

IPhO 2010

Theorieaufgaben und Lösungen · Zagreb, Kroatien · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/2010/

Aufgabe 1: Spiegelbild einer Ladung in einem metallischen Körper

Einleitung – Methode der Spiegelladungen

Eine Punktladung q wird in die Nähe einer geerdeten Metallkugel mit dem Radius R gebracht [siehe Abb. 1(a)], wodurch auf der Kugel eine Oberflächenladungsverteilung induziert wird. Das elektrische Feld und das Potential dieser Oberflächenladungsverteilung zu berechnen, ist eine anspruchsvolle Aufgabe. Die Berechnung lässt sich jedoch mithilfe der sogenannten Methode der Spiegelladungen erheblich vereinfachen. Bei dieser Methode können das elektrische Feld und das Potential der auf der Kugel verteilten Ladung durch das elektrische Feld und das Potential einer einzelnen Punktladung q' im Inneren der Kugel dargestellt werden (dies müssen Sie nicht beweisen). Hinweis: **Das elektrische Feld dieser Spiegelladung q' gibt das elektrische Feld und das Potential nur außerhalb der Kugel (einschließlich ihrer Oberfläche) wieder.**

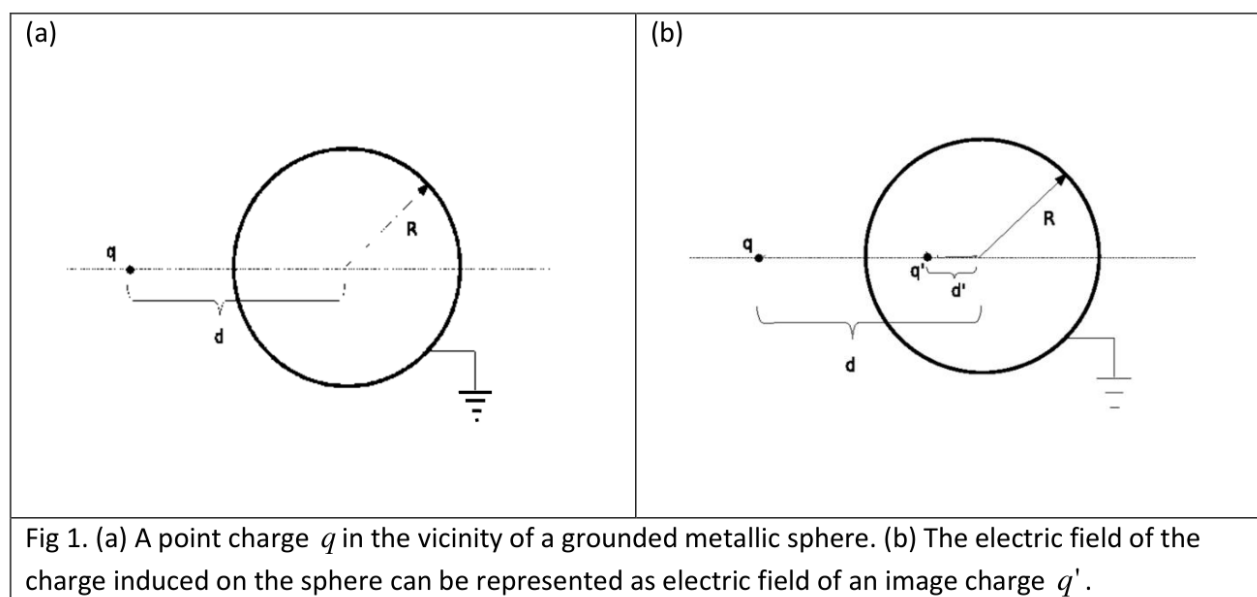


Abb. 1. (a) Eine Punktladung q in der Nähe einer geerdeten Metallkugel. (b) Das elektrische Feld der auf der Kugel induzierten Ladung kann als elektrisches Feld einer Spiegelladung q' dargestellt werden.

Aufgabe 1 – Die Spiegelladung

Aus der Symmetrie des Problems folgt, dass die Ladung q' auf der Verbindungsline zwischen der Punktladung q und dem Kugelmittelpunkt liegen muss [siehe Abb. 1(b)].

a) Welchen Wert hat das Potential auf der Kugel? (0.3 Punkte)

- b) Drücken Sie q' und den Abstand d' der Ladung q' vom Kugelmittelpunkt durch q , d und R aus. (1.9 Punkte)
- c) Bestimmen Sie den Betrag der auf die Ladung q wirkenden Kraft. Ist die Kraft abstoßend? (0.5 Punkte)

Aufgabe 2 – Abschirmung eines elektrostatischen Feldes

Betrachten Sie eine Punktladung q , die sich im Abstand d vom Mittelpunkt einer geerdeten Metallkugel mit dem Radius R befindet. Uns interessiert, wie die geerdete Metallkugel das elektrische Feld am Punkt A auf der gegenüberliegenden Seite der Kugel beeinflusst (siehe Abb. 2). Der Punkt A liegt auf der Verbindungslinie zwischen der Ladung q und dem Kugelmittelpunkt; sein Abstand von der Punktladung q beträgt r .

- a) Bestimmen Sie den Vektor des elektrischen Feldes am Punkt A . (0.6 Punkte)
- b) Bestimmen Sie für einen sehr großen Abstand $r \gg d$ den Ausdruck für das elektrische Feld mithilfe der Näherung $(1 + a)^{-2} \approx 1 - 2a$, wobei $a \ll 1$ gilt. (0.6 Punkte)
- c) In welchem Grenzfall für d schirmt die geerdete Metallkugel das Feld der Ladung q vollständig ab, sodass das elektrische Feld am Punkt A exakt null ist? (0.3 Punkte)

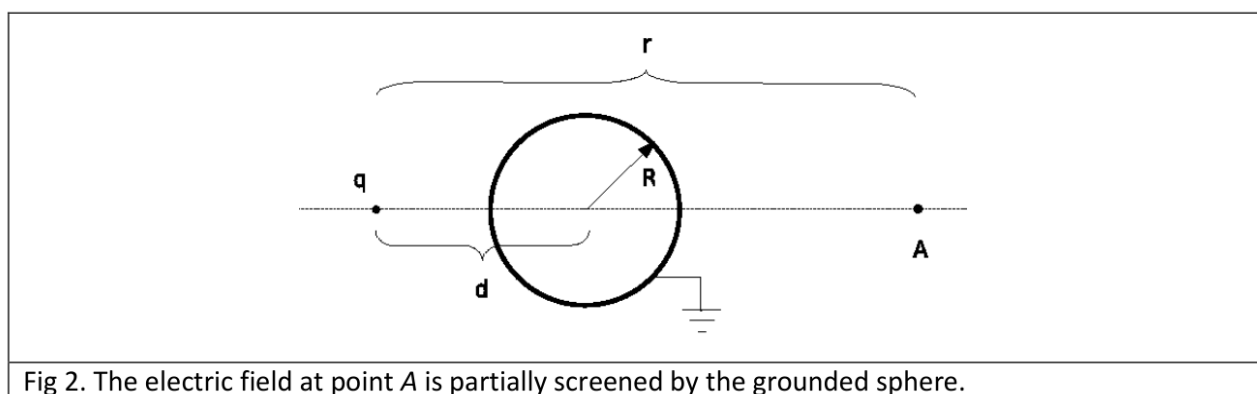


Abb. 2. Das elektrische Feld am Punkt A wird durch die geerdete Kugel teilweise abgeschirmt.

Aufgabe 3 – Kleine Schwingungen im elektrischen Feld der geerdeten Metallkugel

Eine Punktladung q mit der Masse m hängt in der Nähe der geerdeten Metallkugel an einem Faden der Länge L , der an einer Wand befestigt ist. Vernachlässigen Sie bei Ihren Überlegungen alle elektrostatischen Einflüsse der Wand. Die Punktladung bildet ein mathematisches Pendel (siehe Abb. 3). Der Befestigungspunkt des Fadens an der Wand befindet sich im Abstand l vom Kugelmittelpunkt. Nehmen Sie an, dass die Schwerkraft vernachlässigbar ist.

- a) Bestimmen Sie den Betrag der elektrischen Kraft, die bei einem gegebenen Winkel α auf die Punktladung q wirkt, und geben Sie ihre Richtung in einer übersichtlichen Skizze an (0.8 Punkte)
- b) Bestimmen Sie die Komponente dieser Kraft senkrecht zum Faden in Abhängigkeit von l , L , R , q und α . (0.8 Punkte)
- c) Bestimmen Sie die Frequenz kleiner Schwingungen des Pendels. (1.0 Punkte)

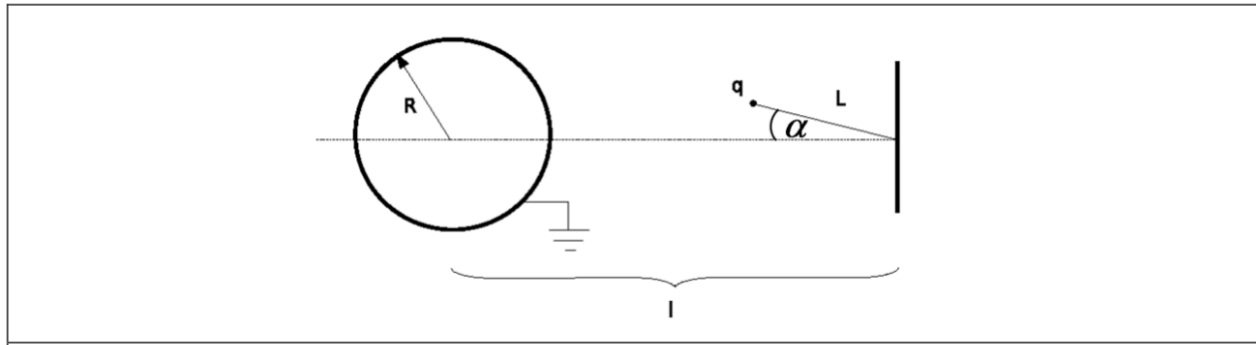


Fig 3. A point charge in the vicinity of a grounded sphere oscillates as a pendulum.

Abb. 3. Eine Punktladung in der Nähe einer geerdeten Kugel schwingt als Pendel.

Aufgabe 4 – Die elektrostatische Energie des Systems

Für eine Verteilung elektrischer Ladungen ist es wichtig, die elektrostatische Energie des Systems zu kennen. In unserem Problem (siehe Abb. 1a) besteht eine elektrostatische Wechselwirkung zwischen der äußeren Ladung q und den auf der Kugel induzierten Ladungen sowie eine elektrostatische Wechselwirkung der auf der Kugel induzierten Ladungen untereinander. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von der Ladung q , dem Kugelradius R und dem Abstand d die folgenden elektrostatischen Energien:

- die elektrostatische Energie der Wechselwirkung zwischen der Ladung q und den auf der Kugel induzierten Ladungen; (1.0 Punkte)
- die elektrostatische Energie der Wechselwirkung der auf der Kugel induzierten Ladungen untereinander; (1.2 Punkte)
- die gesamte elektrostatische Wechselwirkungsenergie des Systems. (1.0 Punkte)

Hinweis: Es gibt mehrere Möglichkeiten, dieses Problem zu lösen:

- (1) Bei einer davon können Sie das folgende Integral verwenden,

$$\int_d^\infty \frac{x \, dx}{(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}.$$

- (2) Bei einer anderen können Sie nutzen, dass für eine Anordnung von N Ladungen q_i an den Punkten $\vec{r}_i, i = 1, \dots, N$ die elektrostatische Energie durch eine Summe über alle Ladungspaare gegeben ist:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Wir setzen $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$. In Aufgabe 2 zeige $\hat{e}$ von q nach A . Für Aufgabe 3 definieren wir

$$d_\alpha = \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}, \quad D_0 = (l - L)^2 - R^2,$$

wobei für die dargestellte Gleichgewichtslage außerhalb der Kugel $l - L > R$ gilt. Die vorzeichenbehaftete Kraftkomponente senkrecht zum Faden sei in Richtung zunehmender α positiv.

- 1(a)

$$\phi_{\text{sphere}} = 0.$$

- 1(b)

$$q' = -\frac{R}{d}q, \quad d' = \frac{R^2}{d}.$$

Die Spiegelladung liegt zwischen dem Mittelpunkt und dem q nächstgelegenen Punkt der Oberfläche.

- 1(c)

$$F = \frac{kq^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}.$$

Die Kraft ist anziehend und zum Kugelmittelpunkt gerichtet.

- 2(a)

$$\mathbf{E}_A = kq \left[\frac{1}{r^2} - \frac{R}{d(r - d + R^2/d)^2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

- 2(b) Für $r \gg d$ gilt bis einschließlich der ersten Korrektur:

$$\mathbf{E}_A \simeq \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} - \frac{2R}{r} \left(1 - \frac{R^2}{d^2} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

Der führende Term ist $kq(1 - R/d)\hat{\mathbf{e}}/r^2$.

- 2(c)

$$d \rightarrow R^+ \implies \mathbf{E}_A \rightarrow \mathbf{0}.$$

- 3(a)

$$F(\alpha) = \frac{kq^2 R \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

Zeichnen Sie den Kraftpfeil von der Ladung direkt zum Kugelmittelpunkt.

- 3(b)

$$F_{\perp} = -\frac{kq^2 R l \sin \alpha}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

- 3(c) Die Frequenz und die Kreisfrequenz sind

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kq^2 R l}{m L D_0^2}}, \quad \omega_0 = 2\pi f.$$

- **4(a)** Wechselwirkung zwischen Ladung und Oberfläche:

$$U_{q\sigma} = -\frac{kq^2 R}{d^2 - R^2}.$$

- **4(b)** Wechselwirkungsenergie der induzierten Ladungen untereinander:

$$U_{\sigma\sigma} = +\frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

- **4(c)** Gesamte Wechselwirkungsenergie:

$$U_{\text{tot}} = -\frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

Lösung

1(a)

Ein Leiter im elektrostatischen Gleichgewicht ist ein Äquipotentialkörper. Durch die Erdung wird sein Potential auf das der Erde festgelegt, das als null gewählt wird:

$$\phi_{\text{sphere}} = 0.$$

1(b)

Sei O der Mittelpunkt. Wir messen die Positionen entlang der Achse von O aus in Richtung der äußeren Ladung, sodass sich q bei $d > R$ und die Spiegelladung bei d' im Inneren der Kugel befindet.

Am q nächstgelegenen Oberflächenpunkt ergibt die Bedingung verschwindenden Potentials

$$k \left(\frac{q}{d - R} + \frac{q'}{R - d'} \right) = 0.$$

Am gegenüberliegenden Oberflächenpunkt gilt

$$k \left(\frac{q}{d + R} + \frac{q'}{R + d'} \right) = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{R - d'}{d - R} = \frac{R + d'}{d + R}.$$

Kreuzmultiplikation liefert

$$(R - d')(d + R) = (R + d')(d - R),$$

also

$$d' = \frac{R^2}{d}.$$

Durch Rückeinsetzen erhalten wir

$$q' = -\frac{R}{d}q.$$

Diese Werte erfüllen die Randbedingung auch überall auf der Oberfläche. Für einen Oberflächenpunkt, dessen Radiusvektor den Winkel θ mit der Richtung zu q bildet, seien die Abstände von q und q' mit s beziehungsweise s' bezeichnet. Dann gilt

$$s^2 = d^2 + R^2 - 2dR \cos \theta,$$

und

$$s'^2 = d'^2 + R^2 - 2d'R \cos \theta = \frac{R^2}{d^2} s^2.$$

Somit ist $s' = (R/d)s$, und

$$k \left(\frac{q}{s} + \frac{q'}{s'} \right) = 0.$$

1(c)

Am Ort der äußeren Ladung gibt die Spiegelladung das Feld der induzierten Ladungen wieder. Der Abstand zwischen q und ihrer Spiegelladung beträgt

$$d - d' = \frac{d^2 - R^2}{d}.$$

Das Coulombsche Gesetz liefert daher

$$F = \frac{k|qq'|}{(d - d')^2} = \frac{kq^2(R/d)}{[(d^2 - R^2)/d]^2}.$$

Also gilt

$$F = \frac{kq^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}.$$

Da q' das entgegengesetzte Vorzeichen zu q hat, ist die Kraft stets anziehend. Sie zeigt entlang der Verbindungslinie von q nach O .

2(a)

Wir wählen die positive Achsenrichtung von q nach A , mit dem Einheitsvektor $\hat{\mathbf{e}}$. Der Kugelmittelpunkt liege bei $x = 0$. Dann gilt

$$x_q = -d, \quad x_{q'} = -d', \quad x_A = r - d.$$

Da A auf der gegenüberliegenden Seite außerhalb der Kugel liegt, gilt $r > d + R$.

Die Abstände von A zu den beiden Ladungen betragen

$$r, \quad r - d + d' = r - d + \frac{R^2}{d}.$$

Nach dem Superpositionsprinzip gilt

$$\mathbf{E}_A = k \left[\frac{q}{r^2} + \frac{q'}{(r - d + d')^2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

Damit folgt

$$\mathbf{E}_A = kq \left[\frac{1}{r^2} - \frac{R}{d(r - d + R^2/d)^2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

Das Vorzeichen des skalaren Koeffizienten bestimmt die Richtung entlang der Achse.

2(b)

Wir definieren

$$\delta = d - \frac{R^2}{d}.$$

Da $0 < \delta < d$ gilt, folgt aus der Bedingung $r \gg d$, dass $\delta/r \ll 1$ ist. Wir können schreiben

$$\mathbf{E}_A = \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} \left(1 - \frac{\delta}{r} \right)^{-2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

Mit der angegebenen Näherung für $a = -\delta/r$ erhalten wir

$$\left(1 - \frac{\delta}{r} \right)^{-2} \simeq 1 + \frac{2\delta}{r}.$$

Daraus folgt

$$\mathbf{E}_A \simeq \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} - \frac{2R\delta}{dr} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

Durch Einsetzen von δ ergibt sich

$$\mathbf{E}_A \simeq \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} - \frac{2R}{r} \left(1 - \frac{R^2}{d^2} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

In führender Ordnung entspricht das Feld in großer Entfernung dem Feld der effektiven Nettoladung

$$q + q' = q \left(1 - \frac{R}{d} \right).$$

2(c)

Wenn sich die äußere Ladung der Kugel nähert, gilt

$$d \rightarrow R^+, \quad d' \rightarrow R, \quad q' \rightarrow -q.$$

Damit nähern sich die Ladung und ihre Spiegelladung derselben Position an, wobei ihre Ladungen betragsgleich und entgegengesetzt sind. Ihre Felder heben sich an jedem festen Beobachtungspunkt außerhalb der Kugel auf, der vom Berührungspunkt verschieden ist.

Insbesondere ergibt der exakte Ausdruck aus 2(a)

$$\lim_{d \rightarrow R^+} \mathbf{E}_A = \mathbf{0}.$$

Dies ist ein Grenzübergang, bei dem sich die Ladung der Oberfläche von außen nähert.

3(a)

Wir nehmen an, dass der Leiter während der Bewegung der Ladung im elektrostatischen Gleichgewicht bleibt. Sei P der Befestigungspunkt des Fadens und Q die Position der Ladung. Wir wählen

$$O = (0, 0), \quad P = (l, 0).$$

Für den in Abb. 3 dargestellten Winkel gilt

$$Q = (l - L \cos \alpha, L \sin \alpha).$$

Der momentane Abstand zwischen Mittelpunkt und Ladung beträgt daher

$$d_\alpha = |OQ| = \sqrt{(l - L \cos \alpha)^2 + L^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}.$$

Mit dem Ergebnis aus 1(c) erhalten wir

$$F(\alpha) = \frac{kq^2 R d_\alpha}{(d_\alpha^2 - R^2)^2} = \frac{kq^2 R \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

Die Kraft zeigt von Q nach O .

Beschreibung der Skizze: Zeichnen Sie die Kugel mit dem Mittelpunkt O und rechts davon P auf einer horizontalen Geraden, wobei $OP = l$ gilt. Platzieren Sie Q oberhalb dieser Geraden und links von P , sodass $PQ = L$ und $\angle OPQ = \alpha$ gelten. Zeichnen Sie einen bei Q beginnenden Pfeil entlang QO , der nach O zeigt, und beschriften Sie ihn mit $\mathbf{F}_e$. Beschriften Sie $OQ = d_\alpha$.

3(b)

Ein Einheitsvektor senkrecht zum Faden in Richtung zunehmender α ist

$$\hat{\mathbf{e}}_\alpha = (\sin \alpha, \cos \alpha).$$

Da die Kraft nach O zeigt, gilt

$$\mathbf{F}_e = -\frac{F}{d_\alpha}(l - L \cos \alpha, L \sin \alpha).$$

Ihre Tangentialkomponente ist

$$\begin{aligned} F_\perp &= \mathbf{F}_e \cdot \hat{\mathbf{e}}_\alpha \\ &= -\frac{F}{d_\alpha}[(l - L \cos \alpha) \sin \alpha + L \sin \alpha \cos \alpha] \\ &= -\frac{Fl \sin \alpha}{d_\alpha}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$F_\perp = -\frac{kq^2 R l \sin \alpha}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

Für positives α wirkt diese Komponente in Richtung abnehmender α , sie ist also rüktreibend. Ihren Betrag erhält man, indem man $-\sin \alpha$ durch $|\sin \alpha|$ ersetzt.

3(c)

In der Gleichgewichtslage $\alpha = 0$ gilt

$$d_0 = l - L.$$

Die dargestellte Gleichgewichtslage setzt $l - L > R$ voraus, sodass die Ladung außerhalb der Kugel liegt.

Die Fadenspannung hat keine Komponente senkrecht zum Faden. Das zweite Newtonsche Gesetz in tangentialer Richtung lautet daher

$$mL\ddot{\alpha} = F_\perp.$$

Für kleine α gilt

$$\sin \alpha \simeq \alpha,$$

und

$$d_\alpha^2 - R^2 = (l - L)^2 - R^2 + lL\alpha^2 + O(\alpha^4).$$

Mit $D_0 = (l - L)^2 - R^2$ lautet die linearisierte Gleichung

$$mL\ddot{\alpha} = -\frac{kq^2 Rl}{D_0^2} \alpha,$$

oder

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{kq^2 Rl}{mLD_0^2}.$$

Somit beträgt die Frequenz

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kq^2 Rl}{mL[(l - L)^2 - R^2]^2}}.$$

Die Näherung setzt eine hinreichend kleine Amplitude voraus, sodass beide Bedingungen

$$|\alpha| \ll 1, \quad lL\alpha^2 \ll D_0$$

erfüllt sind.

4(a)

Wir lassen die Selbstenergie der äußeren Punktladung außer Betracht und wählen die Wechselwirkungsenergie so, dass sie für $d \rightarrow \infty$ verschwindet.

Sei ϕ_σ das von den induzierten Oberflächenladungen erzeugte Potential. Am Ort von q liefert die Spiegelladung

$$\phi_\sigma(q) = \frac{kq'}{d - d'} = -\frac{kqR}{d^2 - R^2}.$$

Die Wechselwirkungsenergie zwischen q und den induzierten Ladungen ist

$$U_{q\sigma} = q\phi_\sigma(q).$$

Hier tritt kein Faktor $1/2$ auf: Jedes Paar aus q und einer induzierten Ladung wird einmal gezählt. Daher gilt

$$U_{q\sigma} = -\frac{kq^2 R}{d^2 - R^2}.$$

4(b)

Sei σ die induzierte Oberflächenladungsdichte und ϕ_q das Potential der äußeren Ladung. Die Wechselwirkungsenergie der induzierten Ladungen untereinander ist

$$U_{\sigma\sigma} = \frac{1}{2} \int_S \sigma \phi_\sigma dS.$$

Der Faktor $1/2$ verhindert die doppelte Zählung von Paaren innerhalb der Oberflächenladungsverteilung.

Auf der geerdeten Kugel gilt

$$\phi_q + \phi_\sigma = 0.$$

Deshalb ist

$$U_{\sigma\sigma} = -\frac{1}{2} \int_S \sigma \phi_q dS.$$

Das verbleibende Integral ist gleich der Wechselwirkungsenergie zwischen Ladung und Oberfläche:

$$\int_S \sigma \phi_q dS = kq \int_S \frac{\sigma dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} = q\phi_\sigma(q) = U_{q\sigma}.$$

Somit gilt

$$U_{\sigma\sigma} = -\frac{1}{2} U_{q\sigma},$$

woraus folgt

$$U_{\sigma\sigma} = +\frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

4(c)

Durch Addition der beiden physikalischen Beiträge erhalten wir

$$U_{\text{tot}} = U_{q\sigma} + U_{\sigma\sigma} = \frac{1}{2} U_{q\sigma}.$$

Folglich gilt

$$U_{\text{tot}} = -\frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

Dies folgt auch aus der Arbeit, die erforderlich ist, um q quasistatisch aus dem Unendlichen heranzubringen:

$$U_{\text{tot}}(d) = -\int_d^\infty \frac{kq^2 R x}{(x^2 - R^2)^2} dx = -\frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

Zur Konsistenzprüfung ergibt sich für die Kraft in Richtung zunehmender d

$$-\frac{dU_{\text{tot}}}{dd} = -\frac{kq^2 R d}{(d^2 - R^2)^2},$$

was die in 1(c) gefundene anziehende Kraft wiedergibt.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Physik des Schornsteins

Einleitung

Gasförmige Verbrennungsprodukte werden durch einen hohen Schornstein mit der Querschnittsfläche A und der Höhe h in die Atmosphäre mit der Temperatur T_{Air} abgeführt (siehe Abb. 1). Der Feststoff wird in einer Feuerung verbrannt, deren Temperatur T_{Smoke} beträgt. Das pro Zeiteinheit in der Feuerung erzeugte Gasvolumen ist B .

Nehmen Sie an, dass:

- die Geschwindigkeit der Gase in der Feuerung vernachlässigbar klein ist
- die Dichte der Gase (Rauchgase) sich nicht von derjenigen der Luft bei gleicher Temperatur und gleichem Druck unterscheidet; in der Feuerung können die Gase als ideal betrachtet werden
- sich der Luftdruck mit der Höhe gemäß dem hydrostatischen Gesetz ändert; die Änderung der Luftdichte mit der Höhe ist vernachlässigbar
- die Gasströmung die Bernoulli-Gleichung erfüllt, die besagt, dass die folgende Größe an allen Punkten der Strömung erhalten bleibt:

$$\frac{1}{2}\rho v^2(z) + \rho g z + p(z) = \text{const},$$

wobei ρ die Dichte des Gases, $v(z)$ seine Geschwindigkeit, $p(z)$ der Druck und z die Höhe ist - die Änderung der Gasdichte im gesamten Schornstein vernachlässigbar ist

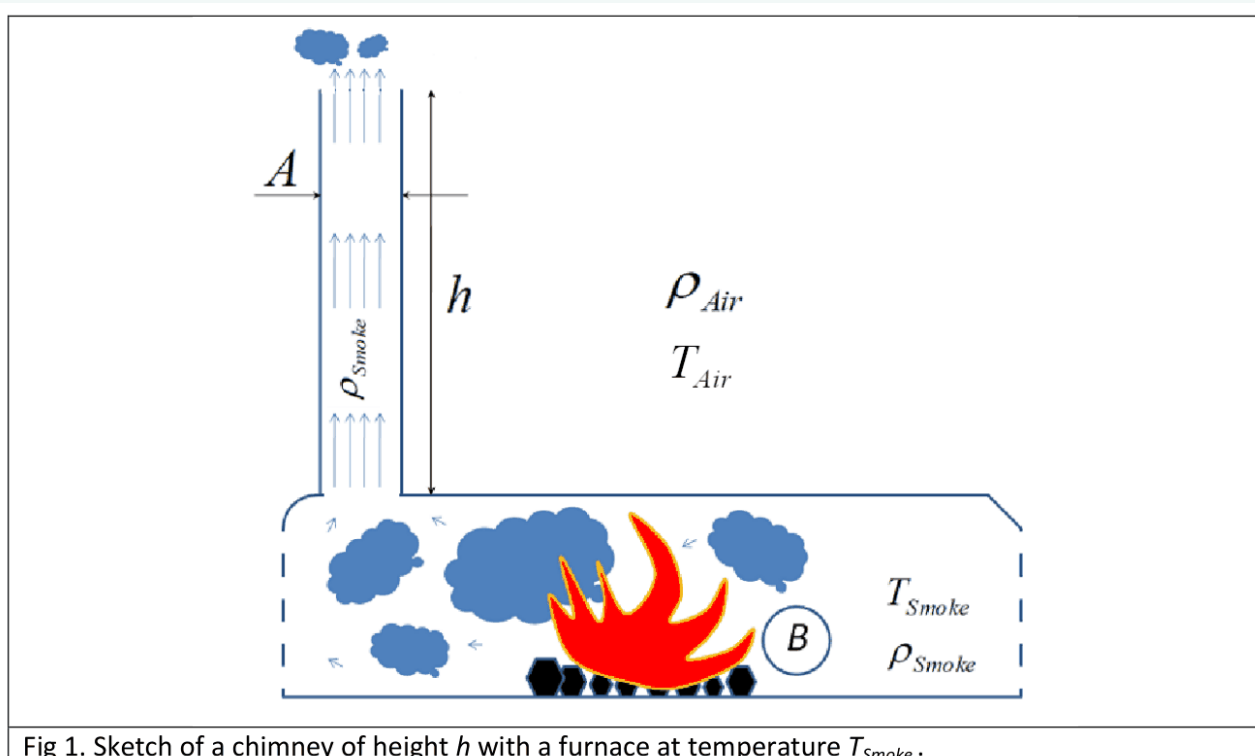


Fig 1. Sketch of a chimney of height h with a furnace at temperature T_{Smoke} .

Abb. 1. Skizze eines Schornsteins der Höhe h mit einer Feuerung bei der Temperatur T_{Smoke} .

Aufgabe 1

a) Welche Mindesthöhe muss der Schornstein haben, damit er wirksam funktioniert und das gesamte erzeugte Gas in die Atmosphäre abführen kann? Drücken Sie Ihr Ergebnis durch B , A , T_{Air} , $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $\Delta T = T_{Smoke} - T_{Air}$ aus. **Wichtig: Nehmen Sie in allen folgenden Aufgaben an, dass diese Mindesthöhe die Höhe des Schornsteins ist.** (3.5 Punkte)

b) Nehmen Sie an, dass zwei Schornsteine gebaut werden, die genau denselben Zweck erfüllen sollen. Ihre Querschnittsflächen sind identisch, sie sind jedoch für den Betrieb in verschiedenen Teilen der Welt ausgelegt: einer in kalten Regionen für eine mittlere atmosphärische Temperatur von -30°C und der andere in warmen Regionen für eine mittlere atmosphärische Temperatur von

30 °C. Die Temperatur der Feuerung beträgt 400 °C. Für den Schornstein, der für kalte Regionen ausgelegt ist, wurde eine Höhe von 100 m berechnet. Wie hoch ist der andere Schornstein? (0.5 Punkte)

c) Wie ändert sich die Geschwindigkeit der Gase mit der Höhe im Schornstein? Erstellen Sie eine Skizze/ein Diagramm unter der Annahme, dass sich die Querschnittsfläche des Schornsteins mit der Höhe nicht ändert. Kennzeichnen Sie die Stelle, an der die Gase in den Schornstein eintreten. (0.6 Punkte)

d) Wie ändert sich der Druck der Gase mit der Höhe im Schornstein? (0.5 Punkte)

Solarkraftwerk

Die Gasströmung in einem Schornstein kann zum Bau einer besonderen Art von Solarkraftwerk genutzt werden (Aufwindkraftwerk). Die Idee ist in Abb. 2 dargestellt. Die Sonne erwärmt die Luft unter einem Kollektor der Fläche S , dessen Rand offen ist, um ein ungehindertes Einströmen der Luft zu ermöglichen (siehe Abb. 2). Während die erwärmte Luft durch den Schornstein aufsteigt (dünne durchgezogene Pfeile), strömt neue kalte Luft aus der Umgebung in den Kollektor ein (dicke gepunktete Pfeile), wodurch eine kontinuierliche Luftströmung durch das Kraftwerk ermöglicht wird. Die Luftströmung durch den Schornstein treibt eine Turbine an, wodurch elektrische Energie erzeugt wird. Die Energie der Sonnenstrahlung pro Zeiteinheit und pro Einheit der horizontalen Kollektorfläche ist G . Nehmen Sie an, dass diese gesamte Energie zur Erwärmung der Luft im Kollektor genutzt werden kann (die spezifische Wärmekapazität der Luft ist c , und ihre Abhängigkeit von der Lufttemperatur kann vernachlässigt werden). Wir definieren den Wirkungsgrad des Aufwindkraftwerks als das Verhältnis der kinetischen Energie der Gasströmung zur Sonnenenergie, die bei der Erwärmung der Luft vor ihrem Eintritt in den Schornstein absorbiert wird.

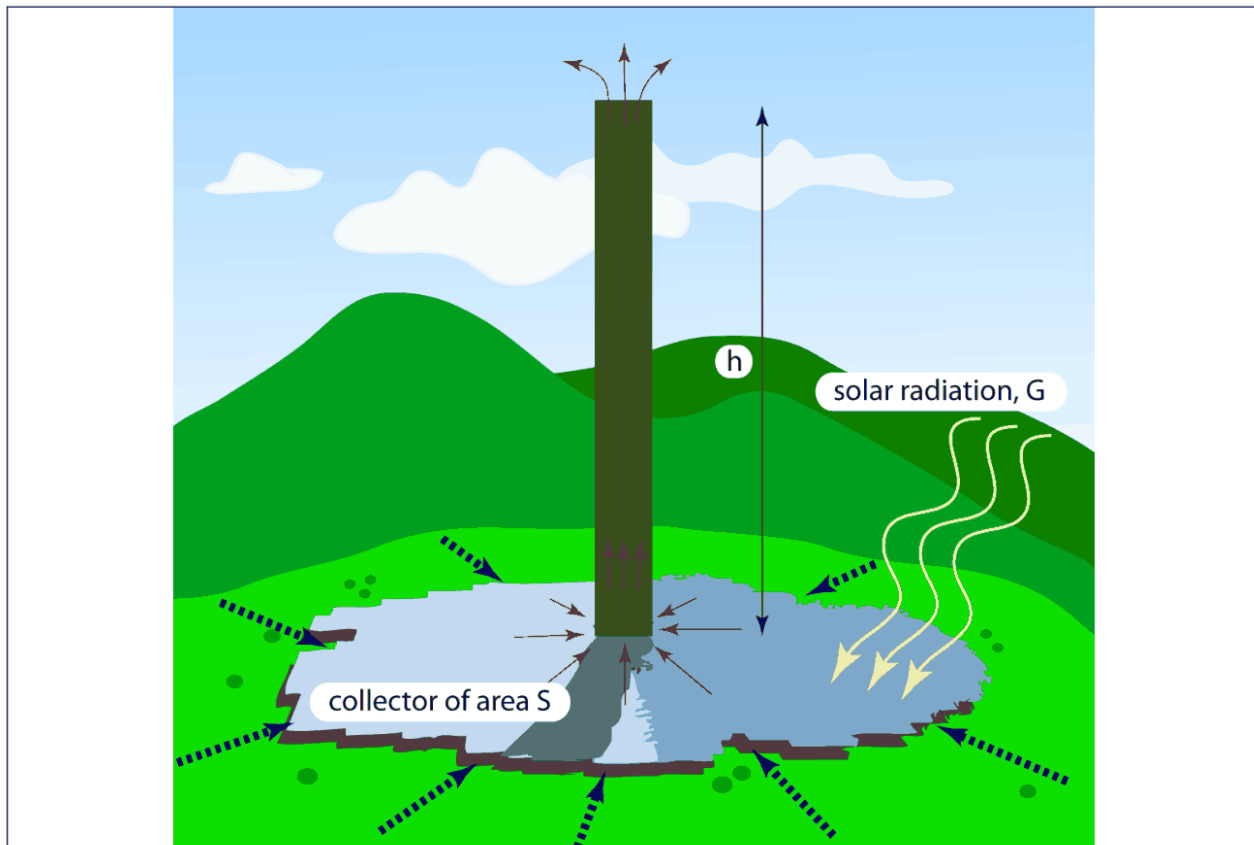


Fig 2. Sketch of a solar power plant.

Abb. 2. Skizze eines Solarkraftwerks.

Aufgabe 2

- Wie groß ist der Wirkungsgrad des Aufwindkraftwerks? (2.0 Punkte)
- Erstellen Sie ein Diagramm, das zeigt, wie sich der Wirkungsgrad des Schornsteins mit seiner Höhe ändert. (0.4 Punkte)

Prototyp in Manzanares

Der in Manzanares, Spanien, errichtete Prototyp eines Schornsteins hatte eine Höhe von 195 m und einen Radius von 5 m. Der Kollektor ist kreisförmig und hat einen Durchmesser von 244 m. Die spezifische Wärmekapazität der Luft unter typischen Betriebsbedingungen des Prototyps beträgt 1012 J/kg K , die Dichte der warmen Luft beträgt etwa 0.9 kg/m^3 , und die typische Temperatur der Atmosphäre ist $T_{Air} = 295 \text{ K}$. In Manzanares beträgt die Sonnenstrahlungsleistung pro Einheit der horizontalen Fläche an einem sonnigen Tag typischerweise 150 W/m^2 .

Aufgabe 3

- Wie groß ist der Wirkungsgrad des Prototyp-Kraftwerks? Geben Sie eine numerische Abschätzung an. (0.3 Punkte)
- Welche Leistung könnte das Prototyp-Kraftwerk erzeugen? (0.4 Punkte)
- Wie viel Energie könnte das Kraftwerk an einem typischen sonnigen Tag erzeugen? (0.3 Punkte)

Aufgabe 4

a) Wie groß ist die Temperaturerhöhung der Luft beim Eintritt aus der Umgebung (kalte Luft) in den Schornstein (warme Luft)? Geben Sie die allgemeine Formel an und werten Sie sie für den Prototyp-Schornstein aus. (1.0 Punkte)

b) Wie groß ist der Luftmassenstrom durch das System? (0.5 Punkte)

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Setzen Sie $z = 0$ am Eintritt in den Schornstein und $z = h$ an seiner Austrittsöffnung. Im Folgenden bezeichnet ρ_h die Dichte der Rauchgase oder der erwärmten Luft.

- 1(a) Für $\Delta T > 0$ gilt

$$h_{\min} = \frac{B^2 T_{Air}}{2gA^2 \Delta T}.$$

- 1(b)

$$h_{\text{warm}} \simeq 145 \text{ m}.$$

- 1(c)

$$v(z) = \frac{B}{A} \quad (0 < z < h).$$

Die Geschwindigkeit steigt von nahezu null in der Feuerung auf B/A im Eintrittsbereich und bleibt anschließend im gesamten Schornstein konstant.

- 1(d)

$$p(z) = p_{Air}(h) + \rho_h g(h - z).$$

Der Druck nimmt mit der Höhe linear ab, mit der Steigung $-\rho_h g$, und erreicht an der Austrittsöffnung den äußeren Atmosphärendruck.

- 2(a)

$$\eta = \frac{gh}{cT_{Air}}.$$

- 2(b) Der Graph von η in Abhängigkeit von h ist eine Ursprungsgerade mit der Steigung $g/(cT_{Air})$.

- 3(a)

$$\eta = 0.00641 \simeq 0.64\%.$$

- 3(b) Die ideal verfügbare Leistung beträgt

$$P \simeq 4.49 \times 10^4 \text{ W} \simeq 45 \text{ kW}.$$

- **3(c)** Für eine effektive Bestrahlungsdauer τ gilt

$$E = P\tau.$$

Für 12 h bei der angegebenen Bestrahlungsstärke gilt $E \simeq 0.54 \text{ MWh} = 1.9 \text{ GJ}$. Falls die angegebene Bestrahlungsstärke ein Mittelwert über den ganzen Tag ist, ergibt sich für 24 h der Wert $1.08 \text{ MWh} = 3.88 \text{ GJ}$.

- **4(a)**

$$\Delta T = \left[\frac{(GS)^2 T_{Air}}{2gh \rho_h^2 A^2 c^2} \right]^{1/3} \simeq 9.1 \text{ K}.$$

- **4(b)**

$$\dot{m} = \frac{GS}{c\Delta T} = \left[\frac{2gh(\rho_h A)^2 GS}{cT_{Air}} \right]^{1/3} \simeq 7.7 \times 10^2 \text{ kg s}^{-1}.$$

Lösung

Wir schreiben $\rho_a = \rho_{Air}$, $\rho_h = \rho_{Smoke}$ und $p_0 = p_{Air}(0)$. Beim Aufwindkraftwerk bezeichnet ρ_h stattdessen die Dichte der erwärmten Luft. Die absoluten Temperaturen in allen Formeln sind in Kelvin angegeben.

1(a)

Der Schornstein arbeitet mit natürlichem Zug: Die Außenluft ist dichter als das heiße Gas, sodass ihr Druck mit der Höhe schneller abnimmt. Im Grenzfall des Betriebs steht das nahezu ruhende Gas in der Feuerung unter dem Atmosphärendruck p_0 . Dies ist die Randbedingung dafür, dass das Gas abgeführt werden kann, ohne dass in der Feuerung ein Überdruck erforderlich ist.

Nach dem hydrostatischen Gesetz gilt außerhalb des Schornsteins

$$p_{Air}(h) = p_0 - \rho_a gh.$$

An der offenen Austrittsöffnung ist der Gasdruck gleich dem örtlichen Atmosphärendruck. Die Bernoulli-Gleichung zwischen der Feuerung, in der die Geschwindigkeit vernachlässigbar ist, und der Austrittsöffnung liefert

$$p_0 = p_{Air}(h) + \rho_h gh + \frac{1}{2} \rho_h v^2.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{2} \rho_h v^2 = (\rho_a - \rho_h) gh.$$

Die Rauchgase und die Luft haben bei gleicher Temperatur und gleichem Druck dieselbe Dichte. Die Anwendung der idealen Gasgleichung bei dem gemeinsamen Druck am Fuß des Schornsteins ergibt daher

$$\frac{\rho_a}{\rho_h} = \frac{T_{Smoke}}{T_{Air}} = 1 + \frac{\Delta T}{T_{Air}}.$$

Somit gilt

$$v^2 = 2gh \frac{\Delta T}{T_{Air}}.$$

Da die Dichteänderung zwischen Feuerung und Schornstein vernachlässigt wird, beträgt der abführbare Volumenstrom Av . Damit das gesamte Gas abgeführt wird, muss gelten

$$Av \geq B.$$

Bei der Mindesthöhe gilt Gleichheit:

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 = 2gh_{\min} \frac{\Delta T}{T_{Air}}.$$

Daher ist

$$h_{\min} = \frac{B^2 T_{Air}}{2gA^2 \Delta T}.$$

Dieses Ergebnis setzt $\Delta T > 0$ voraus. Für $B > 0$ und $\Delta T = 0$ erzeugt unter diesen Annahmen keine endliche Höhe den erforderlichen natürlichen Zug.

1(b)

Beide Schornsteine haben dieselben Werte für B und A sowie dieselbe Feuerungstemperatur, sodass

$$h \propto \frac{T_{Air}}{T_{Smoke} - T_{Air}}.$$

Die maßgeblichen Temperaturen und Temperaturdifferenzen sind

$$\begin{aligned} T_c &= 243.15 \text{ K}, & T_w &= 303.15 \text{ K}, \\ \Delta T_c &= 430 \text{ K}, & \Delta T_w &= 370 \text{ K}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$h_w = h_c \frac{T_w}{T_c} \frac{\Delta T_c}{\Delta T_w} = (100 \text{ m}) \frac{303.15}{243.15} \frac{430}{370}.$$

Dies ergibt

$$h_w = 144.9 \text{ m} \simeq 145 \text{ m}.$$

Die wärmere Umgebung führt zu einem kleineren relativen Dichteunterschied, sodass ein höherer Schornstein erforderlich ist.

1(c)

Die Massenerhaltung bei stationärer Strömung liefert

$$\dot{m} = \rho_h Av(z).$$

Da sowohl ρ_h als auch A im gesamten Schornstein konstant sind, muss auch $v(z)$ konstant sein. Bei der vorausgesetzten Mindesthöhe ist der Volumenstrom genau B , sodass

$$v(z) = \frac{B}{A} = \sqrt{\frac{2gh\Delta T}{T_{Air}}}.$$

Tragen Sie für die verlangte Skizze z auf der horizontalen Achse und v auf der vertikalen Achse auf. Markieren Sie den Schornsteineintritt bei $z = 0$. Zeichnen Sie im Eintrittsbereich einen raschen Anstieg von der vernachlässigbaren Geschwindigkeit in der Feuerung auf B/A , gefolgt von einer horizontalen

Linie bei $v = B/A$ vom Eintritt bis $z = h$. Wird der Eintrittsbereich idealisiert als räumlich vernachlässigbar klein angenommen, kann die dortige Beschleunigung durch einen Sprung bei $z = 0$ dargestellt werden.

1(d)

Innerhalb des Schornsteins lautet die Bernoulli-Gleichung

$$\frac{1}{2}\rho_h v^2 + \rho_h g z + p(z) = \text{konstant}.$$

Da v konstant ist, gilt

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_h g.$$

Mit der Randbedingung an der Austrittsöffnung $p(h) = p_{Air}(h)$ folgt

$$p(z) = p_{Air}(h) + \rho_h g(h - z).$$

Gleichwertig dazu ist

$$p(z) = p_0 - \rho_a g h + \rho_h g(h - z).$$

Der Außendruck in der Höhe z ist $p_{Air}(z) = p_0 - \rho_a g z$. Subtraktion ergibt

$$p(z) - p_{Air}(z) = -(\rho_a - \rho_h)g(h - z).$$

Somit liegt der Gasdruck überall im Schornstein unterhalb seiner Austrittsöffnung unter dem umgebenden Atmosphärendruck; an der Austrittsöffnung werden die beiden Drücke gleich.

Unmittelbar nach dem Eintritt gilt

$$p(0^+) = p_0 - (\rho_a - \rho_h)gh = p_0 - \frac{1}{2}\rho_h v^2.$$

Diese Druckabsenkung am Eintritt geht mit der Beschleunigung aus der Feuerung in den Schornstein einher. Danach nimmt der Druck mit der Höhe linear ab.

2(a)

Betrachten wir eine Luftmasse m , die im Kollektor um ΔT erwärmt wird. Die aufgenommene Wärme ist

$$Q = mc\Delta T.$$

Ihre kinetische Energie im Schornstein ist

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Gemäß der Definition in der Aufgabenstellung gilt

$$\eta = \frac{K}{Q} = \frac{v^2}{2c\Delta T}.$$

Die Anwendung des Ergebnisses aus 1(a),

$$v^2 = \frac{2gh\Delta T}{T_{Air}},$$

liefert

$$\eta = \frac{gh}{cT_{Air}}.$$

Innerhalb des angegebenen Modells ist der Wirkungsgrad unabhängig von der Temperaturerhöhung, der Kollektorfläche und der Querschnittsfläche des Schornsteins. Er gibt die verfügbare kinetische Leistung im Verhältnis zur absorbierten Sonnenstrahlungsleistung an.

2(b)

Bei festem T_{Air} und c gilt

$$\eta(h) = \frac{g}{cT_{Air}}h.$$

Im verlangten Diagramm wird h auf der horizontalen Achse und η auf der vertikalen Achse aufgetragen. Es ist eine Gerade durch $(0, 0)$ mit der positiven Steigung

$$\boxed{\frac{d\eta}{dh} = \frac{g}{cT_{Air}}}.$$

Eine Verdopplung der Höhe verdoppelt den Wirkungsgrad. Dieser lineare Zusammenhang gilt nur im Rahmen der Näherungen der Aufgabe; er sollte nicht auf Höhen extrapoliert werden, bei denen Dichteänderungen wesentlich werden.

3(a)

Einsetzen der Daten des Prototyps ergibt

$$\eta = \frac{(9.81 \text{ m s}^{-2})(195 \text{ m})}{(1012 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1})(295 \text{ K})} = 0.0064077.$$

Daher gilt

$$\boxed{\eta \simeq 0.64\%}.$$

3(b)

Der Kollektorradius beträgt $244/2 = 122 \text{ m}$, sodass für seine Fläche gilt

$$S = \pi(122 \text{ m})^2 = 4.67595 \times 10^4 \text{ m}^2.$$

Es wird angenommen, dass die gesamte einfallende Sonnenstrahlungsleistung die Luft erwärmt:

$$P_{\text{solar}} = GS = (150 \text{ W m}^{-2})(4.67595 \times 10^4 \text{ m}^2) = 7.01392 \times 10^6 \text{ W}.$$

Die verfügbare kinetische Leistung ist

$$P = \eta GS = (0.0064077)(7.01392 \times 10^6 \text{ W}),$$

also

$$\boxed{P = 4.4943 \times 10^4 \text{ W} \simeq 45 \text{ kW}}.$$

Dies ist die gemäß der Definition der Aufgabe ideal zur Umwandlung verfügbare Leistung; ein zusätzlicher Turbinen- oder Generatorwirkungsgrad ist nicht angegeben.

3(c)

Für eine effektive Bestrahlungsdauer τ bei der angegebenen Bestrahlungsstärke gilt

$$\boxed{E = P\tau = \frac{ghGS}{cT_{Air}}\tau}.$$

Somit liefert jede Stunde unter den angegebenen Bedingungen etwa 44.9 kWh .

Wird ein typischer sonniger Tag als 12 h bei der angegebenen Bestrahlungsstärke abgeschätzt, gilt

$$E = (44.943 \text{ kW})(12 \text{ h}) = 539.3 \text{ kWh},$$

oder

$$E \simeq 0.54 \text{ MWh} \simeq 1.9 \times 10^9 \text{ J}.$$

Wird 150 W m^{-2} stattdessen als Mittelwert über den gesamten 24 h-Tag interpretiert, gilt

$$E = (44.943 \text{ kW})(24 \text{ h}) \simeq 1.08 \text{ MWh} = 3.88 \times 10^9 \text{ J}.$$

Die Aufgabenstellung gibt weder die effektive Bestrahlungsdauer noch die Konvention für die Mittelwertbildung an.

4(a)

Im stationären Betrieb ist die solare Heizleistung gleich dem von der Luft abgeführten Wärmestrom:

$$GS = \dot{m} c \Delta T.$$

Die Massenerhaltung liefert

$$\dot{m} = \rho_h A v.$$

Durch Kombination dieser Beziehungen mit der Strömungsgeschwindigkeit im Schornstein,

$$v = \sqrt{\frac{2gh\Delta T}{T_{Air}}},$$

erhalten wir

$$GS = \rho_h A c \Delta T \sqrt{\frac{2gh\Delta T}{T_{Air}}} = \rho_h A c \sqrt{\frac{2gh}{T_{Air}}} (\Delta T)^{3/2}.$$

Auflösen nach ΔT ergibt

$$\Delta T = \left[\frac{(GS)^2 T_{Air}}{2gh \rho_h^2 A^2 c^2} \right]^{1/3}.$$

Für den Prototyp gilt

$$A = \pi(5 \text{ m})^2 = 78.5398 \text{ m}^2.$$

Mit der angegebenen Dichte der warmen Luft folgt

$$\Delta T = \left[\frac{(7.01392 \times 10^6)^2 (295)}{2(9.81)(195)(0.9)^2 (78.5398)^2 (1012)^2} \right]^{1/3} \text{ K}.$$

Daher gilt

$$\Delta T = 9.05 \text{ K} \simeq 9.1 \text{ K}.$$

Die Luft tritt mit etwa 304 K in den Schornstein ein.

4(b)

Aus der Wärmebilanz folgt

$$\dot{m} = \frac{GS}{c \Delta T}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\dot{m} = \frac{7.01392 \times 10^6 \text{ W}}{(1012 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1})(9.0503 \text{ K})} = 765.8 \text{ kg s}^{-1}.$$

Somit gilt

$$\dot{m} \simeq 7.7 \times 10^2 \text{ kg s}^{-1}.$$

Durch Eliminieren von ΔT erhält man außerdem den allgemeinen Ausdruck

$$\dot{m} = \left[\frac{2gh(\rho_h A)^2 GS}{cT_{Air}} \right]^{1/3}.$$

Zur numerischen Kontrolle beträgt die zugehörige Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2(9.81)(195)(9.0503)}{295}} = 10.83 \text{ m s}^{-1},$$

woraus sich $\rho_h A v = 765.8 \text{ kg s}^{-1}$ und die kinetische Leistung $\frac{1}{2} \dot{m} v^2 = 44.94 \text{ kW}$ ergeben, in Übereinstimmung mit 3(b).

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Einfaches Modell eines Atomkerns

Einleitung

Obwohl Atomkerne Quantenobjekte sind, lassen sich zahlreiche phänomenologische Gesetze für ihre grundlegenden Eigenschaften (wie Radius oder Bindungsenergie) aus einfachen Annahmen ableiten: (i) Kerne bestehen aus Nukleonen (d. h. Protonen und Neutronen); (ii) die starke Kernwechselwirkung, die diese Nukleonen zusammenhält, hat eine sehr kurze Reichweite (sie wirkt nur zwischen benachbarten Nukleonen); (iii) die Anzahl der Protonen (Z) in einem gegebenen Kern ist näherungsweise gleich der Anzahl der Neutronen (N), d. h. $Z \approx N \approx A/2$, wobei A die Gesamtzahl der Nukleonen ist ($A \gg 1$). **Wichtig: Verwenden Sie diese Annahmen in den folgenden Aufgaben 1–4.**

Aufgabe 1 - Der Atomkern als dicht gepacktes System von Nukleonen

In einem einfachen Modell kann man sich einen Atomkern als eine Kugel aus dicht gepackten Nukleonen vorstellen [siehe Abb. 1(a)], wobei die Nukleonen harte Kugeln mit dem Radius $r_N = 0.85 \text{ fm}$ sind ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$). Die Kernkraft wirkt nur zwischen zwei Nukleonen, die sich berühren. Das Volumen des Kerns V ist größer als das Volumen aller Nukleonen AV_N , wobei $V_N = \frac{4}{3}r_N^3\pi$. Das Verhältnis $f = AV_N/V$ heißt Packungsfaktor und gibt den prozentualen Anteil des Raums an, der von Kernmaterie ausgefüllt wird.

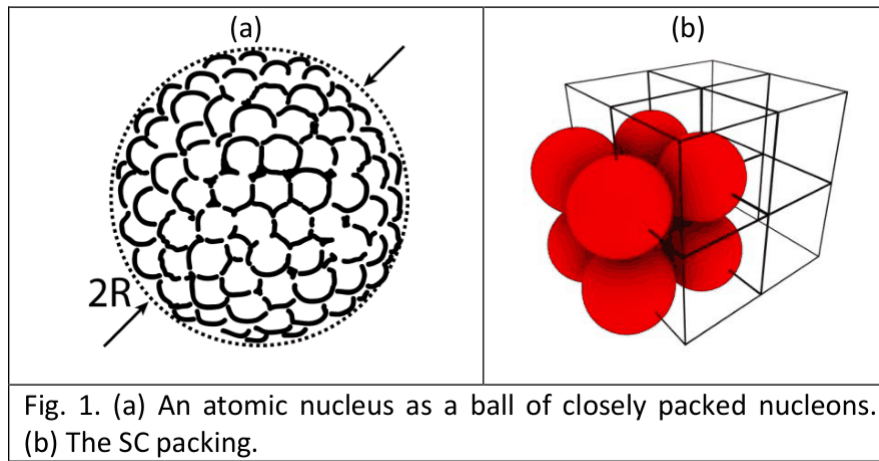


Abb. 1. (a) Ein Atomkern als Kugel aus dicht gepackten Nukleonen. (b) Die SC-Packung.

a) Berechnen Sie den Packungsfaktor f , wenn die Nukleonen in einer „einfach kubischen“ (SC) Kristallstruktur angeordnet wären, in der der Mittelpunkt jedes Nukleons auf einem Gitterpunkt eines unendlichen kubischen Gitters liegt [siehe Abb. 1(b)]. (0.3 Punkte)

Wichtig: Nehmen Sie in allen folgenden Aufgaben an, dass der tatsächliche Packungsfaktor für Kerne dem aus Aufgabe 1a entspricht. Falls Sie ihn nicht berechnen können, verwenden Sie in den folgenden Aufgaben $f = 1/2$.

b) Schätzen Sie die mittlere Massendichte ρ_m , die Ladungsdichte ρ_c und den Radius R für einen Kern mit A Nukleonen ab. Die mittlere Masse eines Nukleons beträgt $1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. (1.0 Punkte)

Aufgabe 2 - Bindungsenergie von Atomkernen – Volumen- und Oberflächenterm

Die Bindungsenergie eines Kerns ist die Energie, die benötigt wird, um ihn in einzelne Nukleonen zu zerlegen. Sie beruht im Wesentlichen auf der anziehenden Kernkraft zwischen jedem Nukleon und seinen Nachbarn. Befindet sich ein Nukleon nicht an der Oberfläche des Kerns, trägt es mit $a_V = 15.8 \text{ MeV}$ ($1 \text{ MeV} = 1.602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$) zur gesamten Bindungsenergie bei. Der Beitrag eines Oberflächennukleons zur Bindungsenergie beträgt näherungsweise $a_V/2$. Drücken Sie die Bindungsenergie E_b eines Kerns mit A Nukleonen durch A , a_V und f aus und berücksichtigen Sie dabei die Oberflächenkorrektur. (1.9 Punkte)

Aufgabe 3 - Elektrostatische (Coulomb-)Effekte auf die Bindungsenergie

Die elektrostatische Energie einer homogen geladenen Kugel (mit Radius R und Gesamtladung Q_0) beträgt

$$U_c = \frac{3Q_0^2}{20\pi\epsilon_0 R},$$

wobei $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$.

a) Wenden Sie diese Formel an, um die elektrostatische Energie eines Kerns zu bestimmen. In einem Kern wirkt jedes Proton (durch die Coulombkraft) nicht auf sich selbst, sondern nur auf die übrigen Protonen. Dies lässt sich berücksichtigen, indem man in der erhaltenen Formel $Z^2 \rightarrow Z(Z - 1)$ ersetzt. Verwenden Sie diese Korrektur in den folgenden Aufgaben. (0.4 Punkte)

b) Geben Sie die vollständige Formel für die Bindungsenergie an, einschließlich des Hauptterms (Volumenterms), des Oberflächenkorrekturterms und der erhaltenen elektrostatischen Korrektur. (0.3 Punkte)

Aufgabe 4 - Spaltung schwerer Kerne

Die Kernspaltung ist ein Kernprozess, bei dem sich ein Kern in kleinere Teile (leichtere Kerne) aufspaltet. Nehmen Sie an, dass sich ein Kern mit A Nukleonen in nur zwei gleich große Teile aufspaltet, wie in Abb. 2 dargestellt.

a) Berechnen Sie die gesamte kinetische Energie der Spaltprodukte E_{kin} , wenn die Mittelpunkte der beiden leichteren Kerne den Abstand $d \geq 2R(A/2)$ voneinander haben, wobei $R(A/2)$ ihr Radius ist. Der große Kern befand sich anfangs in Ruhe. (1.3 Punkte)

b) Nehmen Sie $d = 2R(A/2)$ an und werten Sie den in Teil a) erhaltenen Ausdruck für E_{kin} für $A = 100, 150, 200$ und 250 aus (geben Sie die Ergebnisse in MeV an). Schätzen Sie ab, für welche Werte von A eine Spaltung in dem oben beschriebenen Modell möglich ist. (1.0 Punkte)

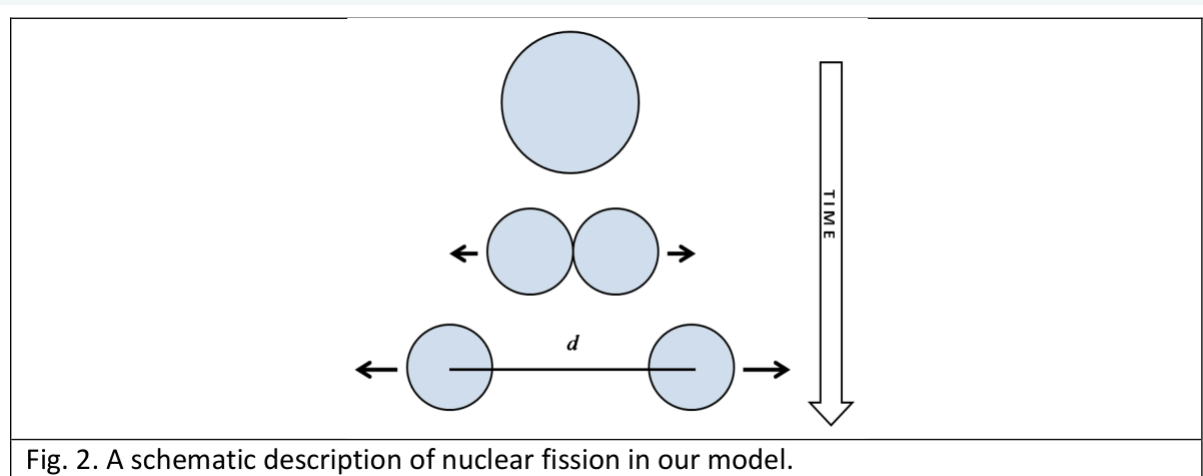


Abb. 2. Schematische Darstellung der Kernspaltung in unserem Modell.

Aufgabe 5 – Transferreaktionen

a) In der modernen Physik wird die Energiebilanz von Kernen und ihren Reaktionen mithilfe von Massen beschrieben. Befindet sich beispielsweise ein Kern (mit der Geschwindigkeit null) in einem angeregten Zustand mit der Energie E_{exc} oberhalb des Grundzustands, so beträgt seine Masse $m = m_0 + E_{\text{exc}}/c^2$, wobei m_0 seine Masse im ruhenden Grundzustand ist. Die Kernreaktion $^{16}\text{O} + ^{54}\text{Fe} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^{58}\text{Ni}$ ist ein Beispiel für die sogenannten „Transferreaktionen“, bei denen ein Teil eines Kernels („Cluster“) auf den anderen übertragen wird (siehe Abb. 3). In unserem Beispiel ist der übertragene Teil ein ^4He -Cluster (α -Teilchen). Transferreaktionen treten mit maximaler Wahrscheinlichkeit auf, wenn die Geschwindigkeit des projektilähnlichen Reaktionsprodukts (in unserem Fall: ^{12}C) sowohl im Betrag als auch in der Richtung mit der Geschwindigkeit des Projektils (in unserem Fall: ^{16}O) übereinstimmt. Das Target ^{54}Fe befindet sich anfangs in Ruhe. Bei der Reaktion wird ^{58}Ni in einen seiner höher liegenden Zustände angeregt. Bestimmen Sie die Anregungsenergie dieses Zustands (und geben Sie sie in MeV an), wenn die kinetische Energie des Projektils ^{16}O gleich 50 MeV ist. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. (2.2 Punkte)

1.	$M(^{16}\text{O})$	15.99491 a.m.u.
----	--------------------	-----------------

2.	$M(^{54}\text{Fe})$	53.93962 a.m.u.
3.	$M(^{12}\text{C})$	12.00000 a.m.u.
4.	$M(^{58}\text{Ni})$	57.93535 a.m.u.

Tabelle 1. Die Ruhemassen der Reaktionsteilnehmer in ihren Grundzuständen.

1 a. m. u. = $1.6605 \cdot 10^{-27}$ kg.

b) Der im angeregten Zustand aus Teil a) erzeugte ^{58}Ni -Kern geht durch Emission eines Gammaphotons in seiner Bewegungsrichtung in den Grundzustand über. Betrachten Sie diesen Zerfall in dem Bezugssystem, in dem ^{58}Ni ruht, und bestimmen Sie die Rückstoßenergie von ^{58}Ni (d. h. die kinetische Energie, die ^{58}Ni nach der Emission des Photons erhält). Wie groß ist die Photonenenergie in diesem System? Wie groß ist die Photonenenergie im Laborsystem (d. h. welche Photonenenergie würde ein Detektor messen, der in der Bewegungsrichtung des ^{58}Ni -Kerns aufgestellt ist)? (1.6 Punkte)

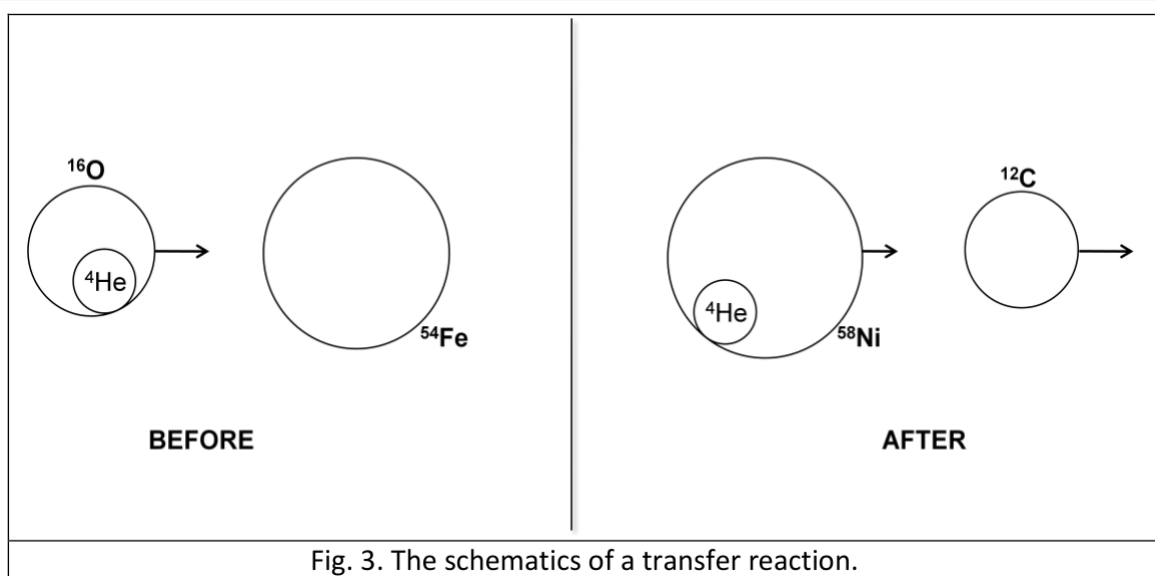


Abb. 3. Schematische Darstellung einer Transferreaktion.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Zur Abkürzung definieren wir

$$S(A) = A - \left(A^{1/3} - 2f^{1/3} \right)^3, \quad r_0 = r_N f^{-1/3} = 1.0546 \text{ fm},$$

und

$$a_C = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 r_0} = 0.81955 \text{ MeV}.$$

- 1(a).

$$f = \frac{\pi}{6} \approx 0.5236 = 52.36\%.$$

- 1(b).

$$\rho_m \approx 3.40 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}, \quad \rho_c \approx 1.63 \times 10^{25} \text{ C m}^{-3}$$

$$R = r_N(A/f)^{1/3} \approx 1.05 A^{1/3} \text{ fm.}$$

- 2.

$$E_b^{(\text{nuc})} = a_V \left[A - \frac{S(A)}{2} \right] = a_V \left[A - 3f^{1/3} A^{2/3} + 6f^{2/3} A^{1/3} - 4f \right].$$

- 3(a).

$$U_c = \frac{a_C Z(Z-1)}{A^{1/3}} \simeq \frac{a_C}{4} (A^{5/3} - 2A^{2/3}).$$

- 3(b). Bezeichnen wir die vollständige Bindungsenergie mit $B(A)$, so gilt

$$B(A) = a_V \left[A - 3f^{1/3} A^{2/3} + 6f^{2/3} A^{1/3} - 4f \right] - \frac{a_C}{4} (A^{5/3} - 2A^{2/3}).$$

- 4(a).

$$E_{\text{kin}}(d) = 2B(A/2) - B(A) - \frac{e^2 A^2}{64\pi\epsilon_0 d}.$$

- 4(b). Bei Berührung ergeben sich für $A = 100, 150, 200, 250$ der Reihe nach die Energien

$$-29.3, \quad -24.9, \quad -6.77, \quad +23.6 \text{ MeV.}$$

Der Schwellenwert für schwere Kerne liegt näherungsweise bei $A_{\text{crit}} \simeq 213$. Von den vier Beispielen erlaubt nur $A = 250$ eine Spaltung aus der Ruhe über die Berührungskonfiguration.

- 5(a).

$$E_{\text{exc}} \approx 10.86 \text{ MeV.}$$

- 5(b).

$$T_{\text{recoil}} \approx 1.09 \text{ keV}, \quad E_{\gamma}^* \approx 10.86 \text{ MeV}, \quad E_{\gamma, \text{lab}} \approx 10.92 \text{ MeV.}$$

Der Stern bezeichnet hier das Ruhesystem des angeregten Nickelkerns vor der Emission.

Lösung

1(a). Packungsfaktor

Bei einer einfach kubischen Packung berühren sich benachbarte Kugeln entlang einer Würfelkante, sodass der Gitterabstand $2r_N$ beträgt. Eine kubische Elementarzelle enthält acht Nukleonen an den Ecken, von denen jedes zu acht Zellen gehört: insgesamt ein vollständiges Nukleon pro Zelle.

Folglich gilt

$$f = \frac{\text{Nukleonenvolumen pro Zelle}}{\text{Zellvolumen}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_N^3}{(2r_N)^3} = \boxed{\frac{\pi}{6}}.$$

1(b). Dichten und Kernradius

Aus der Definition des Packungsfaktors folgt

$$V = \frac{AV_N}{f} = \frac{4\pi r_N^3 A}{3f}.$$

Durch Gleichsetzen mit $4\pi R^3/3$ ergibt sich

$$\boxed{R = r_N \left(\frac{A}{f} \right)^{1/3} = r_0 A^{1/3}}, \quad r_0 = 1.0546 \text{ fm.}$$

Im Rahmen der Genauigkeit dieses Modells beträgt die Kernmasse Am_N , wobei $m_N = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$. Somit gilt

$$\rho_m = \frac{Am_N}{V} = \frac{3fm_N}{4\pi r_N^3}.$$

Mit $f = \pi/6$ erhält man

$$\boxed{\rho_m = \frac{m_N}{8r_N^3} = 3.40 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}.$$

Mit $Z \simeq A/2$ beträgt die Kernladung näherungsweise $Ae/2$. Die mit der angegebenen Umrechnung des Elektronenvolts konsistente Elementarladung ist $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$. Daher gilt

$$\rho_c = \frac{Ae/2}{V} = \frac{3fe}{8\pi r_N^3} = \frac{e}{16r_N^3},$$

also

$$\boxed{\rho_c = 1.63 \times 10^{25} \text{ C m}^{-3}.$$

Beide mittleren Dichten sind unabhängig von A .

2. Volumenbeitrag und vollständiger Beitrag der Oberflächenschicht

Die Anzahldichte der Nukleonen beträgt

$$n = \frac{A}{V} = \frac{f}{V_N}.$$

Für die vorgegebene Oberflächenschicht der Dicke $2r_N$ beträgt das Volumen

$$V_{\text{surface}} = \frac{4\pi}{3} [R^3 - (R - 2r_N)^3].$$

Im kontinuierlichen Packungsmodell ist die Anzahl der Oberflächennukleonen daher

$$\begin{aligned} S(A) &= \frac{f}{r_N^3} [R^3 - (R - 2r_N)^3] \\ &= A - f \left[\left(\frac{A}{f} \right)^{1/3} - 2 \right]^3 \\ &= \boxed{A - \left(A^{1/3} - 2f^{1/3} \right)^3}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck gilt für $R \geq 2r_N$, wie es für die hier betrachteten großen Kerne zutrifft.
Ausmultiplizieren ohne Vernachlässigung eines Terms ergibt

$$S(A) = 6f^{1/3}A^{2/3} - 12f^{2/3}A^{1/3} + 8f.$$

Es gibt $A - S(A)$ Nukleonen im Inneren, die jeweils a_V beitragen, und $S(A)$ Oberflächennukleonen, die jeweils $a_V/2$ beitragen. Somit gilt

$$E_b^{(\text{nuc})} = a_V[A - S(A)] + \frac{a_V}{2}S(A),$$

oder

$$E_b^{(\text{nuc})} = a_V \left[A - 3f^{1/3}A^{2/3} + 6f^{2/3}A^{1/3} - 4f \right].$$

Numerisch ergibt sich

$$\frac{E_b^{(\text{nuc})}}{\text{MeV}} = 15.8A - 38.2042A^{2/3} + 61.5849A^{1/3} - 33.0914.$$

Der $A^{1/3}$ -Term und der konstante Term werden in allen folgenden Berechnungen beibehalten.

3(a). Coulomb-Selbstenergie

Einsetzen von $Q_0 = Ze$ in die angegebene Formel und anschließende Anwendung der vorgeschriebenen Selbstwechselwirkungskorrektur ergibt

$$U_c = \frac{3e^2Z(Z-1)}{20\pi\epsilon_0R}.$$

Da $R = r_0A^{1/3}$, definieren wir

$$a_C = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0r_0}.$$

Mit den angegebenen Konstanten erhält man

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44049 \text{ MeV fm}, \quad a_C = 0.81955 \text{ MeV}.$$

Somit gilt

$$U_c = \frac{a_CZ(Z-1)}{A^{1/3}}.$$

Mit $Z \simeq A/2$ und unter Beibehaltung der Subtraktion von eins gilt

$$Z(Z-1) \simeq \frac{A(A-2)}{4},$$

und daher

$$U_c(A) = \frac{a_C}{4} \left(A^{5/3} - 2A^{2/3} \right).$$

3(b). Vollständige Bindungsenergie

Die positive elektrostatische Energie verringert die Energie, die zur Zerlegung des Kerns erforderlich ist. Daher gilt

$$B(A) = E_b^{(\text{nuc})}(A) - U_c(A),$$

woraus folgt

$$B(A) = a_V \left[A - 3f^{1/3} A^{2/3} + 6f^{2/3} A^{1/3} - 4f \right] - \frac{a_C}{4} \left(A^{5/3} - 2A^{2/3} \right).$$

4(a). Kinetische Energie beim Abstand d

Jedes Fragment enthält $A/2$ Nukleonen und trägt näherungsweise die Ladung $Ae/4$. Für zwei nicht überlappende, kugelsymmetrische Ladungsverteilungen ist die elektrostatische Wechselwirkungsenergie gleich derjenigen von Punktladungen in ihren Mittelpunkten:

$$U_{12}(d) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Ae/4)^2}{d} = \frac{e^2 A^2}{64\pi\epsilon_0 d}.$$

Die Korrektur $Z(Z-1)$ ist bereits in der Selbstenergie jedes Kerns enthalten. Sie gilt nicht für diese Wechselwirkung zwischen zwei verschiedenen Gruppen von Protonen.

Wir wählen die voneinander getrennten freien Nukleonen als gemeinsamen Bezugspunkt für die innere Energie. Der ursprüngliche Kern besitzt die Energie $-B(A)$, während die beiden getrennten Fragmente die Gesamtenergie

$$-2B(A/2) + U_{12}(d) + E_{\text{kin}}(d)$$

besitzen. Aus der Energieerhaltung folgt somit

$$E_{\text{kin}}(d) = 2B(A/2) - B(A) - U_{12}(d).$$

Einsetzen und Zusammenfassen der Bindungsenergien ergibt

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}}(d) = & -3a_V f^{1/3} (2^{1/3} - 1) A^{2/3} \\ & + 6a_V f^{2/3} (2^{2/3} - 1) A^{1/3} - 4a_V f \\ & + \frac{a_C}{4} \left[(1 - 2^{-2/3}) A^{5/3} + 2(2^{1/3} - 1) A^{2/3} \right] \\ & - \frac{e^2 A^2}{64\pi\epsilon_0 d}. \end{aligned}$$

Die Volumenbeiträge heben sich auf, da die Gesamtzahl der Nukleonen erhalten bleibt. Wenn sich die Fragmente voneinander entfernen, nimmt ihre elektrostatische Wechselwirkungsenergie ab und ihre gesamte kinetische Energie zu.

4(b). Energien bei Berührung und Spaltschwelle

Bei Berührung gilt

$$d_0 = 2R(A/2) = 2^{2/3} r_0 A^{1/3}.$$

Mit $e^2/(4\pi\epsilon_0 r_0) = 5a_C/3$ erhält man

$$U_{12}(d_0) = \frac{5a_C}{48 \cdot 2^{2/3}} A^{5/3}.$$

Zusammen mit dem obigen Ausdruck ergibt dies

$$E_{\text{kin}}(d_0) = \frac{a_C}{4} \left(1 - \frac{17}{12} 2^{-2/3} \right) A^{5/3} + (2^{1/3} - 1) \left(\frac{a_C}{2} - 3a_V f^{1/3} \right) A^{2/3} + 6a_V f^{2/3} (2^{2/3} - 1) A^{1/3} - 4a_V f.$$

Numerisch ergibt sich

$$\frac{E_{\text{kin}}(d_0)}{\text{MeV}} = 0.0220368 A^{5/3} - 9.82357 A^{2/3} + 36.1750 A^{1/3} - 33.0914.$$

A	Abstand bei Berührung d_0 (fm)	$E_{\text{kin}}(d_0)$ (MeV)
100	7.77	-29.3
150	8.89	-24.9
200	9.79	-6.77
250	10.55	+23.6

Eine negative berechnete kinetische Energie bedeutet, dass die Berührungskonfiguration ausgehend vom anfangs unangeregten Kern unter der angenommenen Energiebilanz nicht erreicht werden kann.

Für schwere Kerne ergibt die Lösung von $E_{\text{kin}}(d_0) = 0$

$$A_{\text{crit}} \simeq 213.0.$$

Somit erlaubt das Modell eine Spaltung über die Berührungskonfiguration näherungsweise für

$$A \gtrsim 213.$$

Von den vier angegebenen Kernen erfüllt nur $A = 250$ diese Bedingung. Sobald die Berührungskonfiguration erreichbar ist, wird bei weiterer Trennung zusätzliche Coulombenergie frei.

5(a). Anregungsenergie bei der Transferreaktion

Mit m_1, m_2, m_3, m_4 bezeichnen wir die tabellierten Grundzustandsmassen von Sauerstoff, Eisen, Kohlenstoff bzw. Nickel. Es sei

$$m_4^* = m_4 + \frac{E_{\text{exc}}}{c^2}$$

die Masse des angeregten Nickelkerns.

Mit den angegebenen Konstanten gilt

$$1 \text{ a. m. u. } c^2 = \frac{(1.6605 \times 10^{-27})(3 \times 10^8)^2}{1.602 \times 10^{-13}} \text{ MeV} = 932.865 \text{ MeV}.$$

Die Reaktionsenergie für die Grundzustände beträgt

$$\begin{aligned} Q &= (m_1 + m_2 - m_3 - m_4)c^2 \\ &= (15.99491 + 53.93962 - 12.00000 - 57.93535)(932.865) \text{ MeV} \\ &= -0.764949 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Wir können die exakte relativistische Kinematik beibehalten. Sauerstoff und Kohlenstoff haben dieselbe Geschwindigkeit v und daher denselben Lorentzfaktor

$$\gamma = 1 + \frac{50 \text{ MeV}}{m_1 c^2}, \quad \beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \gamma^{-2}}.$$

Aus der Energie- und Impulserhaltung ergeben sich Energie und Impuls des angeregten Nickelkerns:

$$E_4^{\text{lab}} = \gamma(m_1 - m_3)c^2 + m_2c^2, \quad p_4 = \gamma(m_1 - m_3)v.$$

Seine invariante Ruheenergie erfüllt daher

$$(m_4^*c^2)^2 = (E_4^{\text{lab}})^2 - (p_4c)^2.$$

Mit $\Delta m = m_1 - m_3$ und unter Verwendung von $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$ folgt

$$m_4^* = \sqrt{m_2^2 + \Delta m^2 + 2\gamma m_2 \Delta m}.$$

Folglich gilt

$$E_{\text{exc}} = c^2 \left[\sqrt{m_2^2 + (m_1 - m_3)^2 + 2\gamma m_2(m_1 - m_3)} - m_4 \right].$$

Numerisch ergibt sich

$$E_{\text{exc}} = 10.86074 \dots \text{ MeV} \approx 10.86 \text{ MeV}.$$

Zur Überprüfung der Energiebilanz lauten die kinetischen Energien der auslaufenden Kerne

$$T_C = \frac{m_3}{m_1}(50 \text{ MeV}) = 37.51193 \text{ MeV},$$

$$T_{\text{Ni}} = 0.86237 \text{ MeV}.$$

Sie erfüllen

$$E_{\text{exc}} = 50 + Q - T_C - T_{\text{Ni}}.$$

Die übliche nichtrelativistische Näherung,

$$T_{\text{Ni}} \simeq \frac{(m_1 - m_3)^2}{m_1 m_4}(50 \text{ MeV}),$$

würde $E_{\text{exc}} \simeq 10.862 \text{ MeV}$ ergeben, also bei der angegebenen Genauigkeit dasselbe Ergebnis.

Zur Verwendung in Teil (b) bestimmen wir die Geschwindigkeit des angeregten Nickelkerns:

$$\beta_4 = \frac{V}{c} = \frac{p_4 c}{E_4^{\text{lab}}} = \frac{\gamma(m_1 - m_3)\beta}{m_2 + \gamma(m_1 - m_3)} = 0.00564849,$$

also $V \approx 1.69 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$.

5(b). Rückstoß- und Photonenenergien

Wir betrachten zunächst das Ruhesystem des angeregten Nickelkerns. Aufgrund der Impulserhaltung muss der verbleibende Nickelkern einen Rückstoß entgegen der Richtung des Photons erfahren, mit dem Impulsbetrag

$$p_{\text{recoil}} = \frac{E_\gamma^*}{c}.$$

Wir setzen

$$W = m_4 c^2, \quad E = E_{\text{exc}}.$$

Aus der Energieerhaltung folgt dann

$$W + E = E_\gamma^* + \sqrt{W^2 + (E_\gamma^*)^2}.$$

Auflösen ergibt

$$E_{\gamma}^* = \frac{(W + E)^2 - W^2}{2(W + E)} = E - \frac{E^2}{2(W + E)}.$$

Die kinetische Rückstoßenergie beträgt somit

$$T_{\text{recoil}} = E - E_{\gamma}^* = \frac{E^2}{2(W + E)} \simeq \frac{E^2}{2W}.$$

Die letzte Näherung ist gültig, weil $E \ll W$; sie ist äquivalent zum nichtrelativistischen Ausdruck für die Rückstoßenergie $p_{\text{recoil}}^2 / (2m_4)$.

Hier gilt

$$W = 54045.8700 \text{ MeV}.$$

Mit der Anregungsenergie aus Teil (a) erhält man

$$T_{\text{recoil}} = 0.00109104 \text{ MeV} \approx 1.09 \text{ keV},$$

und

$$E_{\gamma}^* = 10.85965 \dots \text{ MeV} \approx 10.86 \text{ MeV}.$$

Die zusätzlichen Stellen machen den kleinen Abzug durch den Rückstoß sichtbar.

Bei Emission in Vorwärtsrichtung ergibt die Lorentztransformation der Photonenenergie ins Laborsystem

$$E_{\gamma,\text{lab}} = \Gamma_4 (E_{\gamma}^* + V p_{\gamma}^*) = \Gamma_4 E_{\gamma}^* (1 + \beta_4),$$

wobei $\Gamma_4 = (1 - \beta_4^2)^{-1/2}$. Somit gilt

$$E_{\gamma,\text{lab}} = E_{\gamma}^* \sqrt{\frac{1 + \beta_4}{1 - \beta_4}}.$$

Der Dopplerfaktor in Vorwärtsrichtung beträgt 1.00566453, sodass

$$E_{\gamma,\text{lab}} = 10.92117 \dots \text{ MeV} \approx 10.92 \text{ MeV}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.