

IPhO 2010

Problemas teóricos y soluciones · Zagreb, Croacia · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/2010/

Problema 1: Imagen de una carga en un objeto metálico

Introducción – Método de las imágenes

Una carga puntual q se sitúa en las proximidades de una esfera metálica conectada a tierra de radio R [véase la Fig. 1(a)] y, como consecuencia, se induce una distribución de carga superficial sobre la esfera. Calcular el campo eléctrico y el potencial debidos a la distribución de carga superficial es una tarea sumamente difícil. Sin embargo, el cálculo puede simplificarse considerablemente utilizando el denominado método de las imágenes. En este método, el campo eléctrico y el potencial producidos por la carga distribuida sobre la esfera pueden representarse como el campo eléctrico y el potencial de una única carga puntual q' situada en el interior de la esfera (no es necesario demostrarlo). Nota: **El campo eléctrico de esta carga imagen q' reproduce el campo eléctrico y el potencial únicamente en el exterior de la esfera (incluida su superficie).**

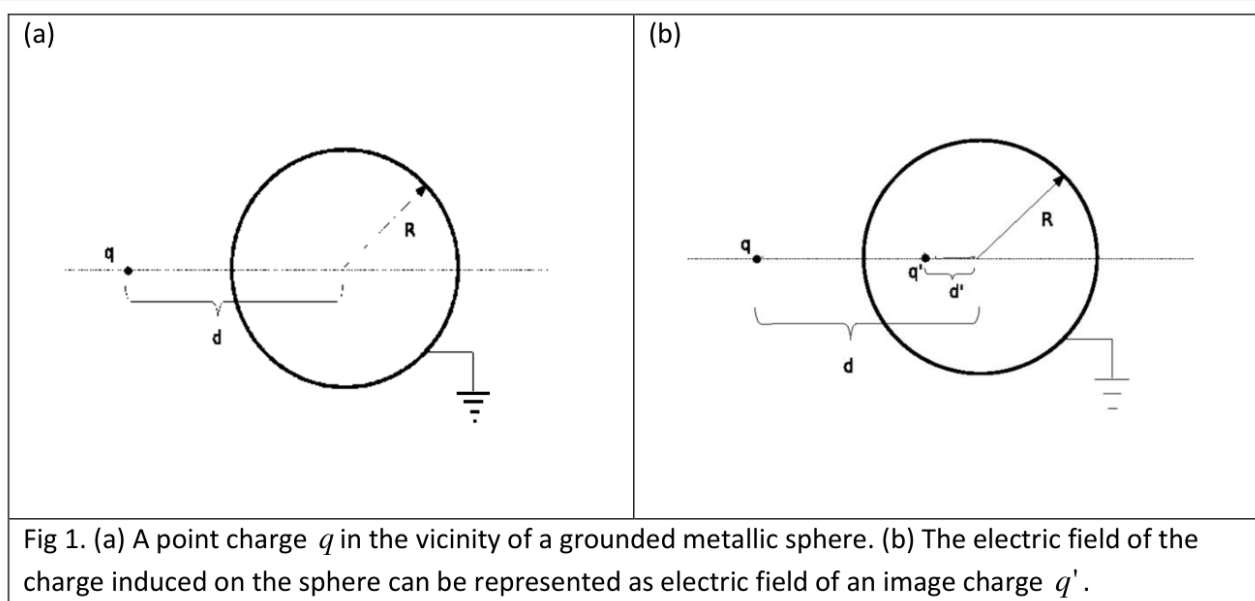


Fig. 1. (a) Una carga puntual q en las proximidades de una esfera metálica conectada a tierra. (b) El campo eléctrico de la carga inducida sobre la esfera puede representarse como el campo eléctrico de una carga imagen q' .

Tarea 1 – La carga imagen

La simetría del problema exige que la carga q' se sitúe sobre la recta que une la carga puntual q y el centro de la esfera [véase la Fig. 1(b)].

- ¿Cuál es el valor del potencial en la esfera? (0.3 puntos)
- Expresa q' y la distancia d' de la carga q' al centro de la esfera en función de q , d y R . (1.9 puntos)
- Halle el módulo de la fuerza que actúa sobre la carga q . ¿Es repulsiva la fuerza? (0.5 puntos)

Tarea 2 – Apantallamiento de un campo electrostático

Considere una carga puntual q situada a una distancia d del centro de una esfera metálica conectada a tierra de radio R . Nos interesa determinar cómo afecta la esfera metálica conectada a tierra al campo eléctrico en el punto A , situado al otro lado de la esfera (véase la Fig. 2). El punto A se encuentra sobre la recta que une la carga q y el centro de la esfera; su distancia a la carga puntual q es r .

- Halle el vector campo eléctrico en el punto A . (0.6 puntos)
- Para una distancia muy grande $r \gg d$, halle la expresión del campo eléctrico utilizando la aproximación $(1 + a)^{-2} \approx 1 - 2a$, donde $a \ll 1$. (0.6 puntos)
- ¿En qué límite de d apantalla por completo la esfera metálica conectada a tierra el campo de la carga q , de modo que el campo eléctrico en el punto A sea exactamente cero? (0.3 puntos)

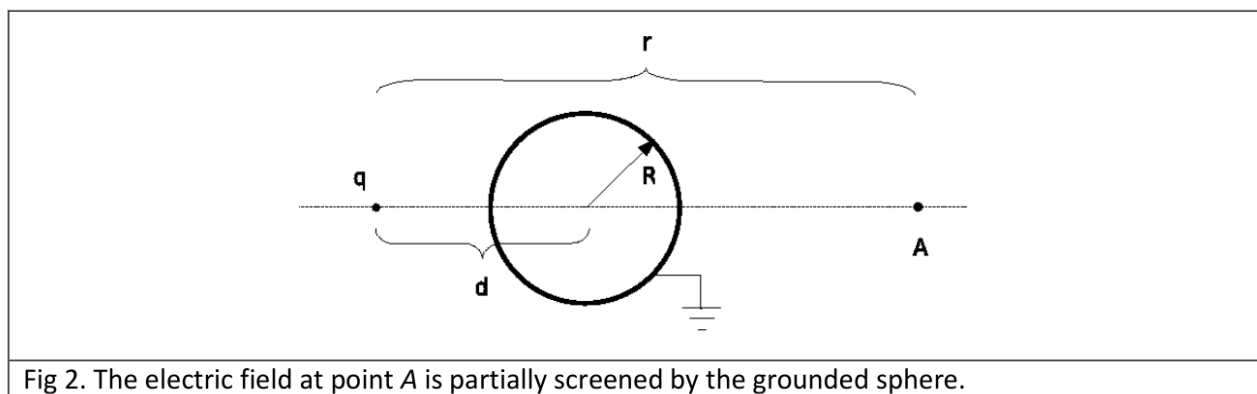


Fig. 2. El campo eléctrico en el punto A está parcialmente apantallado por la esfera conectada a tierra.

Tarea 3 – Pequeñas oscilaciones en el campo eléctrico de la esfera metálica conectada a tierra

Una carga puntual q de masa m está suspendida de un hilo de longitud L sujeto a una pared, en las proximidades de la esfera metálica conectada a tierra. En su análisis, ignore todos los efectos electrostáticos de la pared. La carga puntual constituye un péndulo simple (véase la Fig. 3). El punto en el que el hilo está sujeto a la pared se encuentra a una distancia l del centro de la esfera. Suponga que los efectos de la gravedad son despreciables.

- Halle el módulo de la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga puntual q para un ángulo α dado e indique su dirección y sentido en un diagrama claro (0.8 puntos)
- Determine la componente de esta fuerza que actúa en la dirección perpendicular al hilo en función de l , L , R , q y α . (0.8 puntos)
- Halle la frecuencia de las pequeñas oscilaciones del péndulo. (1.0 puntos)

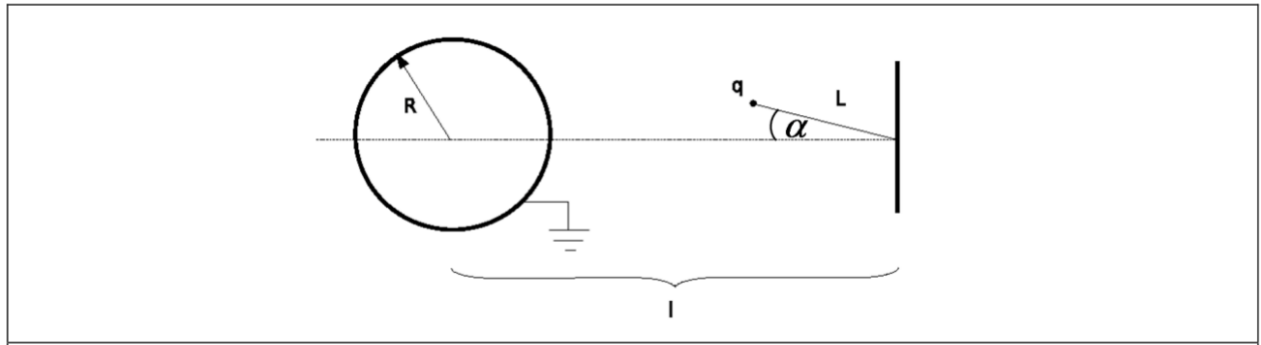


Fig 3. A point charge in the vicinity of a grounded sphere oscillates as a pendulum.

Fig. 3. Una carga puntual en las proximidades de una esfera conectada a tierra oscila como un péndulo.

Tarea 4 – La energía electrostática del sistema

Para una distribución de cargas eléctricas es importante conocer la energía electrostática del sistema. En nuestro problema (véase la Fig. 1a), existe una interacción electrostática entre la carga externa q y las cargas inducidas sobre la esfera, y existe una interacción electrostática entre las propias cargas inducidas sobre la esfera. En función de la carga q , el radio de la esfera R y la distancia d , determine las siguientes energías electrostáticas:

- la energía electrostática de interacción entre la carga q y las cargas inducidas sobre la esfera; (1.0 puntos)
- la energía electrostática de interacción entre las cargas inducidas sobre la esfera; (1.2 puntos)
- la energía electrostática total de interacción del sistema. (1.0 puntos)

Indicación: Hay varias formas de resolver este problema:

- En una de ellas, puede utilizar la siguiente integral,

$$\int_d^\infty \frac{x \, dx}{(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}.$$

- En otra, puede utilizar el hecho de que, para un conjunto de N cargas q_i situadas en los puntos $\vec{r}_i, i = 1, \dots, N$, la energía electrostática es una suma sobre todos los pares de cargas:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Escribamos $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$. En la Tarea 2, sea $\hat{e}$ el vector unitario dirigido de q hacia A . Para la Tarea 3, definamos

$$d_\alpha = \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}, \quad D_0 = (l - L)^2 - R^2,$$

con $l - L > R$ para el equilibrio exterior representado. Tomemos la componente perpendicular de la fuerza con signo positivo en el sentido de aumento de α .

- 1(a)

$$\phi_{\text{sphere}} = 0.$$

- 1(b)

$$q' = -\frac{R}{d}q, \quad d' = \frac{R^2}{d}.$$

La imagen se encuentra entre el centro y el punto de la superficie más próximo a q .

- 1(c)

$$F = \frac{kq^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}.$$

La fuerza es atractiva y está dirigida hacia el centro de la esfera.

- 2(a)

$$\mathbf{E}_A = kq \left[\frac{1}{r^2} - \frac{R}{d(r - d + R^2/d)^2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

- 2(b) Para $r \gg d$, incluida la primera corrección:

$$\mathbf{E}_A \simeq \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} - \frac{2R}{r} \left(1 - \frac{R^2}{d^2} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

El término dominante es $kq(1 - R/d)\hat{\mathbf{e}}/r^2$.

- 2(c)

$$d \rightarrow R^+ \implies \mathbf{E}_A \rightarrow \mathbf{0}.$$

- 3(a)

$$F(\alpha) = \frac{kq^2 R \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

Dibuje la flecha de la fuerza desde la carga directamente hacia el centro de la esfera.

- 3(b)

$$F_{\perp} = -\frac{kq^2 R l \sin \alpha}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

- 3(c) La frecuencia ordinaria y la frecuencia angular son

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kq^2 R l}{m L D_0^2}}, \quad \omega_0 = 2\pi f.$$

- 4(a) Interacción carga–superficie:

$$U_{q\sigma} = -\frac{kq^2 R}{d^2 - R^2}.$$

- **4(b)** Energía de interacción mutua de las cargas inducidas:

$$U_{\sigma\sigma} = + \frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

- **4(c)** Energía total de interacción:

$$U_{\text{tot}} = - \frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

Solución

1(a)

Un conductor en equilibrio electrostático es equipotencial. La conexión a tierra fija su potencial al de la Tierra, que se toma como cero:

$$\phi_{\text{sphere}} = 0.$$

1(b)

Sea O el centro. Midamos las posiciones axiales desde O hacia la carga externa, de modo que q se encuentre en $d > R$ y la imagen en d' , dentro de la esfera.

En el punto de la superficie más próximo a q , la condición de potencial nulo da

$$k \left(\frac{q}{d - R} + \frac{q'}{R - d'} \right) = 0.$$

En el punto opuesto de la superficie,

$$k \left(\frac{q}{d + R} + \frac{q'}{R + d'} \right) = 0.$$

Por consiguiente,

$$\frac{R - d'}{d - R} = \frac{R + d'}{d + R}.$$

Multiplicando en cruz se obtiene

$$(R - d')(d + R) = (R + d')(d - R),$$

de donde

$$d' = \frac{R^2}{d}.$$

Sustituyendo en las expresiones anteriores,

$$q' = - \frac{R}{d} q.$$

Estos valores también satisfacen la condición de contorno en todos los puntos de la superficie. Para un punto de la superficie cuyo radio forma un ángulo θ con la dirección hacia q , sean s y s' sus distancias a q y q' . Entonces

$$s^2 = d^2 + R^2 - 2dR \cos \theta,$$

y

$$s'^2 = d'^2 + R^2 - 2d'R \cos \theta = \frac{R^2}{d^2} s^2.$$

Así, $s' = (R/d)s$, y

$$k \left(\frac{q}{s} + \frac{q'}{s'} \right) = 0.$$

1(c)

En la posición de la carga externa, la imagen reproduce el campo de las cargas inducidas. La separación entre q y su imagen es

$$d - d' = \frac{d^2 - R^2}{d}.$$

Por tanto, la ley de Coulomb da

$$F = \frac{k|qq'|}{(d - d')^2} = \frac{kq^2(R/d)}{[(d^2 - R^2)/d]^2}.$$

De ahí,

$$F = \frac{kq^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}.$$

Como q' tiene signo opuesto a q , la fuerza es siempre atractiva. Está dirigida a lo largo de la recta que va de q hacia O .

2(a)

Elijamos el sentido positivo del eje de q hacia A , con vector unitario $\hat{\mathbf{e}}$. Situemos el centro de la esfera en $x = 0$. Entonces

$$x_q = -d, \quad x_{q'} = -d', \quad x_A = r - d.$$

Como A está fuera de la esfera, al otro lado de ella, $r > d + R$.

Las distancias de A a las dos cargas son

$$r, \quad r - d + d' = r - d + \frac{R^2}{d}.$$

Por superposición,

$$\mathbf{E}_A = k \left[\frac{q}{r^2} + \frac{q'}{(r - d + d')^2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

Por tanto,

$$\mathbf{E}_A = kq \left[\frac{1}{r^2} - \frac{R}{d(r - d + R^2/d)^2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

El signo del coeficiente escalar determina el sentido a lo largo del eje.

2(b)

Definamos

$$\delta = d - \frac{R^2}{d}.$$

Como $0 < \delta < d$, la condición $r \gg d$ implica $\delta/r \ll 1$. Podemos escribir

$$\mathbf{E}_A = \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} \left(1 - \frac{\delta}{r} \right)^{-2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

Utilizando la aproximación proporcionada con $a = -\delta/r$,

$$\left(1 - \frac{\delta}{r} \right)^{-2} \simeq 1 + \frac{2\delta}{r}.$$

Se sigue que

$$\mathbf{E}_A \simeq \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} - \frac{2R\delta}{dr} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

Sustituyendo δ ,

$$\mathbf{E}_A \simeq \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} - \frac{2R}{r} \left(1 - \frac{R^2}{d^2} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

Al orden dominante, el campo lejano es el de la carga neta efectiva

$$q + q' = q \left(1 - \frac{R}{d} \right).$$

2(c)

A medida que la carga externa se aproxima a la esfera,

$$d \rightarrow R^+, \quad d' \rightarrow R, \quad q' \rightarrow -q.$$

Así, la carga y su imagen se aproximan a la misma posición con cargas iguales en módulo y de signos opuestos. Sus campos se cancelan en todo punto de observación exterior fijo distinto del punto de contacto.

En particular, la expresión exacta de 2(a) da

$$\lim_{d \rightarrow R^+} \mathbf{E}_A = \mathbf{0}.$$

Este es un límite en el que la carga se aproxima a la superficie desde el exterior.

3(a)

Consideremos que el conductor permanece en equilibrio electrostático mientras se mueve la carga.

Sean P el punto de sujeción del hilo y Q la posición de la carga. Elijamos

$$O = (0, 0), \quad P = (l, 0).$$

Para el ángulo mostrado en la Fig. 3,

$$Q = (l - L \cos \alpha, L \sin \alpha).$$

Por tanto, la distancia instantánea del centro a la carga es

$$d_\alpha = |OQ| = \sqrt{(l - L \cos \alpha)^2 + L^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}.$$

Aplicando el resultado de 1(c),

$$F(\alpha) = \frac{kq^2 R d_\alpha}{(d_\alpha^2 - R^2)^2} = \frac{kq^2 R \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

La fuerza está dirigida de Q hacia O .

Descripción del diagrama: Dibuje la esfera con centro en O , con P a su derecha sobre una recta horizontal y $OP = l$. Sitúe Q por encima de esa recta y a la izquierda de P , con $PQ = L$ y $\angle OPQ = \alpha$. Dibuje una flecha con origen en Q , a lo largo de QO , dirigida hacia O , y rotúlela $\mathbf{F}_e$. Indique $OQ = d_\alpha$.

3(b)

Un vector unitario perpendicular al hilo, en el sentido de aumento de α , es

$$\hat{\mathbf{e}}_\alpha = (\sin \alpha, \cos \alpha).$$

Como la fuerza está dirigida hacia O ,

$$\mathbf{F}_e = -\frac{F}{d_\alpha}(l - L \cos \alpha, L \sin \alpha).$$

Su componente tangencial es

$$\begin{aligned} F_\perp &= \mathbf{F}_e \cdot \hat{\mathbf{e}}_\alpha \\ &= -\frac{F}{d_\alpha}[(l - L \cos \alpha) \sin \alpha + L \sin \alpha \cos \alpha] \\ &= -\frac{Fl \sin \alpha}{d_\alpha}. \end{aligned}$$

Al sustituir se obtiene

$$F_\perp = -\frac{kq^2 R l \sin \alpha}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

Para α positivo, esta componente actúa en el sentido de disminución de α , por lo que es restauradora. Su módulo se obtiene sustituyendo $-\sin \alpha$ por $|\sin \alpha|$.

3(c)

En el equilibrio $\alpha = 0$,

$$d_0 = l - L.$$

El equilibrio representado requiere $l - L > R$, de modo que la carga se encuentre fuera de la esfera.

La tensión no tiene componente perpendicular al hilo. Por tanto, la segunda ley de Newton en la dirección tangencial es

$$mL\ddot{\alpha} = F_\perp.$$

Para α pequeño,

$$\sin \alpha \simeq \alpha,$$

y

$$d_\alpha^2 - R^2 = (l - L)^2 - R^2 + lL\alpha^2 + O(\alpha^4).$$

Escribiendo $D_0 = (l - L)^2 - R^2$, la ecuación linealizada se convierte en

$$mL\ddot{\alpha} = -\frac{kq^2 Rl}{D_0^2}\alpha,$$

o bien

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{kq^2 Rl}{mLD_0^2}.$$

Así, la frecuencia ordinaria es

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kq^2 Rl}{mL[(l-L)^2 - R^2]^2}}.$$

La aproximación requiere una amplitud suficientemente pequeña para que se cumplan ambas condiciones

$$|\alpha| \ll 1, \quad lL\alpha^2 \ll D_0$$

simultáneamente.

4(a)

Omitamos la autoenergía de la carga puntual externa y tomemos la energía de interacción como nula cuando $d \rightarrow \infty$.

Sea ϕ_σ el potencial producido por las cargas superficiales inducidas. En la posición de q , la imagen da

$$\phi_\sigma(q) = \frac{kq'}{d-d'} = -\frac{kqR}{d^2 - R^2}.$$

La energía de interacción entre q y las cargas inducidas es

$$U_{q\sigma} = q\phi_\sigma(q).$$

Aquí no hay un factor $1/2$: cada par formado por q y una carga inducida se cuenta una sola vez. Por tanto,

$$U_{q\sigma} = -\frac{kq^2 R}{d^2 - R^2}.$$

4(b)

Sea σ la densidad de carga superficial inducida y sea ϕ_q el potencial debido a la carga externa. La energía de interacción mutua de las cargas inducidas es

$$U_{\sigma\sigma} = \frac{1}{2} \int_S \sigma \phi_\sigma dS.$$

El factor $1/2$ evita contar dos veces los pares dentro de la distribución superficial.

Sobre la esfera conectada a tierra,

$$\phi_q + \phi_\sigma = 0.$$

Por tanto,

$$U_{\sigma\sigma} = -\frac{1}{2} \int_S \sigma \phi_q dS.$$

La integral restante es igual a la energía de interacción carga–superficie:

$$\int_S \sigma \phi_q dS = kq \int_S \frac{\sigma dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} = q\phi_\sigma(q) = U_{q\sigma}.$$

Así,

$$U_{\sigma\sigma} = -\frac{1}{2}U_{q\sigma},$$

lo que da

$$U_{\sigma\sigma} = +\frac{kq^2R}{2(d^2 - R^2)}.$$

4(c)

Sumando las dos contribuciones físicas,

$$U_{\text{tot}} = U_{q\sigma} + U_{\sigma\sigma} = \frac{1}{2}U_{q\sigma}.$$

Por consiguiente,

$$U_{\text{tot}} = -\frac{kq^2R}{2(d^2 - R^2)}.$$

Esto también se deduce del trabajo necesario para traer q cuasiestáticamente desde el infinito:

$$U_{\text{tot}}(d) = -\int_d^\infty \frac{kq^2R x}{(x^2 - R^2)^2} dx = -\frac{kq^2R}{2(d^2 - R^2)}.$$

Como comprobación de coherencia, la fuerza en el sentido de aumento de d es

$$-\frac{dU_{\text{tot}}}{dd} = -\frac{kq^2Rd}{(d^2 - R^2)^2},$$

lo que reproduce la fuerza atractiva hallada en 1(c).

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Física de las chimeneas

Introducción

Los productos gaseosos de la combustión se liberan a la atmósfera, cuya temperatura es T_{Air} , a través de una chimenea alta de sección transversal A y altura h (véase la Fig. 1). La materia sólida se quema en el horno, que se encuentra a una temperatura T_{Smoke} . El volumen de gases producido por unidad de tiempo en el horno es B .

Suponga que:

- la velocidad de los gases en el horno es despreciable
- la densidad de los gases (humo) no difiere de la del aire a la misma temperatura y presión; mientras están en el horno, los gases pueden tratarse como ideales
- la presión del aire varía con la altura de acuerdo con la ley de la hidrostática; la variación de la densidad del aire con la altura es despreciable

- el flujo de gases satisface la ecuación de Bernoulli, que establece que la siguiente magnitud se conserva en todos los puntos del flujo:

$$\frac{1}{2}\rho v^2(z) + \rho g z + p(z) = \text{const},$$

donde ρ es la densidad del gas, $v(z)$ es su velocidad, $p(z)$ es la presión y z es la altura - la variación de la densidad del gas es despreciable a lo largo de toda la chimenea

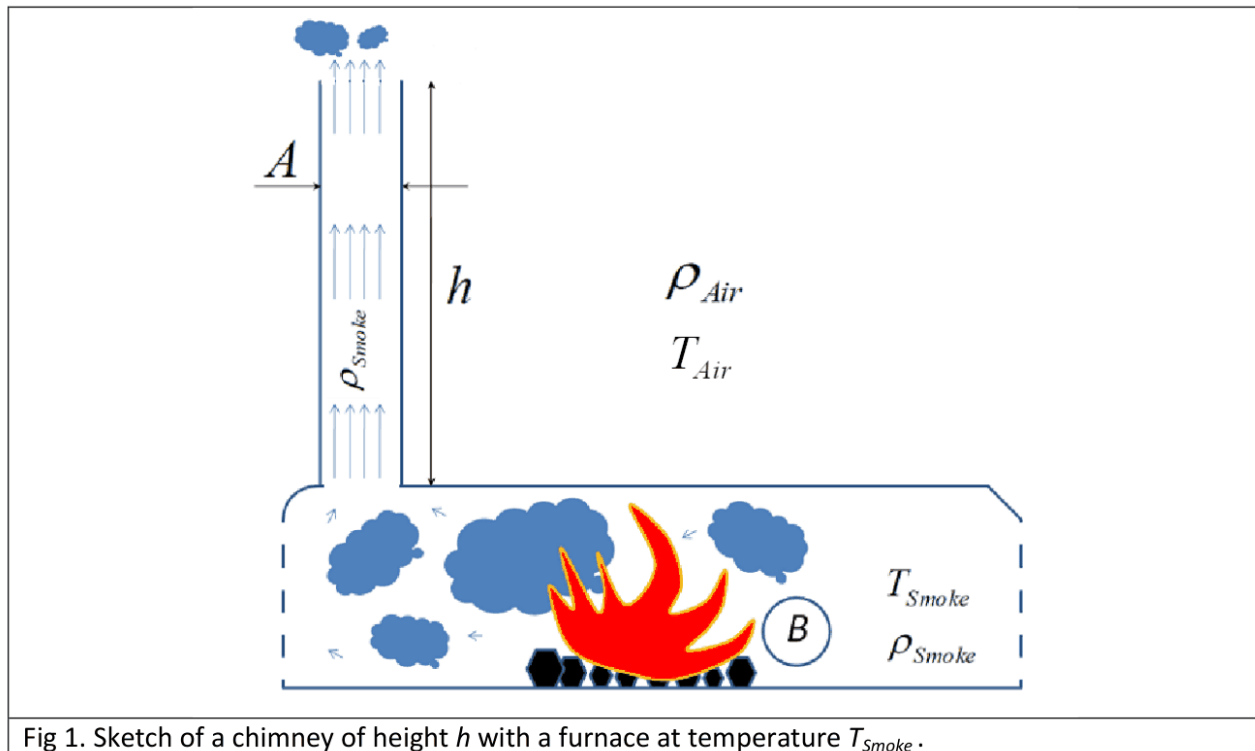


Fig 1. Sketch of a chimney of height h with a furnace at temperature T_{Smoke} .

Fig. 1. Esquema de una chimenea de altura h con un horno a temperatura T_{Smoke} .

Tarea 1

a) ¿Cuál es la altura mínima necesaria para que la chimenea funcione eficazmente y pueda liberar a la atmósfera todo el gas producido? Exprese el resultado en función de B , A , T_{Air} , $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $\Delta T = T_{Smoke} - T_{Air}$. **Importante: en todas las tareas siguientes, suponga que esta altura mínima es la altura de la chimenea.** (3.5 puntos)

b) Suponga que se construyen dos chimeneas para cumplir exactamente la misma función. Sus secciones transversales son idénticas, pero están diseñadas para funcionar en distintas partes del mundo: una en regiones frías, diseñada para funcionar a una temperatura atmosférica media de -30°C , y la otra en regiones cálidas, diseñada para funcionar a una temperatura atmosférica media de 30°C . La temperatura del horno es 400°C . Se calculó que la altura de la chimenea diseñada para funcionar en regiones frías es 100 m. ¿Qué altura tiene la otra chimenea? (0.5 puntos)

c) ¿Cómo varía la velocidad de los gases con la altura en la chimenea? Haga un esquema o diagrama suponiendo que la sección transversal de la chimenea no cambia con la altura. Indique el punto por el que los gases entran en la chimenea. (0.6 puntos)

d) ¿Cómo varía la presión de los gases con la altura en la chimenea? (0.5 puntos)

Central de energía solar

El flujo de gases en una chimenea puede utilizarse para construir un tipo particular de central de energía solar (chimenea solar). La idea se ilustra en la Fig. 2. El Sol calienta el aire bajo el colector de área S , cuya periferia está abierta para permitir la entrada de aire sin obstáculos (véase la Fig. 2). A medida que el aire calentado asciende por la chimenea (flechas finas de trazo continuo), entra aire frío nuevo en el colector desde el entorno (flechas gruesas de puntos), lo que permite un flujo continuo de aire a través de la central. El flujo de aire por la chimenea acciona una turbina y produce energía eléctrica. La energía de la radiación solar por unidad de tiempo y por unidad de área horizontal del colector es G . Suponga que toda esa energía puede utilizarse para calentar el aire del colector (la capacidad calorífica específica del aire es c , y puede despreciarse su dependencia de la temperatura del aire). Definimos el rendimiento de la chimenea solar como el cociente entre la energía cinética del flujo de gas y la energía solar absorbida al calentar el aire antes de su entrada en la chimenea.

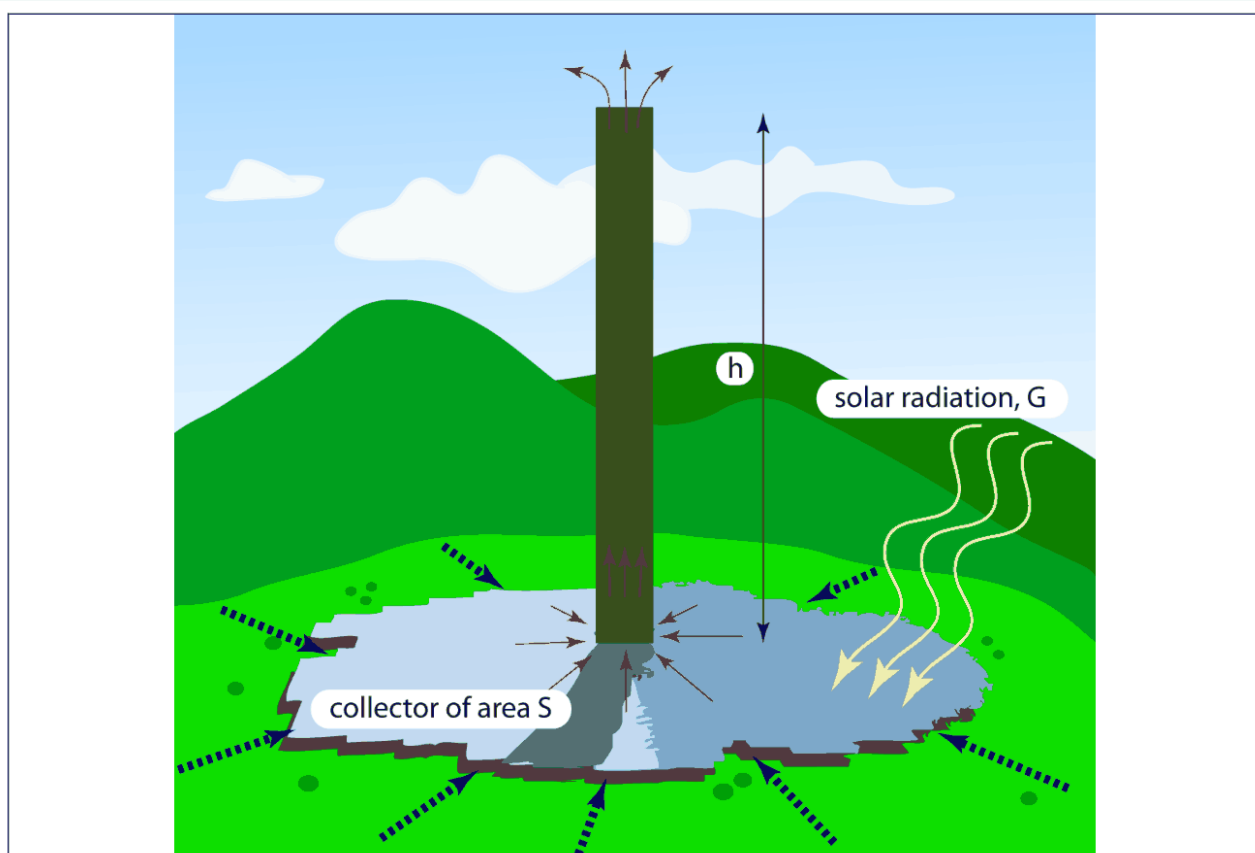


Fig 2. Sketch of a solar power plant.

Fig. 2. Esquema de una central de energía solar.

Tarea 2

- ¿Cuál es el rendimiento de la central de chimenea solar? (2.0 puntos)
- Haga un diagrama que muestre cómo varía el rendimiento de la chimenea con su altura. (0.4 puntos)

Prototipo de Manzanares

La chimenea prototipo construida en Manzanares, España, tenía una altura de 195 m y un radio de 5 m. El colector es circular, con un diámetro de 244 m. El calor específico del aire en las condiciones de funcionamiento habituales de la chimenea solar prototipo es 1012 J/kg K , la densidad del aire caliente es aproximadamente 0.9 kg/m^3 y la temperatura habitual de la atmósfera es $T_{Air} = 295 \text{ K}$. En Manzanares, la potencia solar por unidad de superficie horizontal suele ser de 150 W/m^2 durante un día soleado.

Tarea 3

- a) ¿Cuál es el rendimiento de la central prototipo? Escriba la estimación numérica. (0.3 puntos)
- b) ¿Qué potencia podría producir la central prototipo? (0.4 puntos)
- c) ¿Cuánta energía podría producir la central durante un día soleado típico? (0.3 puntos)

Tarea 4

- a) ¿Cuál es el aumento de temperatura del aire al entrar en la chimenea (aire caliente) desde el entorno (aire frío)? Escriba la fórmula general y evalúela para la chimenea prototipo. (1.0 puntos)
- b) ¿Cuál es el caudal másico de aire a través del sistema? (0.5 puntos)

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Tome $z = 0$ en la entrada de la chimenea y $z = h$ en su salida. A continuación, ρ_h denota la densidad del humo o del aire calentado.

- 1(a) Para $\Delta T > 0$,

$$h_{\min} = \frac{B^2 T_{Air}}{2gA^2 \Delta T}.$$

- 1(b)

$$h_{\text{warm}} \simeq 145 \text{ m}.$$

- 1(c)

$$v(z) = \frac{B}{A} \quad (0 < z < h).$$

La velocidad aumenta desde un valor casi nulo en el horno hasta B/A en la región de entrada y, después, permanece constante a lo largo de toda la chimenea.

- 1(d)

$$p(z) = p_{Air}(h) + \rho_h g(h - z).$$

La presión disminuye linealmente con la altura, con pendiente $-\rho_h g$, hasta alcanzar la presión atmosférica exterior en la salida.

- 2(a)

$$\eta = \frac{gh}{cT_{Air}}.$$

- 2(b) La gráfica de η frente a h es una recta que pasa por el origen, con pendiente $g/(cT_{Air})$.

- 3(a)

$$\eta = 0.00641 \simeq 0.64\%.$$

- 3(b) La potencia ideal disponible es

$$P \simeq 4.49 \times 10^4 \text{ W} \simeq 45 \text{ kW}.$$

- 3(c) Para un tiempo efectivo de iluminación τ ,

$$E = P\tau.$$

Para 12 h con la irradiancia indicada, $E \simeq 0.54 \text{ MWh} = 1.9 \text{ GJ}$. Si la irradiancia indicada es un promedio de todo el día, el resultado para 24 h es $1.08 \text{ MWh} = 3.88 \text{ GJ}$.

- 4(a)

$$\Delta T = \left[\frac{(GS)^2 T_{Air}}{2gh \rho_h^2 A^2 c^2} \right]^{1/3} \simeq 9.1 \text{ K}.$$

- 4(b)

$$\dot{m} = \frac{GS}{c\Delta T} = \left[\frac{2gh(\rho_h A)^2 GS}{cT_{Air}} \right]^{1/3} \simeq 7.7 \times 10^2 \text{ kg s}^{-1}.$$

Solución

Escribimos $\rho_a = \rho_{Air}$, $\rho_h = \rho_{Smoke}$ y $p_0 = p_{Air}(0)$. Para la chimenea solar, ρ_h denota, en cambio, la densidad del aire calentado. Las temperaturas absolutas de todas las fórmulas se expresan en kelvin.

1(a)

La chimenea funciona por tiro natural: el aire exterior es más denso que el gas caliente, por lo que su presión disminuye más rápidamente con la altura. En la condición límite de funcionamiento, el gas casi en reposo en el horno se encuentra a la presión atmosférica p_0 . Esta es la condición de contorno para evacuar el gas sin que sea necesaria una sobrepresión en el horno.

Por la ley de la hidrostática en el exterior de la chimenea,

$$p_{Air}(h) = p_0 - \rho_a gh.$$

En la salida abierta, la presión del gas es igual a la presión atmosférica local. La ecuación de Bernoulli entre el horno, donde la velocidad es despreciable, y la salida da

$$p_0 = p_{Air}(h) + \rho_h gh + \frac{1}{2} \rho_h v^2.$$

Por consiguiente,

$$\frac{1}{2}\rho_h v^2 = (\rho_a - \rho_h)gh.$$

El humo y el aire tienen la misma densidad a igual temperatura y presión. Por tanto, al aplicar la ley de los gases ideales a la presión común en la base se obtiene

$$\frac{\rho_a}{\rho_h} = \frac{T_{Smoke}}{T_{Air}} = 1 + \frac{\Delta T}{T_{Air}}.$$

Así,

$$v^2 = 2gh \frac{\Delta T}{T_{Air}}.$$

Como se desprecia la variación de densidad entre el horno y la chimenea, la capacidad de evacuación volumétrica es Av . Para liberar todo el gas se requiere

$$Av \geq B.$$

Para la altura mínima se cumple la igualdad:

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 = 2gh_{\min} \frac{\Delta T}{T_{Air}}.$$

Por tanto,

$$h_{\min} = \frac{B^2 T_{Air}}{2gA^2 \Delta T}.$$

Este resultado requiere que $\Delta T > 0$. Para $B > 0$ y $\Delta T = 0$, ninguna altura finita produce el tiro natural necesario bajo estas hipótesis.

1(b)

Ambas chimeneas tienen los mismos valores de B , A y de la temperatura del horno, por lo que

$$h \propto \frac{T_{Air}}{T_{Smoke} - T_{Air}}.$$

Las temperaturas y diferencias de temperatura pertinentes son

$$\begin{aligned} T_c &= 243.15 \text{ K}, & T_w &= 303.15 \text{ K}, \\ \Delta T_c &= 430 \text{ K}, & \Delta T_w &= 370 \text{ K}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$h_w = h_c \frac{T_w}{T_c} \frac{\Delta T_c}{\Delta T_w} = (100 \text{ m}) \frac{303.15}{243.15} \frac{430}{370}.$$

Esto da

$$h_w = 144.9 \text{ m} \simeq 145 \text{ m}.$$

El entorno más cálido proporciona una menor diferencia relativa de densidad, lo que requiere una chimenea más alta.

1(c)

La conservación de la masa en un flujo estacionario da

$$\dot{m} = \rho_h Av(z).$$

Como tanto ρ_h como A son constantes a lo largo de toda la chimenea, $v(z)$ también debe ser constante. Con la altura mínima estipulada, el caudal volumétrico es exactamente B , de modo que

$$v(z) = \frac{B}{A} = \sqrt{\frac{2gh\Delta T}{T_{Air}}}.$$

Para el esquema solicitado, sitúe z en el eje horizontal y v en el eje vertical. Marque la entrada de la chimenea en $z = 0$. Represente un aumento rápido desde la velocidad despreciable del horno hasta B/A en la región de entrada, seguido de una línea horizontal en $v = B/A$ desde la entrada hasta $z = h$. Si se idealiza la región de entrada como una región de extensión despreciable, la aceleración en ella puede representarse mediante un escalón en $z = 0$.

1(d)

Dentro de la chimenea, la ecuación de Bernoulli es

$$\frac{1}{2}\rho_h v^2 + \rho_h g z + p(z) = \text{constante}.$$

Como v es constante,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_h g.$$

Utilizando la condición de contorno en la salida $p(h) = p_{Air}(h)$,

$$p(z) = p_{Air}(h) + \rho_h g(h - z).$$

De forma equivalente,

$$p(z) = p_0 - \rho_a g h + \rho_h g(h - z).$$

La presión exterior a la altura z es $p_{Air}(z) = p_0 - \rho_a g z$. Restando,

$$p(z) - p_{Air}(z) = -(\rho_a - \rho_h)g(h - z).$$

Por tanto, la presión del gas es inferior a la presión atmosférica del entorno en todos los puntos del interior de la chimenea situados por debajo de la salida, y ambas presiones se igualan en la salida.

Inmediatamente después de la entrada,

$$p(0^+) = p_0 - (\rho_a - \rho_h)gh = p_0 - \frac{1}{2}\rho_h v^2.$$

Esta reducción de presión en la entrada acompaña a la aceleración desde el horno hacia la chimenea. A partir de ahí, la presión disminuye linealmente con la altura.

2(a)

Consideremos una masa m de aire que se calienta en ΔT en el colector. El calor absorbido es

$$Q = mc\Delta T.$$

Su energía cinética en la chimenea es

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Según la definición del enunciado,

$$\eta = \frac{K}{Q} = \frac{v^2}{2c\Delta T}.$$

Aplicando el resultado de 1(a),

$$v^2 = \frac{2gh\Delta T}{T_{Air}},$$

se obtiene

$$\boxed{\eta = \frac{gh}{cT_{Air}}}.$$

Dentro del modelo planteado, el rendimiento es independiente del aumento de temperatura, del área del colector y de la sección transversal de la chimenea. Mide la potencia cinética disponible en relación con la potencia solar absorbida.

2(b)

Para valores fijos de T_{Air} y c ,

$$\eta(h) = \frac{g}{cT_{Air}}h.$$

El diagrama solicitado tiene h en el eje horizontal y η en el eje vertical. Es una recta que pasa por $(0, 0)$, con pendiente positiva

$$\boxed{\frac{d\eta}{dh} = \frac{g}{cT_{Air}}}.$$

Al duplicar la altura se duplica el rendimiento. Esta relación lineal solo es válida dentro de las aproximaciones del problema; no debe extrapolarse a alturas en las que las variaciones de densidad sean significativas.

3(a)

Sustituyendo los datos del prototipo,

$$\eta = \frac{(9.81 \text{ m s}^{-2})(195 \text{ m})}{(1012 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1})(295 \text{ K})} = 0.0064077.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\eta \simeq 0.64\%}.$$

3(b)

El radio del colector es $244/2 = 122 \text{ m}$, por lo que su área es

$$S = \pi(122 \text{ m})^2 = 4.67595 \times 10^4 \text{ m}^2.$$

Se supone que toda la potencia solar incidente calienta el aire:

$$P_{\text{solar}} = GS = (150 \text{ W m}^{-2})(4.67595 \times 10^4 \text{ m}^2) = 7.01392 \times 10^6 \text{ W}.$$

La potencia cinética disponible es

$$P = \eta GS = (0.0064077)(7.01392 \times 10^6 \text{ W}),$$

por tanto,

$$P = 4.4943 \times 10^4 \text{ W} \simeq 45 \text{ kW}.$$

Esta es la potencia ideal disponible para su conversión según la definición del problema; no se especifica ningún rendimiento adicional de la turbina o del generador.

3(c)

Para un tiempo efectivo de iluminación τ con la irradiancia indicada,

$$E = P\tau = \frac{ghGS}{cT_{Air}}\tau.$$

Así, cada hora en las condiciones indicadas proporciona aproximadamente 44.9 kWh.

Si se estima que un día soleado típico equivale a 12 h con la irradiancia indicada,

$$E = (44.943 \text{ kW})(12 \text{ h}) = 539.3 \text{ kWh},$$

o bien

$$E \simeq 0.54 \text{ MWh} \simeq 1.9 \times 10^9 \text{ J}.$$

Si, en cambio, 150 W m^{-2} se interpreta como un promedio de las 24 h del día completo,

$$E = (44.943 \text{ kW})(24 \text{ h}) \simeq 1.08 \text{ MWh} = 3.88 \times 10^9 \text{ J}.$$

El enunciado no especifica el tiempo efectivo de iluminación ni el criterio utilizado para calcular el promedio.

4(a)

En funcionamiento estacionario, la potencia de calentamiento solar es igual al ritmo al que el aire evacua calor:

$$GS = \dot{m} c \Delta T.$$

La conservación de la masa da

$$\dot{m} = \rho_h A v.$$

Combinando estas expresiones con la velocidad en la chimenea,

$$v = \sqrt{\frac{2gh\Delta T}{T_{Air}}},$$

obtenemos

$$GS = \rho_h A c \Delta T \sqrt{\frac{2gh\Delta T}{T_{Air}}} = \rho_h A c \sqrt{\frac{2gh}{T_{Air}}} (\Delta T)^{3/2}.$$

Despejando ΔT ,

$$\Delta T = \left[\frac{(GS)^2 T_{Air}}{2gh \rho_h^2 A^2 c^2} \right]^{1/3}.$$

Para el prototipo,

$$A = \pi(5 \text{ m})^2 = 78.5398 \text{ m}^2.$$

Utilizando la densidad del aire caliente proporcionada,

$$\Delta T = \left[\frac{(7.01392 \times 10^6)^2 (295)}{2(9.81)(195)(0.9)^2 (78.5398)^2 (1012)^2} \right]^{1/3} \text{ K}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\Delta T = 9.05 \text{ K} \simeq 9.1 \text{ K}}.$$

El aire entra en la chimenea a aproximadamente 304 K.

4(b)

Del balance de calentamiento,

$$\dot{m} = \frac{GS}{c\Delta T}.$$

Numéricamente,

$$\dot{m} = \frac{7.01392 \times 10^6 \text{ W}}{(1012 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1})(9.0503 \text{ K})} = 765.8 \text{ kg s}^{-1}.$$

Así,

$$\boxed{\dot{m} \simeq 7.7 \times 10^2 \text{ kg s}^{-1}}.$$

Al eliminar ΔT también se obtiene la expresión general

$$\boxed{\dot{m} = \left[\frac{2gh(\rho_h A)^2 GS}{cT_{Air}} \right]^{1/3}}.$$

Como comprobación numérica, la velocidad correspondiente es

$$v = \sqrt{\frac{2(9.81)(195)(9.0503)}{295}} = 10.83 \text{ m s}^{-1},$$

lo que da $\rho_h Av = 765.8 \text{ kg s}^{-1}$ y una potencia cinética $\frac{1}{2}\dot{m}v^2 = 44.94 \text{ kW}$, en concordancia con 3(b).

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Modelo sencillo de un núcleo atómico

Introducción

Aunque los núcleos atómicos son objetos cuánticos, varias leyes fenomenológicas que describen sus propiedades básicas (como el radio o la energía de enlace) pueden deducirse a partir de hipótesis sencillas: (i) los núcleos están constituidos por nucleones (es decir, protones y neutrones); (ii) la interacción nuclear fuerte que mantiene unidos estos nucleones tiene un alcance muy corto (solo actúa entre nucleones vecinos); (iii) el número de protones (Z) de un núcleo dado es aproximadamente igual al número de neutrones (N), es decir, $Z \approx N \approx A/2$, donde A es el número total de nucleones ($A \gg 1$). **Importante: Utilice estas hipótesis en las tareas 1-4 que siguen.**

Tarea 1 - El núcleo atómico como sistema de nucleones compactamente empaquetados

En un modelo sencillo, un núcleo atómico puede concebirse como una esfera formada por nucleones compactamente empaquetados [véase la Fig. 1(a)], donde los nucleones son esferas rígidas de radio $r_N = 0.85 \text{ fm}$ ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$). La fuerza nuclear solo está presente entre dos nucleones en contacto. El volumen del núcleo V es mayor que el volumen de todos los nucleones AV_N , donde $V_N = \frac{4}{3}r_N^3\pi$. La razón $f = AV_N/V$ se denomina factor de empaquetamiento e indica el porcentaje del espacio ocupado por la materia nuclear.

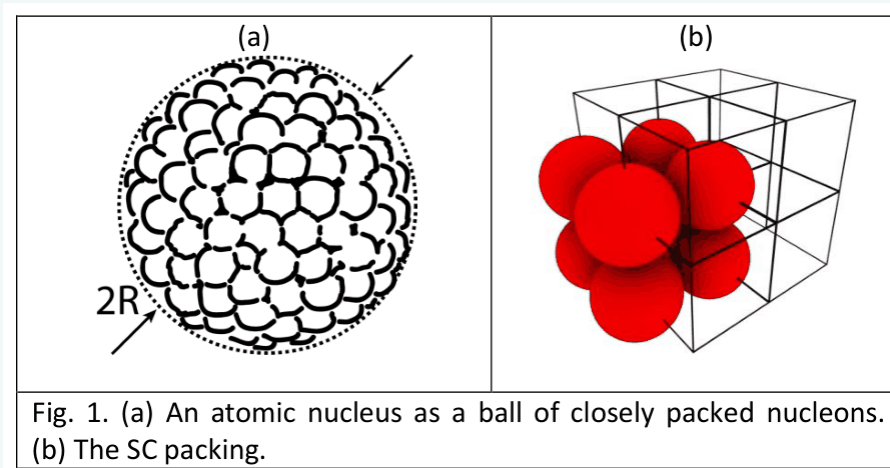


Fig. 1. (a) An atomic nucleus as a ball of closely packed nucleons. (b) The SC packing.

Fig. 1. (a) Un núcleo atómico como una esfera de nucleones compactamente empaquetados. (b) El empaquetamiento SC.

a) Calcule cuál sería el factor de empaquetamiento f si los nucleones estuvieran dispuestos en un sistema cristalino «cúbico simple» (SC), en el que cada nucleón está centrado en un punto de una red cúbica infinita [véase la Fig. 1(b)]. (0.3 puntos)

Importante: En todas las tareas posteriores, suponga que el factor de empaquetamiento real de los núcleos es igual al de la tarea 1a. Si no logra calcularlo, utilice $f = 1/2$ en las tareas posteriores.

b) Estime la densidad media de masa ρ_m , la densidad de carga ρ_c y el radio R de un núcleo que contiene A nucleones. La masa media de un nucleón es $1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. (1.0 puntos)

Tarea 2 - Energía de enlace de los núcleos atómicos – términos de volumen y de superficie

La energía de enlace de un núcleo es la energía necesaria para descomponerlo en nucleones separados y procede esencialmente de la fuerza nuclear atractiva de cada nucleón con sus vecinos. Si un nucleón dado no se encuentra en la superficie del núcleo, contribuye a la energía de enlace total con $a_V = 15.8 \text{ MeV}$ ($1 \text{ MeV} = 1.602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$). La contribución de un nucleón superficial a la energía de enlace es aproximadamente $a_V/2$. Exprese la energía de enlace E_b de un núcleo con A nucleones en función de A , a_V y f , incluyendo la corrección de superficie. (1.9 puntos)

Tarea 3 - Efectos electrostáticos (de Coulomb) sobre la energía de enlace

La energía electrostática de una esfera con carga distribuida homogéneamente (de radio R y carga total Q_0) es

$$U_c = \frac{3Q_0^2}{20\pi\epsilon_0 R},$$

donde $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$.

a) Aplique esta fórmula para obtener la energía electrostática de un núcleo. En un núcleo, cada protón no actúa sobre sí mismo (mediante la fuerza de Coulomb), sino únicamente sobre los demás protones. Esto puede tenerse en cuenta sustituyendo $Z^2 \rightarrow Z(Z - 1)$ en la fórmula obtenida. Utilice esta corrección en las tareas posteriores. (0.4 puntos)

b) Escriba la fórmula completa de la energía de enlace, incluyendo el término principal (de volumen), el término de corrección de superficie y la corrección electrostática obtenida. (0.3 puntos)

Tarea 4 - Fisión de núcleos pesados

La fisión es un proceso nuclear en el que un núcleo se divide en partes más pequeñas (núcleos más ligeros). Suponga que un núcleo con A nucleones se divide únicamente en dos partes iguales, como se representa en la Fig. 2.

a) Calcule la energía cinética total de los productos de fisión E_{kin} cuando los centros de los dos núcleos más ligeros están separados por una distancia $d \geq 2R(A/2)$, donde $R(A/2)$ es su radio. El núcleo grande se encontraba inicialmente en reposo. (1.3 puntos)

b) Suponga que $d = 2R(A/2)$ y evalúe la expresión de E_{kin} obtenida en el apartado a) para $A = 100, 150, 200$ y 250 (expresé los resultados en unidades de MeV). Estime los valores de A para los que es posible la fisión en el modelo descrito anteriormente. (1.0 puntos)

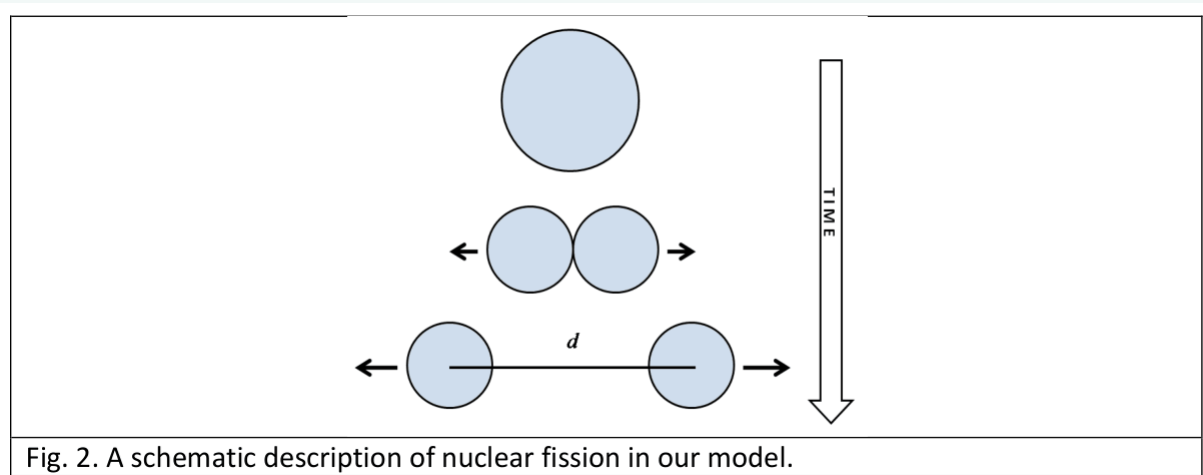


Fig. 2. Descripción esquemática de la fisión nuclear en nuestro modelo.

Tarea 5 – Reacciones de transferencia

a) En la física moderna, la energética de los núcleos y de sus reacciones se describe en términos de masas. Por ejemplo, si un núcleo (con velocidad nula) se encuentra en un estado excitado con una energía E_{exc} por encima del estado fundamental, su masa es $m = m_0 + E_{\text{exc}}/c^2$, donde m_0 es su masa en el estado fundamental en reposo. La reacción nuclear $^{16}\text{O} + ^{54}\text{Fe} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^{58}\text{Ni}$ es un ejemplo de las denominadas «reacciones de transferencia», en las que una parte de un núcleo («cúmulo») se transfiere al otro (véase la Fig. 3). En nuestro ejemplo, la parte transferida es un cúmulo de ^4He (partícula α). Las reacciones de transferencia ocurren con máxima

probabilidad si la velocidad del producto de reacción semejante al proyectil (en nuestro caso: ^{12}C) es igual, tanto en módulo como en dirección, a la velocidad del proyectil (en nuestro caso: ^{16}O). El blanco de ^{54}Fe se encuentra inicialmente en reposo. En la reacción, el ^{58}Ni se excita a uno de sus estados de mayor energía. Halle la energía de excitación de ese estado (y exprese la en unidades de MeV) si la energía cinética del proyectil de ^{16}O es 50 MeV. La velocidad de la luz es $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. (2.2 puntos)

1.	$M(^{16}\text{O})$	15.99491 u.m.a.
2.	$M(^{54}\text{Fe})$	53.93962 u.m.a.
3.	$M(^{12}\text{C})$	12.00000 u.m.a.
4.	$M(^{58}\text{Ni})$	57.93535 u.m.a.

Tabla 1. Las masas en reposo de los participantes en la reacción en sus estados fundamentales. $1 \text{ a. m. u.} = 1.6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

b) El núcleo de ^{58}Ni producido en el estado excitado considerado en el apartado a) se desexcita hasta su estado fundamental emitiendo un fotón gamma en la dirección de su movimiento. Considere esta desintegración en el sistema de referencia en el que el ^{58}Ni está en reposo para hallar la energía de retroceso del ^{58}Ni (es decir, la energía cinética que adquiere el ^{58}Ni tras la emisión del fotón). ¿Cuál es la energía del fotón en ese sistema? ¿Cuál es la energía del fotón en el sistema de referencia del laboratorio (es decir, cuál sería la energía del fotón medida en el detector situado en la dirección en la que se mueve el núcleo de ^{58}Ni)? (1.6 puntos)

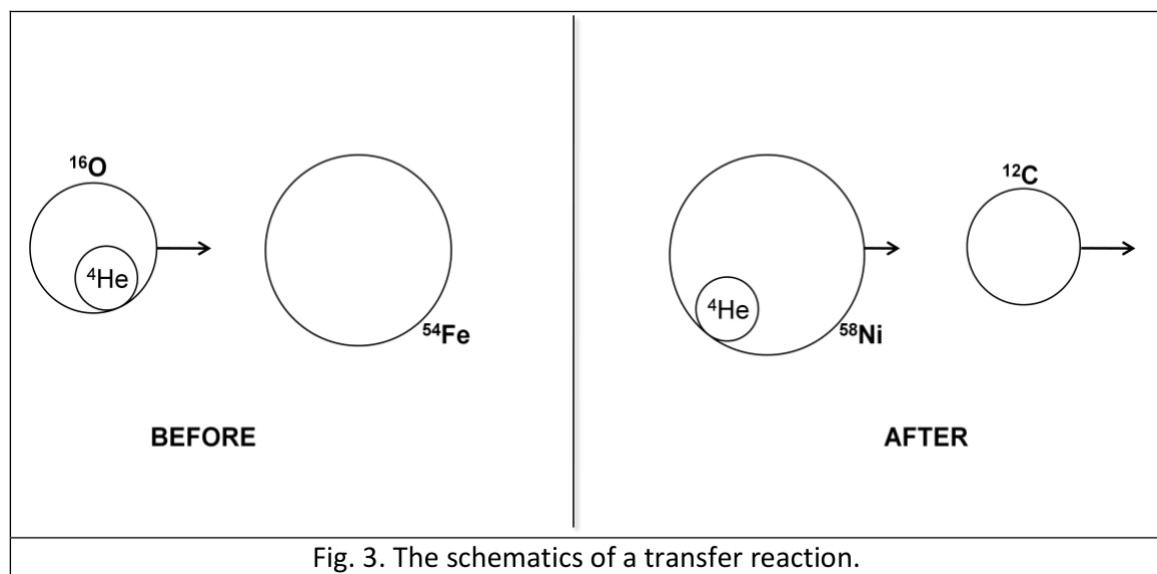


Fig. 3. Esquema de una reacción de transferencia.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Para abreviar, definimos

$$S(A) = A - \left(A^{1/3} - 2f^{1/3} \right)^3, \quad r_0 = r_N f^{-1/3} = 1.0546 \text{ fm},$$

y

$$a_C = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 r_0} = 0.81955 \text{ MeV}.$$

- 1(a).

$$f = \frac{\pi}{6} \approx 0.5236 = 52.36\%.$$

- 1(b).

$$\rho_m \approx 3.40 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}, \quad \rho_c \approx 1.63 \times 10^{25} \text{ C m}^{-3}$$

$$R = r_N(A/f)^{1/3} \approx 1.05 A^{1/3} \text{ fm}.$$

- 2.

$$E_b^{(\text{nuc})} = a_V \left[A - \frac{S(A)}{2} \right] = a_V \left[A - 3f^{1/3} A^{2/3} + 6f^{2/3} A^{1/3} - 4f \right].$$

- 3(a).

$$U_c = \frac{a_C Z(Z-1)}{A^{1/3}} \simeq \frac{a_C}{4} (A^{5/3} - 2A^{2/3}).$$

- 3(b). Escribiendo la energía de enlace completa como $B(A)$,

$$B(A) = a_V \left[A - 3f^{1/3} A^{2/3} + 6f^{2/3} A^{1/3} - 4f \right] - \frac{a_C}{4} (A^{5/3} - 2A^{2/3}).$$

- 4(a).

$$E_{\text{kin}}(d) = 2B(A/2) - B(A) - \frac{e^2 A^2}{64\pi\epsilon_0 d}.$$

- 4(b). En contacto, las energías calculadas para $A = 100, 150, 200, 250$ son, respectivamente,

$$-29.3, \quad -24.9, \quad -6.77, \quad +23.6 \text{ MeV}.$$

El umbral para núcleos pesados es aproximadamente $A_{\text{crit}} \simeq 213$. De los cuatro ejemplos, solo $A = 250$ permite la fisión desde el reposo pasando por la configuración de contacto.

- 5(a).

$$E_{\text{exc}} \approx 10.86 \text{ MeV}.$$

- 5(b).

$$T_{\text{recoil}} \approx 1.09 \text{ keV}, \quad E_{\gamma}^* \approx 10.86 \text{ MeV}, \quad E_{\gamma, \text{lab}} \approx 10.92 \text{ MeV}.$$

Aquí el asterisco denota el sistema de reposo del núcleo de níquel excitado antes de la emisión.

Solución

1(a). Factor de empaquetamiento

En el empaquetamiento cúbico simple, las esferas vecinas se tocan a lo largo de una arista del cubo, por lo que la distancia entre puntos de la red es $2r_N$. Una celda cúbica contiene ocho nucleones en sus vértices, cada uno compartido por ocho celdas: un nucleón completo por celda.

Por consiguiente,

$$f = \frac{\text{volumen de nucleones por celda}}{\text{volumen de la celda}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_N^3}{(2r_N)^3} = \boxed{\frac{\pi}{6}}.$$

1(b). Densidades y radio nuclear

La definición del factor de empaquetamiento da

$$V = \frac{AV_N}{f} = \frac{4\pi r_N^3 A}{3f}.$$

Igualando esta expresión a $4\pi R^3/3$,

$$\boxed{R = r_N \left(\frac{A}{f} \right)^{1/3} = r_0 A^{1/3}}, \quad r_0 = 1.0546 \text{ fm}.$$

Con la precisión de este modelo, la masa nuclear es Am_N , donde $m_N = 1.67 \times 10^{-27}$ kg. Así,

$$\rho_m = \frac{Am_N}{V} = \frac{3fm_N}{4\pi r_N^3}.$$

Con $f = \pi/6$,

$$\boxed{\rho_m = \frac{m_N}{8r_N^3} = 3.40 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}}.$$

Utilizando $Z \simeq A/2$, la carga nuclear es aproximadamente $Ae/2$. La carga elemental coherente con la conversión del electronvoltio dada es $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C. Por tanto,

$$\rho_c = \frac{Ae/2}{V} = \frac{3fe}{8\pi r_N^3} = \frac{e}{16r_N^3},$$

de modo que

$$\boxed{\rho_c = 1.63 \times 10^{25} \text{ C m}^{-3}}.$$

Ambas densidades medias son independientes de A .

2. Contribuciones de volumen y de la capa superficial completa

La densidad numérica de nucleones es

$$n = \frac{A}{V} = \frac{f}{V_N}.$$

Utilizando la capa superficial especificada de espesor $2r_N$, su volumen es

$$V_{\text{surface}} = \frac{4\pi}{3} [R^3 - (R - 2r_N)^3].$$

Dentro del modelo continuo de empaquetamiento, el número de nucleones superficiales es, por tanto,

$$\begin{aligned}
S(A) &= \frac{f}{r_N^3} [R^3 - (R - 2r_N)^3] \\
&= A - f \left[\left(\frac{A}{f} \right)^{1/3} - 2 \right]^3 \\
&= \boxed{A - \left(A^{1/3} - 2f^{1/3} \right)^3}.
\end{aligned}$$

Esta expresión se aplica cuando $R \geq 2r_N$, como corresponde a los núcleos grandes considerados aquí. Desarrollando sin descartar ningún término,

$$\boxed{S(A) = 6f^{1/3}A^{2/3} - 12f^{2/3}A^{1/3} + 8f.}$$

Hay $A - S(A)$ nucleones interiores que contribuyen con a_V cada uno, y $S(A)$ nucleones superficiales que contribuyen con $a_V/2$ cada uno. Por ello,

$$E_b^{(\text{nuc})} = a_V[A - S(A)] + \frac{a_V}{2}S(A),$$

o bien

$$\boxed{E_b^{(\text{nuc})} = a_V \left[A - 3f^{1/3}A^{2/3} + 6f^{2/3}A^{1/3} - 4f \right].}$$

Numéricamente,

$$\frac{E_b^{(\text{nuc})}}{\text{MeV}} = 15.8A - 38.2042A^{2/3} + 61.5849A^{1/3} - 33.0914.$$

Los términos en $A^{1/3}$ y constante se conservan en todos los cálculos posteriores.

3(a). Autoenergía de Coulomb

Sustituyendo $Q_0 = Ze$ en la fórmula proporcionada y aplicando después la corrección de autointeracción prescrita, se obtiene

$$U_c = \frac{3e^2Z(Z-1)}{20\pi\epsilon_0R}.$$

Como $R = r_0A^{1/3}$, definimos

$$a_C = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0r_0}.$$

Las constantes proporcionadas dan

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44049 \text{ MeV fm}, \quad a_C = 0.81955 \text{ MeV}.$$

Así,

$$\boxed{U_c = \frac{a_CZ(Z-1)}{A^{1/3}}.}$$

Aplicando $Z \simeq A/2$ y conservando la resta de la unidad,

$$Z(Z-1) \simeq \frac{A(A-2)}{4},$$

y, por tanto,

$$U_c(A) = \frac{a_C}{4} \left(A^{5/3} - 2A^{2/3} \right).$$

3(b). Energía de enlace completa

La energía electrostática positiva reduce la energía necesaria para descomponer el núcleo. Por tanto,

$$B(A) = E_b^{(\text{nuc})}(A) - U_c(A),$$

lo que da

$$B(A) = a_V \left[A - 3f^{1/3} A^{2/3} + 6f^{2/3} A^{1/3} - 4f \right] - \frac{a_C}{4} \left(A^{5/3} - 2A^{2/3} \right).$$

4(a). Energía cinética a una separación d

Cada fragmento tiene $A/2$ nucleones y una carga aproximada de $Ae/4$. Para dos distribuciones de carga con simetría esférica que no se solapan, su energía electrostática mutua es igual a la de cargas puntuales situadas en sus centros:

$$U_{12}(d) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Ae/4)^2}{d} = \frac{e^2 A^2}{64\pi\epsilon_0 d}.$$

La corrección $Z(Z-1)$ ya se ha incluido en la autoenergía de cada núcleo. No se aplica a esta interacción entre dos conjuntos distintos de protones.

Tomamos los nucleones libres separados como referencia común de energía interna. El núcleo inicial tiene una energía $-B(A)$, mientras que los dos fragmentos separados tienen una energía total

$$-2B(A/2) + U_{12}(d) + E_{\text{kin}}(d).$$

La conservación de la energía da, por consiguiente,

$$E_{\text{kin}}(d) = 2B(A/2) - B(A) - U_{12}(d).$$

Desarrollando las energías de enlace,

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}}(d) = & -3a_V f^{1/3} (2^{1/3} - 1) A^{2/3} \\ & + 6a_V f^{2/3} (2^{2/3} - 1) A^{1/3} - 4a_V f \\ & + \frac{a_C}{4} \left[(1 - 2^{-2/3}) A^{5/3} + 2(2^{1/3} - 1) A^{2/3} \right] \\ & - \frac{e^2 A^2}{64\pi\epsilon_0 d}. \end{aligned}$$

Las contribuciones de volumen se cancelan porque se conserva el número total de nucleones. A medida que los fragmentos se separan, su energía electrostática mutua disminuye y su energía cinética total aumenta.

4(b). Energías en contacto y umbral de fisión

En contacto,

$$d_0 = 2R(A/2) = 2^{2/3} r_0 A^{1/3}.$$

Utilizando $e^2/(4\pi\epsilon_0 r_0) = 5a_C/3$,

$$U_{12}(d_0) = \frac{5a_C}{48 \cdot 2^{2/3}} A^{5/3}.$$

Combinando esto con la expresión anterior,

$$E_{\text{kin}}(d_0) = \frac{a_C}{4} \left(1 - \frac{17}{12} 2^{-2/3} \right) A^{5/3} + (2^{1/3} - 1) \left(\frac{a_C}{2} - 3a_V f^{1/3} \right) A^{2/3} + 6a_V f^{2/3} (2^{2/3} - 1) A^{1/3} - 4a_V f.$$

Numéricamente,

$$\frac{E_{\text{kin}}(d_0)}{\text{MeV}} = 0.0220368 A^{5/3} - 9.82357 A^{2/3} + 36.1750 A^{1/3} - 33.0914.$$

A	Separación de contacto d_0 (fm)	$E_{\text{kin}}(d_0)$ (MeV)
100	7.77	-29.3
150	8.89	-24.9
200	9.79	-6.77
250	10.55	+23.6

Una energía cinética calculada negativa significa que la configuración de contacto no puede alcanzarse desde el núcleo inicialmente no excitado según el balance energético supuesto.

Para núcleos pesados, al resolver $E_{\text{kin}}(d_0) = 0$ se obtiene

$$A_{\text{crit}} \simeq 213.0.$$

Así, el modelo permite la fisión pasando por la configuración de contacto aproximadamente para

$$A \gtrsim 213.$$

De los cuatro núcleos especificados, solo $A = 250$ satisface esta condición. Una vez que el contacto es accesible, una separación mayor libera energía de Coulomb adicional.

5(a). Energía de excitación en la reacción de transferencia

Sean m_1, m_2, m_3, m_4 las masas tabuladas en el estado fundamental del oxígeno, hierro, carbono y níquel, respectivamente. Sea

$$m_4^* = m_4 + \frac{E_{\text{exc}}}{c^2}$$

la masa del níquel excitado.

Utilizando las constantes dadas,

$$1 \text{ a. m. u. } c^2 = \frac{(1.6605 \times 10^{-27})(3 \times 10^8)^2}{1.602 \times 10^{-13}} \text{ MeV} = 932.865 \text{ MeV}.$$

La energía de reacción entre estados fundamentales es

$$\begin{aligned} Q &= (m_1 + m_2 - m_3 - m_4)c^2 \\ &= (15.99491 + 53.93962 - 12.00000 - 57.93535)(932.865) \text{ MeV} \\ &= -0.764949 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Podemos conservar la cinemática relativista exacta. El oxígeno y el carbono tienen la misma velocidad v y, por tanto, el mismo factor de Lorentz

$$\gamma = 1 + \frac{50 \text{ MeV}}{m_1 c^2}, \quad \beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \gamma^{-2}}.$$

La conservación de la energía y de la cantidad de movimiento da la energía y la cantidad de movimiento del níquel excitado:

$$E_4^{\text{lab}} = \gamma(m_1 - m_3)c^2 + m_2c^2, \quad p_4 = \gamma(m_1 - m_3)v.$$

Su energía invariante en reposo satisface, por tanto,

$$(m_4^*c^2)^2 = (E_4^{\text{lab}})^2 - (p_4c)^2.$$

Escribiendo $\Delta m = m_1 - m_3$ y utilizando $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$,

$$m_4^* = \sqrt{m_2^2 + \Delta m^2 + 2\gamma m_2 \Delta m}.$$

Por consiguiente,

$$E_{\text{exc}} = c^2 \left[\sqrt{m_2^2 + (m_1 - m_3)^2 + 2\gamma m_2(m_1 - m_3)} - m_4 \right].$$

Numéricamente,

$$E_{\text{exc}} = 10.86074 \dots \text{ MeV} \approx 10.86 \text{ MeV}.$$

Para comprobar el balance energético, las energías cinéticas de salida son

$$T_C = \frac{m_3}{m_1}(50 \text{ MeV}) = 37.51193 \text{ MeV},$$

$$T_{\text{Ni}} = 0.86237 \text{ MeV}.$$

Estas satisfacen

$$E_{\text{exc}} = 50 + Q - T_C - T_{\text{Ni}}.$$

La aproximación no relativista habitual,

$$T_{\text{Ni}} \simeq \frac{(m_1 - m_3)^2}{m_1 m_4} (50 \text{ MeV}),$$

daría $E_{\text{exc}} \simeq 10.862 \text{ MeV}$, el mismo resultado con la precisión indicada.

Para utilizarla en el apartado (b), la rapidez del níquel excitado es

$$\beta_4 = \frac{V}{c} = \frac{p_4 c}{E_4^{\text{lab}}} = \frac{\gamma(m_1 - m_3)\beta}{m_2 + \gamma(m_1 - m_3)} = 0.00564849,$$

de modo que $V \approx 1.69 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$.

5(b). Energías de retroceso y del fotón

Trabajamos primero en el sistema de reposo del núcleo de níquel excitado. La conservación de la cantidad de movimiento exige que el núcleo de níquel final retroceda en sentido opuesto al fotón, con una cantidad de movimiento de módulo

$$p_{\text{recoil}} = \frac{E_\gamma^*}{c}.$$

Definimos

$$W = m_4 c^2, \quad E = E_{\text{exc}}.$$

La conservación de la energía da entonces

$$W + E = E_\gamma^* + \sqrt{W^2 + (E_\gamma^*)^2}.$$

Resolviendo,

$$E_{\gamma}^* = \frac{(W + E)^2 - W^2}{2(W + E)} = E - \frac{E^2}{2(W + E)}.$$

Así, la energía cinética de retroceso es

$$T_{\text{recoil}} = E - E_{\gamma}^* = \frac{E^2}{2(W + E)} \simeq \frac{E^2}{2W}.$$

La última aproximación es válida porque $E \ll W$; equivale a la expresión no relativista del retroceso $p_{\text{recoil}}^2/(2m_4)$.

Aquí,

$$W = 54045.8700 \text{ MeV}.$$

Utilizando la energía de excitación del apartado (a),

$$T_{\text{recoil}} = 0.00109104 \text{ MeV} \approx 1.09 \text{ keV},$$

y

$$E_{\gamma}^* = 10.85965 \dots \text{ MeV} \approx 10.86 \text{ MeV}.$$

Las cifras adicionales muestran la pequeña resta debida al retroceso.

Para la emisión hacia delante, la transformación de Lorentz de la energía del fotón al sistema del laboratorio da

$$E_{\gamma,\text{lab}} = \Gamma_4 (E_{\gamma}^* + V p_{\gamma}^*) = \Gamma_4 E_{\gamma}^* (1 + \beta_4),$$

donde $\Gamma_4 = (1 - \beta_4^2)^{-1/2}$. Por ello,

$$E_{\gamma,\text{lab}} = E_{\gamma}^* \sqrt{\frac{1 + \beta_4}{1 - \beta_4}}.$$

El factor Doppler hacia delante es 1.00566453, de modo que

$$E_{\gamma,\text{lab}} = 10.92117 \dots \text{ MeV} \approx 10.92 \text{ MeV}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.