

المسألة 1: صورة شحنة في جسم معدني

مقدمة – طريقة الصور

تُوضع شحنة نقطية q بالقرب من كرة معدنية مؤرضة نصف قطرها R [انظر الشكل 1(a)]، فيُستحث نتيجة لذلك توزيع للشحنة السطحية على الكرة. ويُعد حساب المجال الكهربائي والجهد الناتجين عن توزيع الشحنة السطحية مهمة شاقة. إلا أنه يمكن تبسيط الحساب بدرجة كبيرة باستخدام ما يُسمّى طريقة الصور. في هذه الطريقة، يمكن تمثيل المجال الكهربائي والجهد الناتجين عن الشحنة الموزعة على الكرة بالمجال الكهربائي والجهد لشحنة نقطية واحدة q' موضوعة داخل الكرة (لا يُطلب منك إثبات ذلك). ملاحظة: يُعيد المجال الكهربائي لشحنة الصورة هذه q' إنتاج المجال الكهربائي والجهد خارج الكرة فقط (بما في ذلك سطحها).

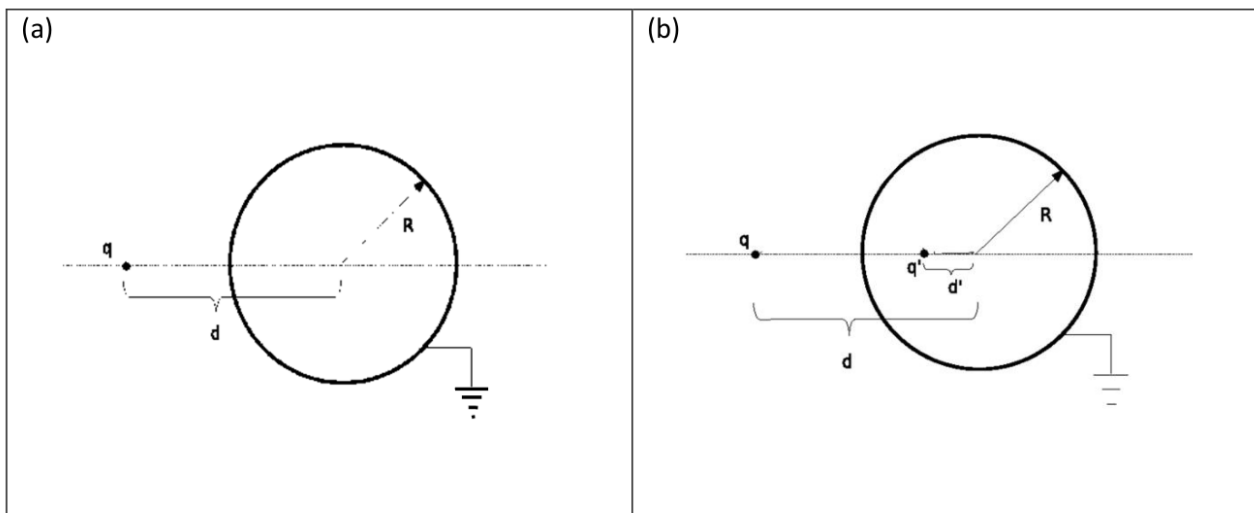


Fig 1. (a) A point charge q in the vicinity of a grounded metallic sphere. (b) The electric field of the charge induced on the sphere can be represented as electric field of an image charge q' .

الشكل 1. (a) شحنة نقطية q بالقرب من كرة معدنية مؤرضة. (b) يمكن تمثيل المجال الكهربائي للشحنة المستحثة على الكرة بالمجال الكهربائي لشحنة صورة q' .

المهمة 1 – شحنة الصورة

يقتضي تناظر المسألة وضع الشحنة q' على المستقيم الواصل بين الشحنة النقطية q ومركز الكرة [انظر الشكل 1(b)].

(a) ما قيمة الجهد على الكرة؟ (0.3 نقطة)

(b) عبّر عن q' وعن بُعد الشحنة q' عن مركز الكرة، d' ، بدلالة q و d و R . (1.9 نقطة)

(c) أوجد مقدار القوة المؤثرة في الشحنة q . هل القوة تنافرية؟ (0.5 نقطة)

المهمة 2 - حجب مجال كهروستاتيكي

اعتبر شحنة نقطية q موضوعة على بُعد d من مركز كرة معدنية مؤرضة نصف قطرها R . نريد معرفة كيفية تأثير الكرة المعدنية المؤرضة في المجال الكهربائي عند النقطة A الواقعة على الجانب المقابل من الكرة (انظر الشكل 2). تقع النقطة A على المستقيم الواصل بين الشحنة q ومركز الكرة؛ ويبلغ بُعدها عن الشحنة النقطية q مقداراً r .

(a) أوجد متجه المجال الكهربائي عند النقطة A . (0.6 نقطة)

(b) لمسافة كبيرة جداً $d \gg r$ ، أوجد تعبير المجال الكهربائي باستخدام التقريب $1 - 2a \approx (1 + a)^{-2}$ ، حيث $a \ll 1$. (0.6 نقطة)

(c) في أي نهاية d تحجب الكرة المعدنية المؤرضة مجال الشحنة q حجاً تاماً، بحيث يكون المجال الكهربائي عند النقطة A صفراً تماماً؟ (0.3 نقطة)

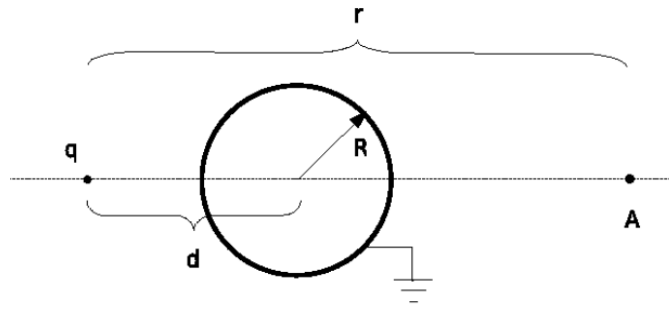


Fig 2. The electric field at point A is partially screened by the grounded sphere.

الشكل 2. تحجب الكرة المؤرضة المجال الكهربائي عند النقطة A حجاً جزئياً.

المهمة 3 - اهتزازات صغيرة في المجال الكهربائي للكرة المعدنية المؤرضة

تُعلق شحنة نقطية q كتلتها m بخيط طوله L مثبت في جدار، بالقرب من الكرة المعدنية المؤرضة. أهمل في معالجتك جميع التأثيرات الكهروستاتيكية للجدار. تشكّل الشحنة النقطية بندولاً رياضياً (انظر الشكل 3). تقع نقطة تثبيت الخيط في الجدار على بُعد l من مركز الكرة. افترض أن تأثيرات الجاذبية مهمة.

(a) أوجد مقدار القوة الكهربائية المؤثرة في الشحنة النقطية q عند زاوية معطاة α ، وبين اتجاهها في رسم واضح (0.8 نقطة)

(b) حدّد مركبة هذه القوة في الاتجاه العمودي على الخيط بدلالة l و R و q و α . (0.8 نقطة)

(c) أوجد تردد الاهتزازات الصغيرة للبندول. (1.0 نقطة)

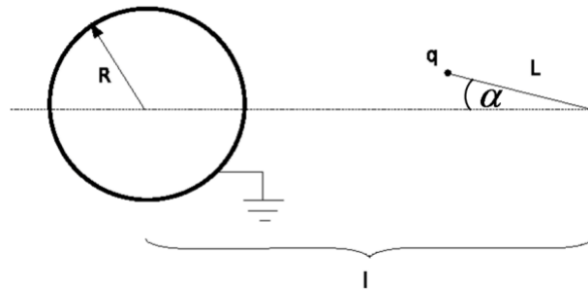


Fig 3. A point charge in the vicinity of a grounded sphere oscillates as a pendulum.

الشكل 3. تهتز شحنة نقطية بالقرب من كرة مؤرضة كبندول.

المهمة 4 - الطاقة الكهروستاتيكية للنظام

من المهم معرفة الطاقة الكهروستاتيكية لنظام يتألف من توزيع للشحنات الكهربائية. في مسألتنا (انظر الشكل 1a)، يوجد تأثير كهروستاتيكي بين الشحنة الخارجية q والشحنات المستحثة على الكرة، كما يوجد تأثير كهروستاتيكي بين الشحنات المستحثة على الكرة نفسها. بدلالة الشحنة q ونصف قطر الكرة R والمسافة d ، حدد الطاقات الكهروستاتيكية الآتية:

(a) الطاقة الكهروستاتيكية للتأثير بين الشحنة q والشحنات المستحثة على الكرة؛ (1.0 نقطة)

(b) الطاقة الكهروستاتيكية للتأثير بين الشحنات المستحثة على الكرة؛ (1.2 نقطة)

(c) الطاقة الكهروستاتيكية الكلية للتأثير في النظام. (1.0 نقطة)

تلميح: توجد عدة طرق لحل هذه المسألة:

(1) في إحدى هذه الطرق، يمكنك استخدام التكامل الآتي،

$$\int_d^\infty \frac{x dx}{(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}.$$

(2) في طريقة أخرى، يمكنك استخدام حقيقة أنه لمجموعة من N شحنة q_i تقع عند النقاط $\vec{r}_i, i = 1, \dots, N$ ، تكون الطاقة الكهروستاتيكية مجموعاً على جميع أزواج الشحنات:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

لنكتب $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$. في المهمة 2، ليكن اتجاه $\hat{e}$ من q نحو A . وفي المهمة 3، نعرّف

$$d_\alpha = \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}, \quad D_0 = (l - L)^2 - R^2,$$

حيث $l - L > R$ لحالة الاتزان الخارجية المبيّنة في الرسم. نأخذ القوة العمودية ذات الإشارة موجبة في اتجاه تزايد α .

• 1(a)

$$\phi_{\text{sphere}} = 0.$$

• 1(b)

$$q' = -\frac{R}{d}q, \quad d' = \frac{R^2}{d}.$$

تقع الصورة بين المركز وأقرب نقطة من السطح إلى q .

• 1(c)

$$F = \frac{kq^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}.$$

القوة تجاذبية، وتتجه نحو مركز الكرة.

• 2(a)

$$\mathbf{E}_A = kq \left[\frac{1}{r^2} - \frac{R}{d(r - d + R^2/d)^2} \right] \hat{e}.$$

• (b)2 عندما $d \gg r$ ، مع تضمين التصحيح الأول:

$$\mathbf{E}_A \simeq \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} - \frac{2R}{r} \left(1 - \frac{R^2}{d^2} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

الحد الرئيسي هو $kq(1 - R/d)\hat{\mathbf{e}}/r^2$.

• (c)2

$$d \rightarrow R^+ \implies \mathbf{E}_A \rightarrow \mathbf{0}.$$

• (a)3

$$F(\alpha) = \frac{kq^2 R \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

ارسم سهم القوة من الشحنة مباشرة نحو مركز الكرة.

• (b)3

$$F_{\perp} = - \frac{kq^2 R l \sin \alpha}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

• (c)3 التردد العادي والتردد الزاوي هما

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kq^2 R l}{m L D_0^2}}, \quad \omega_0 = 2\pi f.$$

• (a)4 تأثر الشحنة مع السطح:

$$U_{q\sigma} = - \frac{kq^2 R}{d^2 - R^2}.$$

• (b)4 طاقة التآثر المتبادل بين الشحنات المستحثة:

$$U_{\sigma\sigma} = + \frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

• (c)4 طاقة التآثر الكلية:

$$U_{\text{tot}} = - \frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

الحل

(a)1

الموصل في حالة الاتزان الكهروستاتيكي متساوي الجهد. ويثبت التأريض جهده عند جهد الأرض، الذي يُؤخذ مساوياً للصفر:

$$\phi_{\text{sphere}} = 0.$$

(b)1

ليكن O هو المركز. نقيس المواضع على المحور انطلاقاً من O نحو الشحنة الخارجية، بحيث تقع q عند $d > R$ ، وتقع الصورة عند d' داخل الكرة.

عند أقرب نقطة من السطح إلى q ، يعطي شرط انعدام الجهد

$$k \left(\frac{q}{d-R} + \frac{q'}{R-d'} \right) = 0.$$

وعند نقطة السطح المقابلة،

$$k \left(\frac{q}{d+R} + \frac{q'}{R+d'} \right) = 0.$$

وبالتالي،

$$\frac{R-d'}{d-R} = \frac{R+d'}{d+R}.$$

يعطي الضرب التبادلي

$$(R-d')(d+R) = (R+d')(d-R),$$

ومن ثم

$$\boxed{d' = \frac{R^2}{d}}.$$

وبالتعويض في المعادلات السابقة،

$$\boxed{q' = -\frac{R}{d}q}.$$

تحقق هاتان القيمتان أيضًا الشرط الحدي في كل نقطة على السطح. لنقطة سطحية يصنع نصف القطر المار بها زاوية θ مع الاتجاه نحو q ،
ليكن بُعدها عن q و q' هما s و s' . عندئذ

$$s^2 = d^2 + R^2 - 2dR \cos \theta,$$

و

$$s'^2 = d'^2 + R^2 - 2d'R \cos \theta = \frac{R^2}{d^2} s^2.$$

إن $s' = (R/d)s$ ، و

$$k \left(\frac{q}{s} + \frac{q'}{s'} \right) = 0.$$

(c)1

عند الشحنة الخارجية، تُعيد الصورة إنتاج مجال الشحنات المستحثة. والمسافة الفاصلة بين q وصورتها هي

$$d - d' = \frac{d^2 - R^2}{d}.$$

ولذلك يعطي قانون كولوم

$$F = \frac{k|qq'|}{(d-d')^2} = \frac{kq^2(R/d)}{[(d^2 - R^2)/d]^2}.$$

ومن ثم

$$\boxed{F = \frac{kq^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}}.$$

بما أن إشارة q' معاكسة لإشارة q ، فإن القوة تجاذبية دائماً. وتتجه على امتداد المستقيم من q نحو O .

(a)2

نختار الاتجاه الموجب للمحور من q نحو A ، بمتجه وحدة $\hat{e}$. نضع مركز الكرة عند $x = 0$. عندئذ

$$x_q = -d, \quad x_{q'} = -d', \quad x_A = r - d.$$

ولأن A تقع خارج الكرة على الجانب المقابل، فإن $r > d + R$.
المسافتان من A إلى الشحنتين هما

$$r, \quad r - d + d' = r - d + \frac{R^2}{d}.$$

وبمبدأ التراكب،

$$\mathbf{E}_A = k \left[\frac{q}{r^2} + \frac{q'}{(r - d + d')^2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

لذلك

$$\mathbf{E}_A = kq \left[\frac{1}{r^2} - \frac{R}{d(r - d + R^2/d)^2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

تحدد إشارة المعامل القياسي الاتجاه على امتداد المحور.

(b)2

نعرف

$$\delta = d - \frac{R^2}{d}.$$

بما أن $0 < \delta < d$ ، فإن الشرط $r \gg d$ يقتضي $\delta/r \ll 1$. يمكننا أن نكتب

$$\mathbf{E}_A = \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} \left(1 - \frac{\delta}{r} \right)^{-2} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

باستخدام التقريب المعطى مع $a = -\delta/r$ ،

$$\left(1 - \frac{\delta}{r} \right)^{-2} \simeq 1 + \frac{2\delta}{r}.$$

ينتج أن

$$\mathbf{E}_A \simeq \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} - \frac{2R\delta}{dr} \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

وبالتعويض عن δ ،

$$\mathbf{E}_A \simeq \frac{kq}{r^2} \left[1 - \frac{R}{d} - \frac{2R}{r} \left(1 - \frac{R^2}{d^2} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}.$$

في الرتبة الرئيسية، يكون المجال البعيد هو مجال الشحنة الصافية الفعالة

$$q + q' = q \left(1 - \frac{R}{d} \right).$$

(c)2

عندما تقترب الشحنة الخارجية من الكرة،

$$d \rightarrow R^+, \quad d' \rightarrow R, \quad q' \rightarrow -q.$$

إن تقترب الشحنة وصورتها من الموضع نفسه، بشحنتين متساويتين مقداراً ومتعاكستين إشارةً. ويلغي مجال كل منهما مجال الأخرى عند كل نقطة رصد خارجية ثابتة بعيدة عن نقطة التلامس.

وعلى وجه الخصوص، يعطي التعبير الدقيق في (a)2

$$\lim_{d \rightarrow R^+} \mathbf{E}_A = \mathbf{0}.$$

هذه نهاية تقترب فيها الشحنة من السطح من الخارج.

(a)3

نتعامل مع الموصل على أنه يظل في حالة اتزان كهروستاتيكي أثناء حركة الشحنة. لتكن P نقطة تثبيت الخيط، و Q موضع الشحنة. نختار

$$O = (0, 0), \quad P = (l, 0).$$

للزاوية المبيّنة في الشكل 3،

$$Q = (l - L \cos \alpha, L \sin \alpha).$$

لذلك تكون المسافة اللحظية من المركز إلى الشحنة

$$d_\alpha = |OQ| = \sqrt{(l - L \cos \alpha)^2 + L^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}.$$

بتطبيق نتيجة 1(c)،

$$F(\alpha) = \frac{kq^2 R d_\alpha}{(d_\alpha^2 - R^2)^2} = \frac{kq^2 R \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

تتجه القوة من Q نحو O .

وصف الرسم: ارسم الكرة ومركزها O ، وضع P إلى يمينها على مستقيم أفقي، بحيث $OP = l$. ضع Q فوق ذلك المستقيم وإلى يسار P ، بحيث $PQ = L$ و $\angle OPQ = \alpha$. ارسم سهمًا يبدأ عند Q ، على امتداد QO ، ويتجه نحو O ، وسمّه $\mathbf{F}_e$. ضع على الرسم $OQ = d_\alpha$.

(b)3

متجه الوحدة العمودي على الخيط، في اتجاه تزايد α ، هو

$$\hat{\mathbf{e}}_\alpha = (\sin \alpha, \cos \alpha).$$

بما أن القوة تتجه نحو O ، فإن

$$\mathbf{F}_e = -\frac{F}{d_\alpha} (l - L \cos \alpha, L \sin \alpha).$$

ومركبتها المماسية هي

$$\begin{aligned} F_\perp &= \mathbf{F}_e \cdot \hat{\mathbf{e}}_\alpha \\ &= -\frac{F}{d_\alpha} [(l - L \cos \alpha) \sin \alpha + L \sin \alpha \cos \alpha] \\ &= -\frac{Fl \sin \alpha}{d_\alpha}. \end{aligned}$$

يعطي التعويض

$$F_\perp = -\frac{kq^2 R l \sin \alpha}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

عندما تكون α موجبة، تؤثر هذه المركبة في اتجاه تناقص α ، لذا فهي مركبة إرجاعية. ويُحصل على مقدارها باستبدال $\sin \alpha$ بـ $|\sin \alpha|$.

(c)3

عند الاتزان $\alpha = 0$ ،

$$d_0 = l - L.$$

تتطلب حالة الاتزان المبيّنة في الرسم أن يكون $l - L > R$ ، بحيث تقع الشحنة خارج الكرة. ليس لقوة الشد مركبة عمودية على الخيط. ولذلك يكون قانون نيوتن الثاني في الاتجاه المماسي

$$mL\ddot{\alpha} = F_{\perp}.$$

عندما تكون α صغيرة،

$$\sin \alpha \simeq \alpha,$$

و

$$d_{\alpha}^2 - R^2 = (l - L)^2 - R^2 + lL\alpha^2 + O(\alpha^4).$$

بكتابة $D_0 = (l - L)^2 - R^2$ ، تصبح المعادلة بعد الاكتفاء بالحدود الخطية

$$mL\ddot{\alpha} = -\frac{kq^2 Rl}{D_0^2} \alpha,$$

أو

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{kq^2 Rl}{mLD_0^2}.$$

إذن التردد العادي هو

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kq^2 Rl}{mL[(l - L)^2 - R^2]^2}}.$$

يتطلب التقريب سعة صغيرة بما يكفي لتحقيق الشرطين

$$|\alpha| \ll 1, \quad lL\alpha^2 \ll D_0$$

معاً.

(a)4

نهمل الطاقة الذاتية للشحنة النقطية الخارجية، ونأخذ طاقة التآثر منعقدة عندما $d \rightarrow \infty$.

ليكن ϕ_{σ} هو الجهد الناتج عن الشحنات السطحية المستحثة. عند موضع q ، تعطي الصورة

$$\phi_{\sigma}(q) = \frac{kq'}{d - d'} = -\frac{kqR}{d^2 - R^2}.$$

طاقة التآثر بين q والشحنات المستحثة هي

$$U_{q\sigma} = q\phi_{\sigma}(q).$$

لا يوجد عامل $1/2$ هنا: إذ يُحتسب كل زوج يتألف من q وشحنة مستحثة مرة واحدة. ومن ثم

$$U_{q\sigma} = -\frac{kq^2 R}{d^2 - R^2}.$$

(b)4

لتكن σ كثافة الشحنة السطحية المستحثة، وليكن ϕ_q الجهد الناشئ عن الشحنة الخارجية. طاقة التآثر المتبادل بين الشحنات المستحثة هي

$$U_{\sigma\sigma} = \frac{1}{2} \int_S \sigma \phi_{\sigma} dS.$$

يمنع العامل $1/2$ احتساب الأزواج مرتين ضمن التوزيع السطحي.

على الكرة المؤرّضة،

$$\phi_q + \phi_{\sigma} = 0.$$

لذلك

$$U_{\sigma\sigma} = -\frac{1}{2} \int_S \sigma \phi_q dS.$$

يساوي التكامل المتبقي طاقة التأثير بين الشحنة والسطح:

$$\int_S \sigma \phi_q dS = kq \int_S \frac{\sigma dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} = q\phi_\sigma(q) = U_{q\sigma}.$$

إذن

$$U_{\sigma\sigma} = -\frac{1}{2} U_{q\sigma},$$

مما يعطي

$$U_{\sigma\sigma} = +\frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

(c)4

بجمع المساهمتين الفيزيائيتين،

$$U_{\text{tot}} = U_{q\sigma} + U_{\sigma\sigma} = \frac{1}{2} U_{q\sigma}.$$

وبالتالي،

$$U_{\text{tot}} = -\frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

تنتج هذه النتيجة أيضاً من الشغل اللازم لجلب q من اللانهاية على نحو شبه ساكن:

$$U_{\text{tot}}(d) = -\int_d^\infty \frac{kq^2 R x}{(x^2 - R^2)^2} dx = -\frac{kq^2 R}{2(d^2 - R^2)}.$$

للتحقق من الاتساق، فإن القوة في اتجاه تزايد d هي

$$-\frac{dU_{\text{tot}}}{dd} = -\frac{kq^2 R d}{(d^2 - R^2)^2},$$

وهي تعيد إنتاج القوة التجاذبية التي أوجدت في 1(c).

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: فيزياء المداخل

مقدمة

تُطلق نواتج الاحتراق الغازية إلى الغلاف الجوي ذي درجة الحرارة T_{Air} عبر مدخنة عالية مساحة مقطعها العرضي A وارتفاعها h (انظر الشكل 1). تُحرَق المادة الصلبة في الفرن الذي تبلغ درجة حرارته T_{Smoke} . وحجم الغازات المتولدة في الفرن في وحدة الزمن هو B .

افترض ما يلي:

- سرعة الغازات في الفرن صغيرة إلى حد يمكن إهمالها
- لا تختلف كثافة الغازات (الدخان) عن كثافة الهواء عند درجة الحرارة والضغط نفسيهما؛ ويمكن معاملة الغازات في الفرن على أنها غازات مثالية

- يتغير ضغط الهواء مع الارتفاع وفقاً لقانون التوازن الهيدروستاتيكي؛ ويمكن إهمال تغير كثافة الهواء مع الارتفاع
- يحقق جريان الغازات معادلة برنولي، التي تنص على أن الكمية التالية ثابتة في جميع نقاط الجريان:

$$\frac{1}{2}\rho v^2(z) + \rho gz + p(z) = \text{const},$$

حيث ρ هي كثافة الغاز، و $v(z)$ سرعته، و $p(z)$ ضغطه، و z الارتفاع - يمكن إهمال تغير كثافة الغاز على امتداد المدخنة

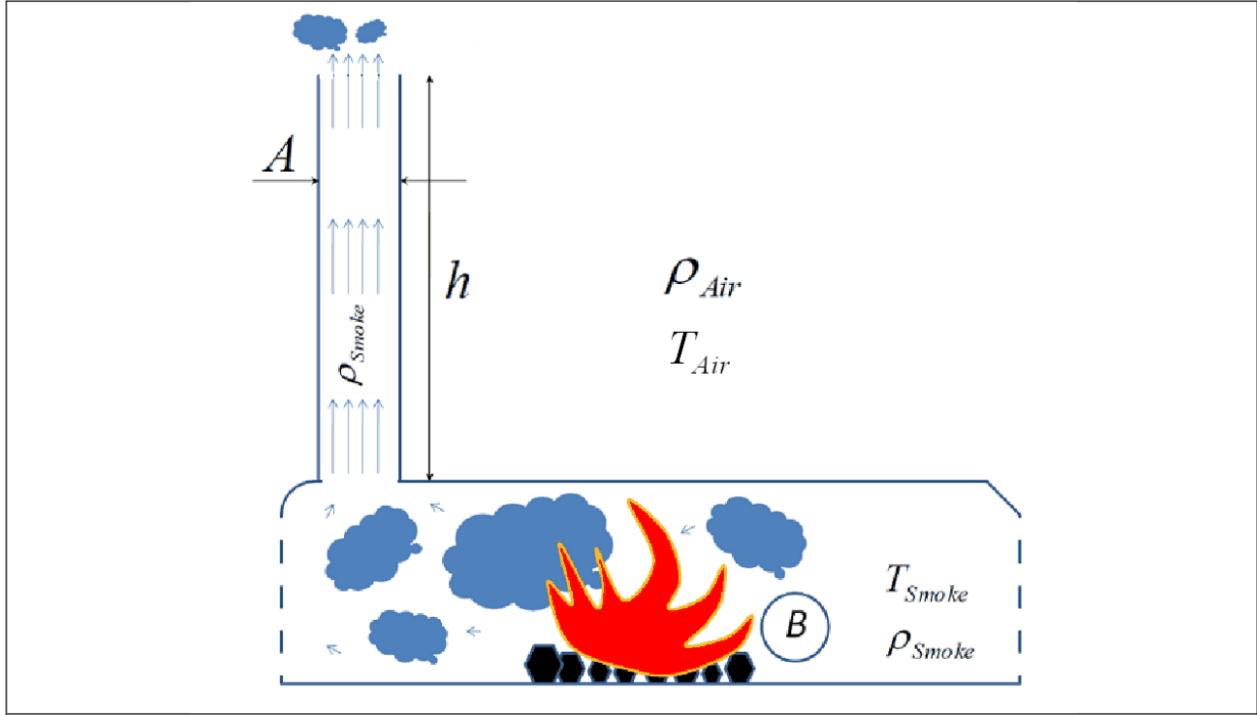


Fig 1. Sketch of a chimney of height h with a furnace at temperature T_{Smoke} .

الشكل 1. رسم تخطيطي لمدخنة ارتفاعها h مزودة بفرن بدرجة حرارته T_{Smoke} .

المهمة 1

(a) ما الارتفاع الأدنى اللازم للمدخنة كي تعمل بكفاءة، بحيث تتمكن من إطلاق جميع الغازات المتولدة إلى الغلاف الجوي؟ عبّر عن نتيجتك بدلالة A ، و B ، و T_{Air} ، و $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ، و $\Delta T = T_{Smoke} - T_{Air}$. مهم: افترض في جميع المهام اللاحقة أن ارتفاع المدخنة يساوي هذا الارتفاع الأدنى. (3.5 درجات)

(b) افترض بناء مدخنتين تَؤدّيان الغرض نفسه تماماً. مساحتا مقطعيهما العرضيين متساويتان، ولكنهما مصممتان للعمل في منطقتين مختلفتين من العالم: إحداهما في المناطق الباردة، ومصممة للعمل عند متوسط درجة حرارة للغلاف الجوي مقداره -30°C ، والأخرى في المناطق الدافئة، ومصممة للعمل عند متوسط درجة حرارة للغلاف الجوي مقداره 30°C . درجة حرارة الفرن هي 400°C . وقد حُسب أن ارتفاع المدخنة المصممة للعمل في المناطق الباردة هو 100 m . فما ارتفاع المدخنة الأخرى؟ (0.5 درجة)

(c) كيف تتغير سرعة الغازات على امتداد ارتفاع المدخنة؟ ارسم رسماً تخطيطياً/بيانياً بافتراض أن مساحة المقطع العرضي للمدخنة لا تتغير مع الارتفاع. حدّد النقطة التي تدخل عندها الغازات إلى المدخنة. (0.6 درجة)

(d) كيف يتغير ضغط الغازات على امتداد ارتفاع المدخنة؟ (0.5 درجة)

محطة لتوليد الطاقة الشمسية

يمكن استخدام جريان الغازات في المدخنة لإنشاء نوع خاص من محطات توليد الطاقة الشمسية (المدخنة الشمسية). يوضح الشكل 2 الفكرة. تسخّن الشمس الهواء أسفل المجمّع ذي المساحة S ، الذي تكون حوافه مفتوحة للسماح بدخول الهواء دون عوائق (انظر الشكل 2). ومع صعود الهواء المسخّن عبر المدخنة (الأسهم الرفيعة المتصلة)، يدخل هواء بارد جديد إلى المجمّع من محيطه (الأسهم السمكية المنقطة)، مما يتيح جرياناً مستمراً للهواء عبر محطة توليد الطاقة. يدير جريان الهواء عبر المدخنة توربيناً، فتُنتج الطاقة الكهربائية.

طاقة الإشعاع الشمسي في وحدة الزمن لكل وحدة مساحة أفقية من المجمّع هي G . افترض أن هذه الطاقة كلها يمكن استخدامها لتسخين الهواء في المجمّع (السعة الحرارية النوعية للهواء هي c ، ويمكن إهمال اعتمادها على درجة حرارة الهواء). نعرّف كفاءة المدخنة الشمسية بأنها نسبة الطاقة الحركية لجريان الغاز إلى الطاقة الشمسية الممتصة في تسخين الهواء قبل دخوله إلى المدخنة.

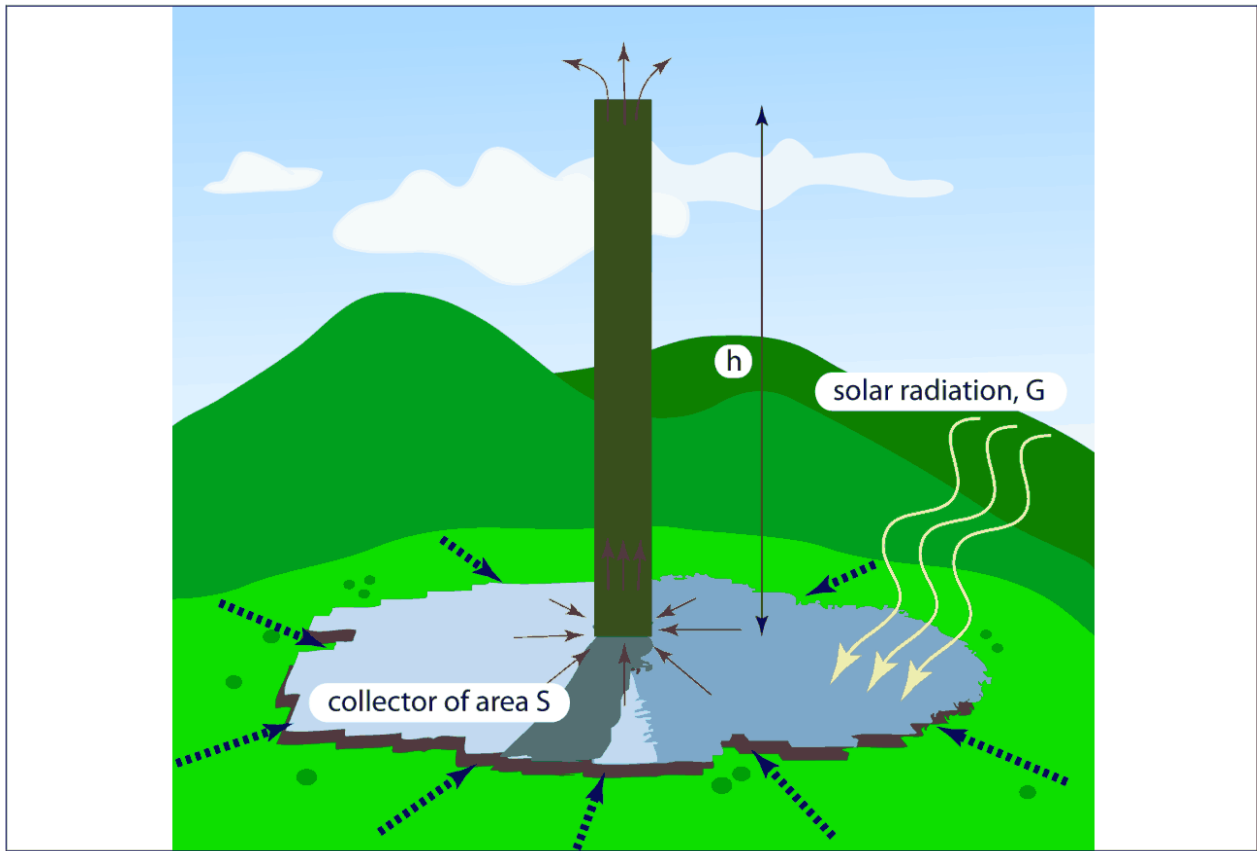


Fig 2. Sketch of a solar power plant.

الشكل 2. رسم تخطيطي لمحطة لتوليد الطاقة الشمسية.

المهمة 2

(a) ما كفاءة محطة توليد الطاقة بالمدخنة الشمسية؟ (2.0 درجات)

(b) ارسم مخططاً يوضح كيف تتغير كفاءة المدخنة مع ارتفاعها. (0.4 درجة)

النموذج الأولي في مانتاناريس

بلغ ارتفاع المدخنة النموذجية التي بُنيت في مانتاناريس بإسبانيا 195 m، ونصف قطرها 5 m. المجمّع دائري وقطره 244 m. تبلغ السعة الحرارية النوعية للهواء في ظروف التشغيل المعتادة للمدخنة الشمسية النموذجية 1012 J/kg K ، وتبلغ كثافة الهواء الساخن نحو 0.9 kg/m^3 ، ودرجة الحرارة المعتادة للغلاف الجوي هي $T_{Air} = 295 \text{ K}$. في مانتاناريس، تبلغ القدرة الشمسية لكل وحدة مساحة أفقية عادةً 150 W/m^2 خلال يوم مشمس.

المهمة 3

(a) ما كفاءة محطة توليد الطاقة النموذجية؟ اكتب التقدير العددي. (0.3 درجة)

(b) ما مقدار القدرة التي يمكن إنتاجها في محطة توليد الطاقة النموذجية؟ (0.4 درجة)

(c) ما مقدار الطاقة التي يمكن أن تنتجها المحطة خلال يوم مشمس معتاد؟ (0.3 درجة)

المهمة 4

(a) ما مقدار ارتفاع درجة حرارة الهواء عند دخوله المدخنة (هواء دافئ) من الوسط المحيط (هواء بارد)؟ اكتب الصيغة العامة واحسب قيمتها للمدخنة النموذجية. (1.0 درجة)

(b) ما معدل التدفق الكتلي للهواء عبر المنظومة؟ (0.5 درجة)

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

اعتبر $z = 0$ عند مدخل المدخنة و $z = h$ عند مخرجها. فيما يلي، ترمز ρ_h إلى كثافة الدخان أو الهواء المسخن.

• 1(a) عندما يكون $\Delta T > 0$ ،

$$h_{\min} = \frac{B^2 T_{Air}}{2gA^2 \Delta T}.$$

• 1(b)

$$h_{\text{warm}} \simeq 145 \text{ m}.$$

• 1(c)

$$v(z) = \frac{B}{A} \quad (0 < z < h).$$

تزداد السرعة من قيمة تكاد تساوي صفراً في الفرن إلى B/A في منطقة المدخل، ثم تظل ثابتة على امتداد المدخنة.

• 1(d)

$$p(z) = p_{Air}(h) + \rho_h g(h - z).$$

ينخفض الضغط خطياً مع الارتفاع، بميل مقداره $-\rho_h g$ ، حتى يبلغ الضغط الجوي الخارجي عند المخرج.

• 2(a)

$$\eta = \frac{gh}{cT_{Air}}.$$

• 2(b) منحنى η بدلالة h خط مستقيم يمر بنقطة الأصل، وميله $g/(cT_{Air})$.

• 3(a)

$$\eta = 0.00641 \simeq 0.64\%.$$

• 3(b) القدرة المثالية المتاحة هي

$$P \simeq 4.49 \times 10^4 \text{ W} \simeq 45 \text{ kW}.$$

• 3(c) لمدة إضاءة فعّالة τ ،

$$E = P\tau.$$

لمدة 12 h عند شدة الإشعاع المذكورة، تكون $E \simeq 0.54 \text{ MWh} = 1.9 \text{ GJ}$. وإذا كانت شدة الإشعاع المذكورة متوسطاً ليوم كامل، فإن النتيجة لمدة 24 h هي $1.08 \text{ MWh} = 3.88 \text{ GJ}$.

• 4(a)

$$\Delta T = \left[\frac{(GS)^2 T_{Air}}{2gh \rho_h^2 A^2 c^2} \right]^{1/3} \simeq 9.1 \text{ K}.$$

$$\dot{m} = \frac{GS}{c\Delta T} = \left[\frac{2gh(\rho_h A)^2 GS}{cT_{Air}} \right]^{1/3} \simeq 7.7 \times 10^2 \text{ kg s}^{-1}.$$

الحل

لنكتب $\rho_a = \rho_{Air}$ و $\rho_h = \rho_{Smoke}$ و $p_0 = p_{Air}(0)$. أما في حالة المدخنة الشمسية، فترمز ρ_h بدلاً من ذلك إلى كثافة الهواء المسخن. درجات الحرارة المطلقة في جميع الصيغ مقيسة بالكلفن.

(a)1

تعمل المدخنة بالسحب الطبيعي: فالهواء الخارجي أكثر كثافة من الغاز الساخن، ولذلك ينخفض ضغطه مع الارتفاع بمعدل أكبر. عند حالة التشغيل الحديثة، يكون الغاز شبه الساكن في الفرن عند الضغط الجوي p_0 . وهذا هو الشرط الحدي لتصريف الغاز دون الحاجة إلى ضغط زائد في الفرن.

وفقاً لقانون التوازن الهيدروستاتيكي خارج المدخنة،

$$p_{Air}(h) = p_0 - \rho_a gh.$$

عند المخرج المفتوح، يساوي ضغط الغاز الضغط الجوي المحلي. وتعطي معادلة برنولي بين الفرن، حيث يمكن إهمال السرعة، والمخرج

$$p_0 = p_{Air}(h) + \rho_h gh + \frac{1}{2} \rho_h v^2.$$

ومن ثم،

$$\frac{1}{2} \rho_h v^2 = (\rho_a - \rho_h) gh.$$

للدخان والهواء الكثافة نفسها عند تساوي درجة الحرارة والضغط. ولذلك فإن تطبيق قانون الغاز المثالي عند الضغط المشترك عند القاعدة يعطي

$$\frac{\rho_a}{\rho_h} = \frac{T_{Smoke}}{T_{Air}} = 1 + \frac{\Delta T}{T_{Air}}.$$

إذن

$$v^2 = 2gh \frac{\Delta T}{T_{Air}}.$$

بما أننا نهمل تغير الكثافة بين الفرن والمدخنة، فإن سعة التصريف الحجمي هي Av . ويتطلب إطلاق جميع الغازات أن يكون

$$Av \geq B.$$

عند الارتفاع الأدنى، تتحقق المساواة:

$$\left(\frac{B}{A} \right)^2 = 2gh_{\min} \frac{\Delta T}{T_{Air}}.$$

وعليه

$$h_{\min} = \frac{B^2 T_{Air}}{2g A^2 \Delta T}.$$

تتطلب هذه النتيجة أن يكون $\Delta T > 0$. عندما يكون $B > 0$ و $\Delta T = 0$ ، لا يوجد ارتفاع محدود يولد السحب الطبيعي المطلوب في ظل هذه الافتراضات.

(b)1

للمدخنتين القيم نفسها لكل من B و A ودرجة حرارة الفرن، ولذلك

$$h \propto \frac{T_{Air}}{T_{Smoke} - T_{Air}}.$$

درجات الحرارة وفروق درجات الحرارة المعنية هي

$$\begin{aligned} T_c &= 243.15 \text{ K}, & T_w &= 303.15 \text{ K}, \\ \Delta T_c &= 430 \text{ K}, & \Delta T_w &= 370 \text{ K}. \end{aligned}$$

وبالتالي،

$$h_w = h_c \frac{T_w}{T_c} \frac{\Delta T_c}{\Delta T_w} = (100 \text{ m}) \frac{303.15}{243.15} \frac{430}{370}.$$

وهذا يعطي

$$\boxed{h_w = 144.9 \text{ m} \simeq 145 \text{ m}}.$$

يكون فرق الكثافة النسبي أصغر في الوسط المحيط الأكثر دفئاً، مما يستلزم مدخنة أعلى.

(c)1

يعطي انحفاظ الكتلة في الجريان المستقر

$$\dot{m} = \rho_h A v(z).$$

بما أن كلاً من ρ_h و A ثابت على امتداد المدخنة، فلا بد أن تكون $v(z)$ ثابتة أيضاً. وعند الارتفاع الأدنى المفترض، يكون معدل التدفق الحجمي مساوياً تماماً لـ B ، ولذلك

$$\boxed{v(z) = \frac{B}{A} = \sqrt{\frac{2gh\Delta T}{T_{Air}}}.$$

لرسم المخطط المطلوب، ضع z على المحور الأفقي و v على المحور الرأسى. حدّد مدخل المدخنة عند $z = 0$. أظهر ازدياداً سريعاً من سرعة الفرن المهمة إلى B/A في منطقة المدخل، يتبعه خط أفقي عند $v = B/A$ من المدخل حتى $z = h$. وإذا مُثلّت منطقة المدخل تمثيلاً مثالياً باعتبار امتدادها مهملاً، فيمكن تمثيل التسارع فيها بقفزة عند $z = 0$.

(d)1

داخل المدخنة، تكون معادلة برنولي

$$\frac{1}{2} \rho_h v^2 + \rho_h g z + p(z) = \text{ثابت}.$$

بما أن v ثابتة،

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_h g.$$

وباستخدام الشرط الحدّي عند المخرج $p(h) = p_{Air}(h)$ ،

$$\boxed{p(z) = p_{Air}(h) + \rho_h g(h - z)}.$$

وبصورة مكافئة،

$$p(z) = p_0 - \rho_a g h + \rho_h g(h - z).$$

الضغط الخارجي عند الارتفاع z هو $p_{Air}(z) = p_0 - \rho_a g z$ ، وبالطرح،

$$\boxed{p(z) - p_{Air}(z) = -(\rho_a - \rho_h)g(h - z)}.$$

إنّ يكون ضغط الغاز أقل من الضغط الجوي المحيط في كل موضع داخل المدخنة أدنى من مخرجها، ويتساوى الضغطان عند المخرج.

مباشرة بعد المدخل،

$$p(0^+) = p_0 - (\rho_a - \rho_h)gh = p_0 - \frac{1}{2}\rho_h v^2.$$

يصاحب هذا الانخفاض في الضغط عند المدخل تسارع الغاز من الفرن إلى داخل المدخنة. وبعد ذلك، ينخفض الضغط خطياً مع الارتفاع.

(a)2

لنعتبر كتلة m من الهواء سُخِّنت بمقدار ΔT في المجمّع. الحرارة المتصّدة هي

$$Q = mc\Delta T.$$

وطاقتها الحركية في المدخنة هي

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

وفقاً للتعريف الوارد في السؤال،

$$\eta = \frac{K}{Q} = \frac{v^2}{2c\Delta T}.$$

بتطبيق نتيجة (a)1،

$$v^2 = \frac{2gh\Delta T}{T_{Air}},$$

نحصل على

$$\boxed{\eta = \frac{gh}{cT_{Air}}}.$$

في إطار النموذج المذكور، لا تعتمد الكفاءة على الزيادة في درجة الحرارة، أو مساحة المجمّع، أو مساحة المقطع العرضي للمدخنة. وهي تقيس القدرة الحركية المتاحة بالنسبة إلى القدرة الشمسية المتصّدة.

(b)2

عند ثبات T_{Air} و c ،

$$\eta(h) = \frac{g}{cT_{Air}}h.$$

يُوضَع h على المحور الأفقي و η على المحور الرأسي في المخطط المطلوب. وهو خط مستقيم يمر بالنقطة $(0, 0)$ ، وميله موجب ويساوي

$$\boxed{\frac{d\eta}{dh} = \frac{g}{cT_{Air}}}.$$

تؤدي مضاعفة الارتفاع إلى مضاعفة الكفاءة. تنطبق هذه العلاقة الخطية فقط ضمن تقريبات المسألة؛ ولا ينبغي استقراؤها إلى ارتفاعات تصبح عندها تغيرات الكثافة ذات شأن.

(a)3

بالتعويض ببيانات النموذج الأولي،

$$\eta = \frac{(9.81 \text{ m s}^{-2})(195 \text{ m})}{(1012 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1})(295 \text{ K})} = 0.0064077.$$

ولذلك،

$$\boxed{\eta \simeq 0.64\%}.$$

(b)3

نصف قطر المجمّع هو $244/2 = 122 \text{ m}$ ، ولذلك فإن مساحته هي

$$S = \pi(122 \text{ m})^2 = 4.67595 \times 10^4 \text{ m}^2.$$

يُفترض أن القدرة الشمسية الساقطة كلها تسخن الهواء:

$$P_{\text{solar}} = GS = (150 \text{ W m}^{-2})(4.67595 \times 10^4 \text{ m}^2) = 7.01392 \times 10^6 \text{ W}.$$

القدرة الحركية المتاحة هي

$$P = \eta GS = (0.0064077)(7.01392 \times 10^6 \text{ W}),$$

ومن ثم

$$P = 4.4943 \times 10^4 \text{ W} \simeq 45 \text{ kW}.$$

هذه هي القدرة المثالية المتاحة للتحويل وفقاً لتعريف المسألة؛ ولم تُحدد أي كفاءة إضافية للتوربين أو المولد.

(c)3

لمدة إضاءة فعّالة τ عند شدة الإشعاع المذكورة،

$$E = P\tau = \frac{ghGS}{cT_{\text{Air}}}\tau.$$

إن توفر كل ساعة في الظروف المذكورة نحو 44.9 kWh.

إذا قُدرت مدة اليوم المشمس المعتاد بـ 12 h عند شدة الإشعاع المذكورة،

$$E = (44.943 \text{ kW})(12 \text{ h}) = 539.3 \text{ kWh},$$

أو

$$E \simeq 0.54 \text{ MWh} \simeq 1.9 \times 10^9 \text{ J}.$$

وإذا فُسرت القيمة 150 W m^{-2} بدلاً من ذلك على أنها متوسط على مدى اليوم الكامل البالغ 24 h،

$$E = (44.943 \text{ kW})(24 \text{ h}) \simeq 1.08 \text{ MWh} = 3.88 \times 10^9 \text{ J}.$$

لا يحدد نص المسألة مدة الإضاءة الفعّالة أو الأساس المعتمد لحساب المتوسط.

(a)4

في التشغيل المستقر، تساوي قدرة التسخين الشمسي معدل نقل الحرارة إلى الخارج بواسطة الهواء:

$$GS = \dot{m} c \Delta T.$$

يعطي انحفاظ الكتلة

$$\dot{m} = \rho_h A v.$$

بدمج هاتين العلاقتين مع سرعة الهواء في المدخنة،

$$v = \sqrt{\frac{2gh\Delta T}{T_{\text{Air}}}},$$

نحصل على

$$GS = \rho_h A c \Delta T \sqrt{\frac{2gh\Delta T}{T_{\text{Air}}}} = \rho_h A c \sqrt{\frac{2gh}{T_{\text{Air}}}} (\Delta T)^{3/2}.$$

بحل المعادلة لإيجاد ΔT ،

$$\Delta T = \left[\frac{(GS)^2 T_{\text{Air}}}{2gh \rho_h^2 A^2 c^2} \right]^{1/3}.$$

بالنسبة إلى النموذج الأولي،

$$A = \pi(5 \text{ m})^2 = 78.5398 \text{ m}^2.$$

باستخدام كثافة الهواء الساخن المعطاة،

$$\Delta T = \left[\frac{(7.01392 \times 10^6)^2 (295)}{2(9.81)(195)(0.9)^2 (78.5398)^2 (1012)^2} \right]^{1/3} \text{ K}.$$

ولذلك،

$$\boxed{\Delta T = 9.05 \text{ K} \simeq 9.1 \text{ K}}.$$

يدخل الهواء إلى المدخنة عند درجة حرارة تقارب 304 K.

(b)4

من موازنة التسخين،

$$\dot{m} = \frac{GS}{c\Delta T}.$$

عددياً،

$$\dot{m} = \frac{7.01392 \times 10^6 \text{ W}}{(1012 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1})(9.0503 \text{ K})} = 765.8 \text{ kg s}^{-1}.$$

إذن

$$\boxed{\dot{m} \simeq 7.7 \times 10^2 \text{ kg s}^{-1}}.$$

وبحذف ΔT نحصل أيضاً على التعبير العام

$$\dot{m} = \left[\frac{2gh(\rho_h A)^2 GS}{cT_{Air}} \right]^{1/3}.$$

للتحقق عددياً، فإن السرعة المقابلة هي

$$v = \sqrt{\frac{2(9.81)(195)(9.0503)}{295}} = 10.83 \text{ m s}^{-1},$$

وهذا يعطي $\rho_h A v = 765.8 \text{ kg s}^{-1}$ وقدرة حركية $\frac{1}{2} \dot{m} v^2 = 44.94 \text{ kW}$ ، بما يتفق مع (b)3.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: نموذج بسيط للنواة الذرية

مقدمة

على الرغم من أن النوى الذرية أجسام كمومية، يمكن استنتاج عدد من القوانين الظاهرية لخصائصها الأساسية (مثل نصف القطر أو طاقة الربط) انطلاقاً من افتراضات بسيطة: (i) تتكون النوى من نوكليونات (أي بروتونات ونيوترونات)؛ (ii) التآثر النووي القوي الذي يربط هذه النوكليونات بعضها ببعض قصير المدى جداً (فهو يؤثر بين النوكليونات المتجاورة فقط)؛ (iii) عدد البروتونات (Z) في نواة معينة يساوي تقريباً عدد النيوترونات (N)، أي إن $Z \approx N \approx A/2$ ، حيث A هو العدد الكلي للنوكليونات ($A \gg 1$). **مهم:** استخدم هذه الافتراضات في المهام 1-4 أدناه.

المهمة 1 - النواة الذرية بوصفها منظومة من النوكليونات المتراسة

في نموذج بسيط، يمكن تصور النواة الذرية على أنها كرة تتكون من نوكليونات متراسة [انظر الشكل 1(a)]، حيث تكون النوكليونات كرات صلبة نصف قطرها $r_N = 0.85 \text{ fm}$ ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$). ولا توجد القوة النووية إلا بين نوكليونين متلامسين. حجم النواة V أكبر من حجم جميع النوكليونات AV_N ، حيث $V_N = \frac{4}{3}r_N^3\pi$. وتسمى النسبة $f = AV_N/V$ معامل التراص، وهي تحدد النسبة المئوية من الحيز الذي تشغله المادة النووية.

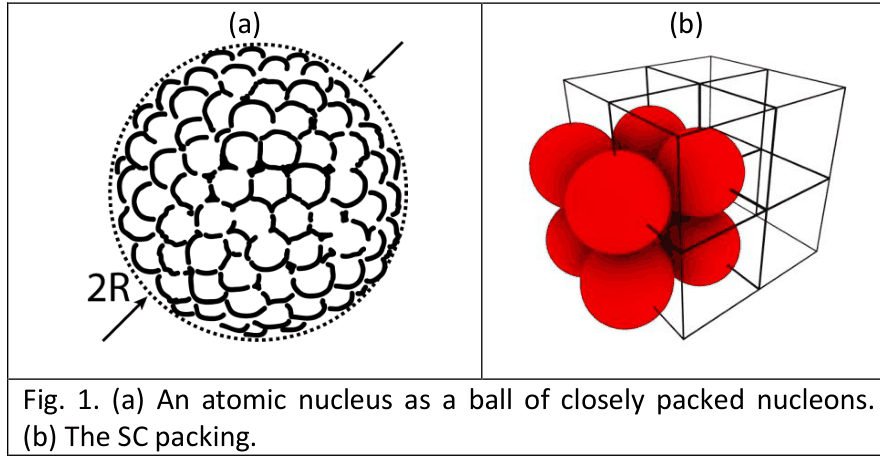


Fig. 1. (a) An atomic nucleus as a ball of closely packed nucleons. (b) The SC packing.

الشكل 1. (a) النواة الذرية بوصفها كرة من النوكليونات المتراسة. (b) التراص المكعب البسيط SC.

(a) احسب معامل التراص f إذا رُتبت النوكليونات في نظام بلوري «مكعب بسيط» (SC)، بحيث يقع مركز كل نوكليون عند نقطة شبكية في شبكة مكعبة لا نهائية [انظر الشكل 1(b)]. (0.3 نقاط)

مهم: افترض في جميع المهام اللاحقة أن معامل التراص الفعلي للنوى يساوي المعامل المحسوب في المهمة 1a. وإذا لم تتمكن من حسابه، فاستخدم $f = 1/2$ في المهام اللاحقة.

(b) قدر متوسط كثافة الكتلة ρ_m ، وكثافة الشحنة ρ_c ، ونصف القطر R لنواة تحتوي على A نوكليوناً. متوسط كتلة النوكليون هو $1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. (1.0 نقاط)

المهمة 2 - طاقة ربط النوى الذرية - الحد الحجمي والحد السطحي

طاقة ربط النواة هي الطاقة اللازمة لتفكيكها إلى نوكليونات منفصلة، وتنشأ أساساً من قوة التجاذب النووي بين كل نوكليون وجيرانه. إذا لم يكن نوكليون معين على سطح النواة، فإنه يسهم في طاقة الربط الكلية بمقدار $a_V = 15.8 \text{ MeV}$ ($1 \text{ MeV} = 1.602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$). أما مساهمة نوكليون سطحي واحد في طاقة الربط فتساوي تقريباً $a_V/2$. عبّر عن طاقة الربط E_b لنواة تحتوي على A نوكليوناً بدلالة A و a_V و f ، مع تضمين التصحيح السطحي. (1.9 نقاط)

المهمة 3 - التأثيرات الكهروستاتيكية (الكولومية) في طاقة الربط

الطاقة الكهروستاتيكية لكرة مشحونة بشحنة موزعة بانتظام (نصف قطرها R وشحنتها الكلية Q_0) هي

$$U_c = \frac{3Q_0^2}{20\pi\epsilon_0 R},$$

حيث $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$.

(a) طبق هذه الصيغة للحصول على الطاقة الكهروستاتيكية للنواة. في النواة، لا يؤثر كل بروتون في نفسه (بقوة كولوم)، بل يؤثر في بقية البروتونات فقط. ويمكن أخذ ذلك في الحسبان بإجراء الاستبدال $Z^2 \rightarrow Z(Z-1)$ في الصيغة الناتجة. استخدم هذا التصحيح في المهام اللاحقة. (0.4 نقاط)

(b) اكتب الصيغة الكاملة لطاقة الربط، متضمنة الحد الرئيسي (الحجمي)، وحد التصحيح السطحي، والتصحيح الكهروستاتيكي الذي حصلت عليه. (0.3 نقاط)

المهمة 4 - انشطار النوى الثقيلة

الانشطار عملية نووية تنقسم فيها النواة إلى أجزاء أصغر (نوى أخف). افترض أن نواة تحتوي على A نوكليناً تنقسم إلى جزأين متساويين فقط كما هو مبين في الشكل 2.

(a) احسب الطاقة الحركية الكلية لنواتج الانشطار E_{kin} عندما تفصل بين مركزي النواتين الأخف مسافة $d \geq 2R(A/2)$ ، حيث $R(A/2)$ هو نصف قطرها. كانت النواة الكبيرة ساكنة في البداية. (1.3 نقاط)

(b) افترض أن $d = 2R(A/2)$ ، واحسب قيمة التعبير الذي حصلت عليه للطاقة E_{kin} في الجزء (a) عند $A = 100, 150, 200$ و 250 (عبر عن النتائج بوحدة MeV). قدر قيم A التي يكون عندها الانشطار ممكناً في النموذج الموصوف أعلاه؟ (1.0 نقاط)

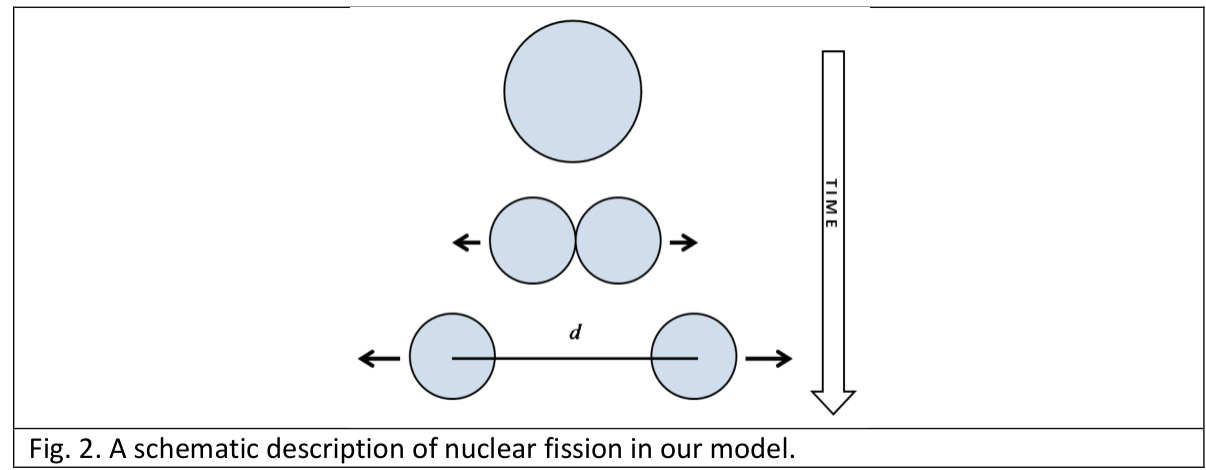


Fig. 2. A schematic description of nuclear fission in our model.

الشكل 2. وصف تخطيطي للانشطار النووي في نموذجنا.

المهمة 5 - تفاعلات النقل

(a) في الفيزياء الحديثة، توصف طاقات النوى وتفاعلاتها بدلالة الكتلة. فعلى سبيل المثال، إذا كانت نواة (سرعتها صفر) في حالة مثارة طاقتها أعلى من الحالة القاعية بمقدار E_{exc} ، فإن كتلتها هي $m = m_0 + E_{exc}/c^2$ ، حيث m_0 كتلتها في الحالة القاعية وهي ساكنة. والتفاعل النووي $^{16}\text{O} + ^{54}\text{Fe} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^{58}\text{Ni}$ مثال على ما يسمى «تفاعلات النقل»، التي ينتقل فيها جزء من إحدى النواتين («عنقود») إلى الأخرى (انظر الشكل 3). في مثالنا، الجزء المنقول هو عنقود ^4He (جسيم α). تحدث تفاعلات النقل بأكبر احتمال إذا كانت سرعة ناتج التفاعل الشبيه بالمقذوف (في حالتنا: ^{12}C) مساوية لسرعة المقذوف (في حالتنا: ^{16}O) في المقدار والاتجاه معاً. تكون نواة الهدف ^{54}Fe ساكنة في البداية. وفي التفاعل، تُثار نواة ^{58}Ni إلى إحدى حالاتها الأعلى طاقة. أوجد طاقة إثارة تلك الحالة (وعبر عنها بوحدة MeV) إذا كانت الطاقة الحركية للمقذوف ^{16}O تساوي 50 MeV. سرعة الضوء هي $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. (2.2 نقاط)

1.	$M(^{16}\text{O})$	15.99491 a.m.u.
2.	$M(^{54}\text{Fe})$	53.93962 a.m.u.
3.	$M(^{12}\text{C})$	12.00000 a.m.u.
4.	$M(^{58}\text{Ni})$	57.93535 a.m.u.

الجدول 1. كتل السكون لأطراف التفاعل في حالاتها القاعية. $1 \text{ a. m. u.} = 1.6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

(b) تنتقل نواة ^{58}Ni المتولدة في الحالة المثارة التي نوقشت في الجزء (a) إلى حالتها القاعية بإصدار فوتون غاما في اتجاه حركتها. ادرس هذا الاضمحلال في الإطار المرجعي الذي تكون فيه نواة ^{58}Ni ساكنة، لإيجاد طاقة ارتداد ^{58}Ni (أي الطاقة الحركية التي تكتسبها نواة ^{58}Ni بعد إصدار الفوتون). ما طاقة الفوتون في ذلك الإطار؟ وما طاقة الفوتون في الإطار المرجعي للمختبر (أي ما طاقة الفوتون التي يقيسها كاشف موضوع في الاتجاه الذي تتحرك فيه نواة ^{58}Ni)؟ (1.6 نقاط)

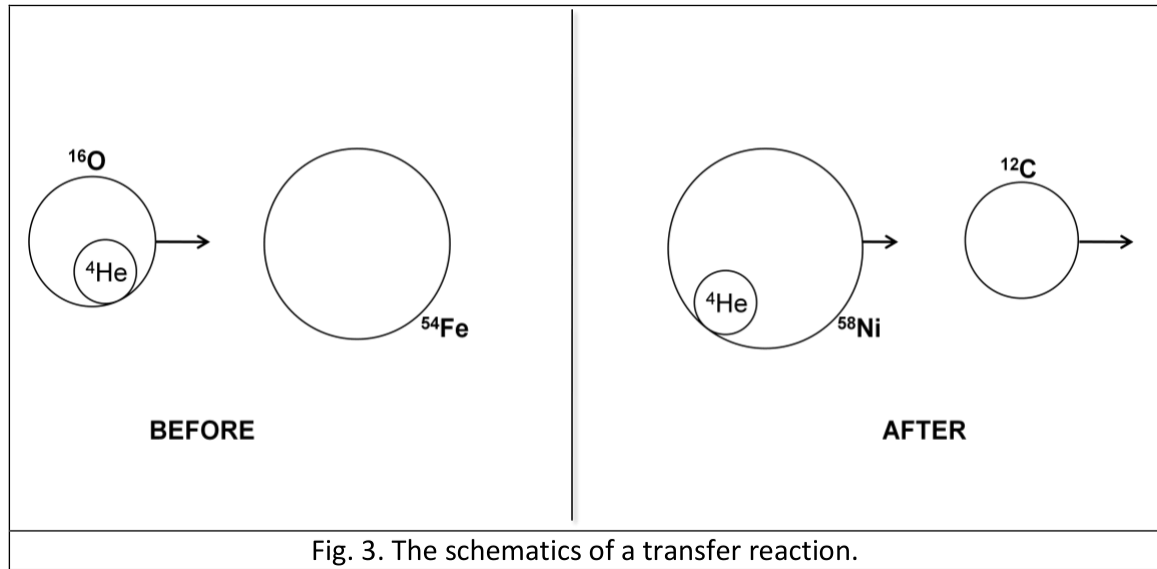


Fig. 3. The schematics of a transfer reaction.

الشكل 3. رسم تخطيطي لتفاعل نقل.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

للاختصار، نعرّف

$$S(A) = A - \left(A^{1/3} - 2f^{1/3} \right)^3, \quad r_0 = r_N f^{-1/3} = 1.0546 \text{ fm},$$

9

$$a_C = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 r_0} = 0.81955 \text{ MeV}.$$

• 1(a).

$$f = \frac{\pi}{6} \approx 0.5236 = 52.36\%.$$

• 1(b).

$$\rho_m \approx 3.40 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}, \quad \rho_c \approx 1.63 \times 10^{25} \text{ C m}^{-3}$$

$$R = r_N (A/f)^{1/3} \approx 1.05 A^{1/3} \text{ fm}.$$

• 2.

$$E_b^{(\text{nuc})} = a_V \left[A - \frac{S(A)}{2} \right] = a_V \left[A - 3f^{1/3} A^{2/3} + 6f^{2/3} A^{1/3} - 4f \right].$$

• 3(a).

$$U_c = \frac{a_C Z(Z-1)}{A^{1/3}} \simeq \frac{a_C}{4} \left(A^{5/3} - 2A^{2/3} \right).$$

• (b)3. بكتابة طاقة الربط الكاملة على الصورة $B(A)$,

$$B(A) = a_V \left[A - 3f^{1/3}A^{2/3} + 6f^{2/3}A^{1/3} - 4f \right] - \frac{a_C}{4} \left(A^{5/3} - 2A^{2/3} \right).$$

• (a)4.

$$E_{\text{kin}}(d) = 2B(A/2) - B(A) - \frac{e^2 A^2}{64\pi\epsilon_0 d}.$$

• (b)4. عند التلامس، تكون الطاقات المحسوبة عند $A = 100, 150, 200, 250$ ، على الترتيب،

$$-29.3, \quad -24.9, \quad -6.77, \quad +23.6 \text{ MeV}.$$

تبلغ عتبة النوى الثقيلة تقريباً $A_{\text{crit}} \simeq 213$. ومن بين الأمثلة الأربعة، تتيح الحالة $A = 250$ وحدها حدوث الانشطار انطلاقاً من السكون مروراً بوضع التلامس.

• (a)5.

$$E_{\text{exc}} \approx 10.86 \text{ MeV}.$$

• (b)5.

$$T_{\text{recoil}} \approx 1.09 \text{ keV}, \quad E_{\gamma}^* \approx 10.86 \text{ MeV}, \quad E_{\gamma, \text{lab}} \approx 10.92 \text{ MeV}.$$

تشير النجمة هنا إلى إطار سكون نواة النيكل المثارة قبل الإصدار.

الحل

1(a). معامل التراص

في التراص المكعب البسيط، تتلامس الكرات المتجاورة على امتداد حرف المكعب، لذا يكون التباعد الشبكي $2r_N$. وتحتوي الخلية المكعبة على ثمانية نوكلونات عند رؤوسها، يشترك في كل منها ثمانية خلايا: أي نوكلون كامل واحد لكل خلية. وعليه،

$$f = \frac{\text{حجم النوكلونات في كل خلية}}{\text{حجم الخلية}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_N^3}{(2r_N)^3} = \left[\frac{\pi}{6} \right].$$

1(b). الكثافات ونصف قطر النواة

يعطي تعريف معامل التراص

$$V = \frac{AV_N}{f} = \frac{4\pi r_N^3 A}{3f}.$$

بمساواة ذلك بـ $4\pi R^3/3$

$$R = r_N \left(\frac{A}{f} \right)^{1/3} = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1.0546 \text{ fm}.$$

ضمن دقة هذا النموذج، تكون كتلة النواة Am_N ، حيث $m_N = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$. ومن ثم

$$\rho_m = \frac{Am_N}{V} = \frac{3fm_N}{4\pi r_N^3}.$$

وباستخدام $f = \pi/6$ ،

$$\rho_m = \frac{m_N}{8r_N^3} = 3.40 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}.$$

باستخدام $Z \simeq A/2$ ، تكون شحنة النواة تقريباً $Ae/2$. والشحنة الأولية المتوافقة مع التحويل المعطى لوحدة الإلكترون فولت هي $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ ، لذلك،

$$\rho_c = \frac{Ae/2}{V} = \frac{3fe}{8\pi r_N^3} = \frac{e}{16r_N^3},$$

ومن ثم

$$\rho_c = 1.63 \times 10^{25} \text{ C m}^{-3}.$$

كلتا الكثافتين المتوسطتين مستقلتان عن A .

2. مساهمة الحجم والطبقة السطحية الكاملة

الكثافة العددية للنوكليونات هي

$$n = \frac{A}{V} = \frac{f}{V_N}.$$

باستخدام الطبقة السطحية المحددة ذات السماكة $2r_N$ ، يكون حجمها

$$V_{\text{surface}} = \frac{4\pi}{3} [R^3 - (R - 2r_N)^3].$$

إذن، ضمن نموذج التراص المستمر، يكون عدد النوكليونات السطحية

$$\begin{aligned} S(A) &= \frac{f}{r_N^3} [R^3 - (R - 2r_N)^3] \\ &= A - f \left[\left(\frac{A}{f} \right)^{1/3} - 2 \right]^3 \\ &= \left[A - \left(A^{1/3} - 2f^{1/3} \right)^3 \right]. \end{aligned}$$

ينطبق هذا التعبير عندما $R \geq 2r_N$ ، وهو ما يلائم النوى الكبيرة المدروسة هنا. وننشر التعبير دون إهمال أي حد،

$$S(A) = 6f^{1/3}A^{2/3} - 12f^{2/3}A^{1/3} + 8f.$$

يوجد $A - S(A)$ نوكليونات داخلياً يسهم كل منها بمقدار a_V ، و $S(A)$ نوكليونات سطحية يسهم كل منها بمقدار $a_V/2$. ومن ثم

$$E_b^{(\text{nuc})} = a_V[A - S(A)] + \frac{a_V}{2}S(A),$$

أو

$$E_b^{(\text{nuc})} = a_V \left[A - 3f^{1/3}A^{2/3} + 6f^{2/3}A^{1/3} - 4f \right].$$

عددياً،

$$\frac{E_b^{(\text{nuc})}}{\text{MeV}} = 15.8A - 38.2042A^{2/3} + 61.5849A^{1/3} - 33.0914.$$

نحتفظ بالحد المتناسب مع $A^{1/3}$ وبالحد الثابت في جميع الحسابات اللاحقة.

3(a). طاقة كولوم الذاتية

بالتعويض بـ $Q_0 = Ze$ في الصيغة المعطاة، ثم تطبيق تصحيح التآثر الذاتي المحدد، نحصل على

$$U_c = \frac{3e^2 Z(Z-1)}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

بما أن $R = r_0 A^{1/3}$ ، نعرف

$$a_C = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 r_0}.$$

تعطي الثوابت المعطاة

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44049 \text{ MeV fm}, \quad a_C = 0.81955 \text{ MeV}.$$

إذن

$$U_c = \frac{a_C Z(Z-1)}{A^{1/3}}.$$

بتطبيق $Z \simeq A/2$ مع الإبقاء على طرح الواحد،

$$Z(Z-1) \simeq \frac{A(A-2)}{4},$$

وبالتالي

$$U_c(A) = \frac{a_C}{4} (A^{5/3} - 2A^{2/3}).$$

3(b). طاقة الربط الكاملة

تقل الطاقة الكهروستاتيكية الموجبة الطاقة اللازمة لتفكيك النواة. لذلك،

$$B(A) = E_b^{(\text{nuc})}(A) - U_c(A),$$

وهو ما يعطي

$$B(A) = a_V \left[A - 3f^{1/3} A^{2/3} + 6f^{2/3} A^{1/3} - 4f \right] - \frac{a_C}{4} (A^{5/3} - 2A^{2/3}).$$

4(a). الطاقة الحركية عند مسافة الفصل d

تحتوي كل شظية على $A/2$ نوكليناً، وتبلغ شحنتها تقريباً $Ae/4$. ولتوزيعين للشحنة غير متداخلين ومتناظرين كروياً، تساوي طاقة التأثير الكهروستاتيكي المتبادل بينهما طاقة شحنتين نقطيتين عند مركزيهما:

$$U_{12}(d) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Ae/4)^2}{d} = \frac{e^2 A^2}{64\pi\epsilon_0 d}.$$

لقد أُدرج تصحيح $Z(Z-1)$ بالفعل في الطاقة الذاتية لكل نواة. ولا ينطبق على هذا التأثير بين مجموعتين منفصلتين من البروتونات.

نتخذ النوكليونات الحرة المنفصلة مرجعاً مشتركاً للطاقة الداخلية. تبلغ طاقة النواة الابتدائية $-B(A)$ ، بينما تكون الطاقة الكلية للشظيتين المنفصلتين

$$-2B(A/2) + U_{12}(d) + E_{\text{kin}}(d).$$

وعليه، يعطي انحفاظ الطاقة

$$E_{\text{kin}}(d) = 2B(A/2) - B(A) - U_{12}(d).$$

بنشر طاقات الربط،

$$E_{\text{kin}}(d) = -3a_V f^{1/3}(2^{1/3} - 1)A^{2/3} + 6a_V f^{2/3}(2^{2/3} - 1)A^{1/3} - 4a_V f + \frac{a_C}{4} \left[(1 - 2^{-2/3})A^{5/3} + 2(2^{1/3} - 1)A^{2/3} \right] - \frac{e^2 A^2}{64\pi\epsilon_0 d}.$$

تتلاشى المساهمات الحجمية لأن العدد الكلي للنوكليونات محفوظ. ومع تباعد الشظيتين، تنخفض طاقة التآثر الكهروستاتيكي المتبادل بينهما وتزداد طاقتهما الحركية الكلية.

4(b). الطاقات عند التلامس وعتبة الانشطار

عند التلامس،

$$d_0 = 2R(A/2) = 2^{2/3}r_0A^{1/3}.$$

باستخدام $e^2/(4\pi\epsilon_0 r_0) = 5a_C/3$ ،

$$U_{12}(d_0) = \frac{5a_C}{48 \cdot 2^{2/3}} A^{5/3}.$$

بجمع ذلك مع التعبير أعلاه،

$$E_{\text{kin}}(d_0) = \frac{a_C}{4} \left(1 - \frac{17}{12} 2^{-2/3} \right) A^{5/3} + (2^{1/3} - 1) \left(\frac{a_C}{2} - 3a_V f^{1/3} \right) A^{2/3} + 6a_V f^{2/3}(2^{2/3} - 1)A^{1/3} - 4a_V f.$$

عددياً،

$$\frac{E_{\text{kin}}(d_0)}{\text{MeV}} = 0.0220368A^{5/3} - 9.82357A^{2/3} + 36.1750A^{1/3} - 33.0914.$$

A	مسافة الفصل عند التلامس d_0 (fm)	$E_{\text{kin}}(d_0)$ (MeV)
100	7.77	-29.3
150	8.89	-24.9
200	9.79	-6.77
250	10.55	+23.6

تعني القيمة السالبة للطاقة الحركية المحسوبة أن وضع التلامس لا يمكن بلوغه انطلاقاً من النواة غير المثارة في البداية، وفق ميزان الطاقة المفترض.

بالنسبة إلى النوى الثقيلة، يعطي حل $E_{\text{kin}}(d_0) = 0$

$$A_{\text{crit}} \simeq 213.0.$$

وعليه، يسمح النموذج بالانشطار مروراً بوضع التلامس تقريباً عندما

$$A \gtrsim 213.$$

من بين النوى الأربع المحددة، تحقق $A = 250$ وحدها هذا الشرط. وبمجرد أن يصبح التلامس ممكناً، يؤدي المزيد من التباعد إلى تحرير طاقة كولومية إضافية.

5(a). طاقة الإثارة في تفاعل النقل

لتكن m_1, m_2, m_3, m_4 كتل الحالة القاعية المدرجة في الجدول للأكسجين والحديد والكربون والنيكل، على الترتيب. ولتكن

$$m_4^* = m_4 + \frac{E_{\text{exc}}}{c^2}$$

كتلة النيكل المثار.

باستخدام الثوابت المعطاة،

$$1 \text{ a. m. u. } c^2 = \frac{(1.6605 \times 10^{-27})(3 \times 10^8)^2}{1.602 \times 10^{-13}} \text{ MeV} = 932.865 \text{ MeV}.$$

طاقة التفاعل للحالات القاعية هي

$$\begin{aligned} Q &= (m_1 + m_2 - m_3 - m_4)c^2 \\ &= (15.99491 + 53.93962 - 12.00000 - 57.93535)(932.865) \text{ MeV} \\ &= -0.764949 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

يمكننا الإبقاء على العلاقات الحركية النسبية الدقيقة. للأكسجين والكربون السرعة نفسها v ، ومن ثم عامل لورنتز نفسه

$$\gamma = 1 + \frac{50 \text{ MeV}}{m_1 c^2}, \quad \beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \gamma^{-2}}.$$

يعطي انحفاظ الطاقة وكمية الحركة طاقة النيكل المثار وكمية حركته:

$$E_4^{\text{lab}} = \gamma(m_1 - m_3)c^2 + m_2 c^2, \quad p_4 = \gamma(m_1 - m_3)v.$$

وعليه، تحقق طاقة سكونه غير المتغيرة العلاقة

$$(m_4^* c^2)^2 = (E_4^{\text{lab}})^2 - (p_4 c)^2.$$

بكتابة $\Delta m = m_1 - m_3$ واستخدام $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$

$$m_4^* = \sqrt{m_2^2 + \Delta m^2 + 2\gamma m_2 \Delta m}.$$

وبالتالي،

$$E_{\text{exc}} = c^2 \left[\sqrt{m_2^2 + (m_1 - m_3)^2 + 2\gamma m_2 (m_1 - m_3)} - m_4 \right].$$

عددياً،

$$E_{\text{exc}} = 10.86074 \dots \text{ MeV} \approx 10.86 \text{ MeV}.$$

للتحقق من ميزان الطاقة، تكون الطاقات الحركية للنواتج

$$T_C = \frac{m_3}{m_1} (50 \text{ MeV}) = 37.51193 \text{ MeV},$$

$$T_{\text{Ni}} = 0.86237 \text{ MeV}.$$

وهي تحقق

$$E_{\text{exc}} = 50 + Q - T_C - T_{\text{Ni}}.$$

أما التقريب غير النسبي المعتاد،

$$T_{\text{Ni}} \simeq \frac{(m_1 - m_3)^2}{m_1 m_4} (50 \text{ MeV}),$$

فيعطي $E_{\text{exc}} \simeq 10.862 \text{ MeV}$ ، وهي النتيجة نفسها عند الدقة المذكورة.

للاستخدام في الجزء (b)، تكون سرعة النيكل المثار

$$\beta_4 = \frac{V}{c} = \frac{p_4 c}{E_4^{\text{lab}}} = \frac{\gamma(m_1 - m_3)\beta}{m_2 + \gamma(m_1 - m_3)} = 0.00564849,$$

ومن ثم $V \approx 1.69 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$

5(b). طاقة الارتداد وطاقات الفوتون

نعمل أولاً في إطار سكون نواة النيكل المثارة. يقتضي انحفاظ كمية الحركة أن ترتد نواة النيكل النهائية في الاتجاه المعاكس للفوتون، بمقدار كمية حركة

$$p_{\text{recoil}} = \frac{E_{\gamma}^*}{c}.$$

نضع

$$W = m_4 c^2, \quad E = E_{\text{exc}}.$$

فيعطي انحفاظ الطاقة

$$W + E = E_{\gamma}^* + \sqrt{W^2 + (E_{\gamma}^*)^2}.$$

وبالحل،

$$E_{\gamma}^* = \frac{(W + E)^2 - W^2}{2(W + E)} = E - \frac{E^2}{2(W + E)}.$$

إذن تكون الطاقة الحركية للارتداد

$$T_{\text{recoil}} = E - E_{\gamma}^* = \frac{E^2}{2(W + E)} \simeq \frac{E^2}{2W}.$$

التقريب الأخير صالح لأن $E \ll W$ ؛ وهو مكافئ لتعبير طاقة الارتداد غير النسبي $p_{\text{recoil}}^2/(2m_4)$.

هنا

$$W = 54045.8700 \text{ MeV}.$$

باستخدام طاقة الإثارة من الجزء (a)،

$$T_{\text{recoil}} = 0.00109104 \text{ MeV} \approx 1.09 \text{ keV},$$

و

$$E_{\gamma}^* = 10.85965 \dots \text{ MeV} \approx 10.86 \text{ MeV}.$$

تُظهر الأرقام الإضافية المقدار الصغير المطروح بسبب الارتداد.

بالنسبة إلى الإصدار في الاتجاه الأمامي، يعطي تحويل لورنتز لطاقة الفوتون إلى إطار المختبر

$$E_{\gamma, \text{lab}} = \Gamma_4 (E_{\gamma}^* + V p_{\gamma}^*) = \Gamma_4 E_{\gamma}^* (1 + \beta_4),$$

حيث $\Gamma_4 = (1 - \beta_4^2)^{-1/2}$. ومن ثم

$$E_{\gamma, \text{lab}} = E_{\gamma}^* \sqrt{\frac{1 + \beta_4}{1 - \beta_4}}.$$

عامل دوبلر في الاتجاه الأمامي هو 1.00566453، لذا

$$E_{\gamma, \text{lab}} = 10.92117 \dots \text{ MeV} \approx 10.92 \text{ MeV}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.