

IPhO 2010

Teorik sorular ve çözümler · Zagreb, Hırvatistan · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2010/

Soru 1: Metal bir cisimdeki yükün görüntüsü

Giriş – Görüntü yük yöntemi

Yarıçapı R olan topraklanmış metal bir kürenin yakınına bir q noktasal yükü yerleştirilir [bkz. Şekil 1(a)] ve bunun sonucunda küre üzerinde bir yüzey yük dağılımı indüklenir. Yüzey yük dağılımının oluşturduğu elektrik alanı ve potansiyeli hesaplamak oldukça güçtür. Ancak görüntü yük yöntemi adı verilen yöntem kullanılarak hesaplama önemli ölçüde basitleştirilebilir. Bu yöntemde, küre üzerinde dağılmış yükün oluşturduğu elektrik alan ve potansiyel, kürenin içine yerleştirilmiş tek bir q' noktasal yükünün elektrik alanı ve potansiyeli ile temsil edilebilir (bunu kanıtlamanız gerekmiyor). Not: **Bu q' görüntü yükünün elektrik alanı, elektrik alanı ve potansiyeli yalnızca kürenin dışında (yüzeyi de dâhil olmak üzere) doğru olarak verir.**

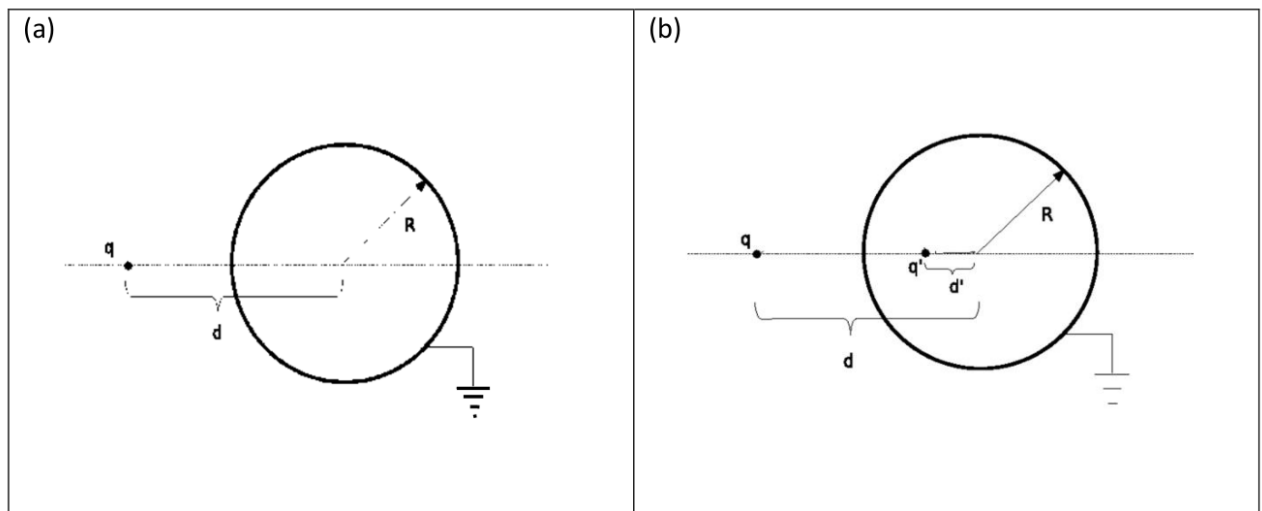


Fig 1. (a) A point charge q in the vicinity of a grounded metallic sphere. (b) The electric field of the charge induced on the sphere can be represented as electric field of an image charge q' .

Şekil 1. (a) Topraklanmış metal bir kürenin yakınındaki bir q noktasal yükü. (b) Küre üzerinde indüklenen yükün elektrik alanı, bir q' görüntü yükünün elektrik alanı ile temsil edilebilir.

Görev 1 – Görüntü yük

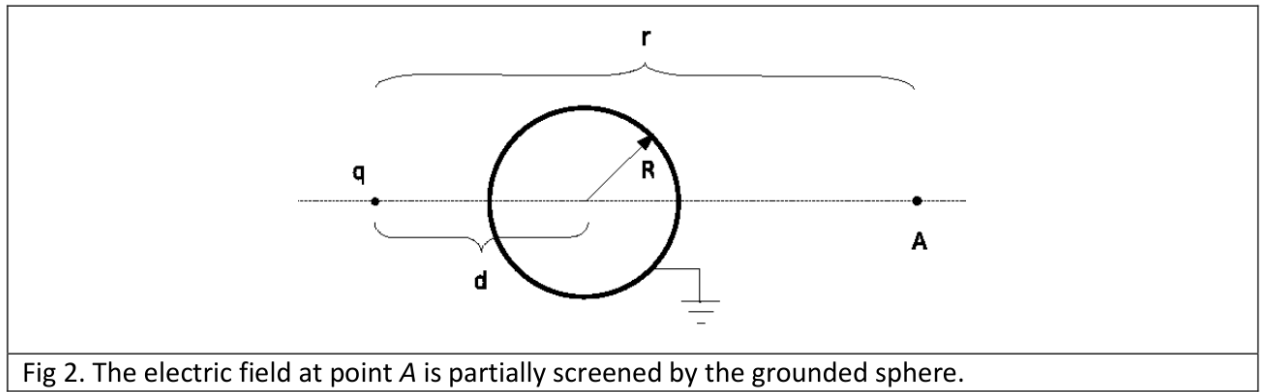
Problemin simetrisi, q' yükünün q noktasal yükü ile kürenin merkezini birleştiren doğru üzerine yerleştirilmesini gerektirir [bkz. Şekil 1(b)].

- Kürenin üzerindeki potansiyelin değeri nedir? (0.3 puan)
- q' yükünü ve q' yükünün kürenin merkezine olan d' uzaklığını q , d ve R cinsinden ifade ediniz. (1.9 puan)
- q yüküne etki eden kuvvetin büyüklüğünü bulunuz. Kuvvet itici midir? (0.5 puan)

Görev 2 – Elektrostatik alanın perdelenmesi

Yarıçapı R olan topraklanmış metal bir kürenin merkezinden d uzaklığa yerleştirilmiş bir q noktasal yükünü ele alınız. Topraklanmış metal kürenin, kürenin karşı tarafındaki A noktasında elektrik alanı nasıl etkilediğini incelemek istiyoruz (bkz. Şekil 2). A noktası, q yükü ile kürenin merkezini birleştiren doğru üzerindedir; q noktasal yüküne olan uzaklığı r 'dir.

- A noktasındaki elektrik alan vektörünü bulunuz. (0.6 puan)
- Çok büyük bir $r \gg d$ uzaklığı için, $a \ll 1$ olmak üzere $(1 + a)^{-2} \approx 1 - 2a$ yaklaşımını kullanarak elektrik alanın ifadesini bulunuz. (0.6 puan)
- d 'nin hangi limitinde topraklanmış metal küre, q yükünün alanını tamamen perdeler ve böylece A noktasındaki elektrik alan tam olarak sıfır olur? (0.3 puan)

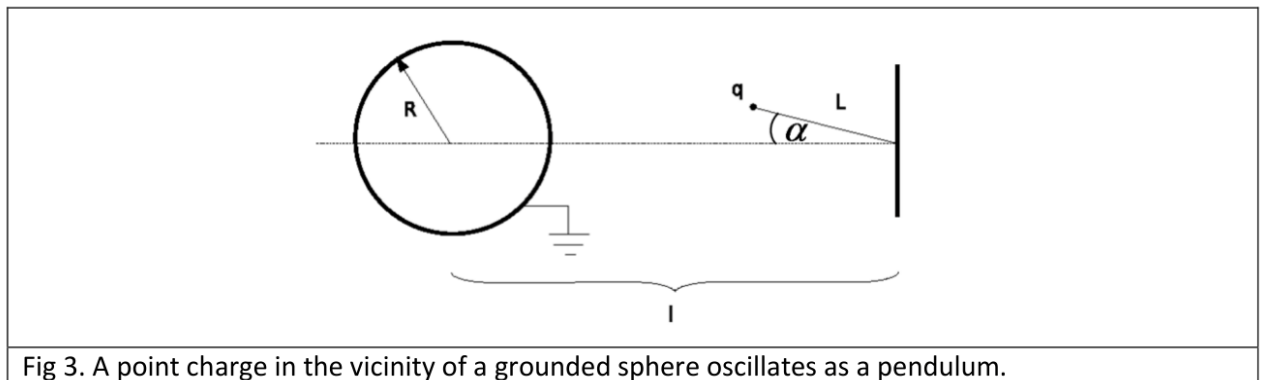


Şekil 2. A noktasındaki elektrik alan, topraklanmış küre tarafından kısmen perdelenir.

Görev 3 – Topraklanmış metal kürenin elektrik alanında küçük salınımlar

Kütlesi m olan bir q noktasal yükü, topraklanmış metal kürenin yakınında, bir duvara tutturulmuş L uzunluğundaki bir ipe asılmıştır. İncelemenizde duvarın tüm elektrostatik etkilerini ihmal ediniz. Noktasal yük bir basit sarkaç oluşturur (bkz. Şekil 3). İpin duvara tutturulduğu nokta, kürenin merkezinden l uzaklıktadır. Yerçekimi etkilerinin ihmal edilebilir olduğunu varsayınız.

- Verilen bir α açısı için q noktasal yüküne etki eden elektriksel kuvvetin büyüklüğünü bulunuz ve yönünü açık bir çizimde gösteriniz (0.8 puan)
- Bu kuvvetin ipe dik doğrultudaki bileşenini l , L , R , q ve α cinsinden belirleyiniz. (0.8 puan)
- Sarkacın küçük salınımlarının frekansını bulunuz. (1.0 puan)



Şekil 3. Topraklanmış bir kürenin yakınındaki noktasal yük, bir sarkaç gibi salınır.

Görev 4 – Sistemin elektrostatik enerjisi

Bir elektrik yük dağılımı için sistemin elektrostatik enerjisini bilmek önemlidir. Problemimizde (bkz. Şekil 1a), dışarıdaki q yükü ile küre üzerinde indüklenen yükler arasında bir elektrostatik etkileşim ve küre üzerinde indüklenen yüklerin kendi aralarında da bir elektrostatik etkileşim vardır. q yükü, kürenin R yarıçapı ve d uzaklığı cinsinden aşağıdaki elektrostatik enerjileri belirleyiniz:

- a) q yükü ile küre üzerinde indüklenen yükler arasındaki etkileşimin elektrostatik enerjisi; (1.0 puan)
- b) küre üzerinde indüklenen yüklerin kendi aralarındaki etkileşimin elektrostatik enerjisi; (1.2 puan)
- c) sistemdeki etkileşimin toplam elektrostatik enerjisi. (1.0 puan)

İpucu: Bu problemi çözenin birkaç yolu vardır:

(1) Bunlardan birinde aşağıdaki integrali kullanabilirsiniz,

$$\int_d^\infty \frac{x dx}{(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}.$$

(2) Bir diğerinde, $\vec{r}_i, i = 1, \dots, N$ noktalarında bulunan N adet q_i yükünden oluşan bir topluluğun elektrostatik enerjisinin, tüm yük çiftleri üzerinden alınan bir toplam olduğu gerçeğini kullanabilirsiniz:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

$k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ yazalım. Görev 2'de $\hat{e}$, q 'dan A 'ya doğru yönelsin. Görev 3 için

$$d_\alpha = \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}, \quad D_0 = (l - L)^2 - R^2,$$

olarak tanımlayalım; şekilde gösterilen dış denge konumu için $l - L > R$ olmalıdır. İşaretli dik kuvvet bileşenini, α 'nın arttığı yönde pozitif alalım.

- 1(a)

$$\phi_{\text{sphere}} = 0.$$

- 1(b)

$$q' = -\frac{R}{d}q, \quad d' = \frac{R^2}{d}.$$

Görüntü yük, merkez ile yüzeyin q 'ya en yakın noktası arasında bulunur.

- 1(c)

$$F = \frac{kq^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}.$$

Kuvvet çekicidir ve kürenin merkezine doğrudur.

- 2(a)

$$\mathbf{E}_A = kq \left[\frac{1}{r^2} - \frac{R}{d(r - d + R^2/d)^2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

- 2(b) $r \gg d$ için, ilk düzeltme terimi dâhil:

$$\mathbf{E}_A \simeq \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} - \frac{2R}{r} \left(1 - \frac{R^2}{d^2} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

Başat terim $kq(1 - R/d)\hat{\mathbf{e}}/r^2$ 'dir.

- 2(c)

$$d \rightarrow R^+ \implies \mathbf{E}_A \rightarrow \mathbf{0}.$$

- 3(a)

$$F(\alpha) = \frac{kq^2 R \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

Kuvvet okunu yükten doğrudan kürenin merkezine doğru çiziniz.

- 3(b)

$$F_{\perp} = - \frac{kq^2 R l \sin \alpha}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

- 3(c) Frekans ve açısal frekans şöyledir:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kq^2 R l}{m L D_0^2}}, \quad \omega_0 = 2\pi f.$$

- 4(a) Yük-yüzey etkileşimi:

$$U_{q\sigma} = - \frac{kq^2 R}{d^2 - R^2}.$$

- 4(b) İndüklenen yüklerin karşılıklı etkileşim enerjisi:

$$U_{\sigma\sigma} = + \frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

- 4(c) Toplam etkileşim enerjisi:

$$U_{\text{tot}} = - \frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

Çözüm

1(a)

Elektrostatik dengedeki bir iletken eşpotansiyeldir. Topraklama, iletkenin potansiyelini sıfır kabul edilen Yer potansiyeline sabitler:

$$\phi_{\text{sphere}} = 0.$$

1(b)

Merkez O olsun. Eksen üzerindeki konumları O 'dan dış yüke doğru ölçelim; böylece q yükü $d > R$ konumunda, görüntü yük ise kürenin içinde, d' konumundadır.

Yüzeyin q 'ya en yakın noktasında sıfır potansiyel koşulu şu sonucu verir:

$$k \left(\frac{q}{d - R} + \frac{q'}{R - d'} \right) = 0.$$

Yüzeyin karşı tarafındaki noktada ise

$$k \left(\frac{q}{d + R} + \frac{q'}{R + d'} \right) = 0.$$

Dolayısıyla,

$$\frac{R - d'}{d - R} = \frac{R + d'}{d + R}.$$

İçler dışlar çarpımı yapıldığında

$$(R - d')(d + R) = (R + d')(d - R),$$

buradan da

$$d' = \frac{R^2}{d}.$$

Bu sonucu yerine koyarsak,

$$q' = -\frac{R}{d}q.$$

Bu değerler, yüzeyin her noktasında sınır koşulunu da sağlar. Yarıçap vektörü q 'ya doğru olan yön ile θ açısı yapan bir yüzey noktasının q ve q' 'ye uzaklıkları sırasıyla s ve s' olsun. O hâlde

$$s^2 = d^2 + R^2 - 2dR \cos \theta,$$

ve

$$s'^2 = d'^2 + R^2 - 2d'R \cos \theta = \frac{R^2}{d^2} s^2.$$

Böylece $s' = (R/d)s$ olur ve

$$k \left(\frac{q}{s} + \frac{q'}{s'} \right) = 0.$$

1(c)

Dış yükün bulunduğu noktada görüntü yük, indüklenen yüklerin alanını doğru olarak verir. q ile görüntü yükü arasındaki uzaklık

$$d - d' = \frac{d^2 - R^2}{d}.$$

Bu nedenle Coulomb yasası şu sonucu verir:

$$F = \frac{k|qq'|}{(d - d')^2} = \frac{kq^2(R/d)}{[(d^2 - R^2)/d]^2}.$$

Dolayısıyla

$$F = \frac{kq^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}.$$

q' , q ile zıt işaretli olduğundan kuvvet her zaman çekicidir. q 'dan O 'ya uzanan doğru boyunca O 'ya yönelir.

2(a)

Pozitif eksen q 'dan A 'ya doğru seçelim ve bu yöndeki birim vektör $\hat{e}$ olsun. Kürenin merkezini $x = 0$ noktasına yerleştirelim. O hâlde

$$x_q = -d, \quad x_{q'} = -d', \quad x_A = r - d.$$

A , kürenin dışında ve karşı tarafta olduğundan $r > d + R$ 'dir.

A 'nın iki yüke olan uzaklıkları

$$r, \quad r - d + d' = r - d + \frac{R^2}{d}.$$

Süperpozisyon ilkesine göre,

$$\mathbf{E}_A = k \left[\frac{q}{r^2} + \frac{q'}{(r - d + d')^2} \right] \hat{e}.$$

Böylece

$$\mathbf{E}_A = kq \left[\frac{1}{r^2} - \frac{R}{d(r - d + R^2/d)^2} \right] \hat{e}.$$

Skaler katsayının işareti, eksen üzerindeki yönü belirler.

2(b)

Şu tanımları yapalım:

$$\delta = d - \frac{R^2}{d}.$$

$0 < \delta < d$ olduğundan $r \gg d$ koşulu, $\delta/r \ll 1$ olmasını gerektirir. Şöyle yazabiliriz:

$$\mathbf{E}_A = \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} \left(1 - \frac{\delta}{r} \right)^{-2} \right] \hat{e}.$$

Verilen yaklaşımı $a = -\delta/r$ ile kullanırsak,

$$\left(1 - \frac{\delta}{r} \right)^{-2} \simeq 1 + \frac{2\delta}{r}.$$

Buradan

$$\mathbf{E}_A \simeq \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} - \frac{2R\delta}{dr} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

δ 'nın ifadesini yerine koyarsak,

$$\mathbf{E}_A \simeq \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} - \frac{2R}{r} \left(1 - \frac{R^2}{d^2} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

Başat mertebede, uzaktaki alan şu etkin net yükün alanıdır:

$$q + q' = q \left(1 - \frac{R}{d} \right).$$

2(c)

Dış yük küreye yaklaşıırken,

$$d \rightarrow R^+, \quad d' \rightarrow R, \quad q' \rightarrow -q.$$

Böylece yük ve görüntüsü, eşit büyüklükte ve zıt işaretli yüklerle aynı konuma yaklaşır. Alanları, temas noktasından uzaktaki her sabit dış gözlem noktasında birbirini yok eder.

Özellikle, 2(a)'daki tam ifade şu sonucu verir:

$$\lim_{d \rightarrow R^+} \mathbf{E}_A = \mathbf{0}.$$

Bu, yükün yüzeye dışarıdan yaklaştığı bir limittir.

3(a)

Yük hareket ederken iletkenin elektrostatik dengede kaldığını kabul edelim. İpin tutturulduğu nokta P , yükün konumu ise Q olsun. Şu seçimi yapalım:

$$O = (0, 0), \quad P = (l, 0).$$

Şekil 3'te gösterilen açı için,

$$Q = (l - L \cos \alpha, L \sin \alpha).$$

Dolayısıyla merkez ile yük arasındaki anlık uzaklık

$$d_\alpha = |OQ| = \sqrt{(l - L \cos \alpha)^2 + L^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}.$$

1(c)'nin sonucunu uygularsak,

$$F(\alpha) = \frac{kq^2 R d_\alpha}{(d_\alpha^2 - R^2)^2} = \frac{kq^2 R \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

Kuvvet Q 'dan O 'ya doğru yönelir.

Çizimin açıklaması: Merkezi O olan küreyi çiziniz; P 'yi, kürenin sağında yatay bir doğru üzerinde ve $OP = l$ olacak şekilde yerleştiriniz. Q 'yu bu doğrunun üstüne ve P 'nin soluna, $PQ = L$ ve $\angle OPQ = \alpha$ olacak şekilde yerleştiriniz. Q 'dan başlayan, QO boyunca O 'ya yönelen bir ok çiziniz ve bu oku $\mathbf{F}_e$ olarak etiketleyiniz. $OQ = d_\alpha$ etiketini ekleyiniz.

3(b)

İpe dik ve α 'nın arttığı yöndeki birim vektör

$$\hat{\mathbf{e}}_\alpha = (\sin \alpha, \cos \alpha).$$

Kuvvet O 'ya doğru yöneldiğinden,

$$\mathbf{F}_e = -\frac{F}{d_\alpha}(l - L \cos \alpha, L \sin \alpha).$$

Teğetsel bileşeni

$$\begin{aligned} F_\perp &= \mathbf{F}_e \cdot \hat{\mathbf{e}}_\alpha \\ &= -\frac{F}{d_\alpha}[(l - L \cos \alpha) \sin \alpha + L \sin \alpha \cos \alpha] \\ &= -\frac{Fl \sin \alpha}{d_\alpha}. \end{aligned}$$

Yerine koyma işlemi şu sonucu verir:

$$F_\perp = -\frac{kq^2 Rl \sin \alpha}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

Pozitif α için bu bileşen, α 'nın azaldığı yönde etki eder; dolayısıyla geri çağırıcıdır. Büyüklüğü, $-\sin \alpha$ yerine $|\sin \alpha|$ konularak elde edilir.

3(c)

$\alpha = 0$ denge konumunda,

$$d_0 = l - L.$$

Şekilde gösterilen denge konumu $l - L > R$ koşulunu gerektirir; dolayısıyla yük kürenin dışındadır.

İp gerilmesinin ipe dik bileşeni yoktur. Bu nedenle teğetsel doğrultuda Newton'un ikinci yasası

$$mL\ddot{\alpha} = F_\perp.$$

Küçük α için,

$$\sin \alpha \simeq \alpha,$$

ve

$$d_\alpha^2 - R^2 = (l - L)^2 - R^2 + lL\alpha^2 + O(\alpha^4).$$

$D_0 = (l - L)^2 - R^2$ yazıldığında doğrusallaştırılmış denklem

$$mL\ddot{\alpha} = -\frac{kq^2 Rl}{D_0^2}\alpha,$$

veya

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{kq^2 Rl}{mLD_0^2}.$$

Böylece frekans

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kq^2 Rl}{mL[(l - L)^2 - R^2]^2}}.$$

Bu yaklaşım, genliğin hem

$$|\alpha| \ll 1, \quad lL\alpha^2 \ll D_0$$

koşullarını sağlayacak kadar küçük olmasını gerektirir.

4(a)

Dış noktasal yükün öz enerjisini hesaba katmayalım ve $d \rightarrow \infty$ iken etkileşim enerjisinin sıfır olduğunu kabul edelim.

İndüklenen yüzey yüklerinin oluşturduğu potansiyeli ϕ_σ ile gösterelim. q 'nin bulunduğu konumda görüntü yük şu sonucu verir:

$$\phi_\sigma(q) = \frac{kq'}{d-d'} = -\frac{kqR}{d^2-R^2}.$$

q ile indüklenen yükler arasındaki etkileşim enerjisi

$$U_{q\sigma} = q\phi_\sigma(q).$$

Burada $1/2$ çarpanı yoktur: q ile indüklenen bir yükten oluşan her çift bir kez sayılır. Dolayısıyla

$$U_{q\sigma} = -\frac{kq^2R}{d^2-R^2}.$$

4(b)

İndüklenen yüzey yük yoğunluğu σ , dış yükün oluşturduğu potansiyel ise ϕ_q olsun. İndüklenen yüklerin karşılıklı etkileşim enerjisi

$$U_{\sigma\sigma} = \frac{1}{2} \int_S \sigma \phi_\sigma dS.$$

$1/2$ çarpanı, yüzey dağılımındaki yük çiftlerinin iki kez sayılmasını önler.

Topraklanmış kürenin üzerinde,

$$\phi_q + \phi_\sigma = 0.$$

Bu nedenle

$$U_{\sigma\sigma} = -\frac{1}{2} \int_S \sigma \phi_q dS.$$

Geriye kalan integral, yük-yüzey etkileşim enerjisine eşittir:

$$\int_S \sigma \phi_q dS = kq \int_S \frac{\sigma dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} = q\phi_\sigma(q) = U_{q\sigma}.$$

Böylece

$$U_{\sigma\sigma} = -\frac{1}{2} U_{q\sigma},$$

ve buradan

$$U_{\sigma\sigma} = +\frac{kq^2R}{2(d^2-R^2)}.$$

4(c)

İki fiziksel katkıyı toplarsak,

$$U_{\text{tot}} = U_{q\sigma} + U_{\sigma\sigma} = \frac{1}{2} U_{q\sigma}.$$

Dolayısıyla,

$$U_{\text{tot}} = -\frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

Bu sonuç, q 'yu sonsuzdan kuazistatik olarak getirmek için gereken işten de elde edilir:

$$U_{\text{tot}}(d) = -\int_d^\infty \frac{kq^2 R x}{(x^2 - R^2)^2} dx = -\frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

Bir tutarlılık kontrolü olarak, d 'nin arttığı yöndeki kuvvet

$$-\frac{dU_{\text{tot}}}{dd} = -\frac{kq^2 R d}{(d^2 - R^2)^2},$$

olup 1(c)'de bulunan çekici kuvveti yeniden verir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Baca fiziği

Giriş

Yanma sonucu oluşan gazlar, kesit alanı A ve yüksekliği h olan yüksek bir bacadan, sıcaklığı T_{Air} olan atmosfere salınmaktadır (bkz. Şekil 1). Katı madde, sıcaklığı T_{Smoke} olan ocakta yakılmaktadır. Ocakta birim zamanda üretilen gazların hacmi B 'dir.

Şunları varsayın:

- ocaktaki gazların hızı ihmal edilebilecek kadar küçüktür
- gazların (dumanın) yoğunluğu, aynı sıcaklık ve basınçtaki havanın yoğunluğundan farklı değildir; gazlar ocaktayken ideal gaz olarak ele alınabilir
- havanın basıncı, hidrostatik yasasına uygun olarak yükseklikle değişir; havanın yoğunluğunun yükseklikle değişimi ihmal edilebilir
- gaz akışı, aşağıdaki büyüklüğün akışın tüm noktalarında korunduğunu ifade eden Bernoulli denklemini sağlar:

$$\frac{1}{2}\rho v^2(z) + \rho g z + p(z) = \text{const},$$

burada ρ gazın yoğunluğu, $v(z)$ hızı, $p(z)$ basıncı ve z yüksekliğidir - gazın yoğunluğundaki değişim baca boyunca ihmal edilebilir

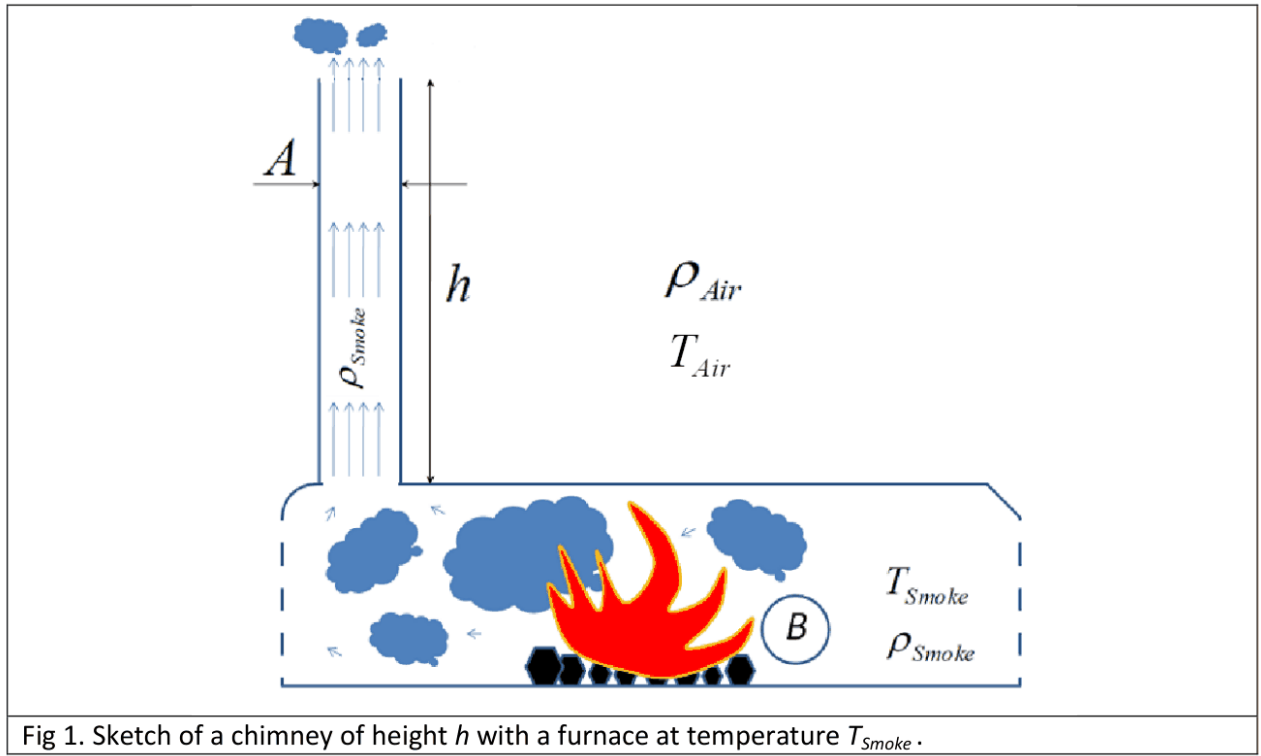


Fig 1. Sketch of a chimney of height h with a furnace at temperature T_{Smoke} .

Şekil 1. Sıcaklığı T_{Smoke} olan bir ocağa bağlı, yüksekliği h olan bacanın şeması.

Görev 1

a) Bacanın etkin biçimde çalışarak üretilen gazın tamamını atmosfere salabilmesi için gereken en küçük baca yüksekliği nedir? Sonucunuzu $B, A, T_{Air}, g = 9.81 \text{ m/s}^2, \Delta T = T_{Smoke} - T_{Air}$ cinsinden ifade edin. **Önemli: sonraki tüm görevlerde baca yüksekliğinin bu en küçük yükseklik olduğunu varsayın.** (3.5 puan)

b) Tam olarak aynı amaca hizmet etmek üzere iki baca inşa edildiğini varsayın. Kesit alanları aynıdır, ancak dünyanın farklı bölgelerinde çalışacak biçimde tasarlanmışlardır: biri soğuk bölgelerde, ortalama atmosfer sıcaklığı -30°C iken çalışacak şekilde; diğeri ise sıcak bölgelerde, ortalama atmosfer sıcaklığı 30°C iken çalışacak şekilde tasarlanmıştır. Ocağın sıcaklığı 400°C 'dir. Soğuk bölgelerde çalışmak üzere tasarlanan bacanın yüksekliği 100 m olarak hesaplanmıştır. Diğer bacanın yüksekliği ne kadardır? (0.5 puan)

c) Gazların hızı baca yüksekliği boyunca nasıl değişir? Baca kesitinin yükseklik boyunca değişmediğini varsayarak bir çizim/grafik hazırlayın. Gazların bacaya girdiği noktayı belirtin. (0.6 puan)

d) Gazların basıncı baca yüksekliği boyunca nasıl değişir? (0.5 puan)

Güneş enerjisi santrali

Bir bacadaki gaz akışı, özel bir tür güneş enerjisi santrali (güneş bacası) yapmak için kullanılabilir. Bu fikir Şekil 2'de gösterilmiştir. Güneş, havanın engellenmeden içeri akmasına olanak vermek için çevresi açık bırakılmış, alanı S olan kolektörün altındaki havayı ısıtır (bkz. Şekil 2). Isınan hava bacadan yükselirken (ince düz çizgili oklar), çevreden kolektöre yeni soğuk hava girer (kalın noktalı oklar) ve böylece santral boyunca sürekli bir hava akışı sağlanır. Bacadan geçen hava akışı bir türbini çalıştırarak elektrik enerjisi üretilmesini sağlar. Kolektörün birim yatay alanına birim zamanda gelen güneş ışıması enerjisi G 'dir. Bu enerjinin tamamının kolektördeki havayı ısıtmak için

kullanılabildiğini varsayın (havanın özgül ısı kapasitesi c' 'dir ve bunun hava sıcaklığına bağımlılığı ihmal edilebilir). Güneş bacasının verimini, gaz akışının kinetik enerjisinin, hava bacaya girmeden önce onu ısıtmak için soğurulan güneş enerjisine oranı olarak tanımlıyoruz.

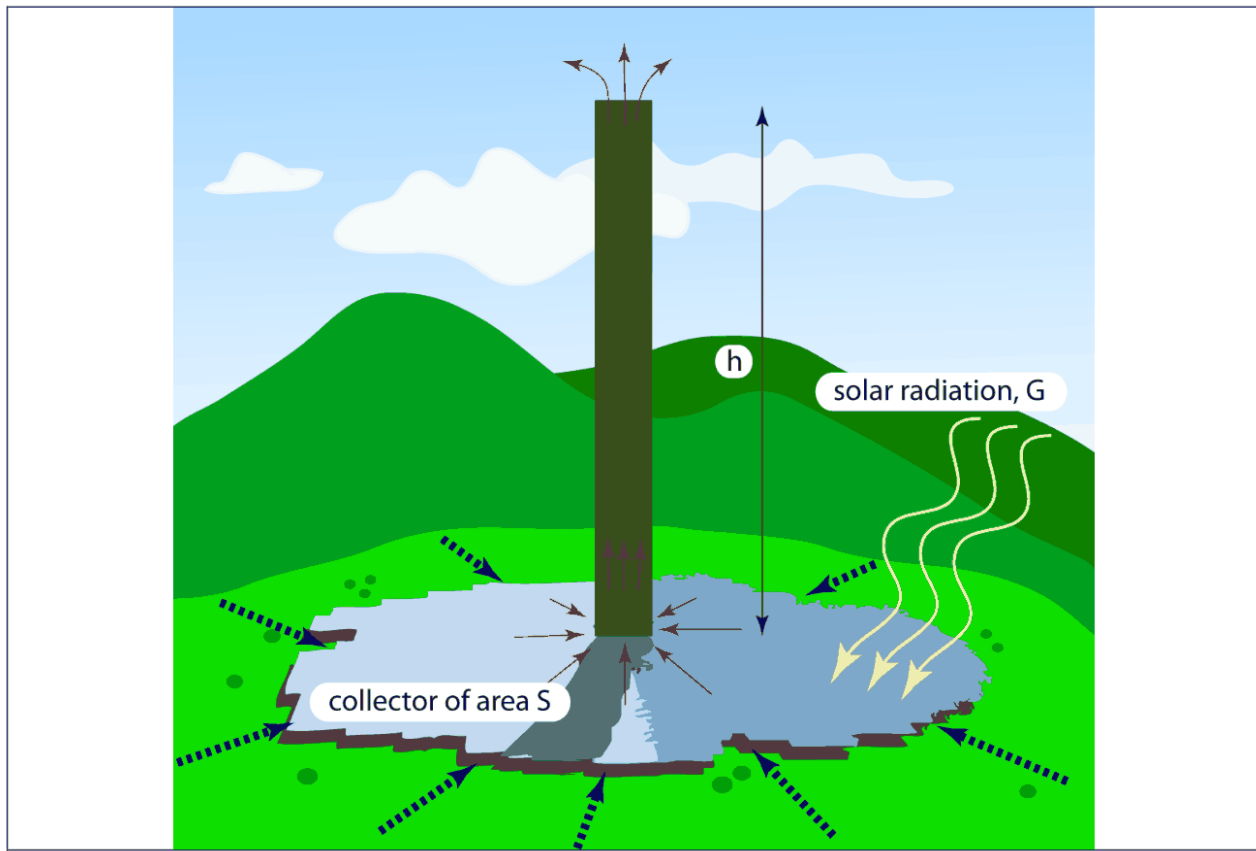


Fig 2. Sketch of a solar power plant.

Şekil 2. Bir güneş enerjisi santralinin şeması.

Görev 2

- Güneş bacası santralının verimi nedir? (2.0 puan)
- Bacanın veriminin yüksekliğiyle nasıl değiştiğini gösteren bir grafik çizin. (0.4 puan)

Manzanares prototipi

İspanya'nın Manzanares kentinde inşa edilen prototip bacanın yüksekliği 195 m, yarıçapı ise 5 m idi. Kolektör, çapı 244 m olan dairesel bir yapıdır. Prototip güneş bacasının tipik çalışma koşullarında havanın özgül ısı 1012 J/kg K, sıcak havanın yoğunluğu yaklaşık 0.9 kg/m³ ve atmosferin tipik sıcaklığı $T_{Air} = 295$ K'dir. Manzanares'te güneşli bir günde birim yatay yüzeye gelen güneş enerjisi gücü tipik olarak 150 W/m²'dir.

Görev 3

- Prototip santral verimi nedir? Sayısal tahmini yazın. (0.3 puan)
- Prototip santralde ne kadar güç üretilebilir? (0.4 puan)
- Santral, tipik bir güneşli gün boyunca ne kadar enerji üretebilir? (0.3 puan)

Görev 4

a) Hava çevreden (soğuk hava) bacaya (sıcak hava) girerken sıcaklığı ne kadar artar? Genel formülü yazın ve prototip baca için değerini hesaplayın. (1.0 puan)

b) Sistemden geçen havanın kütleli debisi nedir? (0.5 puan)

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Baca girişinde $z = 0$, çıkışında ise $z = h$ alın. Aşağıda ρ_h , dumanın veya ısıtılmış havanın yoğunluğunu göstermektedir.

- 1(a) $\Delta T > 0$ için,

$$h_{\min} = \frac{B^2 T_{Air}}{2gA^2 \Delta T}.$$

- 1(b)

$$h_{\text{warm}} \simeq 145 \text{ m}.$$

- 1(c)

$$v(z) = \frac{B}{A} \quad (0 < z < h).$$

Hız, ocaktaki yaklaşık sıfır değerinden giriş bölgesinde B/A 'ya yükselir, ardından baca boyunca sabit kalır.

- 1(d)

$$p(z) = p_{Air}(h) + \rho_h g(h - z).$$

Basınç, $-\rho_h g$ eğimiyle yükseklikle doğrusal olarak azalır ve çıkışta dış atmosfer basıncına ulaşır.

- 2(a)

$$\eta = \frac{gh}{cT_{Air}}.$$

- 2(b) η 'nin h 'ye göre grafiği, orijinden geçen ve eğimi $g/(cT_{Air})$ olan bir doğrudur.

- 3(a)

$$\eta = 0.00641 \simeq 0.64\%.$$

- 3(b) İdeal olarak kullanılabilir güç

$$P \simeq 4.49 \times 10^4 \text{ W} \simeq 45 \text{ kW}.$$

- **3(c)** Etkin güneşlenme süresi τ için,

$$E = P\tau.$$

Belirtilen ışınlam şiddetinde 12 h için $E \simeq 0.54 \text{ MWh} = 1.9 \text{ GJ}$ olur. Belirtilen ışınlam şiddeti tam günlük bir ortalama ise 24 h için sonuç $1.08 \text{ MWh} = 3.88 \text{ GJ}$ 'dür.

- **4(a)**

$$\Delta T = \left[\frac{(GS)^2 T_{Air}}{2gh \rho_h^2 A^2 c^2} \right]^{1/3} \simeq 9.1 \text{ K}.$$

- **4(b)**

$$\dot{m} = \frac{GS}{c\Delta T} = \left[\frac{2gh(\rho_h A)^2 GS}{cT_{Air}} \right]^{1/3} \simeq 7.7 \times 10^2 \text{ kg s}^{-1}.$$

Çözüm

$\rho_a = \rho_{Air}$, $\rho_h = \rho_{Smoke}$ ve $p_0 = p_{Air}(0)$ yazalım. Güneş bacası için ρ_h , bunun yerine ısıtılmış havanın yoğunluğunu gösterir. Tüm formüllerde mutlak sıcaklıklar kelvin cinsindendir.

1(a)

Baca doğal çekişle çalışır: dışarıdaki hava sıcak gazdan daha yoğundur, dolayısıyla basıncı yükseklikle daha hızlı azalır. Sınır çalışma koşulunda, ocaktaki neredeyse durgun gazın basıncı atmosfer basıncı p_0 'dır. Bu, ocakta atmosfer basıncının üzerinde bir basınç gerektirmeden gazın dışarı atılması için sınır koşuludur.

Baca dışındaki hidrostatik yasasına göre,

$$p_{Air}(h) = p_0 - \rho_a gh.$$

Açık çıkışta gaz basıncı yerel atmosfer basıncına eşittir. Hızın ihmal edilebilir olduğu ocak ile çıkış arasında Bernoulli denklemi

$$p_0 = p_{Air}(h) + \rho_h gh + \frac{1}{2} \rho_h v^2.$$

sonucunu verir. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{2} \rho_h v^2 = (\rho_a - \rho_h) gh.$$

Duman ve hava, eşit sıcaklık ve basınçta aynı yoğunluğa sahiptir. Bu nedenle ortak taban basıncında ideal gaz yasası uygulandığında

$$\frac{\rho_a}{\rho_h} = \frac{T_{Smoke}}{T_{Air}} = 1 + \frac{\Delta T}{T_{Air}}.$$

elde edilir. Böylece

$$v^2 = 2gh \frac{\Delta T}{T_{Air}}.$$

Ocak ile baca arasındaki yoğunluk değişimi ihmal edildiğinden, hacimsel tahliye kapasitesi Av 'dir. Gazın tamamının dışarı atılması için

$$Av \geq B.$$

olmalıdır. En küçük yükseklikte eşitlik sağlanır:

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 = 2gh_{\min} \frac{\Delta T}{T_{Air}}.$$

Buradan

$$h_{\min} = \frac{B^2 T_{Air}}{2gA^2 \Delta T}.$$

Bu sonuç $\Delta T > 0$ olmasını gerektirir. $B > 0$ ve $\Delta T = 0$ için, bu varsayımlar altında hiçbir sonlu yükseklik gerekli doğal çekişi sağlayamaz.

1(b)

Her iki bacanın B , A değerleri ve ocak sıcaklığı aynıdır; dolayısıyla

$$h \propto \frac{T_{Air}}{T_{Smoke} - T_{Air}}.$$

İlgili sıcaklıklar ve sıcaklık farkları

$$\begin{aligned} T_c &= 243.15 \text{ K}, & T_w &= 303.15 \text{ K}, \\ \Delta T_c &= 430 \text{ K}, & \Delta T_w &= 370 \text{ K}. \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu nedenle,

$$h_w = h_c \frac{T_w}{T_c} \frac{\Delta T_c}{\Delta T_w} = (100 \text{ m}) \frac{303.15}{243.15} \frac{430}{370}.$$

Buradan

$$h_w = 144.9 \text{ m} \simeq 145 \text{ m}.$$

elde edilir. Çevrenin daha sıcak olması, bağıl yoğunluk farkının daha küçük olmasına yol açar ve daha yüksek bir baca gerektirir.

1(c)

Kararlı akışta kütlelen korunumu

$$\dot{m} = \rho_h A v(z).$$

bağıntısını verir. Hem ρ_h hem de A baca boyunca sabit olduğundan, $v(z)$ de sabit olmalıdır. Öngörülen en küçük yükseklikte hacimsel debi tam olarak B 'dir; dolayısıyla

$$v(z) = \frac{B}{A} = \sqrt{\frac{2gh\Delta T}{T_{Air}}}.$$

İstenen çizimde yatay eksene z 'yi, düşey eksene v 'yi yerleştirin. Baca girişini $z = 0$ 'da işaretleyin. Giriş bölgesinde, ihmal edilebilir ocak hızından B/A 'ya hızlı bir yükseliş, ardından girişten $z = h$ 'ye kadar $v = B/A$ düzeyinde yatay bir çizgi gösterin. Giriş bölgesinin uzunluğu ihmal edilebilir kabul edilerek idealize edilirse, bu bölgedeki hızlanma $z = 0$ 'da bir basamakla gösterilebilir.

1(d)

Baca içinde Bernoulli denklemi

$$\frac{1}{2}\rho_h v^2 + \rho_h g z + p(z) = \text{sabit}.$$

şeklindedir. v sabit olduğundan,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_h g.$$

Çıkıştaki $p(h) = p_{Air}(h)$ sınır koşulu kullanılırsa,

$$\boxed{p(z) = p_{Air}(h) + \rho_h g(h - z)}.$$

Eşdeğer olarak,

$$p(z) = p_0 - \rho_a g h + \rho_h g(h - z).$$

z yüksekliğindeki dış basınç $p_{Air}(z) = p_0 - \rho_a g z$ 'dir. Çıkarma yapıldığında,

$$\boxed{p(z) - p_{Air}(z) = -(\rho_a - \rho_h)g(h - z)}.$$

Böylece gaz basıncı, baca içinde çıkışın altında kalan her noktada çevredeki atmosfer basıncından küçüktür ve iki basınç çıkışta eşitlenir.

Girişin hemen sonrasında,

$$p(0^+) = p_0 - (\rho_a - \rho_h)g h = p_0 - \frac{1}{2}\rho_h v^2.$$

Girişteki bu basınç düşüşü, gazın ocaktan bacaya geçerken hızlanmasına eşlik eder. Bundan sonra basınç yükseklikle doğrusal olarak azalır.

2(a)

Kolektörde sıcaklığı ΔT kadar artırılan m kütleli havayı ele alalım. Soğurulan ısı

$$Q = mc\Delta T.$$

şeklindedir. Havanın bacadaki kinetik enerjisi

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

olur. Sorudaki tanıma göre,

$$\eta = \frac{K}{Q} = \frac{v^2}{2c\Delta T}.$$

1(a)'daki

$$v^2 = \frac{2gh\Delta T}{T_{Air}},$$

sonucu uygulandığında

$$\boxed{\eta = \frac{gh}{cT_{Air}}}.$$

elde edilir. Verilen model çerçevesinde verim; sıcaklık artışından, kolektör alanından ve baca kesit alanından bağımsızdır. Kullanılabilir kinetik gücün soğurulan güneş enerjisi gücüne oranını ölçer.

2(b)

T_{Air} ve c sabitken,

$$\eta(h) = \frac{g}{cT_{Air}} h.$$

İstenen grafikte yatay eksen h , düşey eksen η bulunur. Grafik, $(0, 0)$ 'dan geçen ve pozitif eğimi

$$\frac{d\eta}{dh} = \frac{g}{cT_{Air}}.$$

olan bir doğrudur. Yüksekliğin iki katına çıkarılması verimi iki katına çıkarır. Bu doğrusal ilişki yalnızca sorudaki yaklaşımlar çerçevesinde geçerlidir; yoğunluk değişimlerinin önemli hâle geldiği yüksekliklere kadar uzatılmamalıdır.

3(a)

Prototip verileri yerine konulduğunda,

$$\eta = \frac{(9.81 \text{ m s}^{-2})(195 \text{ m})}{(1012 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1})(295 \text{ K})} = 0.0064077.$$

Dolayısıyla,

$$\eta \simeq 0.64\%.$$

3(b)

Kolektörün yarıçapı $244/2 = 122 \text{ m}$ olduğundan, alanı

$$S = \pi(122 \text{ m})^2 = 4.67595 \times 10^4 \text{ m}^2.$$

olur. Gelen güneş enerjisi gücünün tamamının havayı ısıttığı varsayılır:

$$P_{\text{solar}} = GS = (150 \text{ W m}^{-2})(4.67595 \times 10^4 \text{ m}^2) = 7.01392 \times 10^6 \text{ W}.$$

Kullanılabilir kinetik güç

$$P = \eta GS = (0.0064077)(7.01392 \times 10^6 \text{ W}),$$

olduğundan

$$P = 4.4943 \times 10^4 \text{ W} \simeq 45 \text{ kW}.$$

Bu, sorunun tanımı kapsamında dönüşüm için kullanılabilir ideal güçtür; ayrıca bir türbin veya jeneratör verimi belirtilmemiştir.

3(c)

Belirtilen ışınlam şiddetinde etkin güneşlenme süresi τ için,

$$E = P\tau = \frac{ghGS}{cT_{Air}}\tau.$$

Böylece belirtilen koşullarda her saat yaklaşık 44.9 kWh enerji sağlar.

Tipik bir güneşli günün, belirtilen ışınlam şiddetinde 12 h sürdüğü tahmin edilirse,

$$E = (44.943 \text{ kW})(12 \text{ h}) = 539.3 \text{ kWh},$$

ya da

$$E \simeq 0.54 \text{ MWh} \simeq 1.9 \times 10^9 \text{ J}.$$

Eğer 150 W m^{-2} , bunun yerine 24 h'lik günün tamamının ortalaması olarak yorumlanırsa,

$$E = (44.943 \text{ kW})(24 \text{ h}) \simeq 1.08 \text{ MWh} = 3.88 \times 10^9 \text{ J}.$$

Soru metni, etkin güneşlenme süresini veya ortalamanın hangi zaman aralığı üzerinden alındığını belirtmemektedir.

4(a)

Kararlı çalışma durumunda, güneş enerjisinin ısıtma gücü havanın ısıyı taşıyıp uzaklaştırma hızına eşittir:

$$GS = \dot{m} c \Delta T.$$

Kütlenin korunumu

$$\dot{m} = \rho_h A v.$$

bağıntısını verir. Bunlar, bacadaki hız için elde edilen

$$v = \sqrt{\frac{2gh\Delta T}{T_{Air}}},$$

bağıntısıyla birleştirildiğinde

$$GS = \rho_h A c \Delta T \sqrt{\frac{2gh\Delta T}{T_{Air}}} = \rho_h A c \sqrt{\frac{2gh}{T_{Air}}} (\Delta T)^{3/2}.$$

elde edilir. ΔT için çözülürse,

$$\Delta T = \left[\frac{(GS)^2 T_{Air}}{2gh \rho_h^2 A^2 c^2} \right]^{1/3}.$$

Prototip için,

$$A = \pi(5 \text{ m})^2 = 78.5398 \text{ m}^2.$$

Verilen sıcak hava yoğunluğu kullanılarak,

$$\Delta T = \left[\frac{(7.01392 \times 10^6)^2 (295)}{2(9.81)(195)(0.9)^2 (78.5398)^2 (1012)^2} \right]^{1/3} \text{ K}.$$

Dolayısıyla,

$$\Delta T = 9.05 \text{ K} \simeq 9.1 \text{ K}.$$

Hava bacaya yaklaşık 304 K sıcaklıkta girer.

4(b)

Isıtma dengesinden,

$$\dot{m} = \frac{GS}{c \Delta T}.$$

Sayısal olarak,

$$\dot{m} = \frac{7.01392 \times 10^6 \text{ W}}{(1012 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1})(9.0503 \text{ K})} = 765.8 \text{ kg s}^{-1}.$$

Böylece

$$\dot{m} \simeq 7.7 \times 10^2 \text{ kg s}^{-1}.$$

ΔT 'nin elenmesiyle ayrıca şu genel ifade elde edilir:

$$\dot{m} = \left[\frac{2gh(\rho_h A)^2 GS}{cT_{Air}} \right]^{1/3}.$$

Sayısal bir kontrol olarak, buna karşılık gelen hız

$$v = \sqrt{\frac{2(9.81)(195)(9.0503)}{295}} = 10.83 \text{ m s}^{-1},$$

olur; bu da $\rho_h A v = 765.8 \text{ kg s}^{-1}$ ve $\frac{1}{2} \dot{m} v^2 = 44.94 \text{ kW}$ kinetik gücünü verir ve 3(b) ile tutarlıdır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Atom çekirdeğinin basit bir modeli

Giriş

Atom çekirdekleri kuantum nesneleri olmasına rağmen, temel özelliklerine (yarıçap veya bağlanma enerjisi gibi) ilişkin bir dizi fenomenolojik yasa basit varsayımlardan türetilebilir: (i) çekirdekler nükleonlardan (yani proton ve nötronlardan) oluşur; (ii) bu nükleonları bir arada tutan güçlü nükleer etkileşimin menzili çok kısadır (yalnızca komşu nükleonlar arasında etkir); (iii) belirli bir çekirdekteki proton sayısı (Z), nötron sayısına (N) yaklaşık olarak eşittir; yani $Z \approx N \approx A/2$; burada A , toplam nükleon sayısıdır ($A \gg 1$). **Önemli: Aşağıdaki Görev 1-4'te bu varsayımları kullanın.**

Görev 1 - Sıkı paketlenmiş bir nükleon sistemi olarak atom çekirdeği

Basit bir modelde atom çekirdeği, sıkı paketlenmiş nükleonlardan oluşan bir küre olarak düşünülebilir [bkz. Şekil 1(a)]; burada nükleonlar, yarıçapı $r_N = 0.85 \text{ fm}$ olan sert kürelerdir ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$). Nükleer kuvvet yalnızca birbirine temas eden iki nükleon arasında bulunur. Çekirdeğin hacmi V , tüm nükleonların toplam hacmi AV_N 'den büyüktür; burada $V_N = \frac{4}{3} r_N^3 \pi$. $f = AV_N/V$ oranına paketleme faktörü denir ve bu oran, uzayın nükleer maddeyle dolu olan yüzdesini verir.

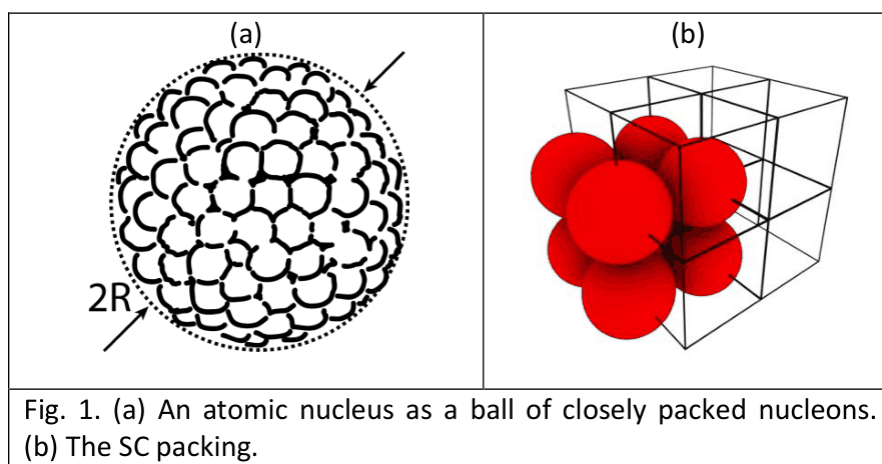


Fig. 1. (a) An atomic nucleus as a ball of closely packed nucleons. (b) The SC packing.

Şekil 1. (a) Sıkı paketlenmiş nükleonlardan oluşan bir küre olarak atom çekirdeği. (b) SC paketleme.

a) Nükleonlar, her bir nükleonun merkezi sonsuz bir kübik örgünün bir örgü noktasında olacak şekilde "basit kübik" (SC) kristal sisteminde dizilseydi, paketleme faktörünün f ne olacağını hesaplayın [bkz. Şekil 1(b)]. (0.3 puan)

Önemli: Sonraki tüm görevlerde, çekirdeklerin gerçek paketleme faktörünün Görev 1a'da bulunan değere eşit olduğunu varsayın. Bu değeri hesaplayamazsanız, sonraki görevlerde $f = 1/2$ kullanın.

b) A nükleon içeren bir çekirdeğin ortalama kütle yoğunluğunu ρ_m , yük yoğunluğunu ρ_c ve yarıçapını R tahmin edin. Bir nükleonun ortalama kütlesi $1.67 \cdot 10^{-27}$ kg'dır. (1.0 puan)

Görev 2 - Atom çekirdeklerinin bağlanma enerjisi – hacim ve yüzey terimleri

Bir çekirdeğin bağlanma enerjisi, onu ayrı nükleonlara ayırmak için gereken enerjidir ve esas olarak her bir nükleon ile komşuları arasındaki çekici nükleer kuvvetten kaynaklanır. Bir nükleon çekirdeğin yüzeyinde değilse, toplam bağlanma enerjisine $a_V = 15.8$ MeV katkıda bulunur ($1 \text{ MeV} = 1.602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$). Bir yüzey nükleonunun bağlanma enerjisine katkısı yaklaşık $a_V/2$ 'dir. A nükleon içeren bir çekirdeğin bağlanma enerjisini E_b , yüzey düzeltmesini de dahil ederek A , a_V ve f cinsinden ifade edin. (1.9 puan)

Görev 3 - Bağlanma enerjisi üzerindeki elektrostatik (Coulomb) etkiler

Homojen yüklü bir kürenin (yarıçapı R ve toplam yükü Q_0) elektrostatik enerjisi

$$U_c = \frac{3Q_0^2}{20\pi\epsilon_0 R},$$

ile verilir; burada $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$.

a) Bir çekirdeğin elektrostatik enerjisini elde etmek için bu formülü uygulayın. Bir çekirdekte her proton, (Coulomb kuvvetiyle) kendisine değil, yalnızca diğer protonlara etkir. Elde edilen formülde $Z^2 \rightarrow Z(Z - 1)$ değişimi yapılarak bu durum hesaba katılabilir. Sonraki görevlerde bu düzeltmeyi kullanın. (0.4 puan)

b) Ana (hacim) terimi, yüzey düzeltmesi terimini ve elde edilen elektrostatik düzeltmeyi içeren tam bağlanma enerjisi formülünü yazın. (0.3 puan)

Görev 4 - Ağır çekirdeklerin fisyonu

Fisyon, bir çekirdeğin daha küçük parçalara (daha hafif çekirdeklere) bölündüğü nükleer bir süreçtir. A nükleon içeren bir çekirdeğin, Şekil 2'de gösterildiği gibi yalnızca iki eşit parçaya bölündüğünü varsayın.

a) İki hafif çekirdeğin merkezleri arasındaki uzaklık $d \geq 2R(A/2)$ olduğunda fisyon ürünlerinin toplam kinetik enerjisini E_{kin} hesaplayın; burada $R(A/2)$, bu çekirdeklerin yarıçapıdır. Büyük çekirdek başlangıçta durgundur. (1.3 puan)

b) $d = 2R(A/2)$ olduğunu varsayın ve a) kısmında elde edilen E_{kin} ifadesini $A = 100, 150, 200$ ve 250 için hesaplayın (sonuçları MeV biriminde ifade edin). Yukarıda açıklanan modelde fisyonun mümkün olduğu A değerlerini tahmin edin. (1.0 puan)

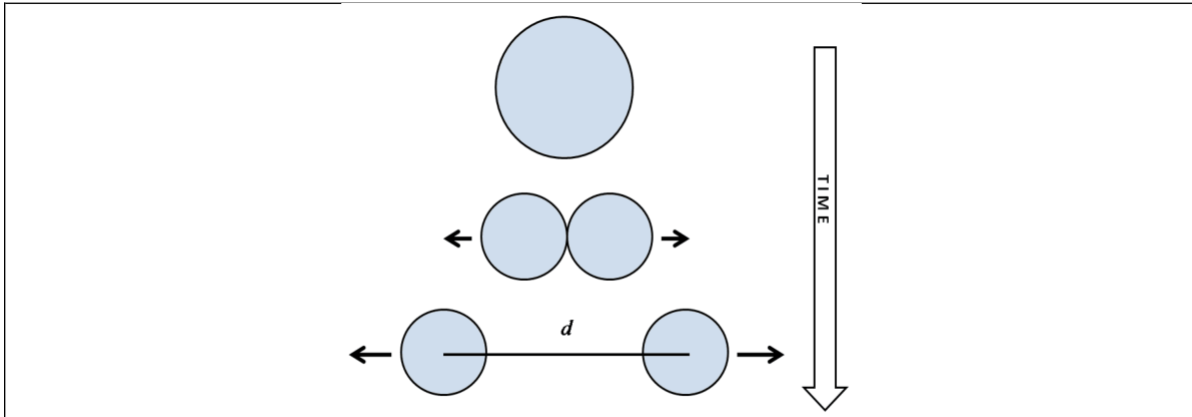


Fig. 2. A schematic description of nuclear fission in our model.

Şekil 2. Modelimizdeki nükleer fisyonun şematik gösterimi.

Görev 5 – Transfer tepkimeleri

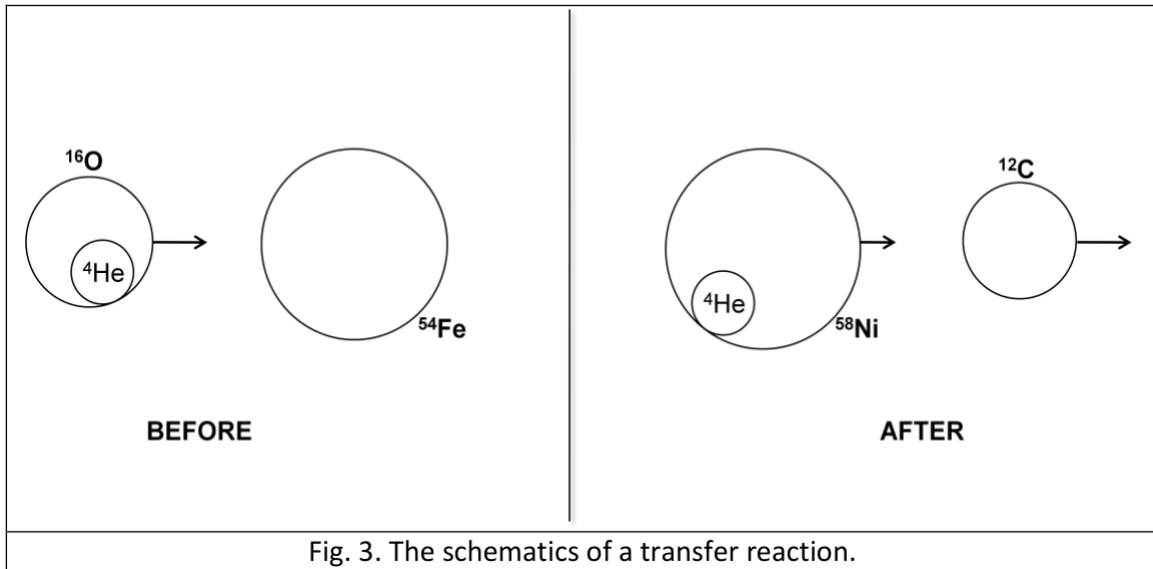
a) Modern fizikte çekirdeklerin ve tepkimelerinin enerji özellikleri kütleler cinsinden betimlenir. Örneğin, bir çekirdek (hızı sıfırken) temel durumun E_{exc} kadar üzerinde bir enerjiye sahip uyarılmış bir durumdaysa, kütlesi $m = m_0 + E_{\text{exc}}/c^2$ olur; burada m_0 , çekirdeğin durgunken temel durumdaki kütlesidir. $^{16}\text{O} + ^{54}\text{Fe} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^{58}\text{Ni}$ nükleer tepkimesi, bir çekirdeğin bir bölümünün ("küme") diğerine aktarıldığı, "transfer tepkimeleri" olarak adlandırılan tepkimelere bir örnektir (bkz. Şekil 3). Örneğimizde aktarılan bölüm bir ^4He kümesidir (α parçacığı). Gelen çekirdeğe benzer tepkime ürününün (bizim durumumuzda: ^{12}C) hızı, gelen çekirdeğin (bizim durumumuzda: ^{16}O) hızına hem büyüklük hem de yön bakımından eşit olduğunda, transfer tepkimeleri en yüksek olasılıkla gerçekleşir. Hedef ^{54}Fe başlangıçta durgundur. Tepkimede ^{58}Ni , daha yüksek enerjili durumlarından birine uyarılır. Gelen ^{16}O çekirdeğinin kinetik enerjisi 50 MeV ise, bu durumun uyarılma enerjisini bulun (ve MeV biriminde ifade edin). Işık hızı $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ 'dir. (2.2 puan)

1.	$M(^{16}\text{O})$	15.99491 a.m.u.
2.	$M(^{54}\text{Fe})$	53.93962 a.m.u.
3.	$M(^{12}\text{C})$	12.00000 a.m.u.
4.	$M(^{58}\text{Ni})$	57.93535 a.m.u.

Tablo 1. Tepkimede yer alan çekirdeklerin temel durumlarındaki durgun kütleleri.

1 a. m. u. = $1.6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

b) a) kısmında ele alınan uyarılmış durumda üretilen ^{58}Ni çekirdeği, hareketi yönünde bir gama fotonu yayarak temel durumuna geçer. ^{58}Ni 'nin geri tepme enerjisini (yani fotonun yayılmasından sonra ^{58}Ni 'nin kazandığı kinetik enerjiyi) bulmak için bu bozunmayı ^{58}Ni 'nin durgun olduğu referans sisteminde ele alın. Bu sistemde fotonun enerjisi nedir? Laboratuvar referans sisteminde fotonun enerjisi nedir (yani ^{58}Ni çekirdeğinin hareket ettiği yönde konumlandırılmış bir dedektörde ölçülen foton enerjisi ne olur)? (1.6 puan)



Şekil 3. Bir transfer tepkimesinin şematik gösterimi.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

İfadeleri kısa tutmak için

$$S(A) = A - \left(A^{1/3} - 2f^{1/3} \right)^3, \quad r_0 = r_N f^{-1/3} = 1.0546 \text{ fm},$$

ve

$$a_C = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 r_0} = 0.81955 \text{ MeV}.$$

tanımlarını yapalım.

- 1(a).

$$f = \frac{\pi}{6} \approx 0.5236 = 52.36\%.$$

- 1(b).

$$\rho_m \approx 3.40 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}, \quad \rho_c \approx 1.63 \times 10^{25} \text{ C m}^{-3}$$

$$R = r_N (A/f)^{1/3} \approx 1.05 A^{1/3} \text{ fm}.$$

- 2.

$$E_b^{(\text{nuc})} = a_V \left[A - \frac{S(A)}{2} \right] = a_V \left[A - 3f^{1/3} A^{2/3} + 6f^{2/3} A^{1/3} - 4f \right].$$

- 3(a).

$$U_c = \frac{a_C Z(Z-1)}{A^{1/3}} \simeq \frac{a_C}{4} \left(A^{5/3} - 2A^{2/3} \right).$$

- **3(b).** Tam bağlanma enerjisini $B(A)$ ile gösterirsek,

$$B(A) = a_V \left[A - 3f^{1/3} A^{2/3} + 6f^{2/3} A^{1/3} - 4f \right] - \frac{a_C}{4} \left(A^{5/3} - 2A^{2/3} \right).$$

- **4(a).**

$$E_{\text{kin}}(d) = 2B(A/2) - B(A) - \frac{e^2 A^2}{64\pi\epsilon_0 d}.$$

- **4(b).** Temas durumunda $A = 100, 150, 200, 250$ için hesaplanan enerjiler sırasıyla

$$-29.3, \quad -24.9, \quad -6.77, \quad +23.6 \text{ MeV.}$$

Ağır çekirdekler için eşik yaklaşık olarak $A_{\text{crit}} \simeq 213$ 'tür. Dört örnek arasında yalnızca $A = 250$, durgun başlangıç durumundan temas konfigürasyonu üzerinden fisyonu izin verir.

- **5(a).**

$$E_{\text{exc}} \approx 10.86 \text{ MeV.}$$

- **5(b).**

$$T_{\text{recoil}} \approx 1.09 \text{ keV}, \quad E_{\gamma}^* \approx 10.86 \text{ MeV}, \quad E_{\gamma, \text{lab}} \approx 10.92 \text{ MeV.}$$

Burada yıldız, uyarılmış nikel çekirdeğinin yayım öncesindeki durgunluk sistemini gösterir.

Çözüm

1(a). Paketleme faktörü

Basit kübik paketlemede komşu küreler bir küpün kenarı boyunca birbirine temas eder; dolayısıyla örgü aralığı $2r_N$ 'dir. Bir kübik hücre, her biri sekiz hücre tarafından paylaşılan sekiz köşe nükleonu içerir: hücre başına bir tam nükleon düşer.

Buna göre,

$$f = \frac{\text{hücre başına nükleon hacmi}}{\text{hücre hacmi}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_N^3}{(2r_N)^3} = \left[\frac{\pi}{6} \right].$$

1(b). Yoğunluklar ve çekirdek yarıçapı

Paketleme faktörünün tanımı

$$V = \frac{AV_N}{f} = \frac{4\pi r_N^3 A}{3f}.$$

sonucunu verir. Bunu $4\pi R^3/3$ 'e eşitlersek,

$$R = r_N \left(\frac{A}{f} \right)^{1/3} = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1.0546 \text{ fm.}$$

Bu modelin doğruluk düzeyinde çekirdeğin kütlesi Am_N 'dir; burada $m_N = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$. Dolayısıyla

$$\rho_m = \frac{Am_N}{V} = \frac{3fm_N}{4\pi r_N^3}.$$

$f = \pi/6$ ile,

$$\rho_m = \frac{m_N}{8r_N^3} = 3.40 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}.$$

$Z \simeq A/2$ kullanıldığında, çekirdeğin yükü yaklaşık $Ae/2$ 'dir. Verilen elektronvolt dönüşümüyle tutarlı temel yük $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ 'dur. Bu nedenle,

$$\rho_c = \frac{Ae/2}{V} = \frac{3fe}{8\pi r_N^3} = \frac{e}{16r_N^3},$$

dolayısıyla

$$\rho_c = 1.63 \times 10^{25} \text{ C m}^{-3}.$$

Her iki ortalama yoğunluk da A 'dan bağımsızdır.

2. Hacim ve yüzey tabakasının tüm katkıları

Nükleonların sayı yoğunluğu

$$n = \frac{A}{V} = \frac{f}{V_N}.$$

ile verilir. Belirtilen $2r_N$ kalınlığındaki yüzey tabakası kullanıldığında, bu tabakanın hacmi

$$V_{\text{surface}} = \frac{4\pi}{3} [R^3 - (R - 2r_N)^3].$$

olur.

Bu nedenle, sürekli ortam paketleme modeli çerçevesinde yüzey nükleonlarının sayısı

$$\begin{aligned} S(A) &= \frac{f}{r_N^3} [R^3 - (R - 2r_N)^3] \\ &= A - f \left[\left(\frac{A}{f} \right)^{1/3} - 2 \right]^3 \\ &= \boxed{A - \left(A^{1/3} - 2f^{1/3} \right)^3}. \end{aligned}$$

olur. Bu ifade, burada ele alınan büyük çekirdeklerde olduğu gibi $R \geq 2r_N$ olduğunda geçerlidir. Hiçbir terimi atmadan açarsak,

$$S(A) = 6f^{1/3}A^{2/3} - 12f^{2/3}A^{1/3} + 8f.$$

Her biri a_V katkıda bulunan $A - S(A)$ iç nükleon ve her biri $a_V/2$ katkıda bulunan $S(A)$ yüzey nükleonu vardır. Dolayısıyla

$$E_b^{(\text{nuc})} = a_V[A - S(A)] + \frac{a_V}{2}S(A),$$

ya da

$$E_b^{(\text{nuc})} = a_V \left[A - 3f^{1/3}A^{2/3} + 6f^{2/3}A^{1/3} - 4f \right].$$

Sayısal olarak,

$$\frac{E_b^{(\text{nuc})}}{\text{MeV}} = 15.8A - 38.2042A^{2/3} + 61.5849A^{1/3} - 33.0914.$$

Sonraki tüm hesaplamalarda $A^{1/3}$ terimi ve sabit terim korunur.

3(a). Coulomb öz enerjisi

Verilen formülde $Q_0 = Ze$ yerine konup ardından belirtilen öz etkileşim düzeltmesi uygulandığında,

$$U_c = \frac{3e^2 Z(Z-1)}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

elde edilir. $R = r_0 A^{1/3}$ olduğundan,

$$a_C = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 r_0}.$$

tanımını yapalım. Verilen sabitler

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44049 \text{ MeV fm}, \quad a_C = 0.81955 \text{ MeV}.$$

değerlerini verir. Böylece

$$U_c = \frac{a_C Z(Z-1)}{A^{1/3}}.$$

Bir çıkarılmasını koruyarak $Z \simeq A/2$ uygularsak,

$$Z(Z-1) \simeq \frac{A(A-2)}{4},$$

ve dolayısıyla

$$U_c(A) = \frac{a_C}{4} (A^{5/3} - 2A^{2/3}).$$

3(b). Tam bağlanma enerjisi

Pozitif elektrostatik enerji, çekirdeği parçalarına ayırmak için gereken enerjiyi azaltır. Bu nedenle,

$$B(A) = E_b^{(\text{nuc})}(A) - U_c(A),$$

buradan

$$B(A) = a_V \left[A - 3f^{1/3} A^{2/3} + 6f^{2/3} A^{1/3} - 4f \right] - \frac{a_C}{4} (A^{5/3} - 2A^{2/3}).$$

elde edilir.

4(a). d uzaklığındaki kinetik enerji

Her parça $A/2$ nükleona ve yaklaşık $Ae/4$ yüke sahiptir. Birbiriyle örtüşmeyen, küresel simetrik iki yük dağılımının karşılıklı elektrostatik enerjisi, merkezlerinde bulunan noktasal yüklerin enerjisine eşittir:

$$U_{12}(d) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Ae/4)^2}{d} = \frac{e^2 A^2}{64\pi\epsilon_0 d}.$$

$Z(Z-1)$ düzeltmesi her çekirdeğin öz enerjisine zaten dahil edilmiştir. Bu düzeltme, iki ayrı proton topluluğu arasındaki bu etkileşime uygulanmaz.

Birbirinden ayrılmış serbest nükleonları ortak iç enerji referansı olarak alalım. Başlangıçtaki çekirdeğin enerjisi $-B(A)$ iken, birbirinden ayrılmış iki parçanın toplam enerjisi

$$-2B(A/2) + U_{12}(d) + E_{\text{kin}}(d).$$

olur. Dolayısıyla enerjinin korunumu

$$E_{\text{kin}}(d) = 2B(A/2) - B(A) - U_{12}(d).$$

sonucunu verir.

Bağlanma enerjilerini açarsak,

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}}(d) = & -3a_V f^{1/3} (2^{1/3} - 1) A^{2/3} \\ & + 6a_V f^{2/3} (2^{2/3} - 1) A^{1/3} - 4a_V f \\ & + \frac{a_C}{4} \left[(1 - 2^{-2/3}) A^{5/3} + 2(2^{1/3} - 1) A^{2/3} \right] \\ & - \frac{e^2 A^2}{64\pi\epsilon_0 d}. \end{aligned}$$

Toplam nükleon sayısı korunduğu için hacim katkıları birbirini götürür. Parçalar birbirinden uzaklaştıkça karşılıklı elektrostatik enerjileri azalır ve toplam kinetik enerjileri artar.

4(b). Temas enerjileri ve fisyon eşiği

Temas durumunda,

$$d_0 = 2R(A/2) = 2^{2/3} r_0 A^{1/3}.$$

$e^2/(4\pi\epsilon_0 r_0) = 5a_C/3$ kullanılarak,

$$U_{12}(d_0) = \frac{5a_C}{48 \cdot 2^{2/3}} A^{5/3}.$$

Bu sonuç yukarıdaki ifadeyle birleştirildiğinde,

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}}(d_0) = & \frac{a_C}{4} \left(1 - \frac{17}{12} 2^{-2/3} \right) A^{5/3} \\ & + (2^{1/3} - 1) \left(\frac{a_C}{2} - 3a_V f^{1/3} \right) A^{2/3} \\ & + 6a_V f^{2/3} (2^{2/3} - 1) A^{1/3} - 4a_V f. \end{aligned}$$

Sayısal olarak,

$$\frac{E_{\text{kin}}(d_0)}{\text{MeV}} = 0.0220368 A^{5/3} - 9.82357 A^{2/3} + 36.1750 A^{1/3} - 33.0914.$$

A	Temas uzaklığı d_0 (fm)	$E_{\text{kin}}(d_0)$ (MeV)
100	7.77	-29.3
150	8.89	-24.9
200	9.79	-6.77
250	10.55	+23.6

Hesaplanan kinetik enerjinin negatif olması, varsayılan enerji dengesi altında başlangıçta uyarılmamış çekirdekten temas konfigürasyonuna ulaşamayacağı anlamına gelir.

Ağır çekirdekler için $E_{\text{kin}}(d_0) = 0$ denkleminin çözümü

$$A_{\text{crit}} \simeq 213.0.$$

sonucunu verir. Dolayısıyla model, yaklaşık olarak

$$A \gtrsim 213.$$

için temas konfigürasyonu üzerinden fisyona izin verir. Belirtilen dört çekirdek arasında yalnızca $A = 250$ bu koşulu sağlar. Temas durumuna ulaşılabildiğinde, daha fazla ayrılma ek Coulomb enerjisi açığa çıkarır.

5(a). Transfer tepkimesindeki uyarılma enerjisi

m_1, m_2, m_3, m_4 , sırasıyla oksijen, demir, karbon ve nikelin tabloda verilen temel durum kütlelerini gösterebilir.

$$m_4^* = m_4 + \frac{E_{\text{exc}}}{c^2}$$

uyarılmış nikelin kütlesi olsun.

Verilen sabitleri kullanarak,

$$1 \text{ a. m. u. } c^2 = \frac{(1.6605 \times 10^{-27})(3 \times 10^8)^2}{1.602 \times 10^{-13}} \text{ MeV} = 932.865 \text{ MeV}.$$

Temel durumlar arasındaki tepkime enerjisi

$$\begin{aligned} Q &= (m_1 + m_2 - m_3 - m_4)c^2 \\ &= (15.99491 + 53.93962 - 12.00000 - 57.93535)(932.865) \text{ MeV} \\ &= -0.764949 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

olur.

Tam göreceli kinematiği koruyabiliriz. Oksijen ve karbon aynı v hızına, dolayısıyla aynı Lorentz çarpanına sahiptir:

$$\gamma = 1 + \frac{50 \text{ MeV}}{m_1 c^2}, \quad \beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \gamma^{-2}}.$$

Enerji ve momentumun korunumu, uyarılmış nikelin enerjisini ve momentumunu verir:

$$E_4^{\text{lab}} = \gamma(m_1 - m_3)c^2 + m_2 c^2, \quad p_4 = \gamma(m_1 - m_3)v.$$

Dolayısıyla değişmez durgunluk enerjisi

$$(m_4^* c^2)^2 = (E_4^{\text{lab}})^2 - (p_4 c)^2.$$

bağıntısını sağlar. $\Delta m = m_1 - m_3$ yazıp $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$ kullanırsak,

$$m_4^* = \sqrt{m_2^2 + \Delta m^2 + 2\gamma m_2 \Delta m}.$$

Buna göre,

$$E_{\text{exc}} = c^2 \left[\sqrt{m_2^2 + (m_1 - m_3)^2 + 2\gamma m_2 (m_1 - m_3)} - m_4 \right].$$

Sayısal olarak,

$$E_{\text{exc}} = 10.86074 \dots \text{ MeV} \approx 10.86 \text{ MeV}.$$

Enerji dengesini kontrol etmek için, çıkan çekirdeklerin kinetik enerjileri

$$T_C = \frac{m_3}{m_1}(50 \text{ MeV}) = 37.51193 \text{ MeV},$$

$$T_{\text{Ni}} = 0.86237 \text{ MeV}.$$

olarak bulunur. Bunlar

$$E_{\text{exc}} = 50 + Q - T_C - T_{\text{Ni}}.$$

bağıntısını sağlar.

Alışılmış görelili olmayan yaklaşım,

$$T_{\text{Ni}} \simeq \frac{(m_1 - m_3)^2}{m_1 m_4}(50 \text{ MeV}),$$

$E_{\text{exc}} \simeq 10.862 \text{ MeV}$ değerini verir; bu, belirtilen hassasiyette aynı sonuçtur.

(b) kısmında kullanmak üzere, uyarılmış nikelin sürati

$$\beta_4 = \frac{V}{c} = \frac{p_4 c}{E_4^{\text{lab}}} = \frac{\gamma(m_1 - m_3)\beta}{m_2 + \gamma(m_1 - m_3)} = 0.00564849,$$

dolayısıyla $V \approx 1.69 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ 'dir.

5(b). Geri tepme ve foton enerjileri

Önce uyarılmış nikel çekirdeğinin durgunluk sisteminde çalışalım. Momentumun korunumu, son durumdaki nikel çekirdeğinin fotona zıt yönde, momentum büyüklüğü

$$p_{\text{recoil}} = \frac{E_{\gamma}^*}{c}.$$

olacak şekilde geri tepmesini gerektirir.

Şu tanımları yapalım:

$$W = m_4 c^2, \quad E = E_{\text{exc}}.$$

Bu durumda enerjinin korunumu

$$W + E = E_{\gamma}^* + \sqrt{W^2 + (E_{\gamma}^*)^2}.$$

bağıntısını verir. Çözersek,

$$E_{\gamma}^* = \frac{(W + E)^2 - W^2}{2(W + E)} = E - \frac{E^2}{2(W + E)}.$$

Dolayısıyla geri tepme kinetik enerjisi

$$T_{\text{recoil}} = E - E_{\gamma}^* = \frac{E^2}{2(W + E)} \simeq \frac{E^2}{2W}.$$

olur. Son yaklaşım $E \ll W$ olduğu için geçerlidir; görelili olmayan geri tepme ifadesi $p_{\text{recoil}}^2/(2m_4)$ ile eşdeğerdir.

Burada

$$W = 54045.8700 \text{ MeV}.$$

(a) kısmındaki uyarılma enerjisini kullanarak,

$$T_{\text{recoil}} = 0.00109104 \text{ MeV} \approx 1.09 \text{ keV},$$

ve

$$E_{\gamma}^* = 10.85965 \dots \text{ MeV} \approx 10.86 \text{ MeV}.$$

Ek basamaklar, geri tepme nedeniyle çıkarılan küçük miktarı gösterir.

İleri yönde yayım için foton enerjisinin laboratuvar sistemine Lorentz dönüşümü

$$E_{\gamma,\text{lab}} = \Gamma_4 (E_{\gamma}^* + V p_{\gamma}^*) = \Gamma_4 E_{\gamma}^* (1 + \beta_4),$$

sonucunu verir; burada $\Gamma_4 = (1 - \beta_4^2)^{-1/2}$. Dolayısıyla

$$E_{\gamma,\text{lab}} = E_{\gamma}^* \sqrt{\frac{1 + \beta_4}{1 - \beta_4}}.$$

İleri yöndeki Doppler çarpanı 1.00566453 olduğundan,

$$E_{\gamma,\text{lab}} = 10.92117 \dots \text{ MeV} \approx 10.92 \text{ MeV}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.