

# IPhO 2011

Theorieaufgaben und Lösungen · Bangkok, Thailand · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipro/2011/

## Aufgabe 1: Ein Dreikörperproblem und LISA

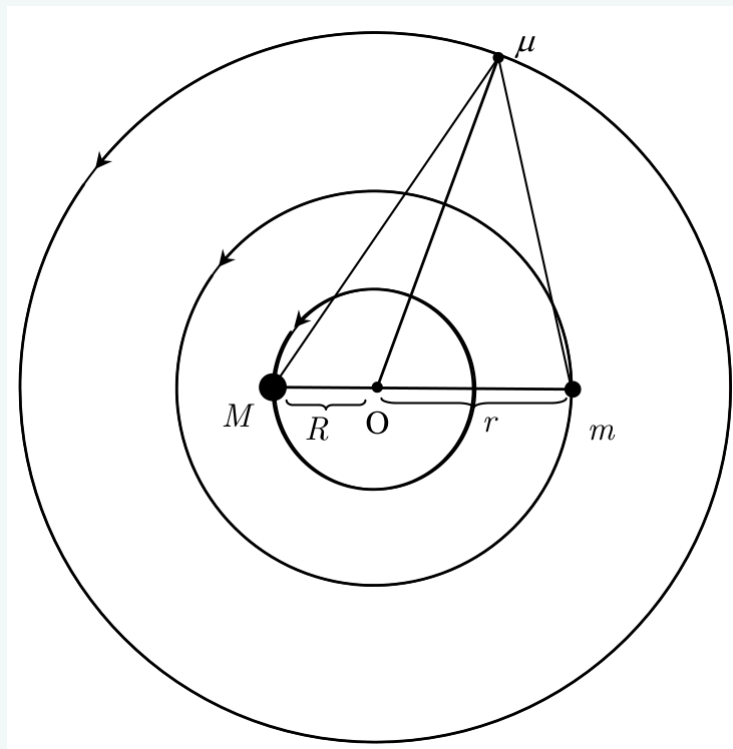


ABBILDUNG 1 Koplanare Umlaufbahnen dreier Körper.

**1.1** Zwei gravitativ wechselwirkende Massen  $M$  und  $m$  bewegen sich auf Kreisbahnen mit den Radien  $R$  bzw.  $r$  um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  der Verbindungslinie zwischen  $M$  und  $m$  in Abhängigkeit von  $R, r, M, m$  und der universellen Gravitationskonstanten  $G$ .

**[1.5 Punkte]**

**1.2** Ein dritter Körper mit infinitesimal kleiner Masse  $\mu$  wird auf eine koplanare Kreisbahn um denselben Schwerpunkt gebracht, sodass  $\mu$  relativ zu sowohl  $M$  als auch  $m$  in Ruhe bleibt, wie in Abbildung 1 dargestellt. Nehmen Sie an, dass die infinitesimal kleine Masse nicht auf der Verbindungslinie von  $M$  und  $m$  liegt. Bestimmen Sie die Werte der folgenden Größen in Abhängigkeit von  $R$  und  $r$ :

**[3.5 Punkte]**

**1.2.1** Abstand von  $\mu$  zu  $M$ .

**1.2.2** Abstand von  $\mu$  zu  $m$ .

### 1.2.3 Abstand von $\mu$ zum Schwerpunkt.

1.3 Betrachten Sie den Fall  $M = m$ . Wenn  $\mu$  nun eine kleine radiale Störung (entlang  $O\mu$ ) erfährt, wie groß ist dann die Kreisfrequenz der Schwingung von  $\mu$  um die ungestörte Position in Abhängigkeit von  $\omega_0$ ? Nehmen Sie an, dass der Drehimpuls von  $\mu$  erhalten bleibt.

### [3.2 Punkte]

Die Laser Interferometry Space Antenna (LISA) ist eine Gruppe von drei identischen Raumsonden zum Nachweis niederfrequenter Gravitationswellen. Die Raumsonden befinden sich jeweils an den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks, wie in Abbildung 2 und Abbildung 3 dargestellt. Die Seiten (oder „Arme“) sind etwa 5.0 Millionen Kilometer lang. Die LISA-Konstellation bewegt sich auf einer erdähnlichen Umlaufbahn um die Sonne und folgt der Erde mit einem Winkelabstand von  $20^\circ$ . Jede der Raumsonden bewegt sich auf einer eigenen, leicht geneigten Umlaufbahn um die Sonne. Insgesamt scheinen die drei Raumsonden dabei einmal pro Jahr um ihr gemeinsames Zentrum zu rotieren.

Sie senden und empfangen fortlaufend Lasersignale untereinander. Gravitationswellen weisen sie insgesamt nach, indem sie winzige Änderungen der Armlängen mit interferometrischen Methoden messen. Ein Zusammenstoß massereicher Objekte, etwa Schwarzer Löcher, in benachbarten Galaxien ist ein Beispiel für eine Quelle von Gravitationswellen.

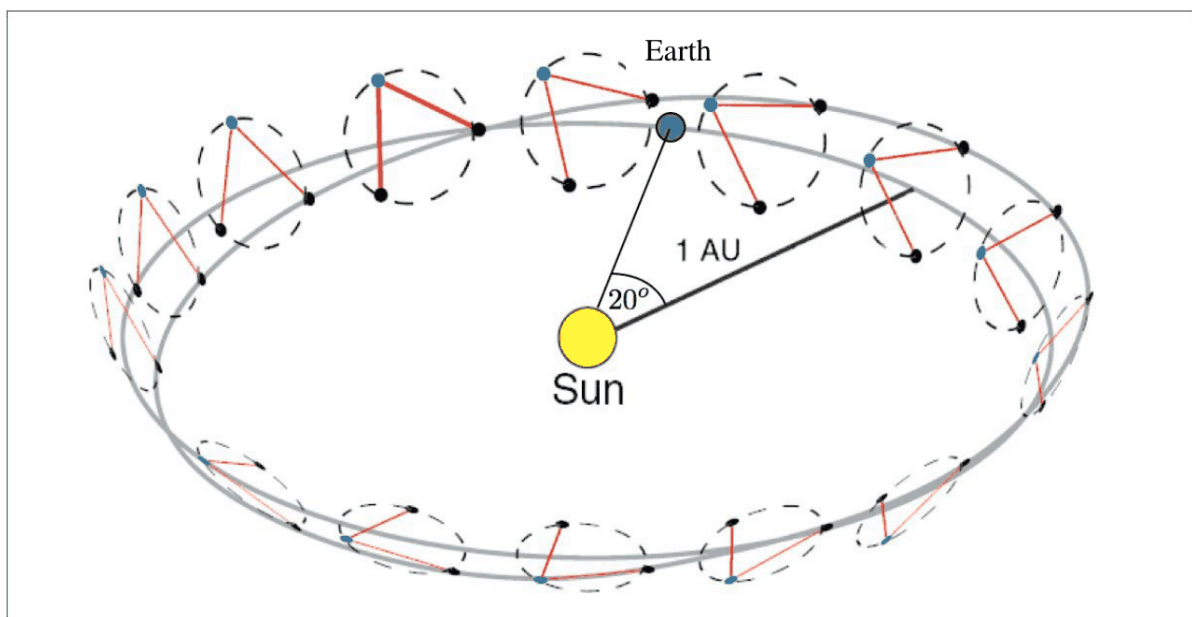


ABBILDUNG 2 Darstellung der LISA-Umlaufbahn. Die drei Raumsonden rotieren mit einer Periode von 1 Jahr um ihren Schwerpunkt. Zu Beginn folgen sie der Erde mit einem Winkelabstand von  $20^\circ$  (Bild aus D.A. Shaddock, „Ein Überblick über die Laser Interferometer Space Antenna“, *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 2009, **26**, S.128-132.).

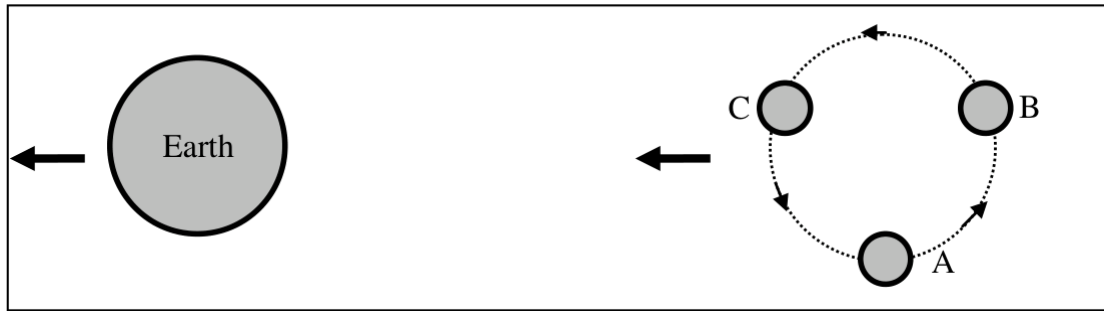


ABBILDUNG 3 Vergrößerte Ansicht der drei Raumsonden, die der Erde folgen. A, B und C sind die drei Raumsonden an den Eckpunkten des gleichseitigen Dreiecks.

**1.4** Wie groß ist in der Ebene, in der die drei Raumsonden liegen, der Betrag der Relativgeschwindigkeit einer Raumsonde gegenüber einer anderen?

**[1.8 Punkte]**

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

## Antworten

- 1.1

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G(M+m)}{(R+r)^3}}$$

- 1.2.1

$$d_{\mu M} = R + r$$

- 1.2.2

$$d_{\mu m} = R + r$$

- 1.2.3

$$d_{\mu O} = \sqrt{R^2 + Rr + r^2}$$

- 1.3, unter Verwendung der vorgegebenen Drehimpulserhaltung:

$$\omega_{\text{osc}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \omega_0$$

- 1.4, mit der Armlänge  $L = 5.0 \times 10^9 \text{ m}$  und der Rotationsperiode  $T = 1 \text{ year}$ :

$$v_{\text{rel}} = \frac{2\pi L}{T} \simeq 1.0 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} = 1.0 \text{ km s}^{-1}$$

## Lösung

### 1.1

Der Abstand zwischen den Massen beträgt  $d = R + r$ . Da  $O$  ihr Schwerpunkt ist, gilt

$$MR = mr.$$

Die Gravitation bewirkt die Zentripetalbeschleunigung jeder Masse:

$$M\omega_0^2 R = \frac{GMm}{d^2}, \quad m\omega_0^2 r = \frac{GMm}{d^2}.$$

Division durch die jeweilige Masse und anschließende Addition ergibt

$$\omega_0^2(R + r) = \frac{G(M + m)}{d^2}.$$

Damit folgt

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{G(M + m)}{(R + r)^3}}}.$$

### 1.2.1 und 1.2.2

Da  $\mu$  infinitesimal klein ist, beeinflusst es die Bewegung von  $M$  und  $m$  nicht. Um relativ zu ihnen in Ruhe zu bleiben, muss es mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  um  $O$  kreisen.

Für einen gewählten Zeitpunkt setzen wir

$$O = (0, 0), \quad M = (-R, 0), \quad m = (r, 0), \quad \mu = (x, y),$$

wobei  $y \neq 0$ . Seine Abstände von den beiden Massen schreiben wir als

$$a = \sqrt{(x + R)^2 + y^2}, \quad b = \sqrt{(x - r)^2 + y^2}.$$

Seine Beschleunigung ist  $-\omega_0^2(x, y)$ . Nach Kürzen der Testmasse  $\mu$  ergibt das zweite Newtonsche Gesetz daher

$$\begin{aligned} \omega_0^2 x &= \frac{GM(x + R)}{a^3} + \frac{Gm(x - r)}{b^3}, \\ \omega_0^2 y &= \frac{GM y}{a^3} + \frac{Gm y}{b^3}. \end{aligned}$$

Da  $y \neq 0$ , folgt aus der zweiten Gleichung

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{a^3} + \frac{Gm}{b^3}.$$

Subtrahiert man das  $x$ -Fache dieser Gleichung von der ersten, erhält man

$$0 = \frac{GMR}{a^3} - \frac{Gmr}{b^3}.$$

Mit  $MR = mr$  erhalten wir  $a = b$ . Folglich gilt

$$\omega_0^2 = \frac{G(M + m)}{a^3}.$$

Der Vergleich mit Teil 1.1 liefert  $a = R + r$  und somit

$$\boxed{1.2.1: d_{\mu M} = R + r}, \quad \boxed{1.2.2: d_{\mu m} = R + r}.$$

Die drei Körper befinden sich somit an den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks.

### 1.2.3

Der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke zwischen den beiden endlichen Massen hat die Koordinate

$$x_{\text{mid}} = \frac{r - R}{2}.$$

Der dritte Eckpunkt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge  $R + r$  liegt im senkrechten Abstand  $\sqrt{3}(R + r)/2$  von diesem Mittelpunkt. Die beiden möglichen Positionen von  $\mu$  sind daher

$$x = \frac{r - R}{2}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(R + r).$$

Für seinen Abstand von  $O$  gilt

$$d_{\mu O}^2 = x^2 + y^2 = \frac{(r - R)^2 + 3(R + r)^2}{4} = R^2 + Rr + r^2.$$

Somit folgt

$$\boxed{d_{\mu O} = \sqrt{R^2 + Rr + r^2}}.$$

### 1.3

Für  $M = m$  ergibt die Schwerpunktbedingung  $R = r$ . Der ungestörte Bahnradius von  $\mu$  beträgt daher

$$\rho_0 = \sqrt{3}R,$$

und Teil 1.1 liefert

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{4R^3}.$$

Auf der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecke zwischen den gleichen Massen liegt ein Punkt im Abstand  $\rho$  von  $O$  im Abstand  $\sqrt{R^2 + \rho^2}$  von jeder Masse. Die transversalen Komponenten ihrer Gravitationsbeschleunigungen heben sich auf, sodass die nach innen gerichtete Radialbeschleunigung

$$g(\rho) = \frac{2GM\rho}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

beträgt. Damit ist die radiale Kraft in linearer Näherung bestimmt: Aufgrund der Spiegelsymmetrie verändert eine kleine Winkelabweichung von der Mittelsenkrechten die radiale Komponente erst in zweiter Ordnung.

Wir verwenden die in der Aufgabe vorgegebene Drehimpulserhaltung. Der Drehimpuls pro Masseneinheit ist

$$h = \rho^2 \dot{\theta} = \rho_0^2 \omega_0.$$

Die radiale Bewegungsgleichung

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 = -g(\rho),$$

wird damit zu

$$\ddot{\rho} = \frac{h^2}{\rho^3} - \frac{2GM\rho}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

Wir setzen

$$\rho = \rho_0 + \xi, \quad |\xi| \ll \rho_0,$$

und behalten nur die in  $\xi$  linearen Terme bei. Die Entwicklung des ersten Terms ergibt

$$\frac{h^2}{\rho^3} = \rho_0 \omega_0^2 - 3\omega_0^2 \xi + O(\xi^2).$$

Für die nach innen gerichtete Gravitationsbeschleunigung gilt

$$g'(\rho) = \frac{2GM}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}} \left( 1 - \frac{3\rho^2}{R^2 + \rho^2} \right).$$

Da  $\rho_0^2 = 3R^2$ , gilt

$$g'(\rho_0) = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{9}{4} \right) = -\frac{5}{4} \omega_0^2.$$

Somit ist

$$g(\rho) = \rho_0 \omega_0^2 - \frac{5}{4} \omega_0^2 \xi + O(\xi^2).$$

Die Gleichgewichtsterme heben sich auf, und es bleibt

$$\ddot{\xi} = \left( -3 + \frac{5}{4} \right) \omega_0^2 \xi = -\frac{7}{4} \omega_0^2 \xi.$$

Dies ist die Gleichung eines harmonischen Oszillators, sodass

$$\omega_{\text{osc}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \omega_0.$$

Dieses Ergebnis beruht auf der vorgegebenen radialen Näherung mit Drehimpulserhaltung. Bei uneingeschränkter Bewegung im rotierenden Gravitationsfeld der beiden Massen ist der Drehimpuls um  $O$  im Allgemeinen nicht erhalten.

#### 1.4

Wir behandeln die Konstellation als gleichseitiges Dreieck mit konstanter Seitenlänge  $L$ , das in seiner Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}$$

rotiert. Es seien  $\mathbf{r}_A$  und  $\mathbf{r}_B$  die Ortsvektoren zweier Raumsonden relativ zum Zentrum des Dreiecks. Ihre Geschwindigkeiten sind

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_A, \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_B,$$

wobei  $\mathbf{V}$  die gemeinsame Translationsgeschwindigkeit des Zentrums ist.

Durch Subtraktion entfällt diese gemeinsame Bewegung:

$$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A).$$

Der Verbindungsvektor liegt in der Ebene des Dreiecks und hat den Betrag  $L$ ; er steht also senkrecht auf  $\boldsymbol{\Omega}$ . Daher gilt

$$v_{\text{rel}} = \Omega L = \frac{2\pi L}{T}.$$

Mit

$$L = 5.0 \times 10^6 \text{ km} = 5.0 \times 10^9 \text{ m}, \quad T \simeq 365 \times 24 \times 3600 \text{ s},$$

erhalten wir

$$v_{\text{rel}} \simeq 996 \text{ m s}^{-1}.$$

Auf zwei signifikante Stellen gerundet ergibt sich

$$v_{\text{rel}} \simeq 1.0 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} = 1.0 \text{ km s}^{-1}.$$

Die Relativgeschwindigkeit steht senkrecht auf dem Arm, der die Raumsonden verbindet, im Einklang mit der konstanten Armlänge bei dieser idealisierten Bewegung.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

## Aufgabe 2: Eine elektrisch geladene Seifenblase

Eine kugelförmige Seifenblase mit der Luftdichte  $\rho_i$  im Inneren, der Temperatur  $T_i$  und dem Radius  $R_0$  ist von Luft mit der Dichte  $\rho_a$ , dem atmosphärischen Druck  $P_a$  und der Temperatur  $T_a$  umgeben. Der Seifenfilm hat die Oberflächenspannung  $\gamma$ , die Dichte  $\rho_s$  und die Dicke  $t$ . Die Masse und die Oberflächenspannung der Seife ändern sich nicht mit der Temperatur. Nehmen Sie an, dass  $R_0 \gg t$ .

Die Energiezunahme  $dE$ , die erforderlich ist, um die Fläche einer Seife-Luft-Grenzfläche um  $dA$  zu vergrößern, ist durch  $dE = \gamma dA$  gegeben, wobei  $\gamma$  die Oberflächenspannung des Films ist.

**2.1** Bestimmen Sie das Verhältnis  $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a}$  in Abhängigkeit von  $\gamma$ ,  $P_a$  und  $R_0$ . **[1.7 Punkte]**

**2.2** Bestimmen Sie den Zahlenwert von  $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1$  mit  $\gamma = 0.0250 \text{ N m}^{-1}$ ,  $R_0 = 1.00 \text{ cm}$  und  $P_a = 1.013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$ . **[0.4 Punkte]**

**2.3** Die Blase wird zunächst mit wärmerer Luft im Inneren erzeugt. Bestimmen Sie den kleinsten Zahlenwert von  $T_i$ , bei dem die Blase in ruhender Luft schweben kann. Verwenden Sie  $T_a = 300 \text{ K}$ ,  $\rho_s = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\rho_a = 1.30 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $t = 100 \text{ nm}$  und  $g = 9.80 \text{ m s}^{-2}$ . **[2.0 Punkte]**

Einige Zeit nach ihrer Entstehung befindet sich die Blase im thermischen Gleichgewicht mit ihrer Umgebung. In ruhender Luft fällt diese Blase dann von selbst zu Boden.

**2.4** Bestimmen Sie die Mindestgeschwindigkeit  $u$  eines Aufwinds (einer nach oben gerichteten Luftströmung), der verhindert, dass die Blase im thermischen Gleichgewicht fällt. Geben Sie Ihr Ergebnis in Abhängigkeit von  $\rho_s$ ,  $R_0$ ,  $g$ ,  $t$  und der dynamischen Viskosität  $\eta$  der Luft an. Sie dürfen annehmen, dass die Geschwindigkeit so klein ist, dass das Stokes'sche Gesetz gilt, und die Änderung des Radius beim Absinken der Temperatur auf die Gleichgewichtstemperatur vernachlässigen. Die Widerstandskraft nach dem Stokes'schen Gesetz beträgt  $F = 6\pi\eta R_0 u$ . **[1.6 Punkte]**

**2.5** Berechnen Sie den Zahlenwert von  $u$  mit  $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ . **[0.4 Punkte]**

Die obigen Berechnungen legen nahe, dass die Terme mit der Oberflächenspannung  $\gamma$  nur sehr wenig zur Genauigkeit des Ergebnisses beitragen. In allen folgenden Teilaufgaben dürfen Sie die Oberflächenspannungsterme vernachlässigen.

**2.6** Wenn diese kugelförmige Blase nun gleichmäßig mit einer Gesamtladung  $q$  elektrisch aufgeladen wird, bestimmen Sie eine Gleichung, die den neuen Radius  $R_1$  in Abhängigkeit von  $R_0$ ,  $P_a$ ,  $q$  und der elektrischen Feldkonstanten  $\varepsilon_0$  beschreibt. **[2.0 Punkte]**

**2.7** Nehmen Sie an, dass die Gesamtladung nicht zu groß ist (d. h.  $\frac{q^2}{\varepsilon_0 R_0^4} \ll P_a$ ) und der Radius der Blase nur geringfügig zunimmt. Bestimmen Sie  $\Delta R$ , wobei  $R_1 = R_0 + \Delta R$ .

Es gilt  $(1+x)^n \approx 1+nx$  für  $x \ll 1$ . **[0.7 Punkte]**

**2.8** Welchen Betrag muss diese Ladung  $q$  in Abhängigkeit von  $t$ ,  $\rho_a$ ,  $\rho_s$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $R_0$ ,  $P_a$  haben, damit die Blase in ruhender Luft bewegungslos schwebt? Berechnen Sie auch den Zahlenwert von  $q$ . Die elektrische Feldkonstante beträgt  $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  farad/m. **[1.2 Punkte]**

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

## Antworten

• 2.1

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = 1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}.$$

• 2.2

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1 = 9.87 \times 10^{-5}.$$

• 2.3

$$T_{i,\min} = T_a \frac{1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}}{1 - \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0}} = 307 \text{ K}.$$

• 2.4, unter Vernachlässigung der kleinen Korrektur durch die Oberflächenspannung:

$$u_{\min} \simeq \frac{2\rho_s R_0 t g}{3\eta}.$$

• 2.5

$$u_{\min} \simeq 0.36 \text{ m s}^{-1}.$$

• 2.6

$$R_1^4 - R_0^3 R_1 - \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 P_a} = 0, \quad R_1 \geq R_0.$$

• 2.7

$$\Delta R \simeq \frac{q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_0^3}.$$

- **2.8**, in der Näherung einer kleinen Ausdehnung:

$$|q| \simeq \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}} = 2.56 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

Ohne Linearisierung der Ausdehnung lautet das Ergebnis in der Dünnsfilmnäherung

$$|q| = \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}} \left(1 + \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0}\right)^{1/6} = 2.57 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

## Lösung

Wir behandeln die Luft als ideales Gas mit derselben Zusammensetzung im Inneren und außerhalb der Blase. In der Dünnsfilmnäherung sind das Blasenvolumen und die Seifenmasse gegeben durch

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad m_s \simeq 4\pi R^2 t \rho_s.$$

Der Film besitzt zwei Seife-Luft-Grenzflächen, seine Masse entspricht jedoch der einer einzigen Kugelschale.

### 2.1

Beide Grenzflächen tragen zur Oberflächenenergie bei. Vernachlässigt man den kleinen Unterschied ihrer Radien, gilt

$$E_s = 2\gamma(4\pi R^2) = 8\pi\gamma R^2.$$

Für eine kleine Verschiebung  $dR$  nach außen erfordert das mechanische Gleichgewicht

$$(P_i - P_a) dV = dE_s.$$

Wegen

$$dV = 4\pi R^2 dR, \quad dE_s = 16\pi\gamma R dR,$$

beträgt der Überdruck im Inneren

$$P_i - P_a = \frac{4\gamma}{R_0}.$$

Die ideale Gasgleichung  $P = \rho \mathcal{R}_{\text{air}} T$  mit derselben spezifischen Gaskonstante auf beiden Seiten liefert

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = \frac{P_i}{P_a} = 1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}.$$

### 2.2

Mit  $R_0 = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$  gilt

$$P_i - P_a = \frac{4(0.0250)}{1.00 \times 10^{-2}} = 10.0 \text{ Pa}.$$

Somit ergibt sich

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1 = \frac{10.0}{1.013 \times 10^5} = 9.87 \times 10^{-5}.$$

## 2.3

Die nach oben gerichtete Auftriebskraft ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Umgebungsluft:

$$F_B = \rho_a V_0 g, \quad V_0 = \frac{4}{3} \pi R_0^3.$$

Bei der niedrigsten Temperatur, die ein Schweben ermöglicht, gleicht die Auftriebskraft gerade die gesamte Gewichtskraft der eingeschlossenen Luft und der Seife aus:

$$\rho_a V_0 g = \rho_i V_0 g + 4\pi R_0^2 t \rho_s g.$$

Daher gilt

$$\rho_i = \rho_a - \frac{3\rho_s t}{R_0}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\frac{3\rho_s t}{R_0} = \frac{3(1000)(1.00 \times 10^{-7})}{1.00 \times 10^{-2}} = 0.0300 \text{ kg m}^{-3},$$

sodass für ein Schweben gelten muss:

$$\rho_i = 1.27 \text{ kg m}^{-3}.$$

Mit Teil 2.1 folgt

$$T_{i,\min} = \frac{\rho_a T_a}{\rho_i} \left( 1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0} \right) = T_a \frac{1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}}{1 - \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0}}.$$

Folglich ist

$$T_{i,\min} = 300 \frac{1 + 9.8717 \times 10^{-5}}{1 - 0.0300/1.30} = 307.117 \text{ K},$$

also

$$\boxed{T_{i,\min} = 307 \text{ K}}.$$

Eine höhere Temperatur führt zu einer geringeren Luftdichte im Inneren und damit zu einer nach oben gerichteten resultierenden Kraft.

## 2.4

Im thermischen Gleichgewicht gilt  $T_i = T_a$ . Teil 2.1 liefert dann

$$\rho_i - \rho_a = \rho_a \frac{4\gamma}{P_a R_0}.$$

Bei einer ruhenden Blase muss die nach oben gerichtete Stokes'sche Widerstandskraft die Differenz aus Gewichtskraft und Auftriebskraft ausgleichen:

$$6\pi\eta R_0 u_{\min} = 4\pi R_0^2 t \rho_s g + \frac{4}{3} \pi R_0^3 (\rho_i - \rho_a) g.$$

Unter Berücksichtigung der Oberflächenspannung ergibt sich daher

$$u_{\min} = \frac{2\rho_s R_0 t g}{3\eta} + \frac{8\rho_a \gamma R_0 g}{9\eta P_a}.$$

Das Verhältnis des zweiten Terms zum ersten beträgt

$$\frac{4\rho_a\gamma}{3P_a\rho_s t} = 4.28 \times 10^{-3}.$$

Die Oberflächenspannung ändert die erforderliche Geschwindigkeit somit nur um etwa 0.43%. Vernachlässigt man diese Korrektur, erhält man den Ausdruck in den geforderten Parametern:

$$u_{\min} \simeq \frac{2\rho_s R_0 t g}{3\eta}.$$

Hierbei werden das vorgegebene Stokes'sche Widerstandsgesetz und die Anweisung verwendet, die Radiusänderung beim Abkühlen zu vernachlässigen.

## 2.5

Einsetzen der gegebenen Werte liefert

$$u_{\min} \simeq \frac{2(1000)(1.00 \times 10^{-2})(1.00 \times 10^{-7})(9.80)}{3(1.8 \times 10^{-5})} = 0.362963 \text{ m s}^{-1}.$$

Daher gilt

$$u_{\min} \simeq 0.36 \text{ m s}^{-1}.$$

Unter Berücksichtigung der Oberflächenspannung ergibt sich  $0.364516 \text{ m s}^{-1}$ , was auf zwei signifikante Stellen gerundet dasselbe Ergebnis liefert.

## 2.6

Wir vernachlässigen nun wie vorgegeben die Oberflächenspannung. Vor dem Aufladen hat die Blase die Temperatur  $T_a$  und den Innendruck  $P_a$ . Die eingeschlossene Luftmasse bleibt erhalten, und auch der Endzustand hat die Temperatur  $T_a$ . Die ideale Gasgleichung liefert daher

$$P_i V_1 = P_a V_0, \quad P_i = P_a \frac{R_0^3}{R_1^3}.$$

Eine gleichmäßig geladene Kugelschale erzeugt das elektrische Feld

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R),$$

während das Feld im Inneren null ist. Ihre elektrostatische Energie beträgt

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty E(r)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Bei konstanter Ladung verringert eine Vergrößerung des Radius diese Energie. Der zugehörige nach außen gerichtete elektrische Druck beträgt

$$p_e = -\frac{dU_e}{dV} = -\frac{dU_e/dR}{4\pi R^2} = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4}.$$

Das mechanische Gleichgewicht erfordert

$$P_i + p_e = P_a.$$

Bei  $R = R_1$  gilt

$$P_a \frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 R_1^4} = P_a.$$

Multiplikation mit  $R_1^4/P_a$  liefert

$$\boxed{R_1^4 - R_0^3 R_1 - \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 P_a} = 0}.$$

Für eine von null verschiedene Ladung gilt für die physikalische Lösung  $R_1 > R_0$ .

## 2.7

Es sei

$$x = \frac{\Delta R}{R_0} \ll 1, \quad R_1 = R_0(1 + x).$$

Die Gleichung aus Teil 2.6 wird damit zu

$$R_0^4 [(1 + x)^4 - (1 + x)] = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 P_a}.$$

In erster Ordnung gilt

$$(1 + x)^4 - (1 + x) \simeq (1 + 4x) - (1 + x) = 3x.$$

Somit ist

$$3R_0^4 x = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 P_a},$$

und es folgt

$$\boxed{\Delta R \simeq \frac{q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_0^3}}.$$

## 2.8

Durch das Aufladen nimmt das verdrängte Luftvolumen zu, während die Gesamtmasse der Blase unverändert bleibt.

Vor dem Aufladen ist die Luftdichte im Inneren gleich  $\rho_a$ , da die Oberflächenspannung nun vernachlässigt wird und sowohl Druck als auch Temperatur der eingeschlossenen Luft den Umgebungswerten entsprechen. Ihre Masse beträgt daher

$$m_i = \rho_a V_0.$$

Die erhalten bleibende Seifenmasse beträgt

$$m_s = 4\pi R_0^2 t \rho_s.$$

Dabei ist  $t$  die ursprüngliche Dicke; der Film wird bei seiner Ausdehnung dünner.

Für ein Schweben nach dem Aufladen muss gelten:

$$\rho_a V_1 g = (\rho_a V_0 + m_s) g.$$

Daraus folgt

$$\rho_a \frac{4}{3} \pi (R_1^3 - R_0^3) = 4\pi R_0^2 t \rho_s,$$

also

$$R_1^3 - R_0^3 = \frac{3\rho_s t R_0^2}{\rho_a}.$$

Für eine kleine Ausdehnung gilt

$$R_1^3 - R_0^3 \simeq 3R_0^2 \Delta R,$$

sodass die erforderliche Radiuszunahme beträgt:

$$\Delta R \simeq \frac{\rho_s t}{\rho_a}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\Delta R \simeq \frac{1000(1.00 \times 10^{-7})}{1.30} = 7.69 \times 10^{-5} \text{ m}, \quad \frac{\Delta R}{R_0} \simeq 0.00769.$$

Gleichsetzen dieser Zunahme mit dem Ergebnis aus Teil 2.7 liefert

$$\frac{q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_0^3} = \frac{\rho_s t}{\rho_a},$$

und damit

$$|q| \simeq \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}}.$$

Einsetzen ergibt

$$|q| \simeq \sqrt{\frac{96\pi^2 (8.85 \times 10^{-12}) (1.013 \times 10^5) (1000) (1.00 \times 10^{-7}) (1.00 \times 10^{-2})^3}{1.30}},$$

also

$$|q| \simeq 2.56 \times 10^{-7} \text{ C} = 0.256 \text{ } \mu\text{C}.$$

Das Ergebnis lässt sich auch ohne Linearisierung der Ausdehnung herleiten. Die Schwebebedingung liefert

$$R_1 = R_0 \left( 1 + \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0} \right)^{1/3}.$$

Zusammen mit Teil 2.6 ergibt sich

$$q^2 = 32\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_1 (R_1^3 - R_0^3) = \frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^2 R_1}{\rho_a}.$$

Somit lautet das Ergebnis in der Dünnschichtnäherung ohne Reihenentwicklung

$$|q| = \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}} \left( 1 + \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0} \right)^{1/6} = 2.57 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

Beide Vorzeichen der Ladung führen zur gleichen Ausdehnung, da der elektrische Druck von  $q^2$  abhängt.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

### Aufgabe 3: Zum hundertjährigen Jubiläum von Rutherfords Atomkern: die Streuung eines Ions an einem neutralen Atom

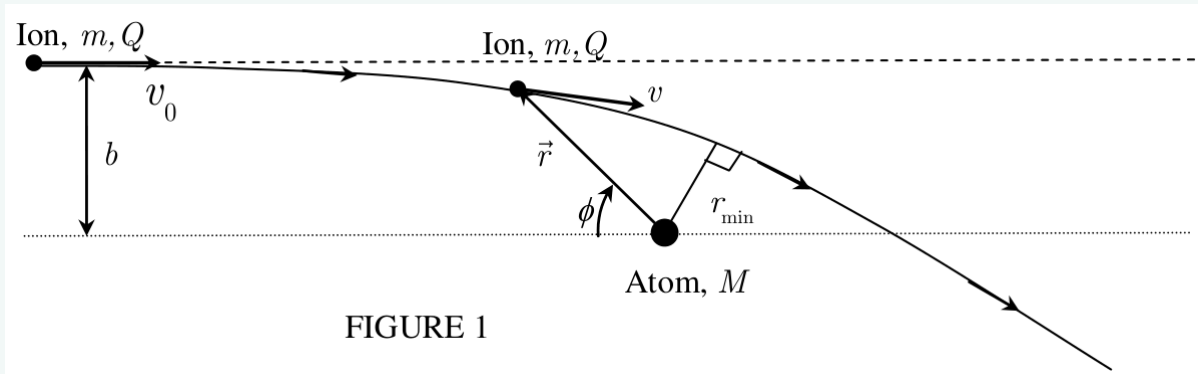


ABBILDUNG 1

Ein Ion der Masse  $m$  und der Ladung  $Q$  bewegt sich aus großer Entfernung mit einer anfänglichen nichtrelativistischen Geschwindigkeit  $v_0$  auf die Umgebung eines neutralen Atoms der Masse  $M \gg m$  und der elektrischen Polarisierbarkeit  $\alpha$  zu. Der Stoßparameter beträgt  $b$ , wie in Abbildung 1 dargestellt.

Das Atom wird durch das elektrische Feld  $\vec{E}$  des einlaufenden (sich nähernden) Ions augenblicklich polarisiert. Das dadurch entstehende elektrische Dipolmoment des Atoms ist  $\vec{p} = \alpha \vec{E}$ . Vernachlässigen Sie in dieser Aufgabe sämtliche Strahlungsverluste.

**3.1** Berechnen Sie die elektrische Feldstärke  $\vec{E}_p$  im Abstand  $r$  von einem idealen elektrischen Dipol  $\vec{p}$ , der sich im Ursprung O befindet, in Richtung von  $\vec{p}$  in Abbildung 2. **[1.2 Punkte]**

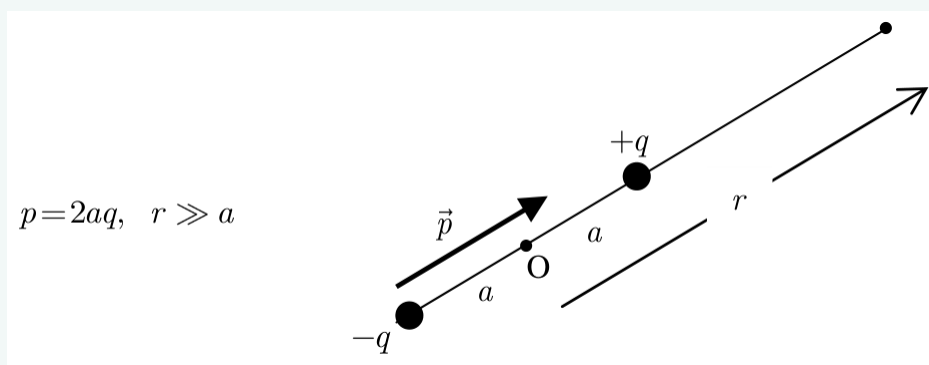


ABBILDUNG 2

**3.2** Bestimmen Sie den Ausdruck für die Kraft  $\vec{f}$ , die das polarisierte Atom auf das Ion ausübt. Zeigen Sie, dass diese Kraft unabhängig vom Vorzeichen der Ladung des Ions anziehend ist. **[3.0 Punkte]**

**3.3** Wie lautet die elektrische potenzielle Energie der Ion-Atom-Wechselwirkung in Abhängigkeit von  $\alpha$ ,  $Q$  und  $r$ ? **[0.9 Punkte]**

**3.4** Bestimmen Sie den Ausdruck für  $r_{\min}$ , den in Abbildung 1 dargestellten Abstand bei der größten Annäherung. **[2.4 Punkte]**

**3.5** Ist der Stoßparameter  $b$  kleiner als ein kritischer Wert  $b_0$ , so nähert sich das Ion dem Atom auf einer Spiralbahn. In diesem Fall wird das Ion neutralisiert, während das Atom seinerseits geladen wird. Dieser Vorgang ist als „Ladungsaustausch“-Wechselwirkung bekannt. Wie groß ist der Wirkungsquerschnitt  $A = \pi b_0^2$  des Atoms für diesen „Ladungsaustausch“-Stoß aus Sicht des Ions? **[2.5 Punkte]**

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

## Antworten

Es sei  $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ , und  $\hat{\mathbf{r}}$  zeige vom Atom zum Ion. Wir setzen  $U(\infty) = 0$ .

- **3.1**

$$\vec{E}_p = \frac{2k}{r^3} \vec{p}.$$

- **3.2**

$$\vec{f} = -\frac{2\alpha k^2 Q^2}{r^5} \hat{\mathbf{r}}.$$

Die Kraft ist bei beiden Vorzeichen von  $Q$  anziehend.

- **3.3**

$$U(r) = -\frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4} = -\frac{\alpha Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}.$$

- **3.4** Für eine Streubahn mit  $b > b_0$  gilt

$$r_{\min} = \left[ \frac{b^2 + \sqrt{b^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}}}{2} \right]^{1/2}.$$

Bei  $b = b_0$  nähert sich das Ion asymptotisch  $r = b_0/\sqrt{2}$ . Für  $b < b_0$  gibt es keinen positiven radialen Umkehrpunkt.

- **3.5**

$$b_0 = \left( \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} \right)^{1/4},$$

$$A = \frac{2\pi k |Q|}{v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \frac{|Q|}{2\epsilon_0 v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}}.$$

## Lösung

Da  $M \gg m$  gilt, vernachlässigen wir den Rückstoß des Atoms und behandeln seine Position als fest. Wir verwenden das in der Aufgabenstellung vorgegebene Modell eines idealen induzierten Dipols mit  $\alpha > 0$ .

### 3.1

Wir stellen den Dipol durch die Ladungen  $+q$  und  $-q$  im Abstand  $2a$  voneinander dar, sodass  $p = 2aq$  gilt. An einem Punkt auf der Achse in Richtung von  $\vec{p}$  betragen die Abstände von den beiden Ladungen  $r - a$  und  $r + a$ .

Die Felder der beiden Ladungen zeigen in entgegengesetzte Richtungen, sodass

$$\vec{E}_p = kq \left[ \frac{1}{(r - a)^2} - \frac{1}{(r + a)^2} \right] \hat{\mathbf{p}},$$

wobei  $\hat{\mathbf{p}}$  der Einheitsvektor in Richtung des Dipolmoments ist.

Durch Zusammenfassen der Brüche erhalten wir

$$\vec{E}_p = \frac{4kqar}{(r^2 - a^2)^2} \hat{\mathbf{p}}.$$

Im Grenzfall des idealen Dipols  $a/r \rightarrow 0$  bei festem  $p = 2aq$  gilt

$$\boxed{\vec{E}_p = \frac{2kp}{r^3} \hat{\mathbf{p}} = \frac{2k}{r^3} \vec{p}.}$$

Das Feld auf der gegenüberliegenden Seite der Dipolachse zeigt ebenfalls in Richtung von  $\vec{p}$  und hat bei gleichem Abstand denselben Betrag.

### 3.2

Das Ion befinde sich relativ zum Atom am Ort  $\vec{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ . Das vom Ion am Ort des Atoms erzeugte elektrische Feld ist

$$\vec{E}_{\text{ion}} = -\frac{kQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Folglich ist das induzierte Dipolmoment

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_{\text{ion}} = -\frac{\alpha kQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Das Ion liegt auf der Achse dieses Dipols. Mit dem Ergebnis aus 3.1 folgt

$$\vec{E}_p = \frac{2k}{r^3} \vec{p} = -\frac{2\alpha k^2 Q}{r^5} \hat{\mathbf{r}}.$$

Damit ist die Kraft auf das Ion

$$\boxed{\vec{f} = Q\vec{E}_p = -\frac{2\alpha k^2 Q^2}{r^5} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 r^5} \hat{\mathbf{r}}.}$$

Da  $\alpha > 0$  gilt und die Ladung als  $Q^2$  eingeht, zeigt die Kraft unabhängig vom Vorzeichen von  $Q$  stets zum Atom hin.

### 3.3

Für eine konservative Zentralkraft gilt

$$f_r = -\frac{dU}{dr}.$$

Wählen wir die potenzielle Energie im Unendlichen gleich null, so erhalten wir

$$U(r) = -\int_{\infty}^r f_r(s) ds = -\int_{\infty}^r \left(-\frac{2\alpha k^2 Q^2}{s^5}\right) ds.$$

Daher gilt

$$U(r) = -\frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4}.$$

Gleichwertig dazu ist

$$U = -\frac{1}{2}\alpha E_{\text{ion}}^2.$$

Der Faktor  $1/2$  berücksichtigt die Energie, die zur Induktion des Dipols benötigt wird. Tatsächlich ergibt die Polarisationsenergie  $p^2/(2\alpha)$  zusammen mit der Kopplungsenergie  $-pE_{\text{ion}}$  den Wert  $-\alpha E_{\text{ion}}^2/2$ , wenn  $p = \alpha E_{\text{ion}}$  gilt.

### 3.4

Die Kraft ist eine Zentralkraft, daher bleibt der Drehimpuls bezüglich des Atoms erhalten. Sein Betrag wird durch die einlaufende Bahn bestimmt:

$$L = mv_0 b.$$

Auch die mechanische Energie bleibt erhalten. Im Unendlichen verschwindet die potenzielle Energie, sodass

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Die Zerlegung der kinetischen Energie in einen radialen und einen transversalen Anteil ergibt

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Am Punkt der größten Annäherung auf einer Streubahn gilt  $\dot{r} = 0$ . Durch Einsetzen von  $L = mv_0 b$  erhalten wir

$$\frac{mv_0^2 b^2}{2r_{\min}^2} - \frac{\alpha k^2 Q^2}{2r_{\min}^4} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Multiplikation mit  $2r_{\min}^4/(mv_0^2)$  ergibt

$$r_{\min}^4 - b^2 r_{\min}^2 + \frac{\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in  $r_{\min}^2$  mit den Lösungen

$$r_{\pm}^2 = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}}}{2}.$$

Ein aus dem Unendlichen kommendes Ion erreicht zuerst die größere Lösung. Somit gilt

$$r_{\min} = \left[ \frac{b^2 + \sqrt{b^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}}}{2} \right]^{1/2}.$$

Für  $b > b_0$  sind die beiden Lösungen verschieden, wobei  $b_0$  im Folgenden bestimmt wird. Zur Kontrolle: Wenn die Wechselwirkung gegen null geht, liefert dieser Ausdruck  $r_{\min} \rightarrow b$ , wie es für eine geradlinige Bewegung zu erwarten ist.

### 3.5

Die radiale Bewegung wird durch das folgende effektive Potenzial bestimmt:

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4}.$$

Bei einem von null verschiedenen Drehimpuls dominiert für große Abstände der positive Zentrifugalterm, während für kleine Abstände der anziehende Term dominiert. Die daraus entstehende Potenzialbarriere kann verhindern, dass das Ion das Atom erreicht.

Die kritische Bahn liegt vor, wenn die beiden radialen Umkehrpunkte zusammenfallen. Daher muss die in 3.4 gefundene Diskriminante verschwinden:

$$b_0^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} = 0.$$

Daraus folgt

$$b_0 = \left( \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} \right)^{1/4}.$$

Für  $b < b_0$  hat die radiale Energiegleichung

$$\dot{r}^2 = v_0^2 \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} + \frac{\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2 r^4} \right)$$

keine positive Nullstelle. Das einlaufende Ion bewegt sich daher weiter nach innen und erfährt unter der in der Aufgabenstellung getroffenen Annahme einen Ladungsaustausch.

Für genau  $b = b_0$  gilt

$$\dot{r}^2 = v_0^2 \left( 1 - \frac{b_0^2}{2r^2} \right)^2.$$

Das einlaufende Ion nähert sich dem Radius der instabilen Kreisbahn

$$r_c = \frac{b_0}{\sqrt{2}}$$

asymptotisch. Diese Grenze hat in der Stoßparameterebene den Flächeninhalt null und beeinflusst den Wirkungsquerschnitt nicht.

Die eingefangenen Bahnen nehmen in dieser Ebene eine Kreisscheibe mit dem Radius  $b_0$  ein. Daher gilt

$$A = \pi b_0^2 = \pi \sqrt{\frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}},$$

oder

$$A = \frac{2\pi k|Q|}{v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \frac{|Q|}{2\varepsilon_0 v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}}.$$

Werden die Eingangsgrößen in SI-Einheiten eingesetzt, so ergibt sich  $A$  in  $\text{m}^2$ . Es sind keine numerischen Parameterwerte angegeben.

---

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.