

IPhO 2010

理论题与解答 · 克罗地亚萨格勒布 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/iph/2010/

题目 1：金属物体中的电荷镜像

引言——镜像法

将一个点电荷 q 放在半径为 R 的接地金属球附近 [见图 1(a)]，球面上因而产生感应电荷分布。根据表面电荷分布计算电场和电势是一项十分繁难的任务。然而，采用所谓的镜像法，可以大大简化计算。在这种方法中，球面上分布的电荷所产生的电场和电势，可以用置于球内的单个点电荷 q' 所产生的电场和电势来表示（你不必证明这一点）。注意：这个镜像电荷 q' 的电场仅在球外（包括球面）再现感应电荷的电场和电势。

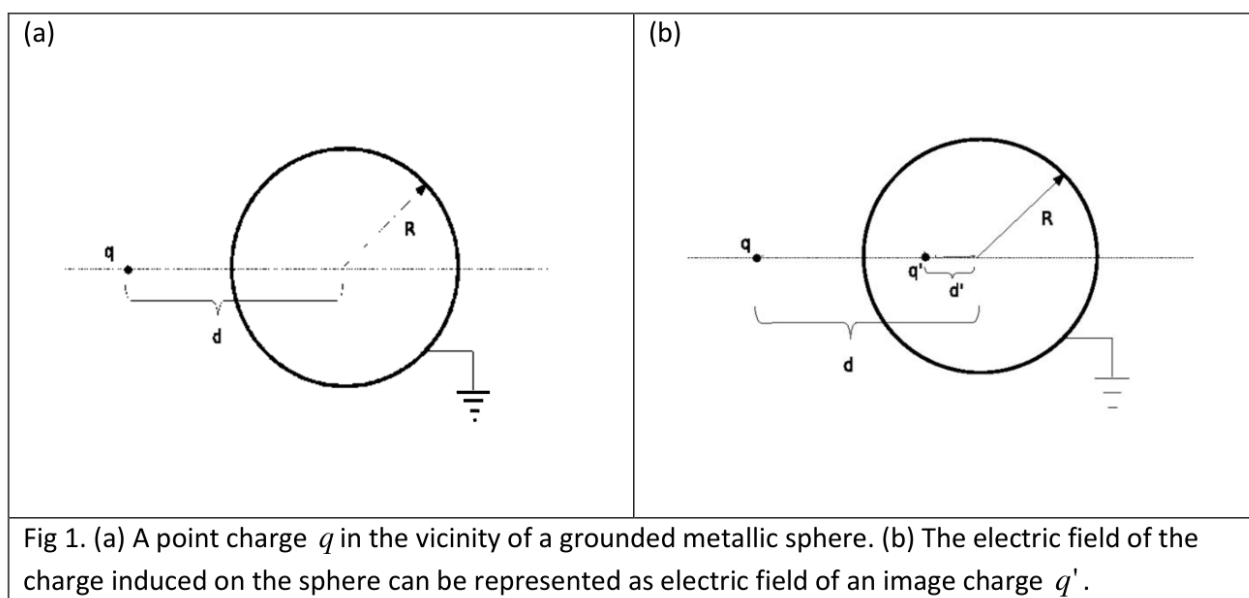


Fig 1. (a) A point charge q in the vicinity of a grounded metallic sphere. (b) The electric field of the charge induced on the sphere can be represented as electric field of an image charge q' .

图 1. (a) 接地金属球附近的点电荷 q 。(b) 球面上感应电荷的电场可以用镜像电荷 q' 的电场来表示。

任务 1——镜像电荷

由问题的对称性可知，电荷 q' 应置于点电荷 q 与球心的连线上 [见图 1(b)]。

- 球面上的电势是多少？（0.3 分）
- 用 q 、 d 和 R 表示 q' 以及电荷 q' 到球心的距离 d' 。（1.9 分）
- 求电荷 q 所受力的。这个力是斥力吗？（0.5 分）

任务 2——静电场的屏蔽

考虑一个点电荷 q ，它与半径为 R 的接地金属球球心的距离为 d 。我们关心的是，接地金属球如何影响球另一侧的 A 点处的电场（见图 2）。 A 点位于电荷 q 与球心的连线上；它与点电荷 q 的距离为 r 。

- 求 A 点处的电场矢量。（0.6 分）

- b) 对于很大的距离 $r \gg d$, 利用近似式 $(1 + a)^{-2} \approx 1 - 2a$ 求电场的表达式, 其中 $a \ll 1$ 。 (0.6 分)
- c) 在 d 趋于什么值的极限下, 接地金属球能够完全屏蔽电荷 q 的电场, 使 A 点处的电场恰好为零? (0.3 分)

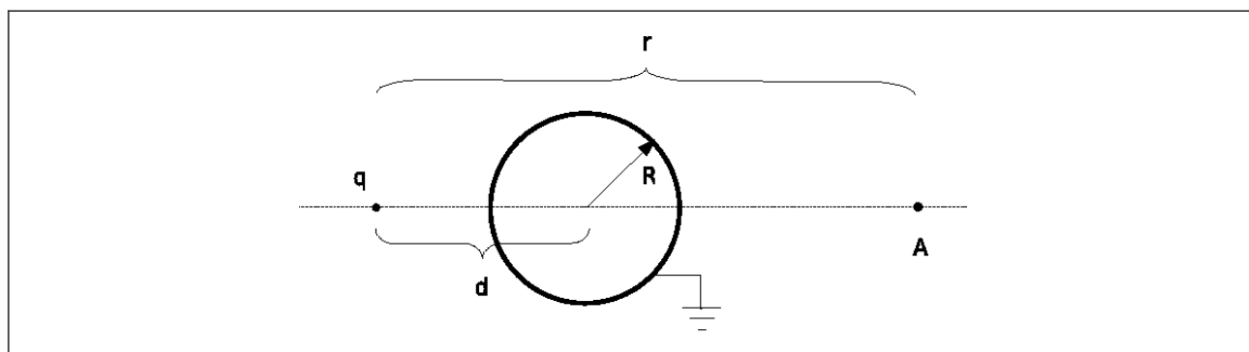


Fig 2. The electric field at point A is partially screened by the grounded sphere.

图 2. 接地球对 A 点处的电场起到部分屏蔽作用。

任务 3——接地金属球电场中的小振动

一个质量为 m 的点电荷 q 用长为 L 的细线悬挂在接地金属球附近, 细线的另一端固定在墙上。在分析中, 忽略墙壁的一切静电效应。该点电荷构成一个单摆 (见图 3)。细线在墙上的固定点与球心的距离为 l 。假设重力的影响可以忽略。

- a) 对于给定的角度 α , 求点电荷 q 所受电场力的大小, 并用清晰的示意图标出其方向 (0.8 分)
- b) 用 l 、 L 、 R 、 q 和 α 表示该力在垂直于细线方向上的分量。 (0.8 分)
- c) 求单摆作小振动时的频率。 (1.0 分)

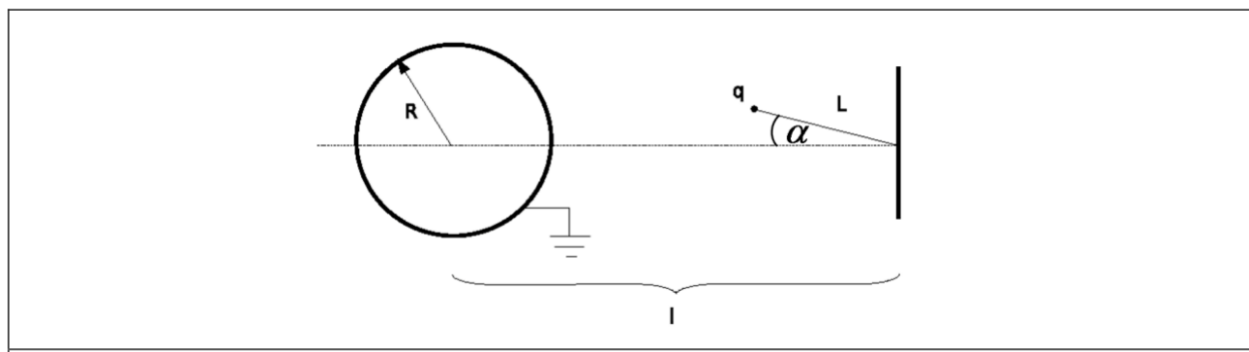


Fig 3. A point charge in the vicinity of a grounded sphere oscillates as a pendulum.

图 3. 接地球附近的点电荷像单摆一样振动。

任务 4——系统的静电能

对于一个电荷分布, 了解系统的静电能很重要。在本题中 (见图 1a), 外部电荷 q 与球面上的感应电荷之间存在静电相互作用, 球面上的感应电荷彼此之间也存在静电相互作用。用电荷 q 、球的半径 R 和距离 d 求出下列静电能:

- a) 电荷 q 与球面上感应电荷之间相互作用的静电能; (1.0 分)
- b) 球面上感应电荷彼此之间相互作用的静电能; (1.2 分)
- c) 系统中相互作用的总静电能。 (1.0 分)

提示：本题有多种解法：

(1) 在其中一种解法中，可以使用下列积分，

$$\int_d^\infty \frac{x dx}{(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}.$$

(2) 在另一种解法中，可以利用以下事实：对于位于 $\vec{r}_i, i = 1, \dots, N$ 各点的 N 个电荷 q_i ，静电能是对所有电荷对求和：

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

题目译自官方英文原文。

答案

记 $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ 。在任务 2 中，令 $\hat{\mathbf{e}}$ 从 q 指向 A 。对于任务 3，定义

$$d_\alpha = \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}, \quad D_0 = (l - L)^2 - R^2,$$

对于图示的球外平衡位置，有 $l - L > R$ 。规定垂直于细线的力分量以 α 增大的方向为正。

- 1(a)

$$\phi_{\text{sphere}} = 0.$$

- 1(b)

$$q' = -\frac{R}{d}q, \quad d' = \frac{R^2}{d}.$$

镜像电荷位于球心与最靠近 q 的球面点之间。

- 1(c)

$$F = \frac{kq^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}.$$

该力为引力，指向球心。

- 2(a)

$$\mathbf{E}_A = kq \left[\frac{1}{r^2} - \frac{R}{d(r - d + R^2/d)^2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

- 2(b) 对于 $r \gg d$ ，保留到第一项修正：

$$\mathbf{E}_A \simeq \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} - \frac{2R}{r} \left(1 - \frac{R^2}{d^2} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

主导项为 $kq(1 - R/d)\hat{\mathbf{e}}/r^2$ 。

- 2(c)

$$d \rightarrow R^+ \implies \mathbf{E}_A \rightarrow \mathbf{0}.$$

- 3(a)

$$F(\alpha) = \frac{kq^2 R \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

从电荷处画出直接指向球心的力箭头。

- 3(b)

$$F_{\perp} = -\frac{kq^2 R l \sin \alpha}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

- 3(c) 普通频率和角频率为

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kq^2 R l}{m L D_0^2}}, \quad \omega_0 = 2\pi f.$$

- 4(a) 电荷与球面电荷之间的相互作用能:

$$U_{q\sigma} = -\frac{kq^2 R}{d^2 - R^2}.$$

- 4(b) 感应电荷之间的相互作用能:

$$U_{\sigma\sigma} = +\frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

- 4(c) 总相互作用能:

$$U_{\text{tot}} = -\frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

解答

1(a)

处于静电平衡的导体是等势体。接地使其电势固定为大地的电势，取为零：

$$\phi_{\text{sphere}} = 0.$$

1(b)

设 O 为球心。从 O 沿指向外部电荷的方向量取轴向坐标，则 q 位于 $d > R$ 处，镜像电荷位于球内的 d' 处。

在最靠近 q 的球面点处，零电势条件给出

$$k \left(\frac{q}{d - R} + \frac{q'}{R - d'} \right) = 0.$$

在另一侧的球面点处，

$$k \left(\frac{q}{d + R} + \frac{q'}{R + d'} \right) = 0.$$

因此，

$$\frac{R - d'}{d - R} = \frac{R + d'}{d + R}.$$

交叉相乘得到

$$(R - d')(d + R) = (R + d')(d - R),$$

于是

$$d' = \frac{R^2}{d}.$$

代回可得,

$$q' = -\frac{R}{d}q.$$

这些取值也满足整个球面上的边界条件。对于一个球面点, 其半径方向与指向 q 的方向成 θ 角, 设它到 q 和 q' 的距离分别为 s 和 s' 。则

$$s^2 = d^2 + R^2 - 2dR \cos \theta,$$

且

$$s'^2 = d'^2 + R^2 - 2d'R \cos \theta = \frac{R^2}{d^2} s^2.$$

因此 $s' = (R/d)s$, 并且

$$k \left(\frac{q}{s} + \frac{q'}{s'} \right) = 0.$$

1(c)

在外部电荷处, 镜像电荷再现了感应电荷的电场。 q 与其镜像电荷之间的距离为

$$d - d' = \frac{d^2 - R^2}{d}.$$

因此由库仑定律可得

$$F = \frac{k|qq'|}{(d - d')^2} = \frac{kq^2(R/d)}{[(d^2 - R^2)/d]^2}.$$

于是

$$F = \frac{kq^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}.$$

由于 q' 与 q 异号, 该力始终为引力。它沿着从 q 指向 O 的直线作用。

2(a)

选取从 q 指向 A 的方向为轴的正方向, 单位矢量为 $\hat{\mathbf{e}}$ 。将球心置于 $x = 0$ 处。则

$$x_q = -d, \quad x_{q'} = -d', \quad x_A = r - d.$$

由于 A 位于球另一侧的球外, 有 $r > d + R$ 。

A 到两个电荷的距离分别为

$$r, \quad r - d + d' = r - d + \frac{R^2}{d}.$$

由叠加原理,

$$\mathbf{E}_A = k \left[\frac{q}{r^2} + \frac{q'}{(r-d+d')^2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

因此

$$\mathbf{E}_A = kq \left[\frac{1}{r^2} - \frac{R}{d(r-d+R^2/d)^2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

标量系数的正负决定了电场沿轴的方向。

2(b)

定义

$$\delta = d - \frac{R^2}{d}.$$

由于 $0 < \delta < d$, 条件 $r \gg d$ 意味着 $\delta/r \ll 1$. 可写成

$$\mathbf{E}_A = \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} \left(1 - \frac{\delta}{r} \right)^{-2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

在给定的近似式中取 $a = -\delta/r$, 得到

$$\left(1 - \frac{\delta}{r} \right)^{-2} \simeq 1 + \frac{2\delta}{r}.$$

由此可得

$$\mathbf{E}_A \simeq \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} - \frac{2R\delta}{dr} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

代入 δ ,

$$\mathbf{E}_A \simeq \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} - \frac{2R}{r} \left(1 - \frac{R^2}{d^2} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

在主导阶近似下, 远处的电场等效于以下净电荷所产生的电场:

$$q + q' = q \left(1 - \frac{R}{d} \right).$$

2(c)

当外部电荷趋近球面时,

$$d \rightarrow R^+, \quad d' \rightarrow R, \quad q' \rightarrow -q.$$

因此, 电荷及其镜像趋于同一位置, 且电荷量大小相等、符号相反。在远离接触点的每一个固定球外观测点处, 它们的电场相互抵消。

特别地, 2(a) 中的精确表达式给出

$$\lim_{d \rightarrow R^+} \mathbf{E}_A = \mathbf{0}.$$

这是电荷从外侧趋近球面的极限。

3(a)

认为电荷运动时导体始终保持静电平衡。设 P 为细线的固定点， Q 为电荷的位置。选取

$$O = (0, 0), \quad P = (l, 0).$$

对于图 3 所示的角度，

$$Q = (l - L \cos \alpha, L \sin \alpha).$$

因此，球心到电荷的瞬时距离为

$$d_\alpha = |OQ| = \sqrt{(l - L \cos \alpha)^2 + L^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}.$$

应用 1(c) 的结果，

$$F(\alpha) = \frac{kq^2 R d_\alpha}{(d_\alpha^2 - R^2)^2} = \frac{kq^2 R \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

力的方向从 Q 指向 O 。

示意图说明： 画出以 O 为球心的球，将 P 置于其右侧的水平线上，且 $OP = l$ 。将 Q 置于该水平线上方、 P 的左侧，使 $PQ = L$ 且 $\angle OPQ = \alpha$ 。从 Q 出发，沿 QO 画一个指向 O 的箭头，并标记为 $\mathbf{F}_e$ 。标出 $OQ = d_\alpha$ 。

3(b)

垂直于细线、沿 α 增大方向的单位矢量为

$$\hat{\mathbf{e}}_\alpha = (\sin \alpha, \cos \alpha).$$

由于力指向 O ，

$$\mathbf{F}_e = -\frac{F}{d_\alpha}(l - L \cos \alpha, L \sin \alpha).$$

其切向分量为

$$\begin{aligned} F_\perp &= \mathbf{F}_e \cdot \hat{\mathbf{e}}_\alpha \\ &= -\frac{F}{d_\alpha}[(l - L \cos \alpha) \sin \alpha + L \sin \alpha \cos \alpha] \\ &= -\frac{Fl \sin \alpha}{d_\alpha}. \end{aligned}$$

代入可得

$$F_\perp = -\frac{kq^2 R l \sin \alpha}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

对于正的 α ，该分量沿 α 减小的方向作用，因此是回复力。将 $-\sin \alpha$ 换成 $|\sin \alpha|$ ，即可得到其大小。

3(c)

在平衡位置 $\alpha = 0$ 处，

$$d_0 = l - L.$$

图示的平衡位置要求 $l - L > R$ ，从而电荷位于球外。

张力在垂直于细线的方向上没有分量。因此，切向的牛顿第二定律为

$$mL\ddot{\alpha} = F_\perp.$$

当 α 很小时,

$$\sin \alpha \simeq \alpha,$$

且

$$d_\alpha^2 - R^2 = (l - L)^2 - R^2 + lL\alpha^2 + O(\alpha^4).$$

记 $D_0 = (l - L)^2 - R^2$, 线性化后的方程变为

$$mL\ddot{\alpha} = -\frac{kq^2 Rl}{D_0^2}\alpha,$$

或

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{kq^2 Rl}{mLD_0^2}.$$

因此, 普通频率为

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kq^2 Rl}{mL[(l - L)^2 - R^2]^2}}.$$

该近似要求振幅足够小, 使下列两个条件

$$|\alpha| \ll 1, \quad lL\alpha^2 \ll D_0$$

同时成立。

4(a)

忽略外部点电荷的自能, 并规定当 $d \rightarrow \infty$ 时相互作用能为零。

用 ϕ_σ 表示感应表面电荷产生的电势。在 q 所在的位置, 镜像电荷给出

$$\phi_\sigma(q) = \frac{kq'}{d - d'} = -\frac{kqR}{d^2 - R^2}.$$

q 与感应电荷之间的相互作用能为

$$U_{q\sigma} = q\phi_\sigma(q).$$

这里没有因子 $1/2$: 由 q 与一个感应电荷组成的每一对电荷都只被计数一次。因此

$$U_{q\sigma} = -\frac{kq^2 R}{d^2 - R^2}.$$

4(b)

设 σ 为感应表面电荷密度, ϕ_q 为外部电荷产生的电势。感应电荷之间的相互作用能为

$$U_{\sigma\sigma} = \frac{1}{2} \int_S \sigma \phi_\sigma dS.$$

因子 $1/2$ 用于避免对表面电荷分布中的电荷对重复计数。

在接地球面上,

$$\phi_q + \phi_\sigma = 0.$$

因此

$$U_{\sigma\sigma} = -\frac{1}{2} \int_S \sigma \phi_q dS.$$

剩下的积分等于电荷与球面电荷之间的相互作用能：

$$\int_S \sigma \phi_q dS = kq \int_S \frac{\sigma dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} = q\phi_\sigma(q) = U_{q\sigma}.$$

因此

$$U_{\sigma\sigma} = -\frac{1}{2}U_{q\sigma},$$

得到

$$U_{\sigma\sigma} = +\frac{kq^2R}{2(d^2 - R^2)}.$$

4(c)

将这两个物理贡献相加，

$$U_{\text{tot}} = U_{q\sigma} + U_{\sigma\sigma} = \frac{1}{2}U_{q\sigma}.$$

因此，

$$U_{\text{tot}} = -\frac{kq^2R}{2(d^2 - R^2)}.$$

这一结果也可以通过将 q 从无穷远处准静态地移至该位置所需做的功得到：

$$U_{\text{tot}}(d) = -\int_d^\infty \frac{kq^2R x}{(x^2 - R^2)^2} dx = -\frac{kq^2R}{2(d^2 - R^2)}.$$

作为一致性检验，沿 d 增大方向的力为

$$-\frac{dU_{\text{tot}}}{dd} = -\frac{kq^2Rd}{(d^2 - R^2)^2},$$

这与 1(c) 中求得的引力一致。

解答已与官方解答核对。

题目 2：烟囱的物理学

引言

燃烧产生的气体通过横截面积为 A 、高度为 h 的高烟囱排入温度为 T_{Air} 的大气中（见图 1）。固体物质在温度为 T_{Smoke} 的炉膛内燃烧。炉膛内单位时间产生的气体体积为 B 。

假设：

- 炉膛内气体的速度小到可以忽略不计
- 气体（烟气）的密度与相同温度和压强下空气的密度相同；在炉膛内，气体可视为理想气体
- 空气压强随高度的变化遵循流体静力学规律；空气密度随高度的变化可以忽略不计
- 气体流动满足伯努利方程，即流动中各点的下列量保持不变：

$$\frac{1}{2}\rho v^2(z) + \rho g z + p(z) = \text{const},$$

其中, ρ 为气体密度, $v(z)$ 为气体速度, $p(z)$ 为压强, z 为高度 – 整个烟囱内气体密度的变化可以忽略不计

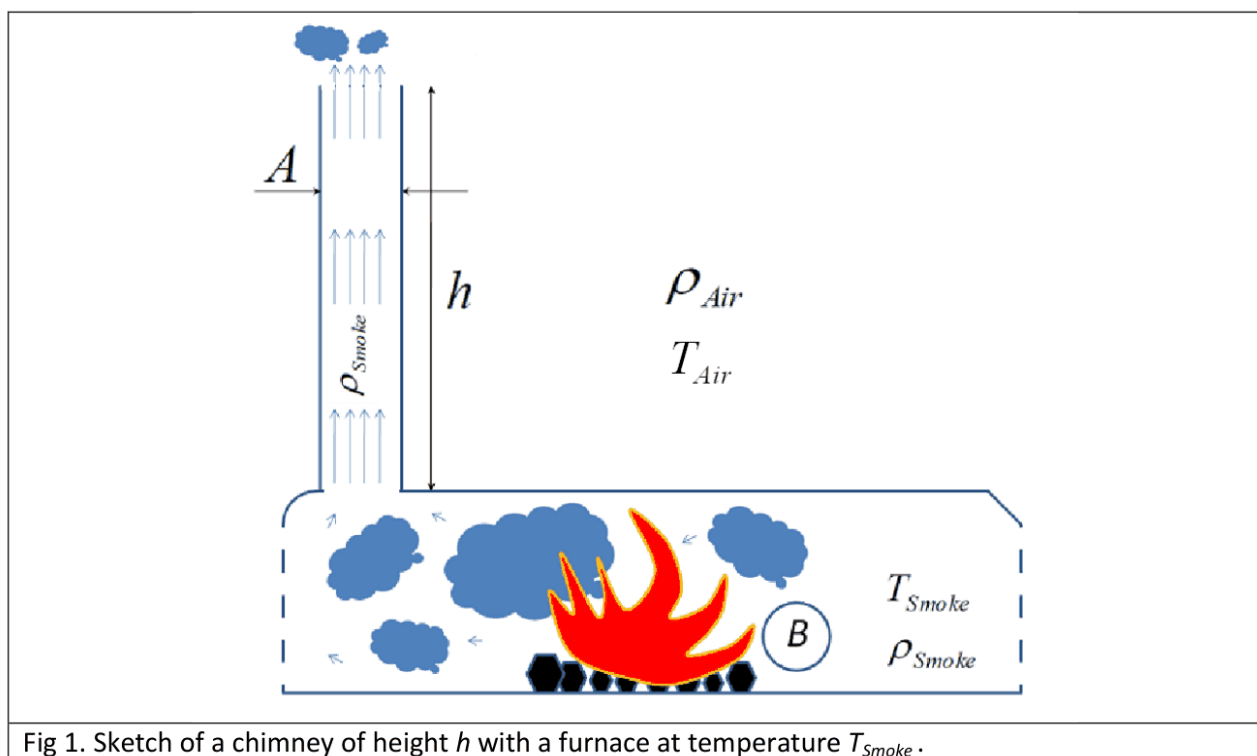


Fig 1. Sketch of a chimney of height h with a furnace at temperature T_{Smoke} .

图 1. 高度为 h 、炉膛温度为 T_{Smoke} 的烟囱示意图。

任务 1

a) 为使烟囱有效工作, 将产生的全部气体排入大气, 烟囱所需的最小高度是多少? 用 B 、 A 、 T_{Air} 、 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ 、 $\Delta T = T_{Smoke} - T_{Air}$ 表示结果。重要提示: 在以下所有任务中, 均假设烟囱的高度等于这一最小高度。 (3.5 分)

b) 假设建造两座用途完全相同的烟囱。它们的横截面积相同, 但设计用于世界上不同的地区: 一座用于寒冷地区, 设计工作环境的平均大气温度为 -30°C ; 另一座用于温暖地区, 设计工作环境的平均大气温度为 30°C 。炉膛温度为 400°C 。经计算, 用于寒冷地区的烟囱高度为 100 m 。另一座烟囱的高度是多少? (0.5 分)

c) 气体速度沿烟囱高度如何变化? 假设烟囱横截面积不随高度变化, 画出示意图或曲线图。标出气体进入烟囱的位置。 (0.6 分)

d) 气体压强沿烟囱高度如何变化? (0.5 分)

太阳能发电站

烟囱内的气流可用于建造一种特殊的太阳能发电站 (太阳能烟囱)。其原理如图 2 所示。太阳加热面积为 S 的集热器下方的空气, 集热器周边敞开, 使空气能够不受阻碍地流入 (见图 2)。受热空气沿烟囱上升 (细实线箭头), 周围的新鲜冷空气便进入集热器 (粗虚线箭头), 从而使空气持续流过发电站。流经烟囱的气流驱动涡轮机, 进而产生电能。集热器单位水平面积上单位时间接收的太阳辐射能为 G 。假设这些能量全部用于加热集热器内的空气 (空气的比热容为 c , 其随空气温度的变化可以忽略)。我们将太阳能烟囱的效率定义为气流动能与空气进入烟囱前受热所吸收的太阳能之比。

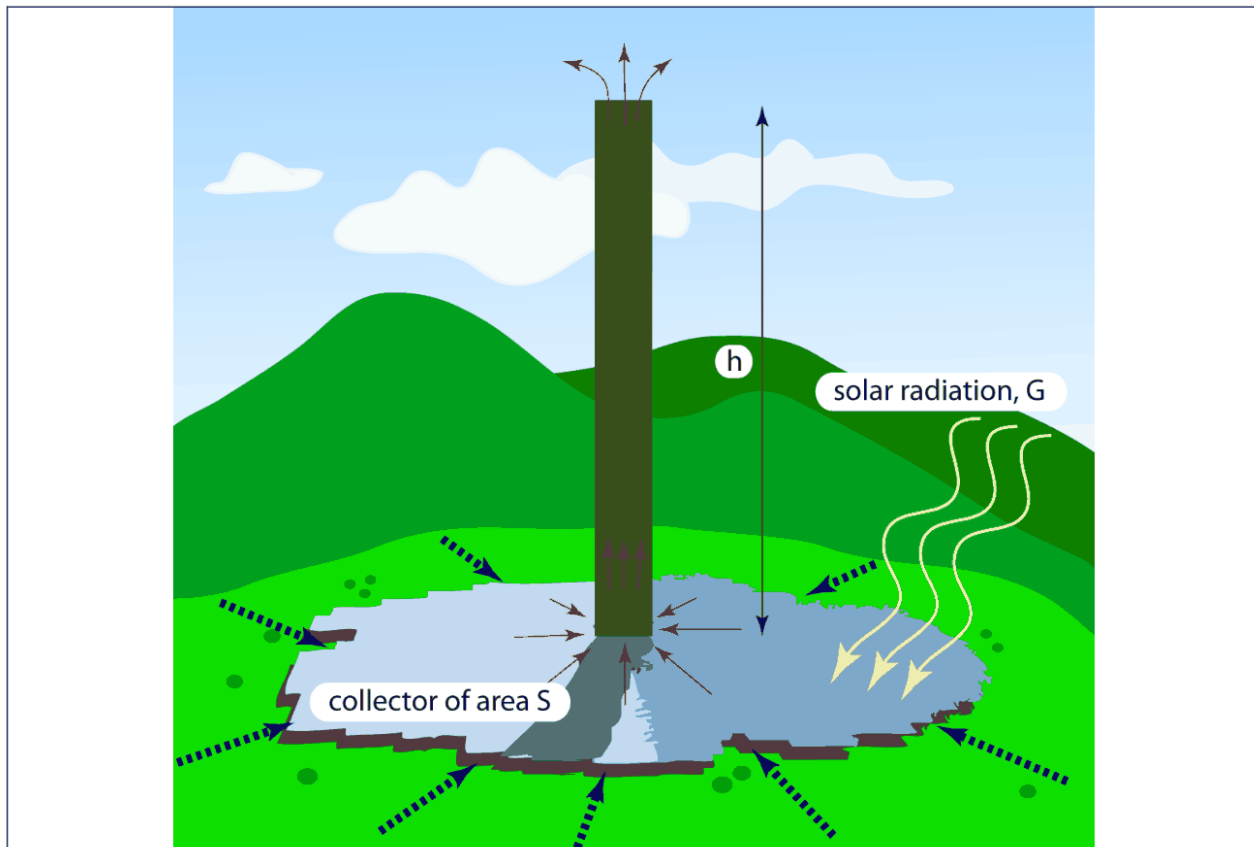


Fig 2. Sketch of a solar power plant.

图 2. 太阳能发电站示意图。

任务 2

- 太阳能烟囱发电站的效率是多少？ (2.0 分)
- 画图表示烟囱效率随其高度的变化。 (0.4 分)

曼萨纳雷斯原型装置

在西班牙曼萨纳雷斯建造的原型烟囱高 195 m，半径为 5 m。集热器为圆形，直径为 244 m。在该太阳能烟囱原型装置的典型运行条件下，空气的比热容为 1012 J/kg K ，热空气密度约为 0.9 kg/m^3 ，典型大气温度为 $T_{Air} = 295 \text{ K}$ 。在曼萨纳雷斯，晴天单位水平面积上的太阳辐射功率通常为 150 W/m^2 。

任务 3

- 原型发电站的效率是多少？写出数值估计。 (0.3 分)
- 原型发电站能够产生多大的功率？ (0.4 分)
- 在一个典型的晴天，发电站能够产生多少能量？ (0.3 分)

任务 4

- 空气从周围环境（冷空气）进入烟囱（暖空气）时，温度升高多少？写出一一般公式，并计算原型烟囱的数值。 (1.0 分)
- 流经该系统的空气质量流量是多少？ (0.5 分)

题目译自官方英文原文。

答案

取烟囱入口处为 $z = 0$ ，出口处为 $z = h$ 。下文中， ρ_h 表示烟气或受热空气的密度。

- 1(a) 当 $\Delta T > 0$ 时，

$$h_{\min} = \frac{B^2 T_{Air}}{2gA^2 \Delta T}.$$

- 1(b)

$$h_{\text{warm}} \simeq 145 \text{ m}.$$

- 1(c)

$$v(z) = \frac{B}{A} \quad (0 < z < h).$$

速度从炉膛内的近乎为零，在入口区域增大至 B/A ，随后在整个烟囱内保持不变。

- 1(d)

$$p(z) = p_{Air}(h) + \rho_h g(h - z).$$

压强随高度线性减小，斜率为 $-\rho_h g$ ，在出口处降至外界大气压强。

- 2(a)

$$\eta = \frac{gh}{cT_{Air}}.$$

- 2(b) η 随 h 变化的图线是经过原点的直线，斜率为 $g/(cT_{Air})$ 。

- 3(a)

$$\eta = 0.00641 \simeq 0.64\%.$$

- 3(b) 理想可用功率为

$$P \simeq 4.49 \times 10^4 \text{ W} \simeq 45 \text{ kW}.$$

- 3(c) 若有效日照时间为 τ ，则

$$E = P\tau.$$

若在给定辐照度下持续 12 h，则 $E \simeq 0.54 \text{ MWh} = 1.9 \text{ GJ}$ 。若给定辐照度为全天平均值，则按 24 h 计算的结果为 $1.08 \text{ MWh} = 3.88 \text{ GJ}$ 。

- 4(a)

$$\Delta T = \left[\frac{(GS)^2 T_{Air}}{2gh \rho_h^2 A^2 c^2} \right]^{1/3} \simeq 9.1 \text{ K}.$$

- 4(b)

$$\dot{m} = \frac{GS}{c\Delta T} = \left[\frac{2gh(\rho_h A)^2 GS}{cT_{Air}} \right]^{1/3} \simeq 7.7 \times 10^2 \text{ kg s}^{-1}.$$

解答

记 $\rho_a = \rho_{Air}$ 、 $\rho_h = \rho_{Smoke}$ ，以及 $p_0 = p_{Air}(0)$ 。对于太阳能烟囱， ρ_h 则表示受热空气的密度。所有公式中的绝对温度均以开尔文为单位。

1(a)

烟囱依靠自然抽力工作：外界空气的密度大于热气体的密度，因此外界空气压强随高度下降得更快。在极限工作条件下，炉膛内近乎静止的气体压强等于大气压强 p_0 。这是无需炉膛内产生超压便能排出气体的边界条件。

由烟囱外部的流体静力学规律，

$$p_{Air}(h) = p_0 - \rho_a g h.$$

在敞开的出口处，气体压强等于当地大气压强。在速度可忽略的炉膛与出口之间应用伯努利方程，得

$$p_0 = p_{Air}(h) + \rho_h g h + \frac{1}{2} \rho_h v^2.$$

因此，

$$\frac{1}{2} \rho_h v^2 = (\rho_a - \rho_h) g h.$$

烟气与空气在相同温度和压强下具有相同的密度。因此，在共同的底部压强下应用理想气体状态方程，得

$$\frac{\rho_a}{\rho_h} = \frac{T_{Smoke}}{T_{Air}} = 1 + \frac{\Delta T}{T_{Air}}.$$

于是

$$v^2 = 2gh \frac{\Delta T}{T_{Air}}.$$

由于忽略炉膛与烟囱之间的密度变化，烟囱的体积排放能力为 Av 。要排出全部气体，必须满足

$$Av \geq B.$$

在最小高度下，等号成立：

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 = 2gh_{\min} \frac{\Delta T}{T_{Air}}.$$

故

$$h_{\min} = \frac{B^2 T_{Air}}{2g A^2 \Delta T}.$$

这一结果要求 $\Delta T > 0$ 。当 $B > 0$ 且 $\Delta T = 0$ 时，在这些假设下，任何有限高度都无法产生所需的自然抽力。

1(b)

两座烟囱的 B 、 A 和炉膛温度相同，因此

$$h \propto \frac{T_{Air}}{T_{Smoke} - T_{Air}}.$$

相应的温度和温差为

$$\begin{aligned} T_c &= 243.15 \text{ K}, & T_w &= 303.15 \text{ K}, \\ \Delta T_c &= 430 \text{ K}, & \Delta T_w &= 370 \text{ K}. \end{aligned}$$

因此,

$$h_w = h_c \frac{T_w}{T_c} \frac{\Delta T_c}{\Delta T_w} = (100 \text{ m}) \frac{303.15}{243.15} \frac{430}{370}.$$

由此得到

$$\boxed{h_w = 144.9 \text{ m} \simeq 145 \text{ m}}.$$

较暖的环境使相对密度差较小, 因此需要更高的烟囱。

1(c)

定常流动中的质量守恒给出

$$\dot{m} = \rho_h A v(z).$$

由于 ρ_h 和 A 在整个烟囱内均为常量, $v(z)$ 也必须为常量。在规定的最小高度下, 体积流量恰好为 B , 因此

$$\boxed{v(z) = \frac{B}{A} = \sqrt{\frac{2gh\Delta T}{T_{Air}}}}.$$

所要求的示意图以 z 为横轴, 以 v 为纵轴。在 $z = 0$ 处标出烟囱入口。画出速度在入口区域从炉膛内可忽略的值迅速增大至 B/A , 随后从入口到 $z = h$ 画一条位于 $v = B/A$ 的水平线。若将入口区域理想化为其尺度可忽略, 则其中的加速过程可用 $z = 0$ 处的阶跃表示。

1(d)

在烟囱内, 伯努利方程为

$$\frac{1}{2} \rho_h v^2 + \rho_h g z + p(z) = \text{常量}.$$

由于 v 为常量,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_h g.$$

利用出口边界条件 $p(h) = p_{Air}(h)$, 得

$$\boxed{p(z) = p_{Air}(h) + \rho_h g(h - z)}.$$

等价地,

$$p(z) = p_0 - \rho_a g h + \rho_h g(h - z).$$

高度 z 处的外界压强为 $p_{Air}(z) = p_0 - \rho_a g z$ 。相减得

$$\boxed{p(z) - p_{Air}(z) = -(\rho_a - \rho_h)g(h - z)}.$$

因此, 在烟囱内部低于出口的所有位置, 气体压强均低于周围大气压强, 两者在出口处相等。

在刚进入入口的位置,

$$p(0^+) = p_0 - (\rho_a - \rho_h)gh = p_0 - \frac{1}{2} \rho_h v^2.$$

入口处的这一压强降低伴随着气体从炉膛进入烟囱时的加速。此后, 压强随高度线性减小。

2(a)

考虑质量为 m 的空气在集热器内升温 ΔT 。吸收的热量为

$$Q = mc\Delta T.$$

它在烟囱内的动能为

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

根据题目中的定义,

$$\eta = \frac{K}{Q} = \frac{v^2}{2c\Delta T}.$$

应用 1(a) 的结果,

$$v^2 = \frac{2gh\Delta T}{T_{Air}},$$

得到

$$\boxed{\eta = \frac{gh}{cT_{Air}}}.$$

在给定模型内, 效率与温升、集热器面积及烟囱横截面积无关。它衡量可用的气流动能功率与吸收的太阳辐射功率之比。

2(b)

当 T_{Air} 和 c 固定时,

$$\eta(h) = \frac{g}{cT_{Air}}h.$$

所要求的图以 h 为横轴, 以 η 为纵轴。图线是一条经过 $(0, 0)$ 的直线, 其斜率为正:

$$\boxed{\frac{d\eta}{dh} = \frac{g}{cT_{Air}}}.$$

高度加倍, 效率也加倍。这一线性关系仅在题目的近似条件下成立; 不应将其外推至密度变化已不可忽略的高度。

3(a)

代入原型装置的数据,

$$\eta = \frac{(9.81 \text{ m s}^{-2})(195 \text{ m})}{(1012 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1})(295 \text{ K})} = 0.0064077.$$

因此,

$$\boxed{\eta \simeq 0.64\%}.$$

3(b)

集热器半径为 $244/2 = 122 \text{ m}$, 因此其面积为

$$S = \pi(122 \text{ m})^2 = 4.67595 \times 10^4 \text{ m}^2.$$

假设全部入射太阳辐射功率均用于加热空气:

$$P_{\text{solar}} = GS = (150 \text{ W m}^{-2})(4.67595 \times 10^4 \text{ m}^2) = 7.01392 \times 10^6 \text{ W}.$$

可用的气流动能功率为

$$P = \eta GS = (0.0064077)(7.01392 \times 10^6 \text{ W}),$$

故

$$P = 4.4943 \times 10^4 \text{ W} \simeq 45 \text{ kW}.$$

这是按题目定义可供转换的理想功率；题目未另行给出涡轮机或发电机的效率。

3(c)

若在给定辐照度下的有效日照时间为 τ ，则

$$E = P\tau = \frac{ghGS}{cT_{Air}}\tau.$$

因此，在给定条件下，每小时可提供约 44.9 kWh 的能量。

若将一个典型晴天估计为在给定辐照度下持续 12 h，则

$$E = (44.943 \text{ kW})(12 \text{ h}) = 539.3 \text{ kWh},$$

即

$$E \simeq 0.54 \text{ MWh} \simeq 1.9 \times 10^9 \text{ J}.$$

若将 150 W m^{-2} 理解为整个 24 h 全天的平均值，则

$$E = (44.943 \text{ kW})(24 \text{ h}) \simeq 1.08 \text{ MWh} = 3.88 \times 10^9 \text{ J}.$$

题目没有说明有效日照时间或采用何种平均方式。

4(a)

在稳定运行时，太阳能加热功率等于空气带走热量的速率：

$$GS = \dot{m} c \Delta T.$$

质量守恒给出

$$\dot{m} = \rho_h A v.$$

将这些关系与烟囱内的气流速度

$$v = \sqrt{\frac{2gh\Delta T}{T_{Air}}},$$

结合，得到

$$GS = \rho_h A c \Delta T \sqrt{\frac{2gh\Delta T}{T_{Air}}} = \rho_h A c \sqrt{\frac{2gh}{T_{Air}}} (\Delta T)^{3/2}.$$

解出 ΔT ，得

$$\Delta T = \left[\frac{(GS)^2 T_{Air}}{2gh \rho_h^2 A^2 c^2} \right]^{1/3}.$$

对于原型装置，

$$A = \pi(5 \text{ m})^2 = 78.5398 \text{ m}^2.$$

采用给定的热空气密度，

$$\Delta T = \left[\frac{(7.01392 \times 10^6)^2 (295)}{2(9.81)(195)(0.9)^2 (78.5398)^2 (1012)^2} \right]^{1/3} \text{ K}.$$

因此,

$$\boxed{\Delta T = 9.05 \text{ K} \simeq 9.1 \text{ K}}.$$

空气进入烟囱时的温度约为 304 K。

4(b)

由加热过程的热量平衡,

$$\dot{m} = \frac{GS}{c\Delta T}.$$

代入数值,

$$\dot{m} = \frac{7.01392 \times 10^6 \text{ W}}{(1012 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1})(9.0503 \text{ K})} = 765.8 \text{ kg s}^{-1}.$$

于是

$$\boxed{\dot{m} \simeq 7.7 \times 10^2 \text{ kg s}^{-1}}.$$

消去 ΔT , 还可得到一般表达式

$$\boxed{\dot{m} = \left[\frac{2gh(\rho_h A)^2 GS}{cT_{Air}} \right]^{1/3}}.$$

作为数值检验, 相应的速度为

$$v = \sqrt{\frac{2(9.81)(195)(9.0503)}{295}} = 10.83 \text{ m s}^{-1},$$

由此得到 $\rho_h Av = 765.8 \text{ kg s}^{-1}$, 气流动能功率为 $\frac{1}{2} \dot{m} v^2 = 44.94 \text{ kW}$, 与 3(b) 一致。

解答已与官方解答核对。

题目 3: 原子核的简单模型

引言

虽然原子核是量子体系, 但根据一些简单的假设, 就能推导出描述其基本性质(如半径或结合能)的若干唯象规律: (i) 原子核由核子(即质子和中子)构成; (ii) 将这些核子束缚在一起的强核相互作用的作用距离很短(只作用于相邻核子之间); (iii) 一个给定原子核中的质子数(Z)近似等于中子数(N), 即 $Z \approx N \approx A/2$, 其中 A 是核子总数($A \gg 1$)。重要提示: 在下面的任务 1–4 中使用这些假设。

任务 1 – 原子核作为核子紧密堆积的体系

在一个简单模型中, 可以将原子核看作由紧密堆积的核子组成的球体[见图 1(a)], 其中核子是半径为 $r_N = 0.85 \text{ fm}$ ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$) 的硬球。只有两个核子相接触时, 它们之间才存在核力。原子核的体积 V 大于所有核子的体积之和 AV_N , 其中 $V_N = \frac{4}{3}r_N^3\pi$ 。比值 $f = AV_N/V$ 称为堆积因子, 表示核物质所占空间的百分比。

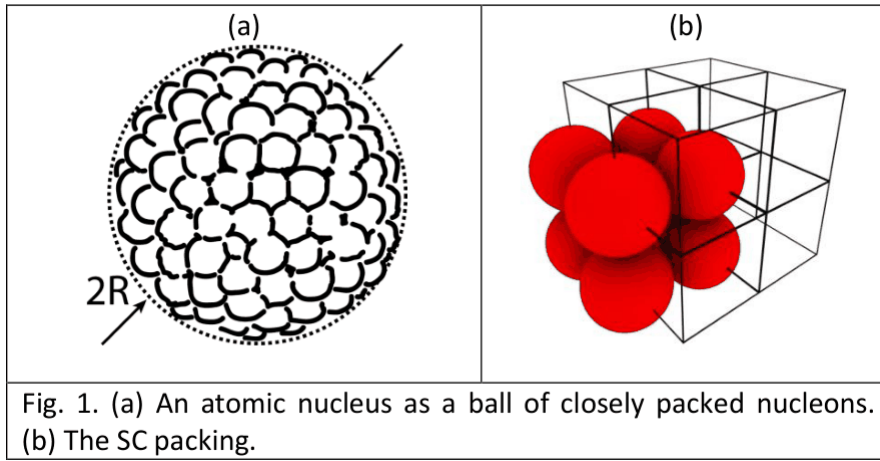


图 1. (a) 由紧密堆积的核子组成的球形原子核。(b) SC 堆积。

a) 如果核子按“简单立方” (SC) 晶体结构排列，即每个核子的中心都位于无限立方晶格的一个格点上 [见图 1(b)]，计算其堆积因子 f 。 (0.3 分)

重要提示：在后续所有任务中，假设原子核的实际堆积因子等于任务 1a 中求得值。如果你未能算出该值，请在后续任务中使用 $f = 1/2$ 。

b) 估算具有 A 个核子的原子核的平均质量密度 ρ_m 、电荷密度 ρ_c 和半径 R 。核子的平均质量为 $1.67 \cdot 10^{-27}$ kg。 (1.0 分)

任务 2 – 原子核的结合能——体积项和表面项

原子核的结合能是将其拆分为各个独立核子所需的能量，它主要来源于每个核子与其相邻核子之间的吸引核力。如果某个核子不在原子核表面，它对总结合能的贡献为 $a_V = 15.8$ MeV ($1 \text{ MeV} = 1.602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$)。一个表面核子对结合能的贡献约为 $a_V/2$ 。用 A 、 a_V 和 f 表示具有 A 个核子的原子核的结合能 E_b ，并计入表面修正。 (1.9 分)

任务 3 – 静电 (库仑) 作用对结合能的影响

均匀带电球体 (半径为 R ，总电荷为 Q_0) 的静电能为

$$U_c = \frac{3Q_0^2}{20\pi\epsilon_0 R},$$

其中 $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$ 。

a) 应用此公式求出原子核的静电能。在原子核中，每个质子不会通过库仑力作用于自身，而只作用于其余质子。在所得公式中作替换 $Z^2 \rightarrow Z(Z-1)$ ，即可将这一点考虑在内。在后续任务中使用这一修正。 (0.4 分)

b) 写出完整的结合能公式，包括主要的体积项、表面修正项以及所求得的静电修正项。 (0.3 分)

任务 4 – 重核的裂变

裂变是一个原子核分裂为较小部分 (较轻原子核) 的核过程。假设一个含有 A 个核子的原子核仅分裂成两个相等的部分，如图 2 所示。

a) 当两个较轻原子核的中心距离为 $d \geq 2R(A/2)$ 时，计算裂变产物的总动能 E_{kin} ，其中 $R(A/2)$ 是它们的半径。大原子核最初静止。 (1.3 分)

b) 假设 $d = 2R(A/2)$ ，将 $A = 100, 150, 200$ 和 250 分别代入 a) 中所得的 E_{kin} 表达式求值 (结果以 MeV 为单位)。估算在上述模型中， A 取哪些值时可能发生裂变？ (1.0 分)

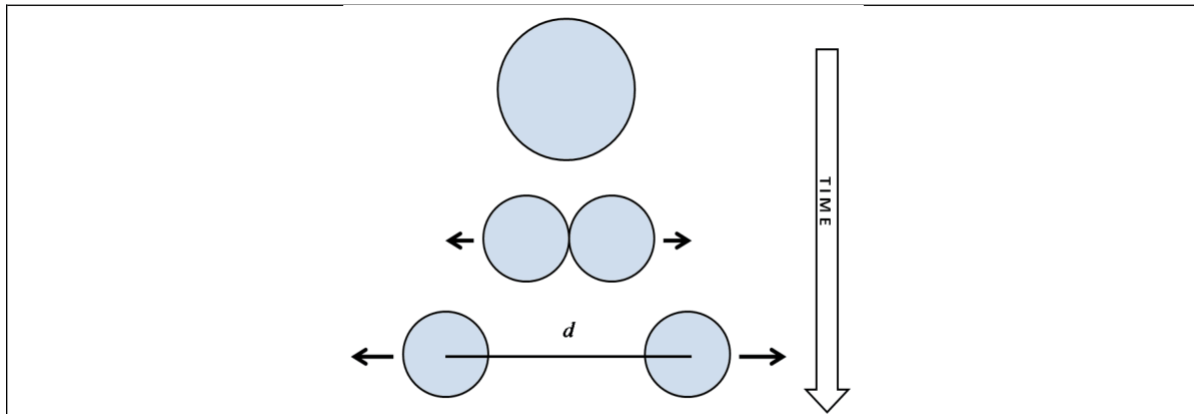


Fig. 2. A schematic description of nuclear fission in our model.

图 2. 本模型中核裂变的示意图。

任务 5 – 转移反应

a) 在现代物理学中，原子核及其反应的能量关系用质量来描述。例如，如果一个原子核（速度为零）处于比基态高出 E_{exc} 能量的激发态，其质量为 $m = m_0 + E_{\text{exc}}/c^2$ ，其中 m_0 是它处于基态且静止时的质量。核反应 $^{16}\text{O} + ^{54}\text{Fe} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^{58}\text{Ni}$ 是所谓“转移反应”的一个例子；在这种反应中，一个原子核的一部分（“团簇”）转移到另一个原子核上（见图 3）。在本例中，转移的部分是一个 ^4He 团簇（ α 粒子）。当类弹核反应产物（本例中为 ^{12}C ）的速度大小和方向都与入射核（本例中为 ^{16}O ）相同时，转移反应发生的概率最大。靶核 ^{54}Fe 最初静止。在反应中， ^{58}Ni 被激发到某个较高能态。若入射核 ^{16}O 的动能为 50 MeV，求该能态的激发能（以 MeV 为单位）。光速为 $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ 。（2.2 分）

1.	$M(^{16}\text{O})$	15.99491 a.m.u.
2.	$M(^{54}\text{Fe})$	53.93962 a.m.u.
3.	$M(^{12}\text{C})$	12.00000 a.m.u.
4.	$M(^{58}\text{Ni})$	57.93535 a.m.u.

表 1. 参与反应的各原子核处于基态时的静止质量。1 a. m. u. = $1.6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ 。

b) 在 a) 中所讨论的激发态中产生的 ^{58}Ni 原子核，沿其运动方向发射一个伽马光子，退激至基态。在 ^{58}Ni 静止的参考系中考察这一衰变，求 ^{58}Ni 的反冲能（即 ^{58}Ni 发射光子后获得的动能）。在该参考系中，光子的能量是多少？在实验室参考系中，光子的能量是多少（即放置在 ^{58}Ni 原子核运动方向上的探测器测得的光子能量是多少）？（1.6 分）

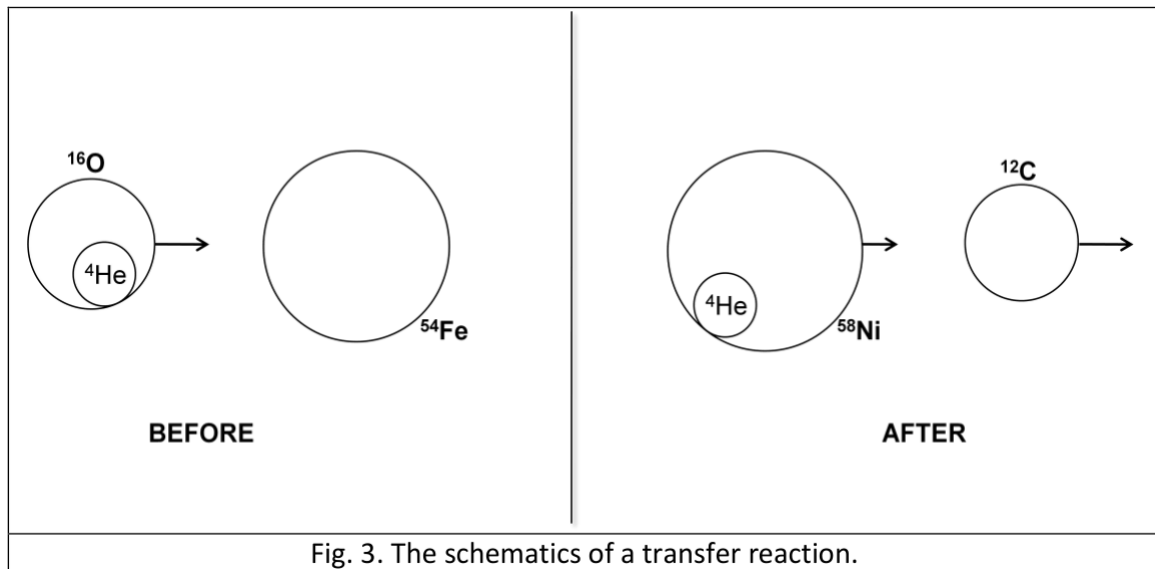


图 3. 转移反应示意图。

题目译自官方英文原文。

答案

为简洁起见，定义

$$S(A) = A - \left(A^{1/3} - 2f^{1/3}\right)^3, \quad r_0 = r_N f^{-1/3} = 1.0546 \text{ fm},$$

以及

$$a_C = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 r_0} = 0.81955 \text{ MeV}.$$

- 1(a).

$$f = \frac{\pi}{6} \approx 0.5236 = 52.36\%.$$

- 1(b).

$$\rho_m \approx 3.40 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}, \quad \rho_c \approx 1.63 \times 10^{25} \text{ C m}^{-3}$$

$$R = r_N (A/f)^{1/3} \approx 1.05 A^{1/3} \text{ fm}.$$

- 2.

$$E_b^{(\text{nuc})} = a_V \left[A - \frac{S(A)}{2} \right] = a_V \left[A - 3f^{1/3} A^{2/3} + 6f^{2/3} A^{1/3} - 4f \right].$$

- 3(a).

$$U_c = \frac{a_C Z(Z-1)}{A^{1/3}} \simeq \frac{a_C}{4} \left(A^{5/3} - 2A^{2/3} \right).$$

- 3(b). 将完整的结合能记为 $B(A)$,

$$B(A) = a_V \left[A - 3f^{1/3} A^{2/3} + 6f^{2/3} A^{1/3} - 4f \right] - \frac{a_C}{4} \left(A^{5/3} - 2A^{2/3} \right).$$

- 4(a).

$$E_{\text{kin}}(d) = 2B(A/2) - B(A) - \frac{e^2 A^2}{64\pi\epsilon_0 d}.$$

- 4(b). 在相接触时, $A = 100, 150, 200, 250$ 对应的计算能量分别为

$$-29.3, \quad -24.9, \quad -6.77, \quad +23.6 \text{ MeV}.$$

重核的阈值约为 $A_{\text{crit}} \simeq 213$ 。四个例子中, 只有 $A = 250$ 允许原子核从静止状态经由接触构型发生裂变。

- 5(a).

$$E_{\text{exc}} \approx 10.86 \text{ MeV}.$$

- 5(b).

$$T_{\text{recoil}} \approx 1.09 \text{ keV}, \quad E_{\gamma}^* \approx 10.86 \text{ MeV}, \quad E_{\gamma, \text{lab}} \approx 10.92 \text{ MeV}.$$

这里的星号表示发射前激发态镍核的静止参考系。

解答

1(a). 堆积因子

在简单立方堆积中, 相邻球体沿立方体的棱相接触, 因此晶格间距为 $2r_N$ 。一个立方晶胞包含八个顶点处的核子, 每个核子由八个晶胞共有, 因此每个晶胞内相当于有一个完整的核子。

因此,

$$f = \frac{\text{每个晶胞内的核子体积}}{\text{晶胞体积}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_N^3}{(2r_N)^3} = \frac{\pi}{6}.$$

1(b). 密度和原子核半径

由堆积因子的定义得

$$V = \frac{AV_N}{f} = \frac{4\pi r_N^3 A}{3f}.$$

令其等于 $4\pi R^3/3$, 得到

$$R = r_N \left(\frac{A}{f} \right)^{1/3} = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1.0546 \text{ fm}.$$

在本模型的精度范围内, 原子核的质量为 Am_N , 其中 $m_N = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 。因此

$$\rho_m = \frac{Am_N}{V} = \frac{3fm_N}{4\pi r_N^3}.$$

代入 $f = \pi/6$, 得到

$$\rho_m = \frac{m_N}{8r_N^3} = 3.40 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}.$$

利用 $Z \simeq A/2$, 原子核的电荷约为 $Ae/2$ 。与给定的电子伏特换算关系一致的元电荷为 $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。因此,

$$\rho_c = \frac{Ae/2}{V} = \frac{3fe}{8\pi r_N^3} = \frac{e}{16r_N^3},$$

所以

$$\rho_c = 1.63 \times 10^{25} \text{ C m}^{-3}.$$

这两个平均密度都与 A 无关。

2. 体积贡献和完整的表面层贡献

核子数密度为

$$n = \frac{A}{V} = \frac{f}{V_N}.$$

采用所指定的厚度为 $2r_N$ 的表面层, 其体积为

$$V_{\text{surface}} = \frac{4\pi}{3} [R^3 - (R - 2r_N)^3].$$

因此, 在连续介质堆积模型中, 表面核子的数目为

$$\begin{aligned} S(A) &= \frac{f}{r_N^3} [R^3 - (R - 2r_N)^3] \\ &= A - f \left[\left(\frac{A}{f} \right)^{1/3} - 2 \right]^3 \\ &= \boxed{A - \left(A^{1/3} - 2f^{1/3} \right)^3}. \end{aligned}$$

这一表达式适用于 $R \geq 2r_N$ 的情形, 这里所考虑的大原子核满足这一条件。展开并保留所有项, 得到

$$S(A) = 6f^{1/3}A^{2/3} - 12f^{2/3}A^{1/3} + 8f.$$

内部有 $A - S(A)$ 个核子, 每个贡献 a_V ; 表面有 $S(A)$ 个核子, 每个贡献 $a_V/2$ 。因此

$$E_b^{(\text{nuc})} = a_V[A - S(A)] + \frac{a_V}{2}S(A),$$

即

$$E_b^{(\text{nuc})} = a_V \left[A - 3f^{1/3}A^{2/3} + 6f^{2/3}A^{1/3} - 4f \right].$$

代入数值得

$$\frac{E_b^{(\text{nuc})}}{\text{MeV}} = 15.8A - 38.2042A^{2/3} + 61.5849A^{1/3} - 33.0914.$$

在后续所有计算中, 都保留 $A^{1/3}$ 项和常数项。

3(a). 库仑自能

将 $Q_0 = Ze$ 代入给定公式, 再作规定的自相互作用修正, 得到

$$U_c = \frac{3e^2 Z(Z-1)}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

由于 $R = r_0 A^{1/3}$, 定义

$$a_C = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 r_0}.$$

由给定常数得到

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44049 \text{ MeV fm}, \quad a_C = 0.81955 \text{ MeV}.$$

因此

$$U_c = \frac{a_C Z(Z-1)}{A^{1/3}}.$$

采用 $Z \simeq A/2$, 同时保留减去一的修正, 得到

$$Z(Z-1) \simeq \frac{A(A-2)}{4},$$

所以

$$U_c(A) = \frac{a_C}{4} (A^{5/3} - 2A^{2/3}).$$

3(b). 完整的结合能

正的静电能会降低拆分原子核所需的能量。因此,

$$B(A) = E_b^{(\text{nuc})}(A) - U_c(A),$$

由此得到

$$B(A) = a_V \left[A - 3f^{1/3} A^{2/3} + 6f^{2/3} A^{1/3} - 4f \right] - \frac{a_C}{4} (A^{5/3} - 2A^{2/3}).$$

4(a). 间距为 d 时的动能

每个碎片含有 $A/2$ 个核子, 电荷约为 $Ae/4$ 。对于两个互不重叠、具有球对称电荷分布的物体, 它们之间的静电相互作用能等于将其电荷集中于各自中心的点电荷之间的相互作用能:

$$U_{12}(d) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Ae/4)^2}{d} = \frac{e^2 A^2}{64\pi\epsilon_0 d}.$$

$Z(Z-1)$ 修正已经计入各原子核的自能。它不适用于这两组不同质子之间的相互作用。

以彼此分离的自由核子作为共同的内能参考态。初始原子核的能量为 $-B(A)$, 而两个分离碎片的总能量为

$$-2B(A/2) + U_{12}(d) + E_{\text{kin}}(d).$$

因此, 由能量守恒得到

$$E_{\text{kin}}(d) = 2B(A/2) - B(A) - U_{12}(d).$$

将结合能展开, 得到

$$E_{\text{kin}}(d) = -3a_V f^{1/3} (2^{1/3} - 1) A^{2/3} + 6a_V f^{2/3} (2^{2/3} - 1) A^{1/3} - 4a_V f + \frac{a_C}{4} \left[(1 - 2^{-2/3}) A^{5/3} + 2(2^{1/3} - 1) A^{2/3} \right] - \frac{e^2 A^2}{64\pi\epsilon_0 d}.$$

由于核子总数守恒，体积项的贡献相互抵消。随着碎片相互远离，它们之间的静电相互作用能减小，总动能增大。

4(b). 接触时的能量和裂变阈值

在相接触时，

$$d_0 = 2R(A/2) = 2^{2/3} r_0 A^{1/3}.$$

利用 $e^2/(4\pi\epsilon_0 r_0) = 5a_C/3$ ，得到

$$U_{12}(d_0) = \frac{5a_C}{48 \cdot 2^{2/3}} A^{5/3}.$$

将其与上面的表达式合并，得到

$$E_{\text{kin}}(d_0) = \frac{a_C}{4} \left(1 - \frac{17}{12} 2^{-2/3} \right) A^{5/3} + (2^{1/3} - 1) \left(\frac{a_C}{2} - 3a_V f^{1/3} \right) A^{2/3} + 6a_V f^{2/3} (2^{2/3} - 1) A^{1/3} - 4a_V f.$$

代入数值得

$$\frac{E_{\text{kin}}(d_0)}{\text{MeV}} = 0.0220368 A^{5/3} - 9.82357 A^{2/3} + 36.1750 A^{1/3} - 33.0914.$$

A	接触时的间距 d_0 (fm)	$E_{\text{kin}}(d_0)$ (MeV)
100	7.77	-29.3
150	8.89	-24.9
200	9.79	-6.77
250	10.55	+23.6

计算得到的动能为负，意味着在所假设的能量平衡关系下，初始未被激发的原子核无法达到接触构型。

对于重核，求解 $E_{\text{kin}}(d_0) = 0$ 得到

$$A_{\text{crit}} \simeq 213.0.$$

因此，该模型允许经由接触构型发生裂变的条件约为

$$A \gtrsim 213.$$

在指定的四种原子核中，只有 $A = 250$ 满足此条件。一旦能够达到接触构型，进一步分离就会释放更多的库仑能。

5(a). 转移反应中的激发能

令 m_1, m_2, m_3, m_4 分别表示表中氧、铁、碳和镍的基态质量。令

$$m_4^* = m_4 + \frac{E_{\text{exc}}}{c^2}$$

为激发态镍核的质量。

利用给定常数,

$$1 \text{ a. m. u. } c^2 = \frac{(1.6605 \times 10^{-27})(3 \times 10^8)^2}{1.602 \times 10^{-13}} \text{ MeV} = 932.865 \text{ MeV}.$$

基态反应能为

$$\begin{aligned} Q &= (m_1 + m_2 - m_3 - m_4)c^2 \\ &= (15.99491 + 53.93962 - 12.00000 - 57.93535)(932.865) \text{ MeV} \\ &= -0.764949 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

我们可以采用精确的相对论运动学。氧核和碳核具有相同的速度 v , 因此也具有相同的洛伦兹因子

$$\gamma = 1 + \frac{50 \text{ MeV}}{m_1 c^2}, \quad \beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \gamma^{-2}}.$$

由能量和动量守恒得到激发态镍核的能量和动量:

$$E_4^{\text{lab}} = \gamma(m_1 - m_3)c^2 + m_2 c^2, \quad p_4 = \gamma(m_1 - m_3)v.$$

因此, 其不变静止能量满足

$$(m_4^* c^2)^2 = (E_4^{\text{lab}})^2 - (p_4 c)^2.$$

记 $\Delta m = m_1 - m_3$, 并利用 $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$, 得到

$$m_4^* = \sqrt{m_2^2 + \Delta m^2 + 2\gamma m_2 \Delta m}.$$

因此,

$$E_{\text{exc}} = c^2 \left[\sqrt{m_2^2 + (m_1 - m_3)^2 + 2\gamma m_2 (m_1 - m_3)} - m_4 \right].$$

代入数值得

$$E_{\text{exc}} = 10.86074 \dots \text{ MeV} \approx 10.86 \text{ MeV}.$$

为检验能量平衡, 反应后各产物的动能为

$$\begin{aligned} T_C &= \frac{m_3}{m_1}(50 \text{ MeV}) = 37.51193 \text{ MeV}, \\ T_{\text{Ni}} &= 0.86237 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

它们满足

$$E_{\text{exc}} = 50 + Q - T_C - T_{\text{Ni}}.$$

通常的非相对论近似为

$$T_{\text{Ni}} \simeq \frac{(m_1 - m_3)^2}{m_1 m_4}(50 \text{ MeV}),$$

由此得到 $E_{\text{exc}} \simeq 10.862 \text{ MeV}$, 在所给出的精度下, 结果相同。

为供 (b) 部分使用, 激发态镍核的速率为

$$\beta_4 = \frac{V}{c} = \frac{p_4 c}{E_4^{\text{lab}}} = \frac{\gamma(m_1 - m_3)\beta}{m_2 + \gamma(m_1 - m_3)} = 0.00564849,$$

因此 $V \approx 1.69 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ 。

5(b). 反冲能和光子能量

首先在激发态镍核的静止参考系中分析。动量守恒要求末态镍核沿光子运动的反方向反冲，其动量大小为

$$p_{\text{recoil}} = \frac{E_{\gamma}^*}{c}.$$

令

$$W = m_4 c^2, \quad E = E_{\text{exc}}.$$

由能量守恒得

$$W + E = E_{\gamma}^* + \sqrt{W^2 + (E_{\gamma}^*)^2}.$$

解得

$$E_{\gamma}^* = \frac{(W + E)^2 - W^2}{2(W + E)} = E - \frac{E^2}{2(W + E)}.$$

因此，反冲动能为

$$T_{\text{recoil}} = E - E_{\gamma}^* = \frac{E^2}{2(W + E)} \simeq \frac{E^2}{2W}.$$

最后一个近似成立是因为 $E \ll W$ ；它等价于非相对论反冲表达式 $p_{\text{recoil}}^2/(2m_4)$ 。

这里

$$W = 54045.8700 \text{ MeV}.$$

使用 (a) 部分求得的激发能，得到

$$T_{\text{recoil}} = 0.00109104 \text{ MeV} \approx 1.09 \text{ keV},$$

以及

$$E_{\gamma}^* = 10.85965 \dots \text{ MeV} \approx 10.86 \text{ MeV}.$$

多列出的几位数字显示了反冲所导致的微小能量扣减。

对于向前发射的光子，将其能量通过洛伦兹变换变换到实验室参考系，得到

$$E_{\gamma, \text{lab}} = \Gamma_4 (E_{\gamma}^* + V p_{\gamma}^*) = \Gamma_4 E_{\gamma}^* (1 + \beta_4),$$

其中 $\Gamma_4 = (1 - \beta_4^2)^{-1/2}$ 。因此

$$E_{\gamma, \text{lab}} = E_{\gamma}^* \sqrt{\frac{1 + \beta_4}{1 - \beta_4}}.$$

向前发射时的多普勒因子为 1.00566453，所以

$$E_{\gamma, \text{lab}} = 10.92117 \dots \text{ MeV} \approx 10.92 \text{ MeV}.$$

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。