

IPhO 2010

Теоретические задачи и решения · Загреб, Хорватия · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/2010/

Задача 1: Изображение заряда в металлическом теле

Введение – Метод изображений

Точечный заряд q расположен вблизи заземлённой металлической сферы радиуса R [см. рис. 1(a)], вследствие чего на сфере индуцируется поверхностный заряд. Вычисление электрического поля и потенциала, создаваемых этим распределением поверхностного заряда, представляет собой весьма сложную задачу. Однако расчёт можно значительно упростить, воспользовавшись так называемым методом изображений. В этом методе электрическое поле и потенциал, создаваемые распределённым по сфере зарядом, можно представить как электрическое поле и потенциал единственного точечного заряда q' , помещённого внутрь сферы (доказывать это не требуется). Примечание: **Электрическое поле этого заряда-изображения q' воспроизводит электрическое поле и потенциал только вне сферы (включая её поверхность).**

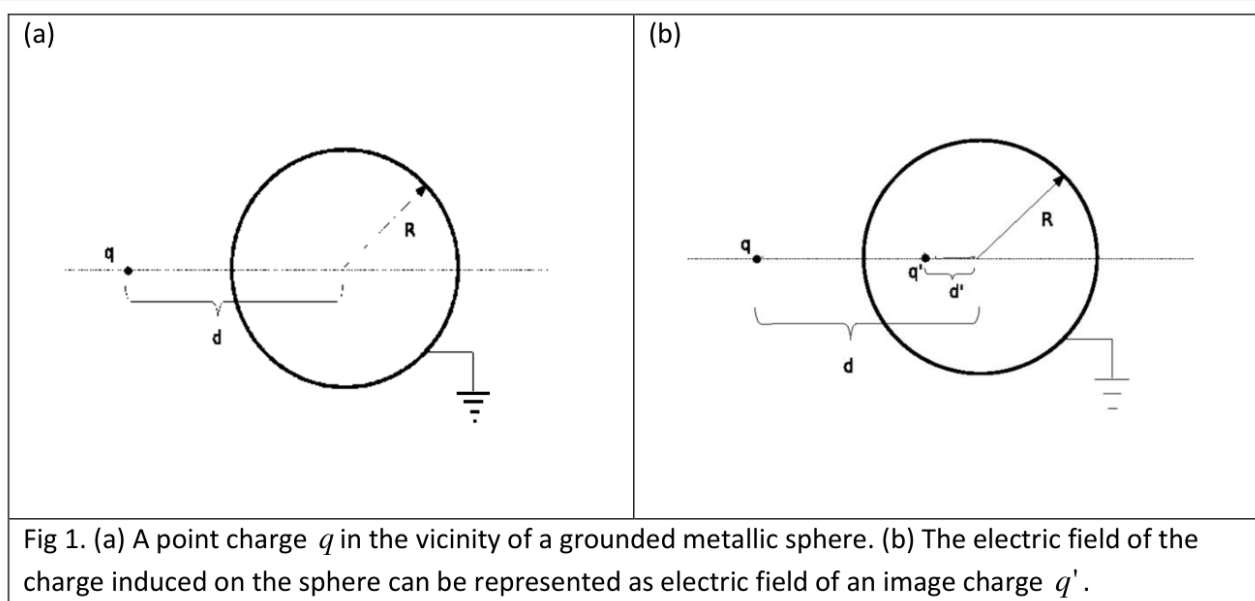


Рис. 1. (a) Точечный заряд q вблизи заземлённой металлической сферы. (b) Электрическое поле заряда, индуцированного на сфере, можно представить как электрическое поле заряда-изображения q' .

Задание 1 – Заряд-изображение

Из симметрии задачи следует, что заряд q' должен находиться на прямой, соединяющей точечный заряд q и центр сферы [см. рис. 1(b)].

- a) Чему равен потенциал сферы? (0.3 балла)
- b) Выразите q' и расстояние d' от заряда q' до центра сферы через q , d и R . (1.9 балла)
- c) Найдите модуль силы, действующей на заряд q . Является ли эта сила силой отталкивания? (0.5 балла)

Задание 2 – Экранирование электростатического поля

Рассмотрим точечный заряд q , расположенный на расстоянии d от центра заземлённой металлической сферы радиуса R . Нас интересует, как заземлённая металлическая сфера влияет на электрическое поле в точке A , находящейся по другую сторону сферы (см. рис. 2). Точка A лежит на прямой, соединяющей заряд q и центр сферы; её расстояние от точечного заряда q равно r .

- a) Найдите вектор напряжённости электрического поля в точке A . (0.6 балла)
- b) Для очень большого расстояния $r \gg d$ найдите выражение для напряжённости электрического поля, используя приближение $(1 + a)^{-2} \approx 1 - 2a$, где $a \ll 1$. (0.6 балла)
- c) В каком пределе по d заземлённая металлическая сфера полностью экранирует поле заряда q , так что напряжённость электрического поля в точке A становится в точности равной нулю? (0.3 балла)

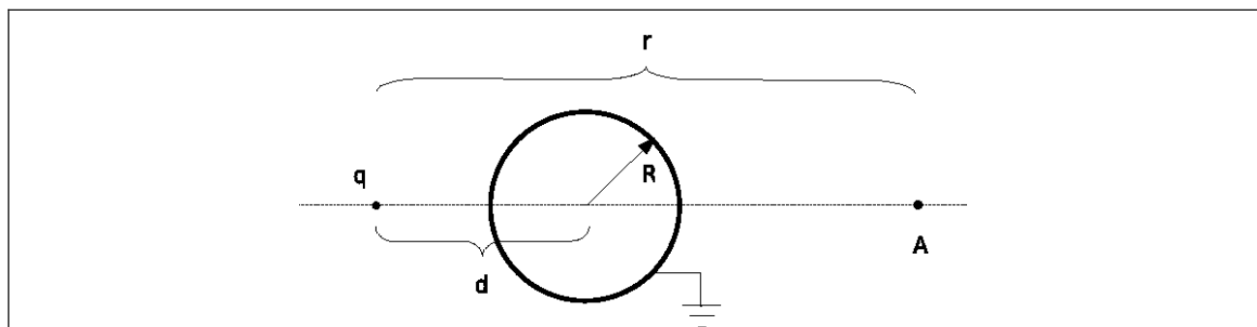


Fig 2. The electric field at point A is partially screened by the grounded sphere.

Рис. 2. Электрическое поле в точке A частично экранируется заземлённой сферой.

Задание 3 – Малые колебания в электрическом поле заземлённой металлической сферы

Точечный заряд q массой m подвешен на нити длиной L , прикрепленной к стене, вблизи заземлённой металлической сферы. При рассмотрении задачи пренебрегайте всеми электростатическими эффектами, связанными со стеной. Точечный заряд образует математический маятник (см. рис. 3). Точка крепления нити к стене находится на расстоянии l от центра сферы. Считайте, что влиянием силы тяжести можно пренебречь.

- a) Найдите модуль электрической силы, действующей на точечный заряд q при заданном угле α , и укажите её направление на понятном рисунке (0.8 балла)
- b) Определите составляющую этой силы в направлении, перпендикулярном нити, через l , L , R , q и α . (0.8 балла)
- c) Найдите частоту малых колебаний маятника. (1.0 балла)

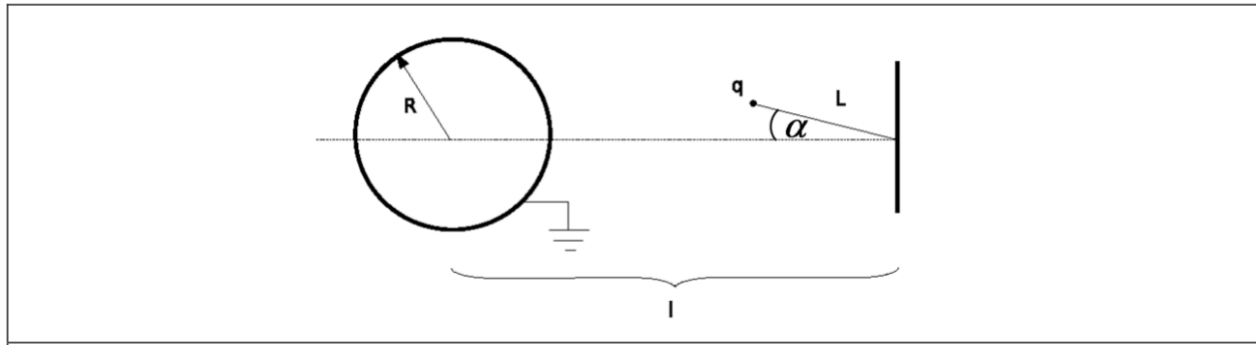


Fig 3. A point charge in the vicinity of a grounded sphere oscillates as a pendulum.

Рис. 3. Точечный заряд вблизи заземлённой сферы совершает колебания как маятник.

Задание 4 – Электростатическая энергия системы

Для распределения электрических зарядов важно знать электростатическую энергию системы. В нашей задаче (см. рис. 1а) существует электростатическое взаимодействие между внешним зарядом q и индуцированными на сфере зарядами, а также электростатическое взаимодействие индуцированных на сфере зарядов между собой. Выразите через заряд q , радиус сферы R и расстояние d следующие электростатические энергии:

- электростатическую энергию взаимодействия заряда q с индуцированными на сфере зарядами; (1.0 балла)
- электростатическую энергию взаимодействия индуцированных на сфере зарядов между собой; (1.2 балла)
- полную электростатическую энергию взаимодействия в системе. (1.0 балла)

Указание: Существует несколько способов решения этой задачи:

- В одном из них можно воспользоваться следующим интегралом,

$$\int_d^\infty \frac{x \, dx}{(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}.$$

- В другом можно воспользоваться тем, что для совокупности N зарядов q_i , расположенных в точках $\vec{r}_i, i = 1, \dots, N$, электростатическая энергия представляет собой сумму по всем парам зарядов:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Обозначим $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$. В задании 2 направим $\hat{e}$ от q к A . Для задания 3 введём обозначения

$$d_\alpha = \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}, \quad D_0 = (l - L)^2 - R^2,$$

причём для изображённого положения равновесия вне сферы выполняется $l - L > R$.
Считаем проекцию силы на направление, перпендикулярное нити, положительной в сторону увеличения α .

- 1(a)

$$\phi_{\text{sphere}} = 0.$$

- 1(b)

$$q' = -\frac{R}{d}q, \quad d' = \frac{R^2}{d}.$$

Изображение лежит между центром и ближайшей к q точкой поверхности.

- 1(c)

$$F = \frac{kq^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}.$$

Это сила притяжения, направленная к центру сферы.

- 2(a)

$$\mathbf{E}_A = kq \left[\frac{1}{r^2} - \frac{R}{d(r - d + R^2/d)^2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

- 2(b) При $r \gg d$, с учётом первой поправки:

$$\mathbf{E}_A \simeq \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} - \frac{2R}{r} \left(1 - \frac{R^2}{d^2} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

Главный член равен $kq(1 - R/d)\hat{\mathbf{e}}/r^2$.

- 2(c)

$$d \rightarrow R^+ \implies \mathbf{E}_A \rightarrow \mathbf{0}.$$

- 3(a)

$$F(\alpha) = \frac{kq^2 R \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

Нарисуйте стрелку силы от заряда прямо к центру сферы.

- 3(b)

$$F_{\perp} = -\frac{kq^2 R l \sin \alpha}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

- 3(c) Обычная и циклическая частоты равны

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kq^2 R l}{m L D_0^2}}, \quad \omega_0 = 2\pi f.$$

- **4(a)** Взаимодействие заряда с поверхностью:

$$U_{q\sigma} = -\frac{kq^2R}{d^2 - R^2}.$$

- **4(b)** Энергия взаимного взаимодействия индуцированных зарядов:

$$U_{\sigma\sigma} = +\frac{kq^2R}{2(d^2 - R^2)}.$$

- **4(c)** Полная энергия взаимодействия:

$$U_{\text{tot}} = -\frac{kq^2R}{2(d^2 - R^2)}.$$

Решение

1(a)

Проводник в состоянии электростатического равновесия эквипотенциален. Заземление устанавливает его потенциал равным потенциалу Земли, принятому за нуль:

$$\phi_{\text{sphere}} = 0.$$

1(b)

Пусть O — центр сферы. Будем отсчитывать координаты вдоль оси от O в сторону внешнего заряда, так что q находится в точке с координатой $d > R$, а изображение — в точке с координатой d' , внутри сферы.

В ближайшей к q точке поверхности условие равенства потенциала нулю даёт

$$k\left(\frac{q}{d - R} + \frac{q'}{R - d'}\right) = 0.$$

В противоположной точке поверхности

$$k\left(\frac{q}{d + R} + \frac{q'}{R + d'}\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{R - d'}{d - R} = \frac{R + d'}{d + R}.$$

Перемножая крест-накрест, получаем

$$(R - d')(d + R) = (R + d')(d - R),$$

откуда

$$d' = \frac{R^2}{d}.$$

Подставляя обратно, получаем

$$q' = -\frac{R}{d}q.$$

Эти значения также удовлетворяют граничному условию во всех точках поверхности. Для точки поверхности, радиус-вектор которой составляет угол θ с направлением на q , обозначим расстояния до q и q' через s и s' . Тогда

$$s^2 = d^2 + R^2 - 2dR \cos \theta,$$

и

$$s'^2 = d'^2 + R^2 - 2d'R \cos \theta = \frac{R^2}{d^2} s^2.$$

Таким образом, $s' = (R/d)s$, и

$$k \left(\frac{q}{s} + \frac{q'}{s'} \right) = 0.$$

1(c)

В точке расположения внешнего заряда изображение воспроизводит поле индуцированных зарядов. Расстояние между q и его изображением равно

$$d - d' = \frac{d^2 - R^2}{d}.$$

Поэтому по закону Кулона

$$F = \frac{k|qq'|}{(d - d')^2} = \frac{kq^2(R/d)}{[(d^2 - R^2)/d]^2}.$$

Отсюда

$$F = \frac{kq^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}.$$

Поскольку знак q' противоположен знаку q , сила всегда является силой притяжения. Она направлена вдоль прямой от q к O .

2(a)

Выберем положительное направление оси от q к A с единичным вектором $\hat{\mathbf{e}}$. Поместим центр сферы в точку $x = 0$. Тогда

$$x_q = -d, \quad x_{q'} = -d', \quad x_A = r - d.$$

Поскольку A находится вне сферы с противоположной стороны, $r > d + R$.

Расстояния от A до двух зарядов равны

$$r, \quad r - d + d' = r - d + \frac{R^2}{d}.$$

По принципу суперпозиции

$$\mathbf{E}_A = k \left[\frac{q}{r^2} + \frac{q'}{(r - d + d')^2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}_A = kq \left[\frac{1}{r^2} - \frac{R}{d(r - d + R^2/d)^2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

Знак скалярного коэффициента определяет направление вдоль оси.

2(b)

Введём обозначение

$$\delta = d - \frac{R^2}{d}.$$

Поскольку $0 < \delta < d$, из условия $r \gg d$ следует $\delta/r \ll 1$. Можно записать

$$\mathbf{E}_A = \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} \left(1 - \frac{\delta}{r} \right)^{-2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

Используя приведённое приближение при $a = -\delta/r$, получаем

$$\left(1 - \frac{\delta}{r} \right)^{-2} \simeq 1 + \frac{2\delta}{r}.$$

Отсюда следует

$$\mathbf{E}_A \simeq \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} - \frac{2R\delta}{dr} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

Подставляя δ , получаем

$$\mathbf{E}_A \simeq \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} - \frac{2R}{r} \left(1 - \frac{R^2}{d^2} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

В главном приближении поле на большом расстоянии совпадает с полем эффективного суммарного заряда

$$q + q' = q \left(1 - \frac{R}{d} \right).$$

2(c)

При приближении внешнего заряда к сфере

$$d \rightarrow R^+, \quad d' \rightarrow R, \quad q' \rightarrow -q.$$

Таким образом, заряд и его изображение приближаются к одной и той же точке, имея равные по модулю и противоположные по знаку заряды. Их поля взаимно компенсируются в каждой фиксированной точке наблюдения вне сферы, отличной от точки касания.

В частности, точное выражение из 2(a) даёт

$$\lim_{d \rightarrow R^+} \mathbf{E}_A = \mathbf{0}.$$

Это предел, в котором заряд приближается к поверхности снаружи.

3(a)

Будем считать, что при движении заряда проводник остаётся в состоянии электростатического равновесия. Обозначим через P точку крепления нити, а через Q — положение заряда. Выберем

$$O = (0, 0), \quad P = (l, 0).$$

Для угла, показанного на рис. 3,

$$Q = (l - L \cos \alpha, L \sin \alpha).$$

Поэтому мгновенное расстояние от центра до заряда равно

$$d_\alpha = |OQ| = \sqrt{(l - L \cos \alpha)^2 + L^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}.$$

Применяя результат 1(с), получаем

$$F(\alpha) = \frac{kq^2 R d_\alpha}{(d_\alpha^2 - R^2)^2} = \frac{kq^2 R \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

Сила направлена от Q к O .

Описание рисунка: Нарисуйте сферу с центром в O , расположив P справа от неё на горизонтальной прямой, причём $OP = l$. Поместите Q выше этой прямой и левее P , так чтобы $PQ = L$ и $\angle OPQ = \alpha$. Нарисуйте стрелку, начинающуюся в Q , направленную вдоль QO к O , и обозначьте её $\mathbf{F}_e$. Укажите $OQ = d_\alpha$.

3(b)

Единичный вектор, перпендикулярный нити и направленный в сторону увеличения α , равен

$$\hat{\mathbf{e}}_\alpha = (\sin \alpha, \cos \alpha).$$

Поскольку сила направлена к O ,

$$\mathbf{F}_e = -\frac{F}{d_\alpha} (l - L \cos \alpha, L \sin \alpha).$$

Её касательная составляющая равна

$$\begin{aligned} F_\perp &= \mathbf{F}_e \cdot \hat{\mathbf{e}}_\alpha \\ &= -\frac{F}{d_\alpha} [(l - L \cos \alpha) \sin \alpha + L \sin \alpha \cos \alpha] \\ &= -\frac{Fl \sin \alpha}{d_\alpha}. \end{aligned}$$

После подстановки получаем

$$F_\perp = -\frac{kq^2 R l \sin \alpha}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

При положительном α эта составляющая направлена в сторону уменьшения α , то есть является возвращающей. Её модуль получается заменой $-\sin \alpha$ на $|\sin \alpha|$.

3(c)

В положении равновесия $\alpha = 0$

$$d_0 = l - L.$$

Для изображённого положения равновесия необходимо $l - L > R$, так что заряд находится вне сферы.

Сила натяжения не имеет составляющей, перпендикулярной нити. Поэтому второй закон Ньютона в касательном направлении имеет вид

$$mL\ddot{\alpha} = F_\perp.$$

При малых α

$$\sin \alpha \simeq \alpha,$$

и

$$d_\alpha^2 - R^2 = (l - L)^2 - R^2 + lL\alpha^2 + O(\alpha^4).$$

Обозначая $D_0 = (l - L)^2 - R^2$, получаем линеаризованное уравнение

$$mL\ddot{\alpha} = -\frac{kq^2 Rl}{D_0^2} \alpha,$$

или

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{kq^2 Rl}{mLD_0^2}.$$

Таким образом, обычная частота равна

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kq^2 Rl}{mL[(l - L)^2 - R^2]^2}}.$$

Для применимости приближения амплитуда должна быть достаточно малой, чтобы оба условия

$$|\alpha| \ll 1, \quad lL\alpha^2 \ll D_0$$

выполнялись одновременно.

4(a)

Не будем учитывать собственную энергию внешнего точечного заряда и примем, что энергия взаимодействия стремится к нулю при $d \rightarrow \infty$.

Пусть ϕ_σ обозначает потенциал, создаваемый индуцированными поверхностными зарядами. В точке расположения q изображение даёт

$$\phi_\sigma(q) = \frac{kq'}{d - d'} = -\frac{kqR}{d^2 - R^2}.$$

Энергия взаимодействия между q и индуцированными зарядами равна

$$U_{q\sigma} = q\phi_\sigma(q).$$

Множителя $1/2$ здесь нет: каждая пара, состоящая из q и индуцированного заряда, учитывается один раз. Поэтому

$$U_{q\sigma} = -\frac{kq^2 R}{d^2 - R^2}.$$

4(b)

Пусть σ — плотность индуцированного поверхностного заряда, а ϕ_q — потенциал, создаваемый внешним зарядом. Энергия взаимного взаимодействия индуцированных зарядов равна

$$U_{\sigma\sigma} = \frac{1}{2} \int_S \sigma \phi_\sigma dS.$$

Множитель $1/2$ предотвращает двойной учёт пар в поверхностном распределении зарядов.

На заземлённой сфере

$$\phi_q + \phi_\sigma = 0.$$

Следовательно,

$$U_{\sigma\sigma} = -\frac{1}{2} \int_S \sigma \phi_q dS.$$

Оставшийся интеграл равен энергии взаимодействия заряда с поверхностью:

$$\int_S \sigma \phi_q dS = kq \int_S \frac{\sigma dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} = q\phi_\sigma(q) = U_{q\sigma}.$$

Таким образом,

$$U_{\sigma\sigma} = -\frac{1}{2} U_{q\sigma},$$

откуда

$$U_{\sigma\sigma} = +\frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

4(c)

Складывая два физических вклада, получаем

$$U_{\text{tot}} = U_{q\sigma} + U_{\sigma\sigma} = \frac{1}{2} U_{q\sigma}.$$

Следовательно,

$$U_{\text{tot}} = -\frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

Это также следует из работы, необходимой для квазистатического переноса q из бесконечности:

$$U_{\text{tot}}(d) = -\int_d^\infty \frac{kq^2 R x}{(x^2 - R^2)^2} dx = -\frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

Для проверки согласованности результатов найдём проекцию силы на направление увеличения d :

$$-\frac{dU_{\text{tot}}}{dd} = -\frac{kq^2 R d}{(d^2 - R^2)^2},$$

что воспроизводит силу притяжения, найденную в 1(c).

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Физика дымовой трубы

Введение

Газообразные продукты сгорания выбрасываются в атмосферу с температурой T_{Air} через высокую дымовую трубу с площадью поперечного сечения A и высотой h (см. рис. 1).

Твёрдое вещество сжигается в топке, температура которой равна T_{Smoke} . Объём газов, образующихся в топке за единицу времени, равен B .

Предположите, что:

- скорость газов в топке пренебрежимо мала
- плотность газов (дыма) не отличается от плотности воздуха при тех же температуре и давлении; в топке газы можно считать идеальными
- давление воздуха изменяется с высотой в соответствии с законом гидростатики; изменением плотности воздуха с высотой можно пренебречь
- течение газов подчиняется уравнению Бернулли, согласно которому следующая величина одинакова во всех точках потока:

$$\frac{1}{2}\rho v^2(z) + \rho g z + p(z) = \text{const},$$

где ρ — плотность газа, $v(z)$ — его скорость, $p(z)$ — давление, а z — высота - изменением плотности газа по всей длине трубы можно пренебречь

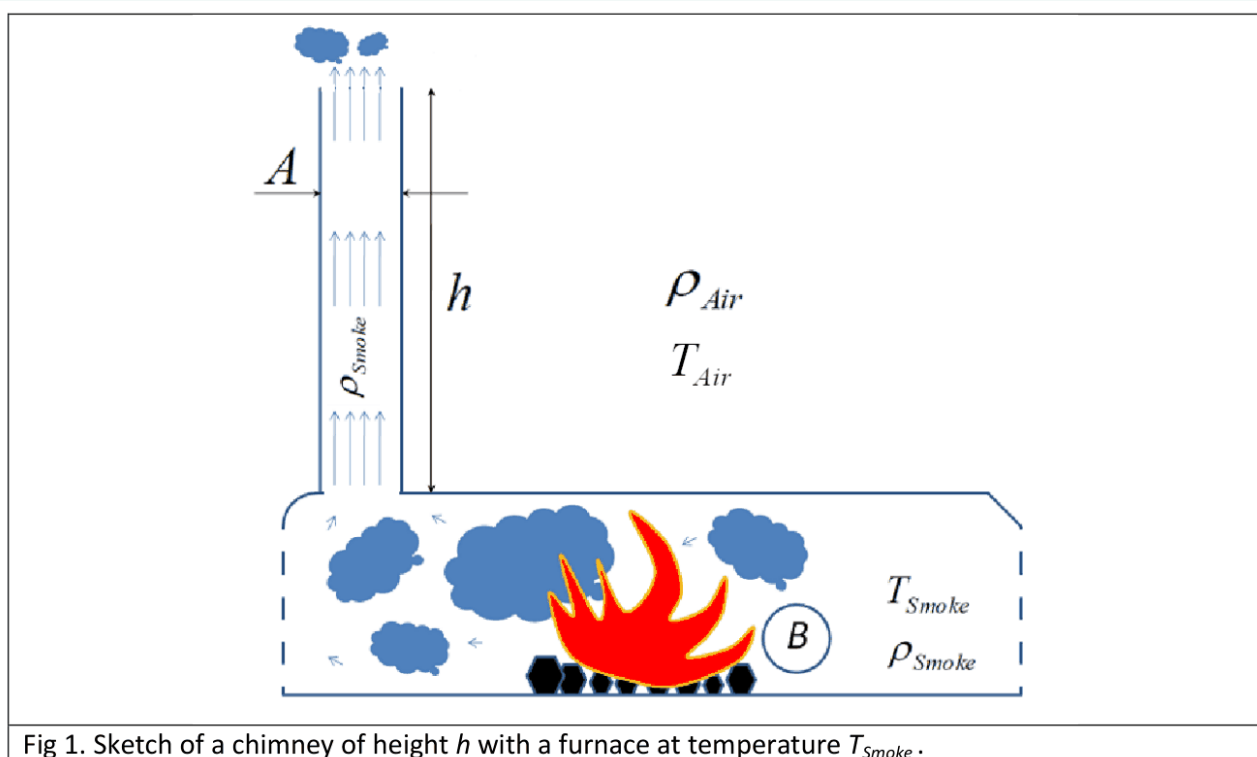


Fig 1. Sketch of a chimney of height h with a furnace at temperature T_{Smoke} .

Рис. 1. Схема дымовой трубы высотой h с топкой, температура которой равна T_{Smoke} .

Задание 1

а) Какова минимальная высота трубы, необходимая для её эффективной работы, то есть для отвода в атмосферу всего образующегося газа? Выразите результат через B , A , T_{Air} , $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $\Delta T = T_{Smoke} - T_{Air}$. **Важно: во всех последующих заданиях считайте, что высота трубы равна этой минимальной высоте. (3.5 балла)**

б) Предположим, что построены две трубы совершенно одинакового назначения. Площади их поперечных сечений одинаковы, но трубы предназначены для работы в разных частях света: одна — в холодных регионах при средней температуре атмосферы -30°C , а другая — в тёплых регионах при средней температуре атмосферы 30°C . Температура топки равна 400°C . Согласно расчётам, высота трубы, предназначенной для работы в холодных регионах, составляет 100 м. Какова высота другой трубы? (0.5 балла)

с) Как изменяется скорость газов по высоте трубы? Постройте схематический график, считая, что площадь поперечного сечения трубы не изменяется с высотой. Отметьте точку, в которой газы входят в трубу. (0.6 балла)

д) Как изменяется давление газов по высоте трубы? (0.5 балла)

Солнечная электростанция

Поток газов в трубе можно использовать для создания особого типа солнечной электростанции (солнечной трубы). Идея показана на рис. 2. Солнце нагревает воздух под коллектором площадью S , открытым по периметру для беспрепятственного притока воздуха (см. рис. 2). По мере того как нагретый воздух поднимается по трубе (тонкие сплошные стрелки), в коллектор из окружающей среды поступает новый холодный воздух (толстые пунктирные стрелки), обеспечивая непрерывный поток воздуха через электростанцию. Поток воздуха в трубе приводит в движение турбину, в результате чего вырабатывается электрическая энергия. Энергия солнечного излучения, поступающая за единицу времени на единицу горизонтальной площади коллектора, равна G .

Предположите, что вся эта энергия может быть использована для нагрева воздуха в коллекторе (удельная теплоёмкость воздуха равна c , а её зависимостью от температуры воздуха можно пренебречь). Определим КПД солнечной трубы как отношение кинетической энергии потока газа к солнечной энергии, поглощённой при нагреве воздуха перед его поступлением в трубу.

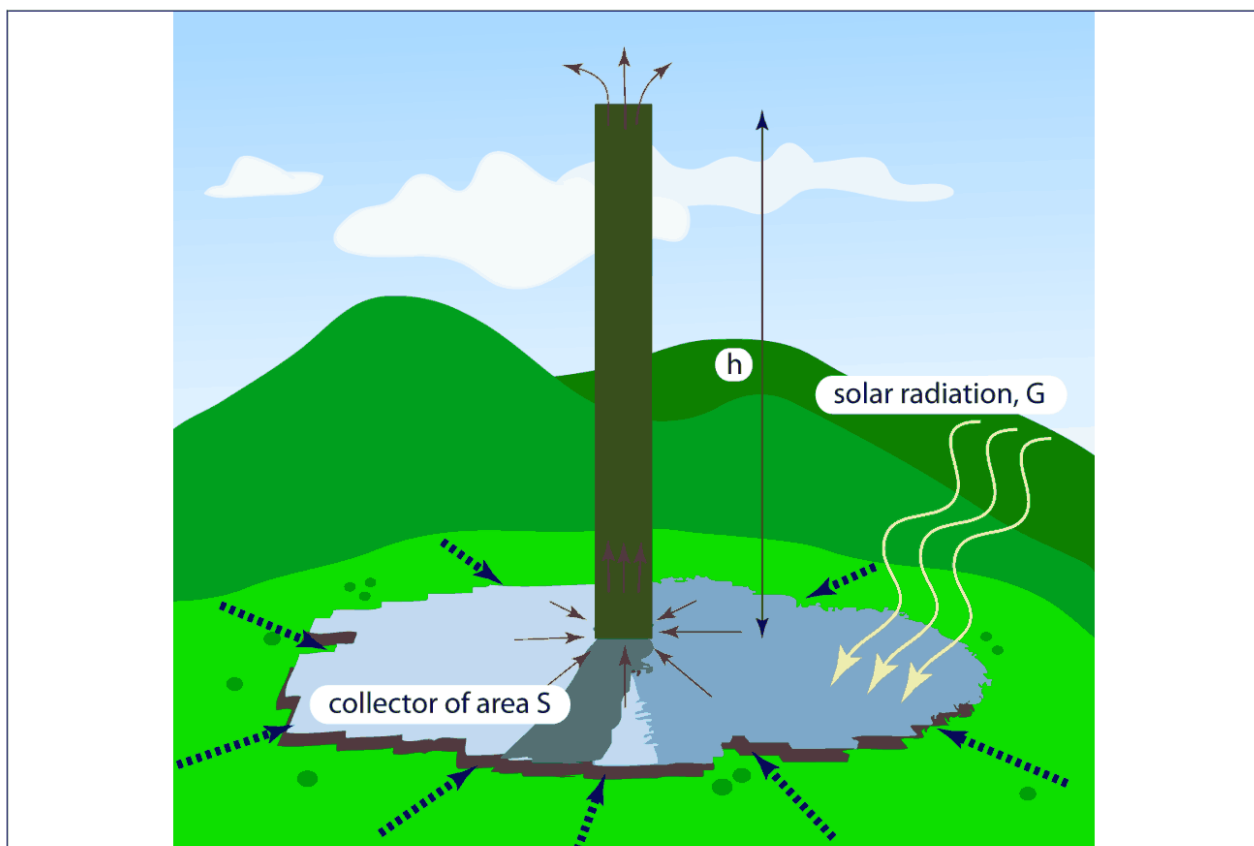


Fig 2. Sketch of a solar power plant.

Рис. 2. Схема солнечной электростанции.

Задание 2

- а) Каков КПД солнечной электростанции с вытяжной трубой? (2.0 балла)
- б) Постройте график зависимости КПД трубы от её высоты. (0.4 балла)

Прототип в Мансанаресе

Прототип трубы, построенный в Мансанаресе, Испания, имел высоту 195 m и радиус 5 m. Коллектор имеет форму круга диаметром 244 m. Удельная теплоёмкость воздуха при типичных условиях работы прототипа солнечной трубы составляет 1012 J/kg K, плотность горячего воздуха — около 0.9 kg/m³, а типичная температура атмосферы — $T_{Air} = 295$ K. В Мансанаресе мощность солнечного излучения на единицу горизонтальной поверхности в солнечный день обычно составляет 150 W/m².

Задание 3

- а) Каков КПД прототипа электростанции? Приведите численную оценку. (0.3 балла)
- б) Какую мощность мог бы вырабатывать прототип электростанции? (0.4 балла)
- в) Сколько энергии могла бы выработать электростанция за типичный солнечный день? (0.3 балла)

Задание 4

- а) На сколько повышается температура воздуха, поступающего из окружающей среды (холодный воздух) в трубу (тёплый воздух)? Запишите общую формулу и вычислите результат для прототипа трубы. (1.0 балла)
- б) Каков массовый расход воздуха через систему? (0.5 балла)

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Примем $z = 0$ на входе в трубу и $z = h$ на её выходе. Ниже ρ_h обозначает плотность дыма или нагретого воздуха.

- 1(a) При $\Delta T > 0$,

$$h_{\min} = \frac{B^2 T_{Air}}{2gA^2 \Delta T}.$$

- 1(b)

$$h_{\text{warm}} \simeq 145 \text{ m}.$$

- 1(c)

$$v(z) = \frac{B}{A} \quad (0 < z < h).$$

Скорость возрастает от практически нулевой в топке до B/A во входной области, а затем остаётся постоянной по всей длине трубы.

- 1(d)

$$p(z) = p_{Air}(h) + \rho_h g(h - z).$$

Давление линейно убывает с высотой с угловым коэффициентом $-\rho_h g$, достигая на выходе внешнего атмосферного давления.

- 2(a)

$$\eta = \frac{gh}{cT_{Air}}.$$

- 2(b) График зависимости η от h — прямая, проходящая через начало координат, с угловым коэффициентом $g/(cT_{Air})$.

- 3(a)

$$\eta = 0.00641 \simeq 0.64\%.$$

- 3(b) Идеальная доступная мощность равна

$$P \simeq 4.49 \times 10^4 \text{ W} \simeq 45 \text{ kW}.$$

- 3(c) При эффективной продолжительности освещения τ ,

$$E = P\tau.$$

За 12 h при указанной облучённости $E \simeq 0.54 \text{ MWh} = 1.9 \text{ GJ}$. Если указанная облучённость является средним значением за полные сутки, то результат за 24 h составляет $1.08 \text{ MWh} = 3.88 \text{ GJ}$.

- 4(a)

$$\Delta T = \left[\frac{(GS)^2 T_{Air}}{2gh \rho_h^2 A^2 c^2} \right]^{1/3} \simeq 9.1 \text{ K}.$$

- 4(b)

$$\dot{m} = \frac{GS}{c\Delta T} = \left[\frac{2gh(\rho_h A)^2 GS}{cT_{Air}} \right]^{1/3} \simeq 7.7 \times 10^2 \text{ kg s}^{-1}.$$

Решение

Обозначим $\rho_a = \rho_{Air}$, $\rho_h = \rho_{Smoke}$ и $p_0 = p_{Air}(0)$. Для солнечной трубы ρ_h обозначает плотность нагретого воздуха. Абсолютные температуры во всех формулах выражены в кельвинах.

1(a)

Труба работает за счёт естественной тяги: наружный воздух плотнее горячего газа, поэтому его давление убывает с высотой быстрее. В предельном режиме работы практически неподвижный газ в топке находится под атмосферным давлением p_0 . Это граничное условие для отвода газа без необходимости создавать избыточное давление в топке.

Согласно закону гидростатики, снаружи трубы

$$p_{Air}(h) = p_0 - \rho_a gh.$$

На открытом выходе давление газа равно местному атмосферному давлению. Уравнение Бернулли для топки, где скорость пренебрежимо мала, и выхода даёт

$$p_0 = p_{Air}(h) + \rho_h gh + \frac{1}{2} \rho_h v^2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} \rho_h v^2 = (\rho_a - \rho_h) gh.$$

Дым и воздух имеют одинаковую плотность при одинаковых температуре и давлении. Поэтому применение уравнения состояния идеального газа при общем давлении у основания даёт

$$\frac{\rho_a}{\rho_h} = \frac{T_{Smoke}}{T_{Air}} = 1 + \frac{\Delta T}{T_{Air}}.$$

Таким образом,

$$v^2 = 2gh \frac{\Delta T}{T_{Air}}.$$

Поскольку изменением плотности между топкой и трубой пренебрегают, объёмная пропускная способность трубы равна Av . Для отвода всего газа необходимо

$$Av \geq B.$$

При минимальной высоте выполняется равенство:

$$\left(\frac{B}{A} \right)^2 = 2gh_{\min} \frac{\Delta T}{T_{Air}}.$$

Отсюда

$$h_{\min} = \frac{B^2 T_{Air}}{2gA^2 \Delta T}.$$

Этот результат требует $\Delta T > 0$. При $B > 0$ и $\Delta T = 0$ никакая конечная высота не создаёт необходимой естественной тяги в рамках принятых предположений.

1(b)

Обе трубы имеют одинаковые B , A и температуру топки, поэтому

$$h \propto \frac{T_{Air}}{T_{Smoke} - T_{Air}}.$$

Соответствующие температуры и разности температур равны

$$\begin{aligned} T_c &= 243.15 \text{ K}, & T_w &= 303.15 \text{ K}, \\ \Delta T_c &= 430 \text{ K}, & \Delta T_w &= 370 \text{ K}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$h_w = h_c \frac{T_w}{T_c} \frac{\Delta T_c}{\Delta T_w} = (100 \text{ m}) \frac{303.15}{243.15} \frac{430}{370}.$$

Получаем

$$h_w = 144.9 \text{ m} \simeq 145 \text{ m}.$$

При более тёплом окружающем воздухе относительная разность плотностей меньше, поэтому требуется более высокая труба.

1(c)

Закон сохранения массы при установившемся течении даёт

$$\dot{m} = \rho_h A v(z).$$

Поскольку ρ_h и A постоянны по всей длине трубы, $v(z)$ также должна быть постоянной. При заданной минимальной высоте объёмный расход в точности равен B , поэтому

$$v(z) = \frac{B}{A} = \sqrt{\frac{2gh\Delta T}{T_{Air}}}.$$

Для построения требуемого схематического графика отложите z по горизонтальной оси, а v — по вертикальной. Отметьте вход в трубу при $z = 0$. Покажите быстрое возрастание скорости от пренебрежимо малой скорости в топке до B/A во входной области, за которым следует горизонтальная линия на уровне $v = B/A$ от входа до $z = h$. Если в идеализированной модели протяжённостью входной области пренебречь, ускорение в ней можно изобразить скачком при $z = 0$.

1(d)

Внутри трубы уравнение Бернулли имеет вид

$$\frac{1}{2}\rho_h v^2 + \rho_h g z + p(z) = \text{постоянная}.$$

Поскольку v постоянна,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_h g.$$

Используя граничное условие на выходе $p(h) = p_{Air}(h)$, получаем

$$p(z) = p_{Air}(h) + \rho_h g(h - z).$$

Эквивалентная запись:

$$p(z) = p_0 - \rho_a g h + \rho_h g(h - z).$$

Внешнее давление на высоте z равно $p_{Air}(z) = p_0 - \rho_a g z$. Вычитая, получаем

$$p(z) - p_{Air}(z) = -(\rho_a - \rho_h)g(h - z).$$

Таким образом, давление газа всюду внутри трубы ниже её выхода меньше давления окружающей атмосферы, а на выходе эти давления становятся равными.

Сразу после входа

$$p(0^+) = p_0 - (\rho_a - \rho_h)gh = p_0 - \frac{1}{2}\rho_h v^2.$$

Это понижение давления на входе сопровождается ускорением газа при переходе из топки в трубу. Далее давление линейно убывает с высотой.

2(a)

Рассмотрим массу m воздуха, нагретую в коллекторе на ΔT . Поглощённое количество теплоты равно

$$Q = mc\Delta T.$$

Кинетическая энергия этой массы воздуха в трубе равна

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Согласно определению в условии,

$$\eta = \frac{K}{Q} = \frac{v^2}{2c\Delta T}.$$

Применяя результат пункта 1(a),

$$v^2 = \frac{2gh\Delta T}{T_{Air}},$$

получаем

$$\boxed{\eta = \frac{gh}{cT_{Air}}}.$$

В рамках заданной модели КПД не зависит от повышения температуры, площади коллектора и площади поперечного сечения трубы. Он характеризует отношение доступной мощности потока кинетической энергии к поглощённой мощности солнечного излучения.

2(b)

При фиксированных T_{Air} и c ,

$$\eta(h) = \frac{g}{cT_{Air}}h.$$

На требуемом графике по горизонтальной оси откладывается h , а по вертикальной — η . Это прямая, проходящая через $(0, 0)$, с положительным угловым коэффициентом

$$\boxed{\frac{d\eta}{dh} = \frac{g}{cT_{Air}}}.$$

При удвоении высоты КПД удваивается. Эта линейная зависимость справедлива лишь в рамках приближений задачи; её не следует экстраполировать на высоты, при которых изменения плотности становятся существенными.

3(a)

Подставляя данные прототипа, получаем

$$\eta = \frac{(9.81 \text{ m s}^{-2})(195 \text{ m})}{(1012 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1})(295 \text{ K})} = 0.0064077.$$

Следовательно,

$$\boxed{\eta \simeq 0.64\%}.$$

3(b)

Радиус коллектора равен $244/2 = 122$ m, поэтому его площадь составляет

$$S = \pi(122 \text{ m})^2 = 4.67595 \times 10^4 \text{ m}^2.$$

Предполагается, что вся мощность падающего солнечного излучения расходуется на нагрев воздуха:

$$P_{\text{solar}} = GS = (150 \text{ W m}^{-2})(4.67595 \times 10^4 \text{ m}^2) = 7.01392 \times 10^6 \text{ W}.$$

Доступная мощность потока кинетической энергии равна

$$P = \eta GS = (0.0064077)(7.01392 \times 10^6 \text{ W}),$$

откуда

$$P = 4.4943 \times 10^4 \text{ W} \simeq 45 \text{ kW}.$$

Это идеальная мощность, доступная для преобразования согласно определению в задаче; дополнительные значения КПД турбины или генератора не заданы.

3(c)

При эффективной продолжительности освещения τ с указанной облучённостью

$$E = P\tau = \frac{ghGS}{cT_{\text{Air}}}\tau.$$

Таким образом, каждый час при указанных условиях даёт приблизительно 44.9 kWh.

Если принять продолжительность типичного солнечного дня равной 12 h при указанной облучённости,

$$E = (44.943 \text{ kW})(12 \text{ h}) = 539.3 \text{ kWh},$$

или

$$E \simeq 0.54 \text{ MWh} \simeq 1.9 \times 10^9 \text{ J}.$$

Если же 150 W m^{-2} понимать как среднее значение за полные сутки продолжительностью 24 h,

$$E = (44.943 \text{ kW})(24 \text{ h}) \simeq 1.08 \text{ MWh} = 3.88 \times 10^9 \text{ J}.$$

В условии не указаны ни эффективная продолжительность освещения, ни способ усреднения.

4(a)

В установившемся режиме мощность солнечного нагрева равна количеству теплоты, уносимому воздухом за единицу времени:

$$GS = \dot{m} c \Delta T.$$

Закон сохранения массы даёт

$$\dot{m} = \rho_h A v.$$

Объединяя эти соотношения с выражением для скорости в трубе,

$$v = \sqrt{\frac{2gh\Delta T}{T_{\text{Air}}}},$$

получаем

$$GS = \rho_h A c \Delta T \sqrt{\frac{2gh\Delta T}{T_{Air}}} = \rho_h A c \sqrt{\frac{2gh}{T_{Air}}} (\Delta T)^{3/2}.$$

Выражая ΔT , получаем

$$\Delta T = \left[\frac{(GS)^2 T_{Air}}{2gh \rho_h^2 A^2 c^2} \right]^{1/3}.$$

Для прототипа

$$A = \pi(5 \text{ m})^2 = 78.5398 \text{ m}^2.$$

Используя заданную плотность горячего воздуха, получаем

$$\Delta T = \left[\frac{(7.01392 \times 10^6)^2 (295)}{2(9.81)(195)(0.9)^2 (78.5398)^2 (1012)^2} \right]^{1/3} \text{ K}.$$

Следовательно,

$$\Delta T = 9.05 \text{ K} \simeq 9.1 \text{ K}.$$

Воздух поступает в трубу при температуре приблизительно 304 K.

4(b)

Из теплового баланса

$$\dot{m} = \frac{GS}{c\Delta T}.$$

Численно

$$\dot{m} = \frac{7.01392 \times 10^6 \text{ W}}{(1012 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1})(9.0503 \text{ K})} = 765.8 \text{ kg s}^{-1}.$$

Таким образом,

$$\dot{m} \simeq 7.7 \times 10^2 \text{ kg s}^{-1}.$$

Исключая ΔT , также получаем общее выражение

$$\dot{m} = \left[\frac{2gh(\rho_h A)^2 GS}{cT_{Air}} \right]^{1/3}.$$

Для численной проверки найдём соответствующую скорость:

$$v = \sqrt{\frac{2(9.81)(195)(9.0503)}{295}} = 10.83 \text{ m s}^{-1},$$

что даёт $\rho_h A v = 765.8 \text{ kg s}^{-1}$ и мощность потока кинетической энергии $\frac{1}{2} \dot{m} v^2 = 44.94 \text{ kW}$, в согласии с пунктом 3(b).

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Простая модель атомного ядра

Введение

Хотя атомные ядра являются квантовыми объектами, ряд феноменологических законов, описывающих их основные свойства (например, радиус или энергию связи), можно вывести из простых предположений: (i) ядра состоят из нуклонов (то есть протонов и нейтронов); (ii) сильное ядерное взаимодействие, удерживающее эти нуклоны вместе, имеет очень малый радиус действия (оно действует только между соседними нуклонами); (iii) число протонов (Z) в данном ядре приблизительно равно числу нейтронов (N), то есть $Z \approx N \approx A/2$, где A — полное число нуклонов ($A \gg 1$). **Важно: используйте эти предположения в заданиях 1–4 ниже.**

Задание 1 — Атомное ядро как плотно упакованная система нуклонов

В простой модели атомное ядро можно представить как шар, состоящий из плотно упакованных нуклонов [см. рис. 1(a)], причём нуклоны представляют собой твёрдые шарики радиуса $r_N = 0.85 \text{ fm}$ ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$). Ядерная сила действует только между двумя соприкасающимися нуклонами. Объём ядра V больше суммарного объёма всех нуклонов AV_N , где $V_N = \frac{4}{3}r_N^3\pi$. Отношение $f = AV_N/V$ называется коэффициентом упаковки и определяет долю пространства, заполненную ядерным веществом, которую можно выразить в процентах.

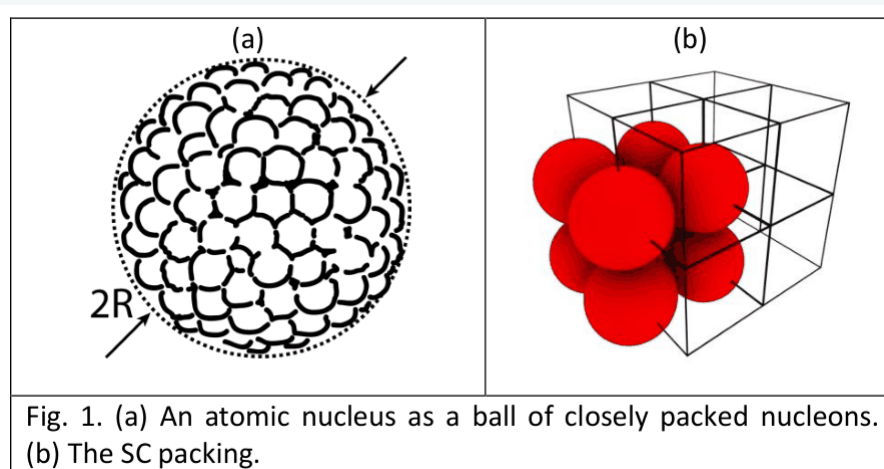


Fig. 1. (a) An atomic nucleus as a ball of closely packed nucleons. (b) The SC packing.

Рис. 1. (a) Атомное ядро как шар из плотно упакованных нуклонов. (b) Простая кубическая (SC) упаковка.

а) Вычислите, каким был бы коэффициент упаковки f , если бы нуклоны располагались в «простой кубической» (SC) кристаллической решётке, в которой центр каждого нуклона находится в узле бесконечной кубической решётки [см. рис. 1(b)]. (0.3 балла)

Важно: во всех последующих заданиях считайте, что фактический коэффициент упаковки ядер равен значению, полученному в задании 1а. Если вам не удалось его вычислить, в последующих заданиях используйте $f = 1/2$.

б) Оцените среднюю плотность массы ρ_m , плотность заряда ρ_c и радиус R ядра, содержащего A нуклонов. Средняя масса нуклона равна $1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. (1.0 балла)

Задание 2 — Энергия связи атомных ядер — объёмный и поверхностный члены

Энергия связи ядра — это энергия, необходимая для разделения его на отдельные нуклоны; она обусловлена главным образом ядерными силами притяжения между каждым нуклоном и его соседями. Если данный нуклон не находится на поверхности ядра, его вклад в полную энергию связи составляет $a_V = 15.8 \text{ MeV}$ ($1 \text{ MeV} = 1.602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$). Вклад одного поверхностного нуклона в энергию связи приблизительно равен $a_V/2$. Выразите энергию связи E_b ядра, содержащего A нуклонов, через A , a_V и f , включив поверхностную поправку. (1.9 балла)

Задание 3 — Электростатическое (кулоновское) влияние на энергию связи

Электростатическая энергия однородно заряженного шара (радиуса R с полным зарядом Q_0) равна

$$U_c = \frac{3Q_0^2}{20\pi\epsilon_0 R},$$

где $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$.

а) Примените эту формулу, чтобы найти электростатическую энергию ядра. В ядре каждый протон действует кулоновской силой только на остальные протоны, но не на самого себя. Это можно учесть, заменив в полученной формуле $Z^2 \rightarrow Z(Z - 1)$. Используйте эту поправку в последующих заданиях. (0.4 балла)

б) Запишите полную формулу для энергии связи, включающую основной (объёмный) член, поверхностную поправку и полученную электростатическую поправку. (0.3 балла)

Задание 4 — Деление тяжёлых ядер

Деление — это ядерный процесс, при котором ядро распадается на меньшие части (более лёгкие ядра). Предположим, что ядро, содержащее A нуклонов, делится только на две равные части, как показано на рис. 2.

а) Вычислите полную кинетическую энергию продуктов деления E_{kin} , когда центры двух более лёгких ядер находятся на расстоянии $d \geq 2R(A/2)$, где $R(A/2)$ — их радиус. Исходное большое ядро первоначально покоилось. (1.3 балла)

б) Положите $d = 2R(A/2)$ и вычислите значение выражения для E_{kin} , полученного в пункте а), при $A = 100, 150, 200$ и 250 (выразите результаты в МэВ). Оцените значения A , при которых деление возможно в описанной выше модели. (1.0 балла)

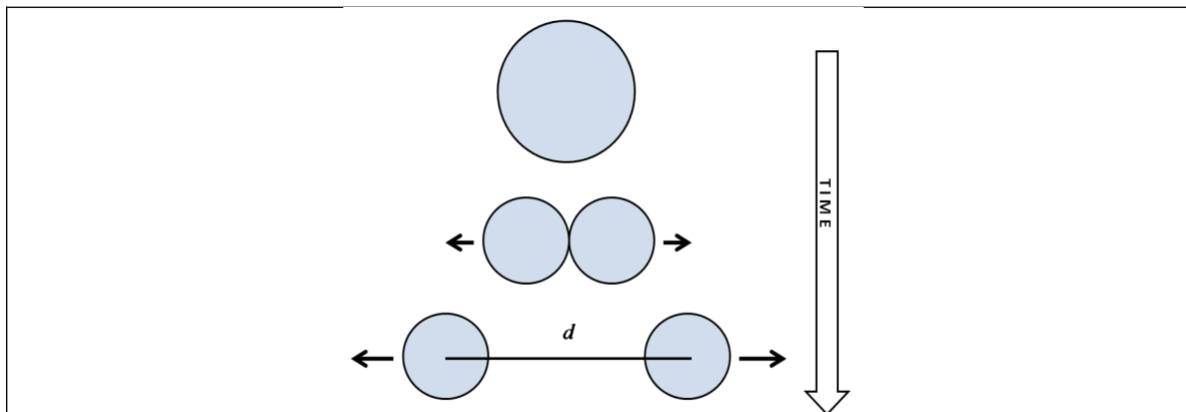


Fig. 2. A schematic description of nuclear fission in our model.

Рис. 2. Схематическое изображение деления ядра в нашей модели.

Задание 5 — Реакции передачи

а) В современной физике энергетические характеристики ядер и ядерных реакций описываются через массы. Например, если ядро (с нулевой скоростью) находится в возбуждённом состоянии с энергией E_{exc} относительно основного состояния, его масса равна $m = m_0 + E_{\text{exc}}/c^2$, где m_0 — его масса в основном состоянии в покое. Ядерная реакция $^{16}\text{O} + ^{54}\text{Fe} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^{58}\text{Ni}$ является примером так называемых «реакций передачи», в которых часть одного ядра («кластер») передаётся другому (см. рис. 3). В нашем примере передаваемая часть — это ^4He -кластер (α -частица). Реакции передачи происходят с максимальной вероятностью, если скорость продукта реакции, образовавшегося из налетающего ядра (в нашем случае ^{12}C), совпадает как по величине, так и по направлению со скоростью налетающего ядра (в нашем случае ^{16}O). Ядро-мишень ^{54}Fe первоначально покоится. В ходе реакции ^{58}Ni переходит в одно из своих возбуждённых состояний. Найдите энергию возбуждения этого состояния (и выразите её в МэВ), если кинетическая энергия налетающего ядра ^{16}O равна 50 MeV. Скорость света равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. (2.2 балла)

1.	$M(^{16}\text{O})$	15.99491 а.е.м.
2.	$M(^{54}\text{Fe})$	53.93962 а.е.м.
3.	$M(^{12}\text{C})$	12.00000 а.е.м.
4.	$M(^{58}\text{Ni})$	57.93535 а.е.м.

Таблица 1. Массы покоя участников реакции в основных состояниях.

1 а. м. у. = $1.6605 \cdot 10^{-27}$ kg.

б) Ядро ^{58}Ni , образовавшееся в возбуждённом состоянии, рассмотренном в пункте а), переходит в основное состояние, испуская гамма-фотон в направлении своего движения. Рассмотрите этот переход в системе отсчёта, в которой ^{58}Ni покоится, и найдите энергию отдачи ^{58}Ni (то есть кинетическую энергию, которую ^{58}Ni приобретает после испускания фотона). Какова энергия фотона в этой системе? Какова энергия фотона в лабораторной системе отсчёта (то есть какую энергию фотона измерит детектор, расположенный в направлении движения ядра ^{58}Ni)? (1.6 балла)

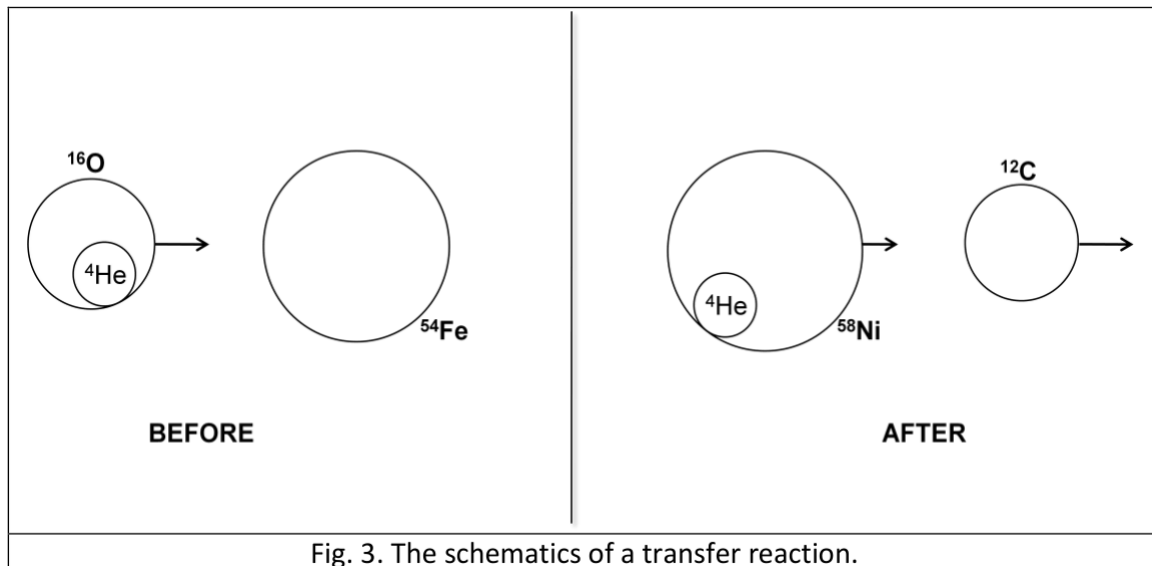


Fig. 3. The schematics of a transfer reaction.

Рис. 3. Схема реакции передачи.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Для краткости введём обозначения

$$S(A) = A - \left(A^{1/3} - 2f^{1/3}\right)^3, \quad r_0 = r_N f^{-1/3} = 1.0546 \text{ fm},$$

и

$$a_C = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 r_0} = 0.81955 \text{ MeV}.$$

- 1(a).

$$f = \frac{\pi}{6} \approx 0.5236 = 52.36\%.$$

- 1(b).

$$\rho_m \approx 3.40 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}, \quad \rho_c \approx 1.63 \times 10^{25} \text{ C m}^{-3}$$

$$R = r_N (A/f)^{1/3} \approx 1.05 A^{1/3} \text{ fm}.$$

- 2.

$$E_b^{(\text{nuc})} = a_V \left[A - \frac{S(A)}{2} \right] = a_V \left[A - 3f^{1/3} A^{2/3} + 6f^{2/3} A^{1/3} - 4f \right].$$

- 3(a).

$$U_c = \frac{a_C Z(Z-1)}{A^{1/3}} \simeq \frac{a_C}{4} \left(A^{5/3} - 2A^{2/3} \right).$$

- **3(b).** Обозначая полную энергию связи через $B(A)$, получаем

$$B(A) = a_V \left[A - 3f^{1/3} A^{2/3} + 6f^{2/3} A^{1/3} - 4f \right] - \frac{a_C}{4} \left(A^{5/3} - 2A^{2/3} \right).$$

- **4(a).**

$$E_{\text{kin}}(d) = 2B(A/2) - B(A) - \frac{e^2 A^2}{64\pi\epsilon_0 d}.$$

- **4(b).** При соприкосновении вычисленные энергии для $A = 100, 150, 200, 250$ равны соответственно

$$-29.3, \quad -24.9, \quad -6.77, \quad +23.6 \text{ MeV}.$$

Порог для тяжёлых ядер составляет приблизительно $A_{\text{crit}} \simeq 213$. Из четырёх примеров только при $A = 250$ возможно деление первоначально покоящегося ядра с прохождением через конфигурацию соприкасающихся фрагментов.

- **5(a).**

$$E_{\text{exc}} \approx 10.86 \text{ MeV}.$$

- **5(b).**

$$T_{\text{recoil}} \approx 1.09 \text{ keV}, \quad E_{\gamma}^* \approx 10.86 \text{ MeV}, \quad E_{\gamma, \text{lab}} \approx 10.92 \text{ MeV}.$$

Здесь звёздочка обозначает систему покоя возбуждённого ядра никеля до испускания фотона.

Решение

1(a). Коэффициент упаковки

При простой кубической упаковке соседние шары соприкасаются вдоль ребра куба, поэтому период решётки равен $2r_N$. Кубическая ячейка содержит восемь нуклонов в вершинах, каждый из которых принадлежит восьми ячейкам: на одну ячейку приходится один целый нуклон.

Следовательно,

$$f = \frac{\text{объём нуклонов в одной ячейке}}{\text{объём ячейки}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_N^3}{(2r_N)^3} = \frac{\pi}{6}.$$

1(b). Плотности и радиус ядра

Из определения коэффициента упаковки получаем

$$V = \frac{AV_N}{f} = \frac{4\pi r_N^3 A}{3f}.$$

Приравнявая это выражение к $4\pi R^3/3$, находим

$$R = r_N \left(\frac{A}{f} \right)^{1/3} = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1.0546 \text{ fm}.$$

С точностью данной модели масса ядра равна Am_N , где $m_N = 1.67 \times 10^{-27}$ kg. Таким образом,

$$\rho_m = \frac{Am_N}{V} = \frac{3fm_N}{4\pi r_N^3}.$$

При $f = \pi/6$

$$\rho_m = \frac{m_N}{8r_N^3} = 3.40 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}.$$

С учётом $Z \simeq A/2$ заряд ядра приблизительно равен $Ae/2$. Элементарный заряд, соответствующий заданному коэффициенту перевода электронвольт в джоули, равен $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C. Поэтому

$$\rho_c = \frac{Ae/2}{V} = \frac{3fe}{8\pi r_N^3} = \frac{e}{16r_N^3},$$

откуда

$$\rho_c = 1.63 \times 10^{25} \text{ C m}^{-3}.$$

Обе средние плотности не зависят от A .

2. Объёмный вклад и полный вклад поверхностного слоя

Концентрация нуклонов равна

$$n = \frac{A}{V} = \frac{f}{V_N}.$$

Для указанного поверхностного слоя толщиной $2r_N$ объём равен

$$V_{\text{surface}} = \frac{4\pi}{3} [R^3 - (R - 2r_N)^3].$$

Следовательно, в рамках непрерывной модели упаковки число поверхностных нуклонов равно

$$\begin{aligned} S(A) &= \frac{f}{r_N^3} [R^3 - (R - 2r_N)^3] \\ &= A - f \left[\left(\frac{A}{f} \right)^{1/3} - 2 \right]^3 \\ &= \boxed{A - \left(A^{1/3} - 2f^{1/3} \right)^3}. \end{aligned}$$

Это выражение применимо при $R \geq 2r_N$, что выполняется для рассматриваемых здесь больших ядер. Раскрывая скобки без отбрасывания каких-либо членов, получаем

$$S(A) = 6f^{1/3}A^{2/3} - 12f^{2/3}A^{1/3} + 8f.$$

Внутри ядра находятся $A - S(A)$ нуклонов, каждый из которых даёт вклад a_V , а на поверхности — $S(A)$ нуклонов, каждый из которых даёт вклад $a_V/2$. Поэтому

$$E_b^{(\text{nuc})} = a_V[A - S(A)] + \frac{a_V}{2}S(A),$$

или

$$E_b^{(\text{nuc})} = a_V \left[A - 3f^{1/3} A^{2/3} + 6f^{2/3} A^{1/3} - 4f \right].$$

Численно

$$\frac{E_b^{(\text{nuc})}}{\text{MeV}} = 15.8A - 38.2042A^{2/3} + 61.5849A^{1/3} - 33.0914.$$

Член с $A^{1/3}$ и постоянный член сохраняются во всех последующих вычислениях.

3(a). Собственная кулоновская энергия

Подставляя $Q_0 = Ze$ в данную формулу и затем вводя предписанную поправку на самодействие, получаем

$$U_c = \frac{3e^2 Z(Z-1)}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

Поскольку $R = r_0 A^{1/3}$, введём обозначение

$$a_C = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 r_0}.$$

Из заданных постоянных получаем

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44049 \text{ MeV fm}, \quad a_C = 0.81955 \text{ MeV}.$$

Таким образом,

$$U_c = \frac{a_C Z(Z-1)}{A^{1/3}}.$$

Используя $Z \simeq A/2$ и сохраняя вычитание единицы, имеем

$$Z(Z-1) \simeq \frac{A(A-2)}{4},$$

и поэтому

$$U_c(A) = \frac{a_C}{4} \left(A^{5/3} - 2A^{2/3} \right).$$

3(b). Полная энергия связи

Положительная электростатическая энергия уменьшает энергию, необходимую для разделения ядра на нуклоны. Поэтому

$$B(A) = E_b^{(\text{nuc})}(A) - U_c(A),$$

откуда

$$B(A) = a_V \left[A - 3f^{1/3} A^{2/3} + 6f^{2/3} A^{1/3} - 4f \right] - \frac{a_C}{4} \left(A^{5/3} - 2A^{2/3} \right).$$

4(a). Кинетическая энергия при расстоянии d

Каждый фрагмент содержит $A/2$ нуклонов и имеет заряд, приблизительно равный $Ae/4$. Для двух неперекрывающихся сферически симметричных распределений заряда энергия их электростатического взаимодействия равна энергии взаимодействия точечных зарядов, расположенных в их центрах:

$$U_{12}(d) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Ae/4)^2}{d} = \frac{e^2 A^2}{64\pi\epsilon_0 d}.$$

Поправка $Z(Z-1)$ уже учтена в собственной энергии каждого ядра. Она не применяется к этому взаимодействию между двумя различными совокупностями протонов.

Примем разделённые свободные нуклоны за общий нулевой уровень внутренней энергии.

Энергия исходного ядра равна $-B(A)$, а полная энергия двух разделённых фрагментов равна

$$-2B(A/2) + U_{12}(d) + E_{\text{kin}}(d).$$

Следовательно, из закона сохранения энергии получаем

$$E_{\text{kin}}(d) = 2B(A/2) - B(A) - U_{12}(d).$$

Раскрывая выражения для энергий связи, находим

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}}(d) = & -3a_V f^{1/3} (2^{1/3} - 1) A^{2/3} \\ & + 6a_V f^{2/3} (2^{2/3} - 1) A^{1/3} - 4a_V f \\ & + \frac{a_C}{4} \left[(1 - 2^{-2/3}) A^{5/3} + 2(2^{1/3} - 1) A^{2/3} \right] \\ & - \frac{e^2 A^2}{64\pi\epsilon_0 d}. \end{aligned}$$

Объёмные вклады сокращаются, поскольку полное число нуклонов сохраняется. По мере удаления фрагментов друг от друга энергия их электростатического взаимодействия уменьшается, а их полная кинетическая энергия увеличивается.

4(b). Энергии при соприкосновении и порог деления

При соприкосновении

$$d_0 = 2R(A/2) = 2^{2/3} r_0 A^{1/3}.$$

Используя $e^2/(4\pi\epsilon_0 r_0) = 5a_C/3$, получаем

$$U_{12}(d_0) = \frac{5a_C}{48} 2^{2/3} A^{5/3}.$$

Объединяя это с выражением выше, находим

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}}(d_0) = & \frac{a_C}{4} \left(1 - \frac{17}{12} 2^{-2/3} \right) A^{5/3} \\ & + (2^{1/3} - 1) \left(\frac{a_C}{2} - 3a_V f^{1/3} \right) A^{2/3} \\ & + 6a_V f^{2/3} (2^{2/3} - 1) A^{1/3} - 4a_V f. \end{aligned}$$

Численно

$$\frac{E_{\text{kin}}(d_0)}{\text{MeV}} = 0.0220368 A^{5/3} - 9.82357 A^{2/3} + 36.1750 A^{1/3} - 33.0914.$$

A	Расстояние при соприкосновении d_0 (фм)	$E_{\text{kin}}(d_0)$ (МэВ)
100	7.77	-29.3
150	8.89	-24.9
200	9.79	-6.77

A	Расстояние при соприкосновении d_0 (фм)	$E_{\text{kin}}(d_0)$ (МэВ)
250	10.55	+23.6

Отрицательная вычисленная кинетическая энергия означает, что при принятом энергетическом балансе конфигурация соприкасающихся фрагментов недостижима из первоначально невозбуждённого ядра.

Для тяжёлых ядер решение уравнения $E_{\text{kin}}(d_0) = 0$ даёт

$$A_{\text{crit}} \simeq 213.0.$$

Таким образом, модель допускает деление с прохождением через конфигурацию соприкасающихся фрагментов приблизительно при

$$A \gtrsim 213.$$

Среди четырёх указанных ядер только $A = 250$ удовлетворяет этому условию. Если конфигурация соприкасающихся фрагментов достижима, дальнейшее их удаление друг от друга высвобождает дополнительную кулоновскую энергию.

5(a). Энергия возбуждения в реакции передачи

Пусть m_1, m_2, m_3, m_4 обозначают приведённые в таблице массы кислорода, железа, углерода и никеля в основных состояниях соответственно. Пусть

$$m_4^* = m_4 + \frac{E_{\text{exc}}}{c^2}$$

— масса возбуждённого ядра никеля.

Используя заданные постоянные, получаем

$$1 \text{ а. м. у. } c^2 = \frac{(1.6605 \times 10^{-27})(3 \times 10^8)^2}{1.602 \times 10^{-13}} \text{ MeV} = 932.865 \text{ MeV}.$$

Энергия реакции для основных состояний равна

$$\begin{aligned} Q &= (m_1 + m_2 - m_3 - m_4)c^2 \\ &= (15.99491 + 53.93962 - 12.00000 - 57.93535)(932.865) \text{ MeV} \\ &= -0.764949 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Можно использовать точную релятивистскую кинематику. Кислород и углерод имеют одинаковую скорость v , а значит, одинаковый лоренц-фактор

$$\gamma = 1 + \frac{50 \text{ MeV}}{m_1 c^2}, \quad \beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \gamma^{-2}}.$$

Законы сохранения энергии и импульса дают энергию и импульс возбуждённого ядра никеля:

$$E_4^{\text{lab}} = \gamma(m_1 - m_3)c^2 + m_2 c^2, \quad p_4 = \gamma(m_1 - m_3)v.$$

Следовательно, его инвариантная энергия покоя удовлетворяет соотношению

$$(m_4^* c^2)^2 = (E_4^{\text{lab}})^2 - (p_4 c)^2.$$

Обозначая $\Delta m = m_1 - m_3$ и используя $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$, получаем

$$m_4^* = \sqrt{m_2^2 + \Delta m^2 + 2\gamma m_2 \Delta m}.$$

Следовательно,

$$E_{\text{exc}} = c^2 \left[\sqrt{m_2^2 + (m_1 - m_3)^2 + 2\gamma m_2(m_1 - m_3)} - m_4 \right].$$

Численно

$$E_{\text{exc}} = 10.86074 \dots \text{ MeV} \approx 10.86 \text{ MeV}.$$

Для проверки энергетического баланса приведём кинетические энергии продуктов реакции:

$$T_C = \frac{m_3}{m_1}(50 \text{ MeV}) = 37.51193 \text{ MeV},$$

$$T_{\text{Ni}} = 0.86237 \text{ MeV}.$$

Они удовлетворяют соотношению

$$E_{\text{exc}} = 50 + Q - T_C - T_{\text{Ni}}.$$

Обычное нерелятивистское приближение

$$T_{\text{Ni}} \simeq \frac{(m_1 - m_3)^2}{m_1 m_4}(50 \text{ MeV}),$$

дало бы $E_{\text{exc}} \simeq 10.862 \text{ MeV}$, то есть тот же результат с указанной точностью.

Для использования в пункте (b) найдём скорость возбуждённого ядра никеля:

$$\beta_4 = \frac{V}{c} = \frac{p_4 c}{E_4^{\text{lab}}} = \frac{\gamma(m_1 - m_3)\beta}{m_2 + \gamma(m_1 - m_3)} = 0.00564849,$$

так что $V \approx 1.69 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$.

5(b). Энергия отдачи и энергия фотона

Сначала рассмотрим систему покоя возбуждённого ядра никеля. Закон сохранения импульса требует, чтобы после испускания фотона ядро никеля приобрело импульс, направленный противоположно импульсу фотона, с модулем

$$p_{\text{recoil}} = \frac{E_{\gamma}^*}{c}.$$

Положим

$$W = m_4 c^2, \quad E = E_{\text{exc}}.$$

Тогда закон сохранения энергии даёт

$$W + E = E_{\gamma}^* + \sqrt{W^2 + (E_{\gamma}^*)^2}.$$

Решая это уравнение, получаем

$$E_{\gamma}^* = \frac{(W + E)^2 - W^2}{2(W + E)} = E - \frac{E^2}{2(W + E)}.$$

Таким образом, кинетическая энергия отдачи равна

$$T_{\text{recoil}} = E - E_{\gamma}^* = \frac{E^2}{2(W + E)} \simeq \frac{E^2}{2W}.$$

Последнее приближение справедливо, поскольку $E \ll W$; оно эквивалентно нерелятивистскому выражению для энергии отдачи $p_{\text{recoil}}^2/(2m_4)$.

Здесь

$$W = 54045.8700 \text{ MeV}.$$

Используя энергию возбуждения из пункта (а), получаем

$$T_{\text{recoil}} = 0.00109104 \text{ MeV} \approx 1.09 \text{ keV},$$

и

$$E_{\gamma}^* = 10.85965 \dots \text{ MeV} \approx 10.86 \text{ MeV}.$$

Дополнительные цифры показывают малое уменьшение энергии из-за отдачи.

При испускании вперёд преобразование Лоренца для энергии фотона при переходе в лабораторную систему даёт

$$E_{\gamma,\text{lab}} = \Gamma_4 (E_{\gamma}^* + V p_{\gamma}^*) = \Gamma_4 E_{\gamma}^* (1 + \beta_4),$$

где $\Gamma_4 = (1 - \beta_4^2)^{-1/2}$. Следовательно,

$$E_{\gamma,\text{lab}} = E_{\gamma}^* \sqrt{\frac{1 + \beta_4}{1 - \beta_4}}.$$

Доплеровский множитель для испускания вперёд равен 1.00566453, поэтому

$$E_{\gamma,\text{lab}} = 10.92117 \dots \text{ MeV} \approx 10.92 \text{ MeV}.$$

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.