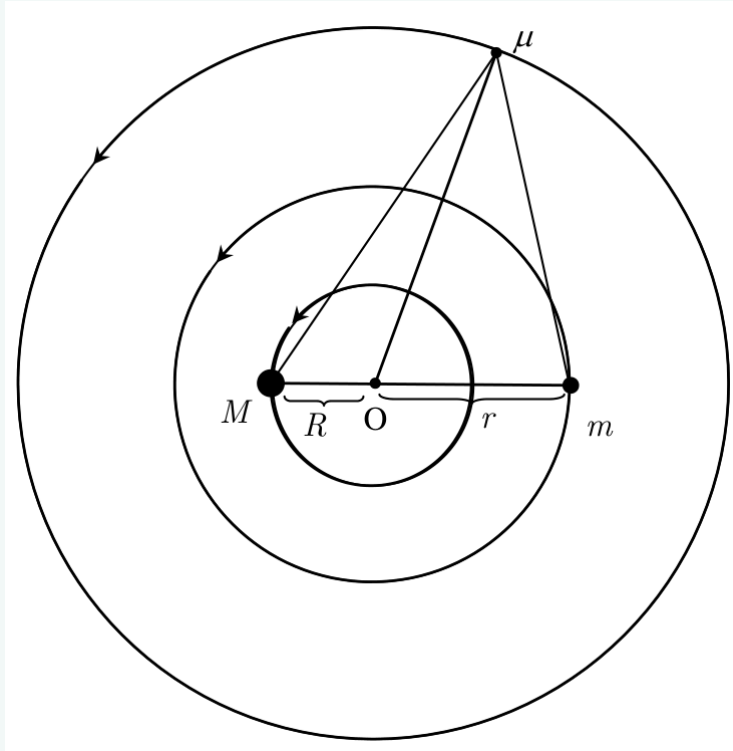


المسألة 1: مسألة الأجسام الثلاثة و LISA



الشكل 1 مدارات ثلاثة أجسام تقع في مستوى واحد.

1.1 تتحرك كتلتان متجاذبتان تتأقليا M و m في مدارين دائريين نصف قطريهما R و r ، على الترتيب، حول مركز كتلتهما المشترك. أوجد السرعة الزاوية ω_0 للخط الواصل بين M و m بدلالة m, M, r, R وثابت الجذب العام G .

[1.5 درجة]

1.2 يوضع جسم ثالث ذو كتلة متناهية الصغر μ في مدار دائري يقع في المستوى نفسه حول مركز الكتلة نفسه، بحيث تبقى μ ساكنة بالنسبة إلى كل من M و m ، كما هو موضح في الشكل 1. افترض أن الكتلة المتناهية الصغر لا تقع على استقامة واحدة مع M و m . أوجد قيم المقادير الآتية بدلالة R و r :

[3.5 درجة]

1.2.1 المسافة من μ إلى M .

1.2.2 المسافة من μ إلى m .

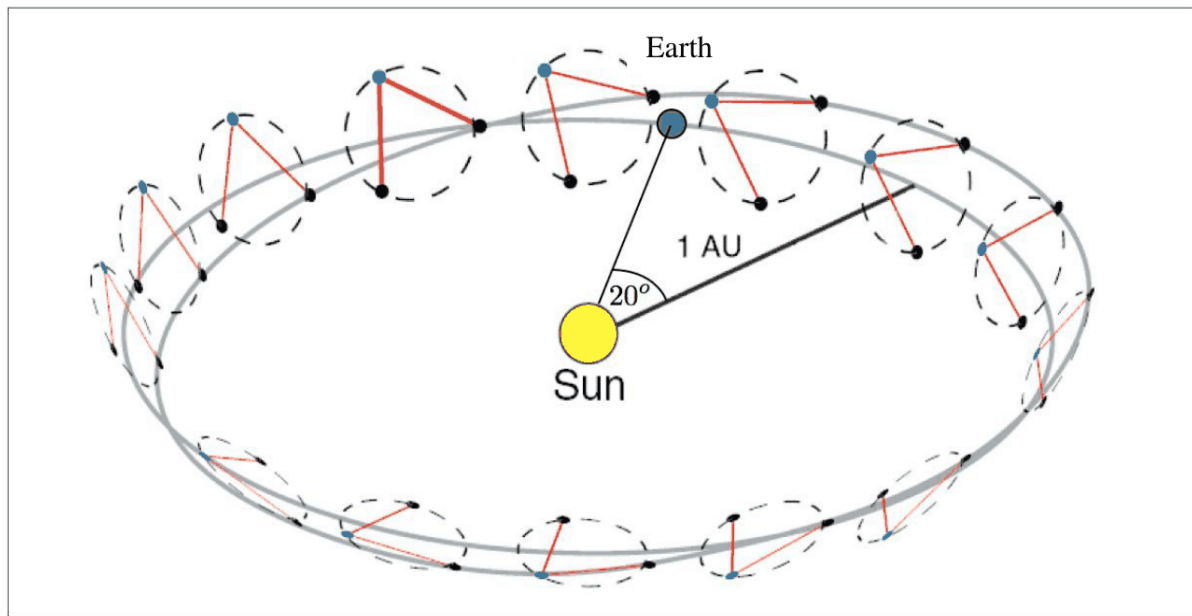
1.2.3 المسافة من μ إلى مركز الكتلة.

1.3 انظر في الحالة $M = m$. إذا أحدث الآن اضطراب شعاعي صغير في μ (على امتداد $O\mu$)، فما التردد الزاوي لاهتزاز μ حول موضعها غير المضطرب بدلالة ω_0 ؟ افترض أن الزخم الزاوي للكتلة μ محفوظ.

[3.2 درجة]

الهوائي الفضائي لقياس التداخل بالليزر (LISA) هو مجموعة من ثلاث مركبات فضائية متماثلة للكشف عن موجات الجاذبية منخفضة التردد. توضع كل مركبة فضائية عند أحد رؤوس مثلث متساوي الأضلاع كما هو موضح في الشكلين 2 و3. يبلغ طول الأضلاع (أو «الأذرع») نحو 5.0 ملايين كيلومتر. تقع كوكبة LISA في مدار حول الشمس شبيه بمدار الأرض، وتتأخر عن الأرض بزاوية 20° . وتتحرك كل مركبة منها في مدار منفرد مائل قليلاً حول الشمس. وفي المحصلة، تبدو المركبات الفضائية الثلاث وكأنها تدور حول مركزها المشترك دورة واحدة في السنة.

تتبادل هذه المركبات إرسال إشارات الليزر واستقبالها باستمرار. وهي تكشف، في مجمل عملها، عن موجات الجاذبية بقياس تغيرات ضئيلة في أطوال الأذرع باستخدام وسائل قياس التداخل. ويُعد تصادم أجسام ضخمة، مثل الثقوب السوداء، في مجرات قريبة مثلاً على مصادر موجات الجاذبية.



الشكل 2 رسم توضيحي لمدار LISA. تدور المركبات الفضائية الثلاث حول مركز كتلتها بزمان دوري مقداره سنة واحدة. وهي تتأخر في البداية عن الأرض بزاوية 20° (الصورة من D.A. Shaddock، «نظرة عامة على الهوائي الفضائي لقياس التداخل بالليزر»، منشورات الجمعية الفلكية الأسترالية، 2009، 26، ص. 128-132).



الشكل 3 منظر مكبر للمركبات الفضائية الثلاث المتأخرة عن الأرض. تمثل A وB وC المركبات الفضائية الثلاث عند رؤوس المثلث المتساوي الأضلاع.

1.4 في المستوى الذي يضم المركبات الفضائية الثلاث، ما مقدار السرعة النسبية لإحدى المركبات الفضائية بالنسبة إلى أخرى؟

الإجابات

• 1.1

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G(M+m)}{(R+r)^3}}$$

• 1.2.1

$$d_{\mu M} = R + r$$

• 1.2.2

$$d_{\mu m} = R + r$$

• 1.2.3

$$d_{\mu O} = \sqrt{R^2 + Rr + r^2}$$

• 1.3، باستخدام شرط انحفاظ الزخم الزاوي المفروض:

$$\omega_{\text{osc}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \omega_0$$

• 1.4، لطول ذراع $L = 5.0 \times 10^9 \text{ m}$ وزمن دوري للدوران $T = 1 \text{ year}$:

$$v_{\text{rel}} = \frac{2\pi L}{T} \simeq 1.0 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} = 1.0 \text{ km s}^{-1}$$

الحل

1.1

المسافة بين الكتلتين هي $d = R + r$. وبما أن O هو مركز كتلتهما، فإن

$$MR = mr.$$

توفر الجاذبية التسارع المركزي لكل كتلة:

$$M\omega_0^2 R = \frac{GMm}{d^2}, \quad m\omega_0^2 r = \frac{GMm}{d^2}.$$

بقسمة كل معادلة على الكتلة المقابلة لها ثم جمع المعادلتين، نحصل على

$$\omega_0^2 (R + r) = \frac{G(M + m)}{d^2}.$$

إذن،

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G(M+m)}{(R+r)^3}}.$$

1.2.1 و 1.2.2

بما أن μ متناهية الصغر، فإنها لا تؤثر في حركة M و m . ولكي تبقى ساكنة بالنسبة إليهما، يجب أن تدور حول O بسرعة زاوية ω_0 . عند لحظة مختارة، نأخذ

$$O = (0, 0), \quad M = (-R, 0), \quad m = (r, 0), \quad \mu = (x, y),$$

حيث $y \neq 0$. ونكتب مسافتيها عن الكتلتين على الصورة

$$a = \sqrt{(x + R)^2 + y^2}, \quad b = \sqrt{(x - r)^2 + y^2}.$$

تسارعها هو $-\omega_0^2(x, y)$. ومن ثم يعطي قانون نيوتن، بعد اختزال كتلة الاختبار μ ،

$$\omega_0^2 x = \frac{GM(x + R)}{a^3} + \frac{Gm(x - r)}{b^3},$$

$$\omega_0^2 y = \frac{GM y}{a^3} + \frac{Gm y}{b^3}.$$

وبما أن $y \neq 0$ ، فإن المعادلة الثانية تقتضي أن

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{a^3} + \frac{Gm}{b^3}.$$

ب طرح حاصل ضرب هذه المعادلة في x من المعادلة الأولى، نحصل على

$$0 = \frac{GMR}{a^3} - \frac{Gmr}{b^3}.$$

وباستخدام $MR = mr$ ، نحصل على $a = b$. وبالتالي،

$$\omega_0^2 = \frac{G(M + m)}{a^3}.$$

تعطي المقارنة مع الجزء 1.1 العلاقة $a = R + r$ ، ومن ثم

$$\boxed{1.2.1: d_{\mu M} = R + r}, \quad \boxed{1.2.2: d_{\mu m} = R + r}.$$

إن تشغيل الأجسام الثلاثة رؤوس مثلث متساوي الأضلاع.

1.2.3

إحداثي منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الكتلتين المحدودتين هو

$$x_{\text{mid}} = \frac{r - R}{2}.$$

يقع الرأس الثالث لمثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $R + r$ على مسافة عمودية $\sqrt{3}(R + r)/2$ من نقطة المنتصف هذه. لذلك فإن الموضعين الممكنين للكتلة μ هما

$$x = \frac{r - R}{2}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(R + r).$$

وتحقق مسافتها عن O العلاقة

$$d_{\mu O}^2 = x^2 + y^2 = \frac{(r - R)^2 + 3(R + r)^2}{4} = R^2 + Rr + r^2.$$

إن،

$$\boxed{d_{\mu O} = \sqrt{R^2 + Rr + r^2}}.$$

عندما $M = m$ ، يعطي شرط مركز الكتلة $R = r$. ومن ثم يكون نصف قطر المدار غير المضطرب للكتلة μ هو

$$\rho_0 = \sqrt{3}R,$$

ويعطي الجزء 1.1

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{4R^3}.$$

على العمود المنصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين الكتلتين المتساويتين، تقع نقطة تبعد مسافة ρ عن O على مسافة $\sqrt{R^2 + \rho^2}$ من كل كتلة. وتتلاشى مركبتا تسارع الجاذبية العرضيتان الناتجتان عنهما، ولذلك يكون التسارع الشعاعي نحو الداخل

$$g(\rho) = \frac{2GM\rho}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

يحدد هذا القوة الشعاعية في التقريب الخطي: فبفعل تناظر الانعكاس، لا يغير انحراف زاوي صغير عن العمود المنصف المركبة الشعاعية إلا في الرتبة الثانية.

نستخدم انحفاظ الزخم الزاوي المفروض في السؤال. الزخم الزاوي لكل وحدة كتلة هو

$$h = \rho^2 \dot{\theta} = \rho_0^2 \omega_0.$$

وتصبح معادلة الحركة الشعاعية،

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 = -g(\rho),$$

على الصورة

$$\ddot{\rho} = \frac{h^2}{\rho^3} - \frac{2GM\rho}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

نضع

$$\rho = \rho_0 + \xi, \quad |\xi| \ll \rho_0,$$

ونحتفظ فقط بالحدود الخطية في ξ . ويكون توسع الحد الأول

$$\frac{h^2}{\rho^3} = \rho_0 \omega_0^2 - 3\omega_0^2 \xi + O(\xi^2).$$

أما تسارع الجاذبية نحو الداخل، فإن

$$g'(\rho) = \frac{2GM}{(R^2 + \rho^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{3\rho^2}{R^2 + \rho^2} \right).$$

وبما أن $\rho_0^2 = 3R^2$ ، فإن

$$g'(\rho_0) = \omega_0^2 \left(1 - \frac{9}{4} \right) = -\frac{5}{4} \omega_0^2.$$

ومن ثم

$$g(\rho) = \rho_0 \omega_0^2 - \frac{5}{4} \omega_0^2 \xi + O(\xi^2).$$

تتلاشى حدود الاتزان، ويتبقى

$$\ddot{\xi} = \left(-3 + \frac{5}{4} \right) \omega_0^2 \xi = -\frac{7}{4} \omega_0^2 \xi.$$

هذه هي معادلة المهتز التوافقي البسيط، ولذلك

$$\omega_{\text{osc}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \omega_0.$$

تستخدم هذه النتيجة التقريب الشعاعي المفروض الذي يحفظ الزخم الزاوي. ولا ينحفظ الزخم الزاوي حول O بوجه عام في الحركة غير المقيدة في مجال الجاذبية الدوار الناشئ عن الكتلتين.

1.4

نمثل الكوكبة بمثلث متساوي الأضلاع ذي طول ضلع ثابت L ، يدور في مستواه بسرعة زاوية

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

لتكن $\mathbf{r}_A$ و $\mathbf{r}_B$ متجهي موضع مركبتين فضائيتين بالنسبة إلى مركز المثلث. سرعتاهما هما

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_A, \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_B,$$

حيث $\mathbf{V}$ هي السرعة الانتقالية المشتركة للمركز.

يزيل الطرح هذه الحركة المشتركة:

$$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A).$$

يقع متجه الفصل في مستوى المثلث ومقداره L ، ولذلك فهو عمودي على $\boldsymbol{\Omega}$. ومن ثم

$$v_{\text{rel}} = \Omega L = \frac{2\pi L}{T}.$$

باستخدام

$$L = 5.0 \times 10^6 \text{ km} = 5.0 \times 10^9 \text{ m}, \quad T \simeq 365 \times 24 \times 3600 \text{ s},$$

نحصل على

$$v_{\text{rel}} \simeq 996 \text{ m s}^{-1}.$$

وبالتقريب إلى رقمين معنويين،

$$v_{\text{rel}} \simeq 1.0 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} = 1.0 \text{ km s}^{-1}.$$

تكون السرعة النسبية عمودية على الذراع الواصل بين المركبتين الفضائيتين، بما يتسق مع ثبات طول الذراع في هذه الحركة المثالية.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: فقاعة صابون مشحونة كهربائياً

فقاعة صابون كروية كثافة الهواء داخلها ρ_i ، ودرجة حرارته T_i ، ونصف قطرها R_0 ، يحيط بها هواء كثافته ρ_a ، وضغطه الجوي P_a ، ودرجة حرارته T_a . لغشاء الصابون توتر سطحي γ ، وكثافة ρ_s ، وسُمك t . لا تتغير كتلة الصابون ولا توتره السطحي مع درجة الحرارة. افترض أن $R_0 \gg t$.

تُعطى الزيادة في الطاقة، dE ، اللازمة لزيادة مساحة سطح فاصل بين الصابون والهواء بمقدار dA ، بالعلاقة $dE = \gamma dA$ ، حيث γ هو التوتر السطحي للغشاء.

2.1 أوجد النسبة $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a}$ بدلالة γ ، و P_a ، و R_0 . [1.7 درجة]

2.2 أوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1$ باستخدام $\gamma = 0.0250 \text{ N m}^{-1}$ ، و $R_0 = 1.00 \text{ cm}$ ، و $P_a = 1.013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$. [0.4 درجة]

2.3 تتشكل الفقاعة في البداية بحيث يكون الهواء داخلها أدفأ من الهواء المحيط. أوجد أصغر قيمة عددية لـ T_i تُمكن الفقاعة من الطفو في هواء ساكن. استخدم $T_a = 300 \text{ K}$ ، و $\rho_s = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ ، و $\rho_a = 1.30 \text{ kg m}^{-3}$ ، و $t = 100 \text{ nm}$ ، و $g = 9.80 \text{ m s}^{-2}$. [2.0 درجة]

بعد مرور بعض الوقت على تشكّل الفقاعة، ستصبح في اتزان حراري مع الوسط المحيط. وستسقط هذه الفقاعة في الهواء الساكن نحو الأرض بصورة طبيعية.

2.4 أوجد أصغر سرعة u لتيار هوائي صاعد (هواء يتدفق إلى أعلى) تمنع الفقاعة من السقوط عند الاتزان الحراري. أعط إجابتك بدلالة ρ_s ، R_0 ، g ، و t ، ومعامل لزوجة الهواء η . يمكنك افتراض أن السرعة صغيرة بحيث ينطبق قانون ستوكس، وإهمال التغير في نصف القطر عندما تنخفض درجة الحرارة إلى درجة حرارة الاتزان. تُعطى قوة المقاومة وفقاً لقانون ستوكس بالعلاقة $F = 6\pi\eta R_0 u$. [1.6 درجة]

2.5 احسب القيمة العددية لـ u باستخدام $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. [0.4 درجة]

تشير الحسابات السابقة إلى أن الحدود التي تتضمن التوتر السطحي γ لا تزيد دقة النتيجة إلا بمقدار ضئيل جداً. في جميع الأسئلة التالية، يمكنك إهمال حدود التوتر السطحي.

2.6 إذا شُحنت هذه الفقاعة الكروية الآن بانتظام بشحنة كلية q ، فأوجد معادلة تصف نصف القطر الجديد R_1 بدلالة R_0 ، P_a ، q ، وسماحية الفراغ ϵ_0 . [2.0 درجة]

2.7 افترض أن الشحنة الكلية ليست كبيرة جداً (أي إن $P_a \gg \frac{q^2}{\epsilon_0 R_0^4}$)، وأن نصف قطر الفقاعة لا يزداد إلا زيادة صغيرة، وأوجد ΔR حيث $R_1 = R_0 + \Delta R$.

علمًا بأن $(1+x)^n \approx 1+nx$ حيث $x \ll 1$. [0.7 درجة]

2.8 ما مقدار هذه الشحنة q بدلالة R_0 ، P_a ، ϵ_0 ، ρ_s ، ρ_a ، t ، اللازم لكي تطفو الفقاعة دون حركة في هواء ساكن؟ احسب أيضًا القيمة العددية لـ q . سماحية الفراغ هي $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ farad/m}$. [1.2 درجة]

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• 2.1

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = 1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}.$$

• 2.2

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1 = 9.87 \times 10^{-5}.$$

• 2.3

$$T_{i,\min} = T_a \frac{1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}}{1 - \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0}} = 307 \text{ K}.$$

• 2.4، بإهمال التصحيح الصغير الناتج عن التوتر السطحي:

$$u_{\min} \simeq \frac{2\rho_s R_0 t g}{3\eta}.$$

2.5 •

$$u_{\min} \simeq 0.36 \text{ m s}^{-1}.$$

2.6 •

$$R_1^4 - R_0^3 R_1 - \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 P_a} = 0, \quad R_1 \geq R_0.$$

2.7 •

$$\Delta R \simeq \frac{q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_0^3}.$$

2.8 •، باستخدام تقريب التمدد الصغير:

$$|q| \simeq \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}} = 2.56 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

من دون إجراء تقريب خطي للتمدد، تكون النتيجة في تقريب الغشاء الرقيق

$$|q| = \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}} \left(1 + \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0}\right)^{1/6} = 2.57 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

الحل

نعامل الهواء بوصفه غازًا مثاليًا له التركيب نفسه داخل الفقاعة وخارجها. في تقريب الغشاء الرقيق، يُعطى حجم الفقاعة وكتلة الصابون بالعلاقين

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad m_s \simeq 4\pi R^2 t \rho_s.$$

للغشاء سطحان فاصلان بين الصابون والهواء، لكن كتلته هي كتلة قشرة واحدة.

2.1

يسهم كلا السطحين الفاصلين في الطاقة السطحية. وبإهمال الفرق الصغير بين نصفي قطريهما،

$$E_s = 2\gamma(4\pi R^2) = 8\pi\gamma R^2.$$

عند حدوث إزاحة صغيرة إلى الخارج مقدارها dR ، يقتضي الاتزان الميكانيكي أن

$$(P_i - P_a) dV = dE_s.$$

وبما أن

$$dV = 4\pi R^2 dR, \quad dE_s = 16\pi\gamma R dR,$$

فإن زيادة الضغط الداخلي عن الضغط الخارجي هي

$$P_i - P_a = \frac{4\gamma}{R_0}.$$

تعطي علاقة الغاز المثالي $P = \rho \mathcal{R}_{\text{air}} T$ ، مع تساوي ثابت الغاز النوعي على الجانبين،

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = \frac{P_i}{P_a} = 1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}.$$

2.2

باستخدام $R_0 = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$ ،

$$P_i - P_a = \frac{4(0.0250)}{1.00 \times 10^{-2}} = 10.0 \text{ Pa}.$$

إذن

$$\boxed{\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1 = \frac{10.0}{1.013 \times 10^5} = 9.87 \times 10^{-5}}.$$

2.3

قوة الطفو المتجهة إلى أعلى تساوي وزن الهواء المحيط المزاح:

$$F_B = \rho_a V_0 g, \quad V_0 = \frac{4}{3} \pi R_0^3.$$

عند أدنى درجة حرارة تسمح بالطفو، تتوازن قوة الطفو تماماً مع مجموع وزني الهواء الداخلي والصابون:

$$\rho_a V_0 g = \rho_i V_0 g + 4\pi R_0^2 t \rho_s g.$$

وعليه،

$$\rho_i = \rho_a - \frac{3\rho_s t}{R_0}.$$

عددياً،

$$\frac{3\rho_s t}{R_0} = \frac{3(1000)(1.00 \times 10^{-7})}{1.00 \times 10^{-2}} = 0.0300 \text{ kg m}^{-3},$$

ومن ثم يتطلب الطفو المتعادل أن

$$\rho_i = 1.27 \text{ kg m}^{-3}.$$

باستخدام الجزء 2.1،

$$T_{i,\min} = \frac{\rho_a T_a}{\rho_i} \left(1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0} \right) = T_a \frac{1 + \frac{4\gamma}{P_a R_0}}{1 - \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0}}.$$

وبالتالي،

$$T_{i,\min} = 300 \frac{1 + 9.8717 \times 10^{-5}}{1 - 0.0300/1.30} = 307.117 \text{ K},$$

أو

$$\boxed{T_{i,\min} = 307 \text{ K}}.$$

تؤدي درجة حرارة أعلى إلى كثافة أقل للهواء الداخلي، ومن ثم إلى قوة محصلة متجهة إلى أعلى.

2.4

عند الاتزان الحراري، $T_i = T_a$. وعندئذ يعطي الجزء 2.1

$$\rho_i - \rho_a = \rho_a \frac{4\gamma}{P_a R_0}.$$

لكي تكون الفقاعة ساكنة، يجب أن توازن قوة مقاومة ستوكس المتجهة إلى أعلى وزنها مطروحاً منه قوة الطفو:

$$6\pi\eta R_0 u_{\min} = 4\pi R_0^2 t \rho_s g + \frac{4}{3}\pi R_0^3 (\rho_i - \rho_a)g.$$

ومن ثم، مع الإبقاء على التوتر السطحي،

$$u_{\min} = \frac{2\rho_s R_0 t g}{3\eta} + \frac{8\rho_a \gamma R_0 g}{9\eta P_a}.$$

نسبة الحد الثاني إلى الأول هي

$$\frac{4\rho_a \gamma}{3P_a \rho_s t} = 4.28 \times 10^{-3}.$$

إن لا يغيّر التوتر السطحي السرعة المطلوبة إلا بنحو 0.43%. وبإهمال هذا التصحيح نحصل على التعبير بدلالة المعلمات المطلوبة:

$$u_{\min} \simeq \frac{2\rho_s R_0 t g}{3\eta}.$$

يستخدم هذا قانون ستوكس للمقاومة المفروض في المسألة، والتوجيه بإهمال تغير نصف القطر أثناء التبريد.

2.5

بالتعويض بالقيم المعطاة،

$$u_{\min} \simeq \frac{2(1000)(1.00 \times 10^{-2})(1.00 \times 10^{-7})(9.80)}{3(1.8 \times 10^{-5})} = 0.362963 \text{ m s}^{-1}.$$

وعليه،

$$u_{\min} \simeq 0.36 \text{ m s}^{-1}.$$

بإدراج التوتر السطحي نحصل على $0.364516 \text{ m s}^{-1}$ ، وهي قيمة تُقَرَّب إلى الإجابة نفسها عند التقريب إلى رقمين معنويين.

2.6

نهمل الآن التوتر السطحي وفقاً للتعليمات. قبل الشحن، تكون الفقاعة عند درجة حرارة T_a ، وضغطها الداخلي P_a . تبقى كتلة الهواء المحصور محفوظة، وتكون الحالة النهائية أيضاً عند درجة حرارة T_a . لذلك يعطي قانون الغاز المثالي

$$P_i V_1 = P_a V_0, \quad P_i = P_a \frac{R_0^3}{R_1^3}.$$

لقشرة كروية مشحونة بانتظام مجال كهربائي

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R),$$

ومجال منعدم داخلها. وطاقتها الكهروستاتيكية هي

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty E(r)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

عند ثبات الشحنة، تؤدي زيادة نصف القطر إلى انخفاض هذه الطاقة. والضغط الكهربائي المتجه إلى الخارج الموافق لذلك هو

$$p_e = -\frac{dU_e}{dV} = -\frac{dU_e/dR}{4\pi R^2} = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4}.$$

يقتضي الاتزان الميكانيكي أن

$$P_i + p_e = P_a.$$

عند $R = R_1$

$$P_a \frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R_1^4} = P_a.$$

بالضرب في R_1^4/P_a نحصل على

$$\boxed{R_1^4 - R_0^3 R_1 - \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 P_a} = 0}.$$

للشحنة غير المنعدمة، يحقق الحل الفيزيائي $R_1 > R_0$.

2.7

لنضع

$$x = \frac{\Delta R}{R_0} \ll 1, \quad R_1 = R_0(1 + x).$$

تصبح معادلة الجزء 2.6

$$R_0^4[(1 + x)^4 - (1 + x)] = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 P_a}.$$

إلى الرتبة الأولى،

$$(1 + x)^4 - (1 + x) \simeq (1 + 4x) - (1 + x) = 3x.$$

إذن

$$3R_0^4 x = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 P_a},$$

و

$$\boxed{\Delta R \simeq \frac{q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_0^3}}.$$

2.8

يزيد الشحن حجم الهواء المزاح، بينما تبقى كتلة الفقاعة الكلية دون تغيير.

قبل الشحن، تساوي كثافة الهواء الداخلي ρ_a ، لأن التوتر السطحي مُهمل الآن، ولأن ضغطه ودرجة حرارته يساويان قيمتيهما في الوسط المحيط. ولذلك تكون كتلته

$$m_i = \rho_a V_0.$$

وكتلة الصابون المحفوظة هي

$$m_s = 4\pi R_0^2 t \rho_s.$$

هنا t هو السمك الأصلي؛ ويصبح الغشاء أرق عند تمدده.

يتطلب الطفو المتعادل بعد الشحن أن

$$\rho_a V_1 g = (\rho_a V_0 + m_s) g.$$

ومن ثم

$$\rho_a \frac{4}{3} \pi (R_1^3 - R_0^3) = 4\pi R_0^2 t \rho_s,$$

أو

$$R_1^3 - R_0^3 = \frac{3\rho_s t R_0^2}{\rho_a}.$$

لتمدد صغير،

$$R_1^3 - R_0^3 \simeq 3R_0^2 \Delta R,$$

فتكون الزيادة المطلوبة في نصف القطر

$$\Delta R \simeq \frac{\rho_s t}{\rho_a}.$$

عدديًا،

$$\Delta R \simeq \frac{1000(1.00 \times 10^{-7})}{1.30} = 7.69 \times 10^{-5} \text{ m}, \quad \frac{\Delta R}{R_0} \simeq 0.00769.$$

بمساواة هذه الزيادة بنتيجة الجزء 2.7 نحصل على

$$\frac{q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_0^3} = \frac{\rho_s t}{\rho_a},$$

وبالتالي

$$|q| \simeq \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}}.$$

يعطي التعويض

$$|q| \simeq \sqrt{\frac{96\pi^2 (8.85 \times 10^{-12})(1.013 \times 10^5)(1000)(1.00 \times 10^{-7})(1.00 \times 10^{-2})^3}{1.30}},$$

ومن ثم

$$|q| \simeq 2.56 \times 10^{-7} \text{ C} = 0.256 \mu\text{C}.$$

يمكن أيضًا الحصول على النتيجة دون إجراء تقريب خطي للتمدد. يعطي الطفو المتعادل

$$R_1 = R_0 \left(1 + \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0} \right)^{1/3}.$$

بدمج هذه العلاقة مع الجزء 2.6،

$$q^2 = 32\pi^2 \varepsilon_0 P_a R_1 (R_1^3 - R_0^3) = \frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^2 R_1}{\rho_a}.$$

إن تكون النتيجة في تقريب الغشاء الرقيق، من دون إجراء التوسع،

$$|q| = \sqrt{\frac{96\pi^2 \varepsilon_0 P_a \rho_s t R_0^3}{\rho_a}} \left(1 + \frac{3\rho_s t}{\rho_a R_0} \right)^{1/6} = 2.57 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

تنتج كلتا إشارتي الشحنة التمدد نفسه، لأن الضغط الكهربائي يعتمد على q^2 .

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: إحياءً للذكرى المئوية لنواة رذرفورد الذرية: تشتت أيون بواسطة ذرة

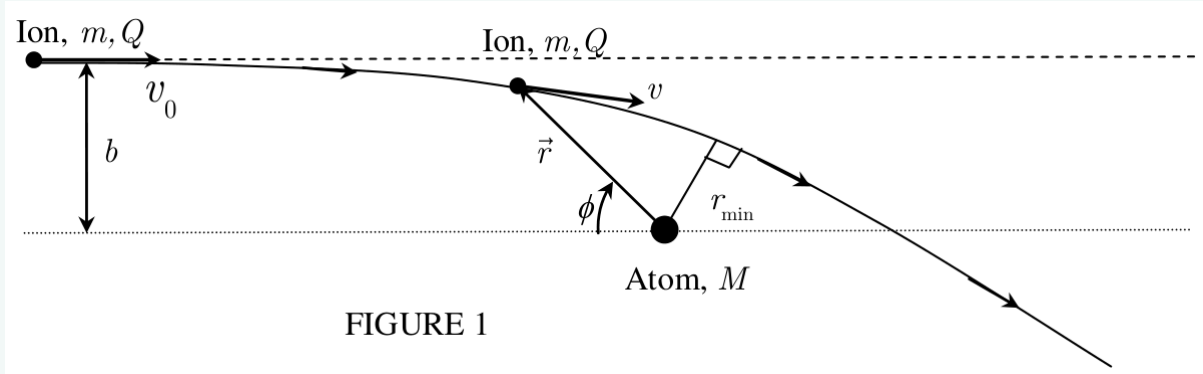


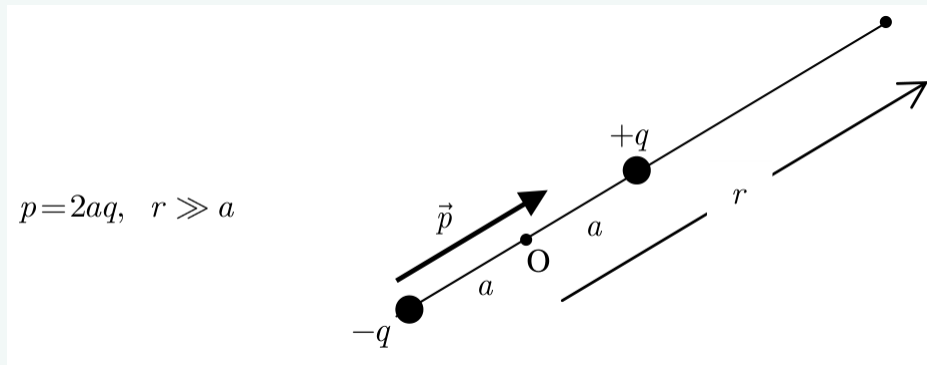
FIGURE 1

الشكل 1

يتحرك أيون كتلته m وشحنته Q ، بسرعة ابتدائية غير نسبية v_0 ، من مسافة بعيدة جداً نحو جوار ذرة متعادلة كتلتها $M \gg m$ وقابليتها للاستقطاب الكهربائي α . معامل التصادم هو b ، كما هو موضح في الشكل 1.

تستقطب الذرة لحظياً بفعل المجال الكهربائي $\vec{E}$ للأيون الوارد (المقرب). ويكون عزم ثنائي القطب الكهربائي الناتج للذرة هو $\vec{p} = \alpha \vec{E}$. أهمل أي فقد للطاقة بالإشعاع في هذه المسألة.

3.1 احسب شدة المجال الكهربائي $\vec{E}_p$ على مسافة r من ثنائي قطب كهربائي مثالي $\vec{p}$ يقع عند نقطة الأصل O ، وذلك على امتداد اتجاه $\vec{p}$ في الشكل 2. [1.2 درجة]



الشكل 2

3.2 أوجد تعبير القوة $\vec{f}$ المؤثرة في الأيون بفعل الذرة المستقطبة. بين أن هذه القوة تجاذبية بغض النظر عن إشارة شحنة الأيون. [3.0 درجات]

3.3 ما طاقة الوضع الكهربائية لتفاعل الأيون مع الذرة بدلالة α و Q و r ؟ [0.9 درجة]

3.4 أوجد تعبير $r_{\min}$ ، وهي مسافة أقرب اقتراب، كما هو موضح في الشكل 1. [2.4 درجة]

3.5 إذا كان معامل التصادم b أصغر من قيمة حرجة b_0 ، فسيتهج الأيون نحو الذرة على طول مسار حلزوني. في هذه الحالة، يتعادل الأيون وتصبح الذرة، بدورها، مشحونة. تُعرف هذه العملية بتفاعل «تبادل الشحنة». ما مساحة المقطع العرضي $A = \pi b_0^2$ للذرة في تصادم «تبادل الشحنة» هذا كما يراها الأيون؟ [2.5 درجة]

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

ليكن $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ ، وليكن اتجاه $\hat{r}$ من الذرة نحو الأيون. نختار $U(\infty) = 0$.

• 3.1

$$\vec{E}_p = \frac{2k}{r^3} \vec{p}.$$

• 3.2

$$\vec{f} = -\frac{2\alpha k^2 Q^2}{r^5} \hat{r}.$$

القوة تجاذبية لكلا إشارتي Q .

• 3.3

$$U(r) = -\frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4} = -\frac{\alpha Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}.$$

• 3.4 لمسار تشتت، حيث $b > b_0$

$$r_{\min} = \left[\frac{b^2 + \sqrt{b^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}}}{2} \right]^{1/2}.$$

عند $b = b_0$ ، يقترب الأيون تقارباً من $r = b_0/\sqrt{2}$. وعندما $b < b_0$ ، لا توجد نقطة انقلاب شعاعية عند مسافة موجبة.

• 3.5

$$b_0 = \left(\frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} \right)^{1/4}, \quad A = \frac{2\pi k |Q|}{v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \frac{|Q|}{2\epsilon_0 v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}}.$$

الحل

بما أن $M \gg m$ ، فإننا نهمل ارتداد الذرة ونعدّ موضعها ثابتاً. نستخدم نموذج ثنائي القطب المستحث المثالي المحدد في السؤال، مع $\alpha > 0$.

3.1

نمثل ثنائي القطب بشحنتين $+q$ و $-q$ ، تفصل بينهما مسافة $2a$ ، بحيث يكون $p = 2aq$. عند نقطة على المحور في اتجاه $\vec{p}$ ، تكون المسافتان من الشحنتين $r - a$ و $r + a$.

يتجه مجالا الشحنتين في اتجاهين متعاكسين، فنحصل على

$$\vec{E}_p = kq \left[\frac{1}{(r-a)^2} - \frac{1}{(r+a)^2} \right] \hat{p},$$

حيث $\hat{p}$ متجه الوحدة في اتجاه عزم ثنائي القطب.

بتوحيد مقامي الكسرين،

$$\vec{E}_p = \frac{4kqar}{(r^2 - a^2)^2} \hat{\mathbf{p}}.$$

في حد ثنائي القطب المثالي $a/r \rightarrow 0$ ، مع ثبات $p = 2aq$ ،

$$\vec{E}_p = \frac{2kp}{r^3} \hat{\mathbf{p}} = \frac{2k}{r^3} \vec{p}.$$

يتجه المجال على الجانب المقابل من محور ثنائي القطب أيضاً في اتجاه $\vec{p}$ ، ويكون له المقدار نفسه عند المسافة نفسها.

3.2

ليكن الأيون عند الموضع $\vec{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ بالنسبة إلى الذرة. المجال الكهربائي الذي يولده الأيون عند الذرة هو

$$\vec{E}_{\text{ion}} = -\frac{kQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

ومن ثم، فإن عزم ثنائي القطب المستحث هو

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_{\text{ion}} = -\frac{\alpha kQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

يقع الأيون على محور ثنائي القطب هذا. باستخدام نتيجة 3.1،

$$\vec{E}_p = \frac{2k}{r^3} \vec{p} = -\frac{2\alpha k^2 Q}{r^5} \hat{\mathbf{r}}.$$

إن القوة المؤثرة في الأيون هي

$$\vec{f} = Q\vec{E}_p = -\frac{2\alpha k^2 Q^2}{r^5} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 r^5} \hat{\mathbf{r}}.$$

لأن $\alpha > 0$ ولأن الشحنة تدخل في التعبير على صورة Q^2 ، فإن القوة تتجه دائماً نحو الذرة، بغض النظر عن إشارة Q .

3.3

لقوة مركزية محافظة،

$$f_r = -\frac{dU}{dr}.$$

باختيار طاقة الوضع صفراً عند اللانهاية،

$$U(r) = -\int_{\infty}^r f_r(s) ds = -\int_{\infty}^r \left(-\frac{2\alpha k^2 Q^2}{s^5} \right) ds.$$

وبالتالي،

$$U(r) = -\frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4}.$$

وبصورة مكافئة،

$$U = -\frac{1}{2} \alpha E_{\text{ion}}^2.$$

يأخذ العامل $1/2$ في الحسابان الطاقة اللازمة لاستحثاث ثنائي القطب. بالفعل، فإن طاقة الاستقطاب $p^2/(2\alpha)$ ، مع طاقة الاقتران $-pE_{\text{ion}}$ ، تعطي $-\alpha E_{\text{ion}}^2/2$ عندما $p = \alpha E_{\text{ion}}$.

3.4

القوة مركزية، لذا يُحفظ الزخم الزاوي حول الذرة. ويتحدد مقداره من المسار الوارد:

$$L = mv_0 b.$$

تُحفظ الطاقة الميكانيكية أيضًا. عند اللانهاية، تنعدم طاقة الوضع، لذا

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

بفصل طاقة الحركة إلى مساهمتين شعاعية ومستعرضة، نحصل على

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

عند أقرب اقتراب على مسار تشتت، يكون $\dot{r} = 0$. بالتعويض عن $L = mv_0 b$ ،

$$\frac{mv_0^2 b^2}{2r_{\min}^2} - \frac{\alpha k^2 Q^2}{2r_{\min}^4} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

بالضرب في $2r_{\min}^4/(mv_0^2)$ ، نحصل على

$$r_{\min}^4 - b^2 r_{\min}^2 + \frac{\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} = 0.$$

هذه معادلة تربيعية في $r_{\min}^2$ ، وجذراها هما

$$r_{\pm}^2 = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}}}{2}.$$

يصل الأيون القادم من اللانهاية إلى الجذر الأكبر أولاً. ومن ثم

$$r_{\min} = \left[\frac{b^2 + \sqrt{b^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2}}}{2} \right]^{1/2}.$$

يكون الجذران مختلفين عندما $b > b_0$ ، حيث تُحدد b_0 أدناه. وللتحقق، عندما يؤول التفاعل إلى الصفر، يعطي هذا التعبير $r_{\min} \rightarrow b$ ، كما هو متوقع للحركة في خط مستقيم.

3.5

تخضع الحركة الشعاعية لطاقة الوضع الفعالة

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha k^2 Q^2}{2r^4}.$$

عندما يكون الزخم الزاوي غير صفري، يسود حد الطرد المركزي الموجب عند المسافات الكبيرة، بينما يسود حد التجاذب عند المسافات الصغيرة. ويمكن لحاجز طاقة الوضع الناتج أن يمنع الأيون من الوصول إلى الذرة.

ينشأ المسار الحرج عندما تندمج نقطتا الانقلاب الشعاعيتان. لذا يجب أن ينعدم المميز الذي وجدناه في 3.4:

$$b_0^4 - \frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} = 0.$$

ويترتب على ذلك أن

$$b_0 = \left(\frac{4\alpha k^2 Q^2}{mv_0^2} \right)^{1/4}.$$

عندما $b < b_0$ ، فإن معادلة الطاقة الشعاعية

$$\dot{r}^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{b^2}{r^2} + \frac{\alpha k^2 Q^2}{m v_0^2 r^4} \right)$$

ليس لها جذر موجب. ولذلك يواصل الأيون الوارد حركته نحو الداخل، ويخضع لتبادل الشحنة وفقاً للافتراض الوارد في السؤال.
عند $b = b_0$ تماماً،

$$\dot{r}^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{b_0^2}{2r^2} \right)^2.$$

يقترب الأيون الوارد تقارباً من نصف قطر المدار الدائري غير المستقر

$$r_c = \frac{b_0}{\sqrt{2}}$$

وتكون مساحة هذا الحد الفاصل صفراً في مستوى معاملات التصادم، فلا يؤثر في المقطع العرضي.
تشغل المسارات التي تؤدي إلى أسر الأيون قرصاً نصف قطره b_0 في ذلك المستوى. وبالتالي،

$$A = \pi b_0^2 = \pi \sqrt{\frac{4\alpha k^2 Q^2}{m v_0^2}},$$

أو

$$A = \frac{2\pi k |Q|}{v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \frac{|Q|}{2\varepsilon_0 v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{m}}.$$

عند إدخال القيم بوحدات النظام الدولي للوحدات، تكون A بوحد m^2 . لم تُعطَ أي قيم عددية للمعاملات.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.