio b_0 en ese plano. Por lo tanto,

$$A = \pi b_0^2 = \pi \sqrt{\frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}},$$

o bien

$$A = \frac{2\pi k |Q|}{v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \frac{|Q|}{2\varepsilon_0 v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}}.$$

Si los datos se expresan en unidades del SI, A se obtiene en m^2 . No se proporcionan valores numéricos de los parámetros.

La solución se comprobó con la solución oficial.