

IPhO 2009

理论题与解答 · 墨西哥梅里达 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/iph/2009/

题目 1：地月系统的演化

科学家能够非常精确地测定地月距离。他们将激光束射向宇航员于 1969 年放置在月球表面的特殊反射镜，并测量光往返所需的时间，从而实现这一测量（见图 1）。



图 1. 从天文台发出的激光束用于精确测量地球与月球之间的距离。

通过这些观测，他们直接测得月球正在缓慢地远离地球。也就是说，地月距离随时间增大。这是因为潮汐力矩使地球向月球传递角动量，见图 2。在本题中，你将推导这一现象的基本参数。

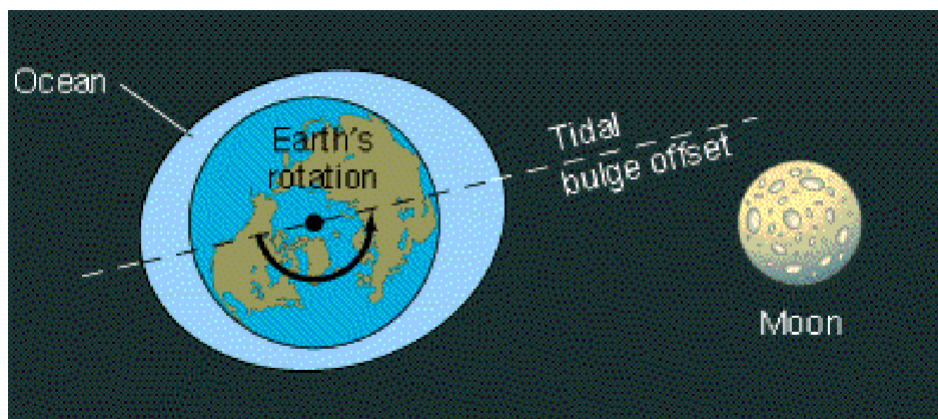


图 2. 月球的引力使地球产生潮汐形变，即“隆起”。由于地球自转，穿过这些隆起的直线与地月连线不重合。这种偏离产生一个力矩，将地球自转的角动量传递给月球的公转。图未按比例绘制。

1. 角动量守恒。

设 L_1 为地月系统目前的总角动量。现在作如下假设：i) L_1 仅由地球绕自身轴线自转的角动量与月球绕地球沿轨道公转的角动量之和组成。ii) 月球轨道为圆形，且月球可视为质点。iii) 地球的自转轴与月球的公转轴平行。iv) 为简化计算，我们将运动视为绕地球中心而非质心的运动。在整道题中，所有转动惯量、力矩和角动量均相对于地球轴线定义。v) 忽略太阳的影响。

小 题	问题	分 值
1a	写出地月系统目前总角动量的表达式。用地球的转动惯量 I_E 、地球目前的自转角频率 ω_{E1} 、月球目前相对于地球轴线的转动惯量 I_{M1} ，以及月球目前的公转角频率 ω_{M1} 表示。	0.2

当地球的自转周期与月球绕地球的公转周期相等时，这一角动量传递过程将结束。此时，月球在地球上引起的潮汐隆起将与地月连线对齐，力矩随之消失。

小 题	问题	分 值
1b	写出地月系统最终总角动量 L_2 的表达式。采用与问题 1a 相同的假设。用地球的转动惯量 I_E 、地球自转和月球公转的最终角频率 ω_2 ，以及月球最终的转动惯量 I_{M2} 表示。	0.2

小 题	问题	分 值
1c	忽略地球自转对最终总角动量的贡献，写出本题中角动量守恒的方程。	0.3

2. 地月系统的最终间距和最终角频率。

假设月球绕地球作圆周运动的引力方程始终成立。忽略地球自转对最终总角动量的贡献。

小 题	问题	分 值
2a	用 M_E 、 ω_2 、 G 和地月最终间距 D_2 ，写出最终状态下月球绕地球作圆周运动的引力方程。其中， M_E 为地球质量， G 为引力常量。	0.2

小 题	问题	分 值
2b	用已知参数——系统总角动量 L_1 、地球质量 M_E 、月球质量 M_M 和 G ——写出地月最终间距 D_2 的表达式。	0.5

小题	问题	分值
2c	用已知参数 L_1 、 M_E 、 M_M 和 G ，写出地月系统最终角频率 ω_2 的表达式。	0.5

下面将要求你求出 D_2 和 ω_2 的数值。为此，你需要知道地球的转动惯量。

小 题	问题	分 值
2d	假设地球是一个球体，从中心到半径 r_i 处的内部密度为 ρ_i ，从半径 r_i 处到半径 r_o 的表面之间的外部密度为 ρ_o （见图 3），写出地球转动惯量 I_E 的表达式。	0.5

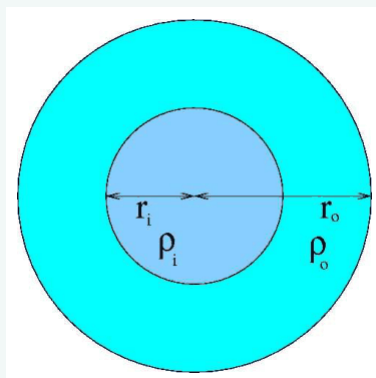


图 3. 将地球视为具有两种密度 ρ_i 和 ρ_o 的球体。

本题要求的所有数值结果均保留两位有效数字。

小 题	问题	分 值
2e	利用 $\rho_i = 1.3 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$ 、 $r_i = 3.5 \times 10^6 \text{ m}$ 、 $\rho_o = 4.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ 和 $r_o = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ ，计算地球的转动惯量 I_E 。	0.2

地球和月球的质量分别为 $M_E = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$ 和 $M_M = 7.3 \times 10^{22} \text{ kg}$ 。目前的地月间距为 $D_1 = 3.8 \times 10^8 \text{ m}$ 。地球目前的自转角频率为 $\omega_{E1} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ 。月球目前绕地球公转的角频率为 $\omega_{M1} = 2.7 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ ，引力常量为 $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ 。

小题	问题	分值
2f	计算系统总角动量 L_1 的数值。	0.2

小题	问题	分值
2g	求出最终间距 D_2 ，分别以米和目前间距 D_1 为单位表示。	0.3

小题	问题	分值
2h	求出以 s^{-1} 为单位的最终角频率 ω_2 ，以及以目前一天的长度为单位的最终日长。	0.3

通过求出地球最终角动量与月球最终角动量的比值，验证忽略地球自转对最终总角动量贡献的假设是合理的。这个比值应当很小。

小题	问题	分值
2i	求出地球最终角动量与月球最终角动量的比值。	0.2

3. 月球每年远离地球多少？

现在，你将求出月球每年远离地球的距离。为此，你需要知道目前作用在月球上的力矩的表达式。假设潮汐隆起可以近似为位于地球表面的两个质点，每个质点的质量均为 m ，见图 4。设 θ 为穿过隆起的直线与地球、月球中心连线之间的夹角。

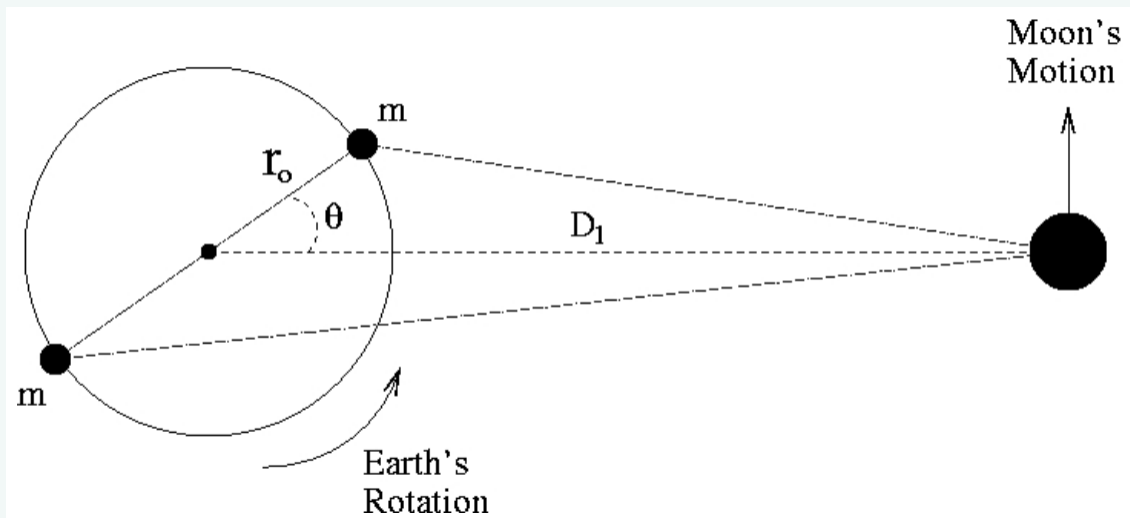


图 4. 用于估算地球上的隆起对月球产生的力矩的示意图。图未按比例绘制。

小题	问题	分值
3a	求距离月球较近的质点对月球的作用力大小 F_c 。	0.4

小题	问题	分值
3b	求距离月球较远的质点对月球的作用力大小 F_f 。	0.4

现在可以计算这两个质点产生的力矩。

小题	问题	分值
3c	求较近质点产生的力矩 τ_c 的大小。	0.4

小题	问题	分值
3d	求较远质点产生的力矩 τ_f 的大小。	0.4

小 题	问题	分 值
3e	求这两个质点产生的总力矩 τ 的大小。由于 $r_o \ll D_1$ ，应将表达式近似到 r_o/D_1 的最低非零阶。可以利用当 $x \ll 1$ 时， $(1+x)^a \approx 1+ax$ 。	1.0

小 题	问题	分 值
3f	已知 $\theta = 3^\circ$ 且 $m = 3.6 \times 10^{16} \text{ kg}$ ，计算总力矩 τ 的数值（注意，这一质量约为地球质量的 10^{-8} 倍）。	0.5

由于力矩等于角动量对时间的变化率，求出目前地月距离每年的增量。在这一步中，将月球的角动量仅用 M_M 、 M_E 、 D_1 和 G 表示。

小题	问题	分值
3g	求出目前地月距离每年的增量。	1.0

最后，估算日长每年的增量。

小题	问题	分值
3h	求出 ω_{E1} 每年的减小量，以及目前日长每年的增量。	1.0

4. 能量去了哪里？

与守恒的角动量不同，系统的总能量（转动动能与引力势能之和）并不守恒。在最后这一部分，我们将研究这一问题。

小 题	问题	分 值
4a	写出地月系统目前总能量（转动动能与引力势能之和） E 的表达式。仅用 I_E 、 ω_{E1} 、 M_M 、 M_E 、 D_1 和 G 表示。	0.4

小 题	问题	分 值
4b	写出 E 的变化量 ΔE 随 D_1 和 ω_{E1} 的变化量而变化的表达式。利用问题 3g 和 3h 中求得的 D_1 和 ω_{E1} 的变化量，计算一年内 ΔE 的数值。	0.4

验证这一能量损失与月球在地球上引起的潮汐中以热量形式耗散的能量估算值相符。假设潮汐使覆盖地球表面、深度为 $h = 0.5 \text{ m}$ 的一层水平平均升高 0.5 m （为简化起见，假设整个地球表面都被水覆盖）。这一过程每天发生两次。进一步假设，当水下降时，这一引力势能的 10% 由于黏滞作用而以热量形式耗散。取水的密度为 $\rho_{\text{water}} = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ，地球表面的重力加速度为 $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ 。

小题	问题	分值
4c	这一表面水层的质量是多少？	0.2

小题	问题	分值
4d	计算一年内耗散的能量。这与地月系统目前每年损失的能量相比如何？	0.3

题目译自官方英文原文。

答案

对于隆起产生的力和力矩，定义距离

$$d_c = \sqrt{D_1^2 + r_o^2 - 2D_1r_o \cos \theta}, \quad d_f = \sqrt{D_1^2 + r_o^2 + 2D_1r_o \cos \theta}.$$

用 T_1 和 T_2 分别表示目前和最终的日长。数值结果保留两位有效数字。

- 1a: $L_1 = I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1}$ 。
- 1b: $L_2 = (I_E + I_{M2}) \omega_2$ 。
- 1c: $I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1} = L_1 \simeq I_{M2} \omega_2$ 。
- 2a: $\omega_2^2 D_2^3 = GM_E$ 。
- 2b: $D_2 = \frac{L_1^2}{GM_E M_M^2}$ 。
- 2c: $\omega_2 = \frac{G^2 M_E^2 M_M^3}{L_1^3}$ 。

- 2d: $I_E = \frac{8\pi}{15} [\rho_i r_i^5 + \rho_o (r_o^5 - r_i^5)]$ 。
- 2e: $I_E = 8.0 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$ 。
- 2f: $L_1 = 3.4 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ 。
- 2g: $D_2 = 5.5 \times 10^8 \text{ m} = 1.4 D_1$ 。
- 2h: $\omega_2 = 1.6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $T_2/T_1 = 47$ 。
- 2i: $\frac{L_{E2}}{L_{M2}} = \frac{I_E}{M_M D_2^2} = 3.6 \times 10^{-3}$ 。
- 3a: $F_c = \frac{GM_M m}{d_c^2}$ 。
- 3b: $F_f = \frac{GM_M m}{d_f^2}$ 。
- 3c: $\tau_c = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{d_c^3}$ 。
- 3d: $\tau_f = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{d_f^3}$ 。
- 3e: $\tau = \tau_c - \tau_f \simeq \frac{3GM_M m r_o^2}{D_1^3} \sin(2\theta)$, 方向与月球的轨道角动量方向相同。
- 3f: $\tau = 4.1 \times 10^{16} \text{ N m}$ 。
- 3g: $\dot{D}_1 = \frac{2\tau}{M_M} \sqrt{\frac{D_1}{GM_E}} = 3.5 \times 10^{-2} \text{ m yr}^{-1} = 3.5 \text{ cm yr}^{-1}$ 。
- 3h: 一年内, $\Delta\omega_{E1} = -1.6 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}$, 且 $\Delta T_1 = +1.9 \times 10^{-5} \text{ s}$ 。
- 4a: $E = \frac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 - \frac{GM_E M_M}{2D_1}$ 。
- 4b: 一年内, $\Delta E \simeq I_E \omega_{E1} \Delta\omega_{E1} + \frac{GM_E M_M}{2D_1^2} \Delta D_1 = -9.1 \times 10^{19} \text{ J}$ 。
- 4c: $M_{\text{water}} = 4\pi r_o^2 h \rho_{\text{water}} = 2.6 \times 10^{17} \text{ kg}$ 。
- 4d: $E_{\text{heat, yr}} = 9.2 \times 10^{19} \text{ J}$, 与每年 $9.1 \times 10^{19} \text{ J}$ 的机械能损失十分接近。

解答

所有计算均采用题目所述的假设。数值结果仅在最后进行舍入。计算每年的变化量时, 取

$$t_{\text{yr}} = 365 \times 24 \times 3600 \text{ s}.$$

1a. 目前的角动量

地球自转与月球公转绕相互平行的轴沿同一方向进行, 因此它们的角动量相加:

$$L_1 = I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1}.$$

由于月球被视为距地球轴线 D_1 的质点,

$$I_{M1} = M_M D_1^2.$$

1b. 最终的角动量

在最终的同步状态下, 两个角频率均等于 ω_2 。因此

$$L_2 = I_E \omega_2 + I_{M2} \omega_2 = (I_E + I_{M2}) \omega_2, \quad I_{M2} = M_M D_2^2.$$

1c. 角动量守恒

在所述模型中，没有外力矩。潮汐力矩在系统内部传递角动量，因此 $L_1 = L_2$ 。

仅忽略地球最终自转的贡献，

$$I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1} \simeq I_{M2} \omega_2.$$

地球目前的自转角动量仍须计入 L_1 。

2a. 圆轨道方程

引力为月球提供向心加速度：

$$\frac{GM_E M_M}{D_2^2} = M_M \omega_2^2 D_2.$$

约去 M_M ，得到

$$\omega_2^2 D_2^3 = GM_E.$$

2b. 最终间距

在小题 1c 的近似下，

$$L_1 = M_M D_2^2 \omega_2.$$

利用 $\omega_2 = \sqrt{GM_E/D_2^3}$,

$$L_1 = M_M \sqrt{GM_E D_2}.$$

两边平方并求解，得

$$D_2 = \frac{L_1^2}{GM_E M_M^2}.$$

2c. 最终角频率

将前面的结果代入圆轨道方程，得到

$$\omega_2 = \sqrt{GM_E} \left(\frac{GM_E M_M^2}{L_1^2} \right)^{3/2}.$$

因此

$$\omega_2 = \frac{G^2 M_E^2 M_M^3}{L_1^3}.$$

2d. 地球的转动惯量

对于半径为 r 、密度为 ρ 、厚度为 dr 的薄球壳，有

$$dm = 4\pi \rho r^2 dr, \quad dI = \frac{2}{3} r^2 dm = \frac{8\pi}{3} \rho r^4 dr.$$

对两个不同密度的区域分别积分，

$$I_E = \frac{8\pi}{3} \left[\rho_i \int_0^{r_i} r^4 dr + \rho_o \int_{r_i}^{r_o} r^4 dr \right].$$

因此

$$I_E = \frac{8\pi}{15} [\rho_i r_i^5 + \rho_o (r_o^5 - r_i^5)].$$

2e. 转动惯量的数值

代入给定的密度和半径,

$$I_E = \frac{8\pi}{15} [(1.3 \times 10^4)(3.5 \times 10^6)^5 + (4.0 \times 10^3) ((6.4 \times 10^6)^5 - (3.5 \times 10^6)^5)] \text{ kg m}^2.$$

于是

$$I_E = 8.0 \times 10^{37} \text{ kg m}^2.$$

2f. 目前的总角动量

利用给定的目前角频率,

$$L_1 = I_E \omega_{E1} + M_M D_1^2 \omega_{M1}.$$

两部分的贡献分别为

$$I_E \omega_{E1} = 5.8 \times 10^{33} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1},$$

$$M_M D_1^2 \omega_{M1} = 2.8 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

将未舍入的中间值相加,

$$L_1 = 3.4 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

2g. 最终间距的数值

利用小题 2b 和 L_1 的未舍入值,

$$D_2 = \frac{L_1^2}{GM_E M_M^2} = 5.5 \times 10^8 \text{ m}.$$

相对于目前的间距,

$$\frac{D_2}{D_1} = 1.4.$$

2h. 最终角频率和日长

由小题 2c,

$$\omega_2 = 1.6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}.$$

由于转动周期为 $T = 2\pi/\omega$,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi/\omega_2}{2\pi/\omega_{E1}} = \frac{\omega_{E1}}{\omega_2}.$$

使用未舍入的中间值, 得到

$$T_2 = 47T_1,$$

因此, 最终一天的长度为目前的 47 天。

2i. 检验对最终自转的忽略

两个最终角动量都含有相同的角频率:

$$\frac{L_{E2}}{L_{M2}} = \frac{I_E \omega_2}{M_M D_2^2 \omega_2} = \frac{I_E}{M_M D_2^2}.$$

数值上,

$$\frac{L_{E2}}{L_{M2}} = 3.6 \times 10^{-3}.$$

地球最终的自转角动量仅为月球轨道角动量的 0.36%，因此忽略它是合理的。

3a. 较近隆起产生的力

取地球中心为原点，将月球置于 $(D_1, 0)$ ，并取月球瞬时运动方向为 y 轴正方向。较近隆起的位置为 $(r_o \cos \theta, r_o \sin \theta)$ 。

因此，它与月球的距离满足

$$d_c^2 = (D_1 - r_o \cos \theta)^2 + (r_o \sin \theta)^2 = D_1^2 + r_o^2 - 2D_1 r_o \cos \theta.$$

由牛顿万有引力定律，

$$F_c = \frac{GM_M m}{D_1^2 + r_o^2 - 2D_1 r_o \cos \theta}.$$

3b. 较远隆起产生的力

较远隆起的位置为

$$(-r_o \cos \theta, -r_o \sin \theta).$$

因此，

$$d_f^2 = (D_1 + r_o \cos \theta)^2 + (r_o \sin \theta)^2 = D_1^2 + r_o^2 + 2D_1 r_o \cos \theta,$$

且

$$F_f = \frac{GM_M m}{D_1^2 + r_o^2 + 2D_1 r_o \cos \theta}.$$

3c. 较近隆起产生的力矩

只有垂直于地月连线的力分量对绕地球轴线的力矩有贡献。对于较近的隆起，

$$F_{c,y} = F_c \frac{r_o \sin \theta}{d_c}.$$

其力矩为正，方向与月球的轨道角动量方向相同：

$$\tau_c = D_1 F_{c,y}.$$

因此，其大小为

$$\tau_c = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{(D_1^2 + r_o^2 - 2D_1 r_o \cos \theta)^{3/2}}.$$

3d. 较远隆起产生的力矩

较远隆起对月球的引力具有沿 y 轴负方向的分量：

$$F_{f,y} = -F_f \frac{r_o \sin \theta}{d_f}.$$

其力矩与较近隆起产生的力矩方向相反。其大小为

$$\tau_f = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{(D_1^2 + r_o^2 + 2D_1 r_o \cos \theta)^{3/2}}.$$

3e. 最低非零阶的总力矩

由于 $d_c < d_f$, 较近隆起产生的力矩较大。对于图示的几何关系,

$$\tau = \tau_c - \tau_f = GM_M m D_1 r_o \sin \theta \left(\frac{1}{d_c^3} - \frac{1}{d_f^3} \right).$$

定义 $\epsilon = r_o/D_1 \ll 1$ 。则

$$\frac{1}{d_c^3} = \frac{1}{D_1^3} (1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \cos \theta)^{-3/2} \simeq \frac{1}{D_1^3} (1 + 3\epsilon \cos \theta),$$

且

$$\frac{1}{d_f^3} = \frac{1}{D_1^3} (1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos \theta)^{-3/2} \simeq \frac{1}{D_1^3} (1 - 3\epsilon \cos \theta).$$

零阶项抵消, 剩下

$$\tau \simeq GM_M m D_1 r_o \sin \theta \frac{6r_o \cos \theta}{D_1^4}.$$

因此

$$\tau \simeq \frac{6GM_M m r_o^2}{D_1^3} \sin \theta \cos \theta = \frac{3GM_M m r_o^2}{D_1^3} \sin(2\theta).$$

这一力矩使月球的轨道角动量增大。

3f. 力矩的数值

取 $\theta = 3^\circ$,

$$\tau \simeq \frac{3(6.7 \times 10^{-11})(7.3 \times 10^{22})(3.6 \times 10^{16})(6.4 \times 10^6)^2}{(3.8 \times 10^8)^3} \sin 6^\circ.$$

于是

$$\tau = 4.1 \times 10^{16} \text{ N m}.$$

3g. 月球目前的远离速率

对于间距为 D 的圆轨道,

$$\omega_M = \sqrt{\frac{GM_E}{D^3}},$$

因此月球的角动量为

$$L_M = M_M D^2 \omega_M = M_M \sqrt{GM_E D}.$$

对时间求导,

$$\tau = \frac{dL_M}{dt} = \frac{M_M}{2} \sqrt{\frac{GM_E}{D}} \dot{D}.$$

因此，在目前的间距处，

$$\dot{D}_1 = \frac{2\tau}{M_M} \sqrt{\frac{D_1}{GM_E}}.$$

数值上，

$$\dot{D}_1 = 1.1 \times 10^{-9} \text{ m s}^{-1}.$$

一年内的增量为

$$\Delta D_1 = \dot{D}_1 t_{\text{yr}},$$

得到

$$\Delta D_1 = 3.5 \times 10^{-2} \text{ m} = 3.5 \text{ cm} \quad \text{一年内.}$$

3h. 地球自转的减慢与日长的增加

作用在地球上的力矩与作用在月球上的力矩相反。在 I_E 不变的条件下，

$$I_E \dot{\omega}_E = -\tau.$$

因此

$$\dot{\omega}_{E1} = -\frac{\tau}{I_E} = -5.2 \times 10^{-22} \text{ s}^{-2},$$

一年内的变化量为

$$\Delta \omega_{E1} = -\frac{\tau t_{\text{yr}}}{I_E} = -1.6 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}.$$

由于 $T_E = 2\pi/\omega_E$ ，微小变化满足

$$\Delta T_E \simeq -\frac{2\pi}{\omega_E^2} \Delta \omega_E.$$

因此，

$$\Delta T_1 = \frac{2\pi \tau t_{\text{yr}}}{I_E \omega_{E1}^2} = 1.9 \times 10^{-5} \text{ s} \quad \text{一年内.}$$

日长每年约增加 $19 \mu\text{s}$ 。

4a. 目前的机械能

机械能由地球的自转动能、月球的轨道动能以及两者之间的引力势能组成：

$$E = \frac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 + \frac{1}{2} M_M D_1^2 \omega_{M1}^2 - \frac{GM_E M_M}{D_1}.$$

由圆轨道关系得

$$\frac{1}{2} M_M D_1^2 \omega_{M1}^2 = \frac{GM_E M_M}{2D_1}.$$

于是

$$E = \frac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 - \frac{GM_E M_M}{2D_1}.$$

4b. 每年的机械能变化

对于变化量 $\Delta\omega_{E1}$ 和 ΔD_1 ，在这一能量模型内，能量的精确差值为

$$\Delta E = \frac{1}{2}I_E [(\omega_{E1} + \Delta\omega_{E1})^2 - \omega_{E1}^2] - \frac{GM_E M_M}{2} \left[\frac{1}{D_1 + \Delta D_1} - \frac{1}{D_1} \right].$$

每年的相对变化极小，因此保留一阶项得到

$$\Delta E \simeq I_E \omega_{E1} \Delta\omega_{E1} + \frac{GM_E M_M}{2D_1^2} \Delta D_1.$$

第一项为负：地球损失自转动能。第二项为正：月球的轨道能量随轨道扩大而增加。

代入小题 3g 和 3h 中求得的年度变化量，并保留其未舍入值，

$$\Delta E = -9.1 \times 10^{19} \text{ J} \quad \text{一年内.}$$

能量收支也可以直接用力矩表示：

$$\dot{E}_{\text{spin}} = -\tau\omega_{E1}.$$

利用远离速率的公式，

$$\dot{E}_{\text{orbit}} = \frac{GM_E M_M}{2D_1^2} \dot{D}_1 = \tau \sqrt{\frac{GM_E}{D_1^3}}.$$

因此

$$\dot{E} = -\tau(\omega_{E1} - \omega_{M1}),$$

其中 ω_{M1} 应由圆轨道关系确定。由于地球自转比月球公转快，机械能减少；减少的能量转化为热。

4c. 水层的质量

由于水层厚度远小于地球半径，其体积等于表面积乘以厚度：

$$V \simeq 4\pi r_o^2 h.$$

因此

$$M_{\text{water}} = 4\pi r_o^2 h \rho_{\text{water}} = 4\pi (6.4 \times 10^6)^2 (0.5) (10^3) \text{ kg}.$$

于是

$$M_{\text{water}} = 2.6 \times 10^{17} \text{ kg}.$$

4d. 每年的热耗散

题目给定的平均上升高度为 $H = 0.5 \text{ m}$ 。水层在一次上升中增加的重力势能为

$$E_{\text{rise}} = M_{\text{water}} g H.$$

其中百分之十在随后的下降过程中以热量形式耗散。每天有两个周期，因此每年共有 2×365 个周期：

$$E_{\text{heat, yr}} = 0.10(2 \times 365) M_{\text{water}} g H.$$

代入数值得

$$E_{\text{heat, yr}} = 9.2 \times 10^{19} \text{ J}.$$

这一结果与小题 4b 中求得的机械能损失

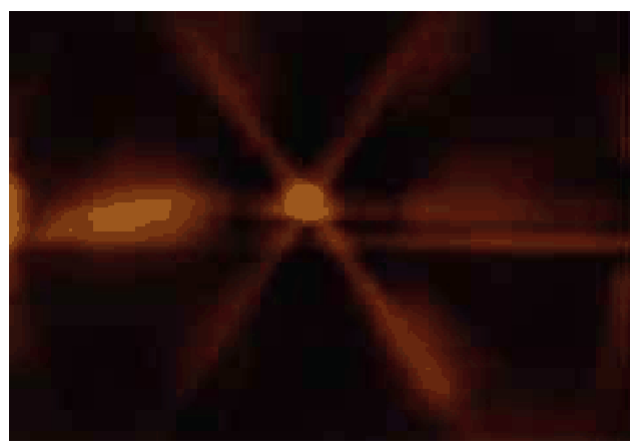
$$|\Delta E| = 9.1 \times 10^{19} \text{ J}$$

十分接近。在这一简化模型中，潮汐耗散将损失的机械能转化为热，从而解释了机械能的损失。

解答已与官方解答核对。

题目 2：多普勒激光冷却与光学黏胶

本题旨在建立一个简单的理论，以理解所谓的“激光冷却”和“光学黏胶”现象。这是指利用频率相同、传播方向相反的激光束来冷却一束中性原子，通常是碱金属原子。这是朱棣文、菲利普斯和科恩-塔努吉获得 1997 年诺贝尔物理学奖的部分研究内容。



上图展示了被俘获在三对相互正交、相向传播的激光束交汇处的钠原子（中心的亮斑）。这一俘获区域被称为“光学黏胶”，因为耗散性的光学力类似于物体在糖浆中运动时所受到的黏滞阻力。

在本题中，你将分析光子入射到原子上时相互作用的基本现象，以及一维情况下耗散机制的基础。

第 I 部分：激光冷却基础

考虑一个质量为 m 、以速度 v 沿 $+x$ 方向运动的原子。为简单起见，我们将问题视为一维问题，即忽略 y 和 z 方向（见图 1）。原子具有两个内部能级。最低能态的能量取为零，激发态的能量为 $\hbar\omega_0$ ，其中 $\hbar = h/2\pi$ 。原子初始处于最低能态。一束在实验室中频率为 ω_L 的激光沿 $-x$ 方向传播，并入射到原子上。从量子力学的角度看，激光由大量光子组成，每个光子的能量为 $\hbar\omega_L$ ，动量为 $-\hbar q$ 。原子可以吸收一个光子，随后自发发射一个光子；沿 $+x$ 和 $-x$ 方向发射的概率相等。由于原子以非相对论速度运动， $v/c \ll 1$ （其中 c 为光速），只保留这一量的一阶项。还应考虑 $\hbar q/mv \ll 1$ ，即原子的动量远大于单个光子的动量。作答时，只保留上述两个量各自的线性修正。

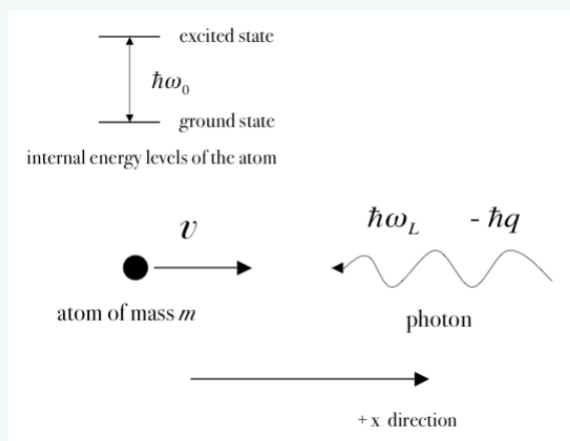


图 1. 一个质量为 m 、以速度 v 沿 $+x$ 方向运动的原子与一个能量为 $\hbar\omega_L$ 、动量为 $-\hbar q$ 的光子碰撞的示意图。原子具有两个内部态，能量差为 $\hbar\omega_0$ 。

假设激光频率 ω_L 已调节到使运动原子所观测到的激光与原子的内部跃迁共振。回答下列问题：

1. 吸收。

1a	写出吸收光子的共振条件。	0.2
1b	写出在实验室中观测到的原子吸收光子后的动量 p_{at} 。	0.2
1c	写出在实验室中观测到的原子吸收光子后的总能量 ε_{at} 。	0.2

2. 沿 $-x$ 方向自发发射光子。

在吸收入射光子后的某一时刻，原子可能沿 $-x$ 方向发射一个光子。

2a	写出沿 $-x$ 方向发射过程结束后，在实验室中观测到的所发射光子的能量 ε_{ph} 。	0.2
2b	写出沿 $-x$ 方向发射过程结束后，在实验室中观测到的所发射光子的动量 p_{ph} 。	0.2
2c	写出沿 $-x$ 方向发射过程结束后，在实验室中观测到的原子的动量 p_{at} 。	0.2
2d	写出沿 $-x$ 方向发射过程结束后，在实验室中观测到的原子的总能量 ε_{at} 。	0.2

3. 沿 $+x$ 方向自发发射光子。

在吸收入射光子后的某一时刻，原子也可能改为沿 $+x$ 方向发射一个光子。

3a	写出沿 $+x$ 方向发射过程结束后，在实验室中观测到的所发射光子的能量 ε_{ph} 。	0.2
3b	写出沿 $+x$ 方向发射过程结束后，在实验室中观测到的所发射光子的动量 p_{ph} 。	0.2
3c	写出沿 $+x$ 方向发射过程结束后，在实验室中观测到的原子的动量 p_{at} 。	0.2
3d	写出沿 $+x$ 方向发射过程结束后，在实验室中观测到的原子的总能量 ε_{at} 。	0.2

4. 吸收后发射过程的平均值。

沿 $-x$ 或 $+x$ 方向自发发射光子的概率相等。考虑这一点，回答下列问题。

4a	写出发射过程结束后，所发射光子的平均能量 ε_{ph} 。	0.2
4b	写出发射过程结束后，所发射光子的平均动量 p_{ph} 。	0.2
4c	写出发射过程结束后，原子的平均总能量 ε_{at} 。	0.2
4d	写出发射过程结束后，原子的平均动量 p_{at} 。	0.2

5. 能量和动量的传递。

假设只发生一次上述完整的单光子吸收—发射过程，激光辐射与原子之间将发生净的平均动量和能量传递。

5a	写出一次完整的单光子吸收—发射过程后，原子的平均能量变化 $\Delta\varepsilon$ 。	0.2
5b	写出一次完整的单光子吸收—发射过程后，原子的平均动量变化 Δp 。	0.2

6. 沿 $+x$ 方向传播的激光束所引起的能量和动量传递。

现在考虑一束频率为 ω'_L 的激光沿 $+x$ 方向入射到原子上，而原子也以速度 v 沿 $+x$ 方向运动。假设在原子看来，原子的内部跃迁与激光束满足共振条件，回答下列问题：

6a	写出一次完整的单光子吸收—发射过程后，原子的平均能量变化 $\Delta\varepsilon$ 。	0.3
----	--	-----

6b	写出一次完整的单光子吸收—发射过程后，原子的平均动量变化 Δp 。	0.3
----	---	-----

第 II 部分：耗散与光学黏胶的基本原理

然而，自然界中的量子过程具有内禀的不确定性。因此，原子在吸收光子后的 *有限时间* 内能够自发发射光子这一事实，意味着不必像上述讨论那样严格满足共振条件。也就是说，激光束的频率 ω_L 和 ω'_L 可以取任意值，吸收—发射过程仍然能够发生。这些过程发生的（量子）概率各不相同，而且正如所预期的那样，在严格满足共振条件时概率最大。一次吸收与发射之间经历的平均时间称为原子激发能级的寿命，记为 Γ^{-1} 。

考虑在实验室参考系中 *静止* 的 N 个原子，以及入射到这些原子上的一束频率为 ω_L 的激光。原子不断吸收和发射光子，使得平均有 N_{exc} 个原子处于激发态（因而有 $N - N_{exc}$ 个原子处于基态）。量子力学计算给出以下结果：

$$N_{exc} = N \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}$$

其中， ω_0 为原子跃迁的共振频率， Ω_R 为所谓的拉比频率； Ω_R^2 与激光束的强度成正比。正如上文所述，可以看出，即使共振频率 ω_0 不同于激光束的频率 ω_L ，这一数目仍不为零。上述结果也可以表述为：单位时间内发生的吸收—发射过程数为 $N_{exc}\Gamma$ 。

考虑图 2 所示的物理情形：两束传播方向相反、频率 *相同* 但可取任意值 ω_L 的激光，入射到由 N 个以速度 v 沿 $+x$ 方向运动的原子组成的气体上。

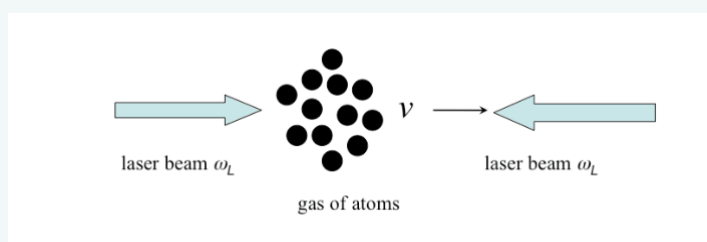


图 2. 两束传播方向相反、频率 *相同* 但可取任意值 ω_L 的激光，入射到由 N 个以速度 v 沿 $+x$ 方向运动的原子组成的气体上。

7. 激光对原子束施加的力。

7a	利用目前得到的信息，求激光对原子束施加的力。应假设 $mv \gg \hbar q$ 。	1.5
----	--	-----

8. 低速极限。

现在假设原子的速度足够小，可以将力展开到 v 的一阶。

8a	求第 (7a) 问所得的力在此极限下的表达式。	1.5
----	-------------------------	-----

利用这一结果，可以求出激光辐射使原子加速、减速或完全不产生影响的条件。

8b	写出获得正向力（使原子加速）的条件。	0.25
8c	写出力为零的条件。	0.25
8d	写出获得负向力（使原子减速）的条件。	0.25
8e	现在考虑原子以速度 $-v$ （沿 $-x$ 方向）运动。写出使原子受到减速力的条件。	0.25

9. 光学黏胶。

在力为负的情况下，得到的是摩擦性的耗散力。假设初始时刻 $t = 0$ ，原子气体的速度为 v_0 。

9a	在低速极限下，求激光束开启时间 τ 后原子的速度。	1.5
9b	现在假设原子气体处于温度为 T_0 的热平衡状态。求激光束开启时间 τ 后的温度 T 。	0.5

这一模型不能使温度降至任意低。

题目译自官方英文原文。

答案

定义

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad q = \frac{\omega_L}{c}, \quad q' = \frac{\omega'_L}{c}, \quad K = \frac{1}{2}mv^2.$$

对于第 II 部分，定义

$$\Delta = \omega_0 - \omega_L, \quad D = \Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2, \quad \alpha = \frac{4\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 \Delta}{D^2}.$$

取两束激光的 Ω_R 相同。

下面的光子物理量保留其一阶多普勒修正。原子物理量保留最低阶反冲修正，略去 v/c 与 $\hbar q/(mv)$ 的乘积。解答中列出了这一截断之前的小动量修正。原子能量略去了恒定的静止能量。

- 1a: $\omega_L(1 + \beta) = \omega_0$ ，等价地， $\omega_L + qv = \omega_0$ 。
- 1b: $p_{at} = mv - \hbar q$ 。
- 1c: $\varepsilon_{at} = K + \hbar\omega_L = K + \hbar\omega_0 - \hbar qv$ 。
- 2a: $\varepsilon_{ph} = \hbar\omega_0(1 - \beta) \simeq \hbar\omega_L$ 。
- 2b: $p_{ph} = -\frac{\hbar\omega_0}{c}(1 - \beta) \simeq -\hbar q$ 。
- 2c: $p_{at} = mv$ 。
- 2d: $\varepsilon_{at} = K$ 。
- 3a: $\varepsilon_{ph} = \hbar\omega_0(1 + \beta) \simeq \hbar\omega_L(1 + 2\beta)$ 。
- 3b: $p_{ph} = \frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + \beta) \simeq \hbar q(1 + 2\beta)$ 。
- 3c: $p_{at} \simeq mv - 2\hbar q$ 。
- 3d: $\varepsilon_{at} \simeq K - 2\hbar qv$ 。
- 4a: $\langle \varepsilon_{ph} \rangle = \hbar\omega_0$ 。
- 4b: $\langle p_{ph} \rangle = \frac{\hbar\omega_0 v}{c^2} \simeq \hbar q\beta$ 。
- 4c: $\langle \varepsilon_{at} \rangle \simeq K - \hbar qv$ 。
- 4d: $\langle p_{at} \rangle \simeq mv - \hbar q$ 。
- 5a: $\Delta\varepsilon = -\frac{\hbar\omega_0 v}{c} \simeq -\hbar qv$ 。
- 5b: $\Delta p \simeq -\hbar q$ 。
- 6a: $\Delta\varepsilon = +\frac{\hbar\omega_0 v}{c} \simeq +\hbar q'v$ 。
- 6b: $\Delta p \simeq +\hbar q'$ 。

• 7a:

$$F(v) = N\hbar q \Gamma \Omega_R^2 \left[\frac{1}{(\Delta + qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} - \frac{1}{(\Delta - qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} \right].$$

• 8a:

$$F(v) \simeq -N\alpha v = -\frac{4N\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 (\omega_0 - \omega_L)}{[(\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2]^2} v.$$

• 8b: $\omega_L > \omega_0$.

• 8c: $\omega_L = \omega_0$.

• 8d: $\omega_L < \omega_0$.

• 8e: $\omega_L < \omega_0$; 此时力指向 $+x$ 方向。

• 9a: $v(\tau) = v_0 e^{-\alpha\tau/m}$, 其中 $\alpha > 0$ 。

• 9b: $T(\tau) = T_0 e^{-2\alpha\tau/m}$ 。

解答

光子的能量-动量关系给出

$$\hbar\omega_L = c\hbar q, \quad q = \frac{\omega_L}{c}.$$

将两个小参数写为

$$\beta = \frac{v}{c} \ll 1, \quad \eta = \frac{\hbar q}{mv} \ll 1.$$

反冲能量 $(\hbar q)^2/(2m)$ 相对于原子初始动能是 η 的二阶量, 因此略去。吸收后原子速度的变化为 $-\hbar q/m$; 它对多普勒因子的贡献为

$$\frac{\hbar q}{mc} = \eta\beta,$$

这一项也略去。

因此, 在计算所发射光子的频率时, 可以将发射光子的原子速度取为 v 。在有助于说明问题的地方, 会列出 $\hbar q\beta = mv\eta\beta$ 阶的动量修正, 但在最低阶原子反冲结果中将其略去。

1a. 共振条件

对于沿 $-x$ 方向传播的光子, 沿 $+x$ 方向运动的原子测得的频率在一阶近似下为

$$\omega_{\text{atom}} = \omega_L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega_L + qv.$$

共振要求此频率等于 ω_0 :

$$\omega_L + qv = \omega_0, \quad \omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \omega_0.$$

这也可以由能量守恒得到:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \hbar\omega_L = \frac{(mv - \hbar q)^2}{2m} + \hbar\omega_0.$$

略去反冲能量便得到相同的条件。

1b. 吸收后原子的动量

由动量守恒得

$$p_{at} = mv - \hbar q.$$

1c. 吸收后原子的能量

原子获得入射光子的能量：

$$\varepsilon_{at} = \frac{1}{2}mv^2 + \hbar\omega_L.$$

等价地，将其动能和内部能量相加，得到

$$\varepsilon_{at} = \frac{(mv - \hbar q)^2}{2m} + \hbar\omega_0 \simeq \frac{1}{2}mv^2 - \hbar qv + \hbar\omega_0.$$

共振条件使这些表达式在所保留的阶数内相等。

对于发射过程的各项，令 $s = +1$ 表示沿 $+x$ 方向发射的光子， $s = -1$ 表示沿 $-x$ 方向发射的光子。忽略反冲对跃迁频率的影响，光子在发射原子的静止参考系中的能量为 $\hbar\omega_0$ 。一阶多普勒变换给出

$$\varepsilon_{ph}^{(s)} = \hbar\omega_0(1 + s\beta), \quad p_{ph}^{(s)} = s\frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + s\beta).$$

2a. 沿 $-x$ 方向发射时的光子能量

取 $s = -1$,

$$\varepsilon_{ph}^{(-)} = \hbar\omega_0(1 - \beta).$$

由于

$$\omega_L = \frac{\omega_0}{1 + \beta} \simeq \omega_0(1 - \beta),$$

因此有

$$\varepsilon_{ph}^{(-)} \simeq \hbar\omega_L.$$

2b. 沿 $-x$ 方向发射时的光子动量

利用 $p_{ph} = -\varepsilon_{ph}/c$ ，得

$$p_{ph}^{(-)} = -\frac{\hbar\omega_0}{c}(1 - \beta) \simeq -\hbar q.$$

2c. 沿 $-x$ 方向发射后原子的动量

由整个过程的动量守恒得

$$p_{at}^{(-)} = mv - \hbar q - p_{ph}^{(-)} \simeq mv - \hbar q + \hbar q.$$

因此

$$p_{at}^{(-)} = mv.$$

2d. 沿 $-x$ 方向发射后原子的能量

发射的光子带走了所吸收光子提供的能量：

$$\varepsilon_{at}^{(-)} = K + \hbar\omega_L - \varepsilon_{ph}^{(-)} \simeq K.$$

于是

$$\varepsilon_{at}^{(-)} = \frac{1}{2}mv^2.$$

3a. 沿 $+x$ 方向发射时的光子能量

对于 $s = +1$,

$$\varepsilon_{ph}^{(+)} = \hbar\omega_0(1 + \beta).$$

利用 $\omega_0 = \omega_L(1 + \beta)$, 得

$$\varepsilon_{ph}^{(+)} \simeq \hbar\omega_L(1 + 2\beta).$$

3b. 沿 $+x$ 方向发射时的光子动量

动量为正:

$$p_{ph}^{(+)} = \frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + \beta) \simeq \hbar q(1 + 2\beta).$$

3c. 沿 $+x$ 方向发射后原子的动量

暂时保留光子的多普勒修正, 由动量守恒得

$$p_{at}^{(+)} = mv - \hbar q - \hbar q(1 + 2\beta) = mv - 2\hbar q - 2\hbar q\beta.$$

最后一项相对于原子动量是 $\eta\beta$ 阶的。略去这一混合修正, 得

$$p_{at}^{(+)} \simeq mv - 2\hbar q.$$

3d. 沿 $+x$ 方向发射后原子的能量

原子回到基态。由能量守恒得

$$\begin{aligned}\varepsilon_{at}^{(+)} &= K + \hbar\omega_L - \hbar\omega_0(1 + \beta) \\ &\simeq K + \hbar\omega_0(1 - \beta) - \hbar\omega_0(1 + \beta) \\ &= K - 2\hbar\omega_0\beta.\end{aligned}$$

在原子物理量所保留的精度下,

$$\varepsilon_{at}^{(+)} \simeq \frac{1}{2}mv^2 - 2\hbar qv.$$

也可以通过展开

$$\frac{(mv - 2\hbar q)^2}{2m} = K - 2\hbar qv + \frac{2\hbar^2 q^2}{m}$$

并略去二阶反冲项, 得到这一结果。

4a. 所发射光子的平均能量

两个方向的概率相等:

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_{ph} \rangle &= \frac{1}{2} \hbar \omega_0 (1 - \beta) + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 (1 + \beta) \\ &= \boxed{\hbar \omega_0}.\end{aligned}$$

4b. 所发射光子的平均动量

对带符号的动量取平均,

$$\begin{aligned}\langle p_{ph} \rangle &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\hbar \omega_0}{c} (1 - \beta) + \frac{\hbar \omega_0}{c} (1 + \beta) \right] \\ &= \boxed{\frac{\hbar \omega_0 v}{c^2}} \simeq \boxed{\hbar q \beta}.\end{aligned}$$

虽然两个方向的概率相等,但在实验室中,两个光子的能量不同。因此,它们在实验室中的平均动量是一个很小的正值。

这一平均值相对于原子动量的阶数为

$$\frac{\langle p_{ph} \rangle}{mv} \simeq \eta \beta.$$

因此,在下面的最低阶原子动量变化中将其略去。

4c. 原子的平均能量

利用 2d 和 3d 的结果,

$$\langle \varepsilon_{at} \rangle = \frac{1}{2} K + \frac{1}{2} (K - 2 \hbar q v).$$

因此

$$\boxed{\langle \varepsilon_{at} \rangle \simeq K - \hbar q v}.$$

等价地,

$$\langle \varepsilon_{at} \rangle = K + \hbar \omega_L - \hbar \omega_0.$$

4d. 原子的平均动量

在略去混合修正之前,由动量守恒得

$$\langle p_{at} \rangle = mv - \hbar q - \langle p_{ph} \rangle = mv - \hbar q - \frac{\hbar \omega_0 v}{c^2}.$$

因此,在题目要求的最低阶原子反冲近似下,

$$\boxed{\langle p_{at} \rangle \simeq mv - \hbar q}.$$

5a. 原子的平均能量变化

减去初始能量,

$$\Delta \varepsilon = \langle \varepsilon_{at} \rangle - K = \hbar (\omega_L - \omega_0).$$

由共振条件得

$$\boxed{\Delta \varepsilon = -\frac{\hbar \omega_0 v}{c} \simeq -\hbar q v}.$$

所发射光子的平均能量大于所吸收光子的能量。两者的差值来自原子的动能。

5b. 原子的平均动量变化

从 4d 的结果中减去初始动量，得

$$\Delta p \simeq -\hbar q.$$

截断之前较小的修正为

$$-\langle p_{ph} \rangle = -\frac{\hbar \omega_0 v}{c^2}.$$

在最低阶反冲近似下，能量和动量的变化满足

$$\Delta \varepsilon \simeq v \Delta p.$$

6a. 激光沿 $+x$ 方向传播时的能量变化

此时原子沿远离入射光的方向运动。共振条件为

$$\omega'_L \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \omega_0,$$

所以

$$\omega'_L \simeq \omega_0(1 + \beta).$$

所发射光子的平均能量仍为 $\hbar \omega_0$ 。因此

$$\Delta \varepsilon = \hbar(\omega'_L - \omega_0) = \frac{\hbar \omega_0 v}{c} \simeq \hbar q' v, \quad q' = \frac{\omega'_L}{c}.$$

原子的动能增加。

6b. 激光沿 $+x$ 方向传播时的动量变化

所吸收的光子提供动量 $+\hbar q'$ 。因此，

$$\Delta p = \hbar q' - \frac{\hbar \omega_0 v}{c^2} \simeq \hbar q'.$$

所略去的第二项仍是原子动量中的多普勒—反冲混合修正。

7a. 两束激光产生的力

对两束激光分别使用给定的散射规律，取它们的强度相等，因而拉比频率也相等。

用 $+$ 标记沿 $+x$ 方向传播的光束，用 $-$ 标记沿 $-x$ 方向传播的光束。运动原子观测到的频率为

$$\omega_{\text{atom},+} = \omega_L - qv, \quad \omega_{\text{atom},-} = \omega_L + qv.$$

因此，它们相对于原子跃迁的失谐量为

$$\omega_0 - \omega_{\text{atom},+} = \Delta + qv, \quad \omega_0 - \omega_{\text{atom},-} = \Delta - qv.$$

单位时间内散射事件的总数分别为

$$R_+(v) = \frac{N\Gamma\Omega_R^2}{(\Delta + qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2},$$
$$R_-(v) = \frac{N\Gamma\Omega_R^2}{(\Delta - qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2}.$$

在最低阶反冲近似下，每次事件分别传递动量 $+\hbar q$ 或 $-\hbar q$ 。因此

$$F(v) = \hbar q R_+(v) - \hbar q R_-(v),$$

得到

$$F(v) = N\hbar q\Gamma\Omega_R^2 \left[\frac{1}{(\Delta + qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} - \frac{1}{(\Delta - qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} \right].$$

这是全部 N 个原子受到的力。单个原子受到的力为 F/N 。

散射概率中保留了多普勒频移 qv ：即使 v/c 很小，它与跃迁线宽相比仍可能不可忽略。

8a. 低速展开

令

$$D = \Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2.$$

对于足够小的 qv ,

$$\frac{1}{(\Delta \pm qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} \simeq \frac{1}{D} \mp \frac{2\Delta qv}{D^2}.$$

例如, $|qv| \ll \sqrt{D}$ 就是速度足够小的一个充分条件。

将两个展开式相减,

$$F(v) \simeq N\hbar q\Gamma\Omega_R^2 \left(-\frac{4\Delta qv}{D^2} \right).$$

因此

$$F(v) \simeq -N\alpha v, \quad \alpha = \frac{4\hbar q^2\Gamma\Omega_R^2\Delta}{D^2}.$$

系数 α 的单位为质量除以时间, 因此 αv 具有力的单位。

8b. 正向力

对于 $v > 0$, α 中除 Δ 之外的所有因子均为正。力为正要求

$$\Delta < 0.$$

因此

$$\omega_L > \omega_0.$$

这称为蓝失谐。

8c. 零力

对于非零光强和运动的原子, 失谐条件为

$$\Delta = 0,$$

即

$$\omega_L = \omega_0.$$

此时两个散射速率相等。此外, 由对称性可知, $v = 0$ 时力也为零。

8d. 负向力

对于 $v > 0$, 力为负要求 $\alpha > 0$, 因此

$$\omega_L < \omega_0.$$

这称为红失谐。与原子相向传播的光束由于多普勒频移而更接近共振，因而受到更强的散射。

8e. 使沿 $-x$ 方向运动的原子减速

对于速度 $-v$ ，其中 $v > 0$ ，

$$F(-v) = +N\alpha v.$$

减速要求力沿 $+x$ 方向，因此同样需要 $\alpha > 0$ 。于是

$$\boxed{\omega_L < \omega_0}.$$

红失谐产生的力在原子沿任一方向运动时都与其运动方向相反。

9a. 时间 τ 后的速度

对于红失谐， $\alpha > 0$ 。气体的总质量为 Nm ，因此牛顿第二定律给出

$$Nm \frac{dv}{dt} = -N\alpha v.$$

约去因子 N ：

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m} v.$$

结合 $v(0) = v_0$ 积分，得

$$\boxed{v(\tau) = v_0 e^{-\alpha\tau/m}}.$$

显式写出为

$$\boxed{v(\tau) = v_0 \exp \left[-\frac{4\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 (\omega_0 - \omega_L) \tau}{m [(\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2]^2} \right]}.$$

速度衰减的时间常数为 m/α 。

9b. 时间 τ 后的温度

在这一确定性摩擦模型中，每个原子的速度都乘以

$$e^{-\alpha\tau/m}.$$

因此，速度的方差乘以

$$e^{-2\alpha\tau/m}.$$

对于一维热运动，

$$m \langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle = k_B T.$$

因此，

$$\boxed{T(\tau) = T_0 e^{-2\alpha\tau/m}}.$$

显式写出为

$$\boxed{T(\tau) = T_0 \exp \left[-\frac{8\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 (\omega_0 - \omega_L) \tau}{m [(\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2]^2} \right]}.$$

这一指数关系不能外推到任意低温。计算中略去了二阶反冲贡献以及随机散射事件引起的涨落。特别地，将假设 $mv \gg \hbar q$ 应用于典型热运动速率时，要求

$$k_B T \gg \frac{(\hbar q)^2}{m}.$$

随着原子冷却，这一模型中被略去的项将变得不可忽略。

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。

题目 3：为什么恒星如此巨大？

恒星是由炽热气体组成的球体。大多数恒星之所以发光，是因为其中心区域正在将氢聚变为氦。在本题中，我们将运用经典力学、量子力学、静电学和热力学的概念，理解为什么恒星必须足够大才能实现这一聚变过程，并推导出能够发生氢聚变的最小恒星的质量和半径。

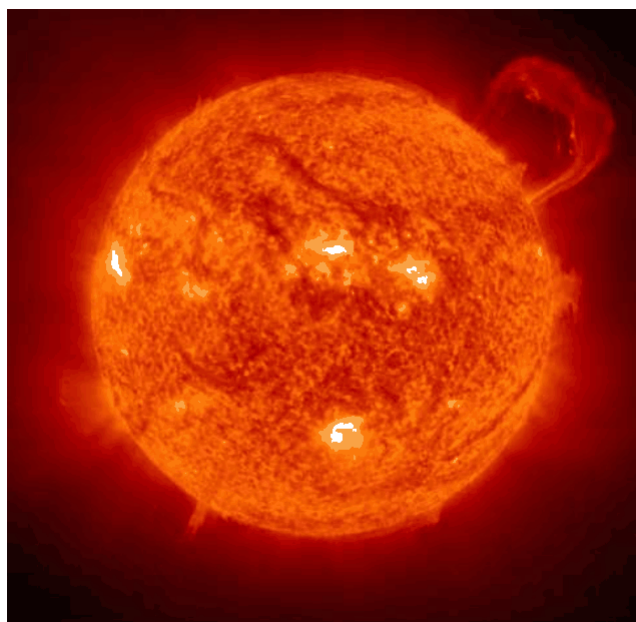


图 1. 我们的太阳与大多数恒星一样，由于其中心区域发生氢聚变为氦的热核聚变而发光。

有用的常数
万有引力常量 = $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ (官方试题此处有印刷错误，误作 s^2)
玻尔兹曼常量 = $k = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
普朗克常量 = $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1}$
质子质量 = $m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$
电子质量 = $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
元电荷 = $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
电常数 (真空介电常数) = $\epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
太阳半径 = $R_S = 7.0 \times 10^8 \text{ m}$
太阳质量 = $M_S = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$

1. 恒星中心温度的经典估算。

假设构成恒星的气体是纯电离氢（电子和质子的数量相等），并且可视为理想气体。从经典观点来看，要使两个质子发生聚变，它们必须靠近到 10^{-15} m 的距离，使短程的、具有吸引作用的强核力占据主导地位。然而，要使它们靠近，首先必须克服库仑力的排斥作用。在经典框架下，假设两个质子（视为点源）沿相反方向运动，各自的速率均为质子的均方根（rms）速率 v_{rms} ，并发生一维正碰。

1a	气体的温度 T_c 必须为多少，才能使质子的最近接近距离 d_c 等于 10^{-15} m？本题中此处及其余所有数值结果均保留两位有效数字。	1.5
----	---	-----

2. 发现上述温度估算有误。

要检验上述温度估算是否合理，需要用一种独立的方法来估算恒星的中心温度。恒星的结构十分复杂，但通过作出一些假设，我们仍能获得相当深入的理解。恒星处于平衡状态，即既不膨胀也不收缩，因为向内的引力与向外的压力作用相平衡（见图 2）。对于距离恒星中心 r 处的一薄层气体，流体静力平衡方程为

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{GM_r \rho_r}{r^2},$$

其中， P 是气体压强， G 是万有引力常量， M_r 是恒星内半径为 r 的球体所包含的质量， ρ_r 是该薄层中的气体密度。

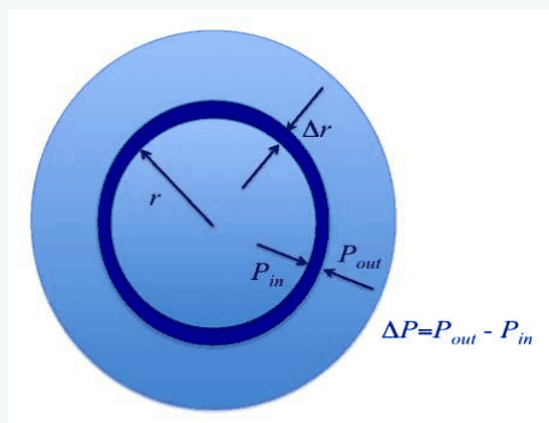


图 2. 恒星处于流体静力平衡状态，压强差产生的力与引力相平衡。

利用恒星中心和表面处的参数值，并作出以下近似，可以对恒星的中心温度进行数量级估算：

$$\Delta P \approx P_o - P_c,$$

其中， P_c 和 P_o 分别为恒星中心和表面的压强。由于 $P_c \gg P_o$ ，可以假设

$$\Delta P \approx -P_c.$$

在同样的近似下，可以写出

$$\Delta r \approx R,$$

其中， R 是恒星的总半径，并且

$$M_r \approx M_R = M,$$

其中， M 是恒星的总质量。

密度可以用其中心处的值来近似，

$$\rho_r \approx \rho_c.$$

可以假设气体压强满足理想气体状态方程。

2a	求恒星中心温度 T_c 的表达式，仅用恒星的半径、质量和物理常数表示。	0.5
----	---------------------------------------	-----

现在可以用该模型的以下预言作为判断其有效性的标准：

2b	利用 (2a) 中得到的方程，写出恒星应有的比值 M/R ，仅用物理常数和 T_c 表示。	0.5
2c	使用 (1a) 中导出的 T_c 值，求出恒星应有的比值 M/R 的数值。	0.5
2d	现在计算比值 $M(\text{Sun})/R(\text{Sun})$ ，并验证该值远小于 (2c) 中得到的结果。	0.5

3. 恒星中心温度的量子力学估算

(2d) 中发现的巨大差异表明，(1a) 中用经典方法估算的 T_c 并不正确。考虑量子力学效应便能解释这一差异：质子具有波动性，单个质子弥散在尺度约为其德布罗意波长 λ_p 的区域内。这意味着，如果质子的最近接近距离 d_c 与 λ_p 的数量级相同，那么质子就在量子力学意义上发生重叠，从而能够发生聚变。

3a	假设允许聚变发生的条件为 $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ ，对于速率为 v_{rms} 的质子，求出仅用物理常数表示的 T_c 的表达式。	1.0
3b	计算 (3a) 中得到的 T_c 的数值。	0.5
3c	使用 (3b) 中导出的 T_c 值以及 (2b) 中导出的公式，求出恒星应有的比值 M/R 的数值。验证该值与观测到的比值 $M(\text{Sun})/R(\text{Sun})$ 十分接近。	0.5

事实上，所谓的主序星（正在进行氢聚变的恒星）在很大的质量范围内确实近似遵循这一比值关系。

4. 恒星的质量与半径之比。

上述结果的吻合表明，用量子力学方法估算太阳中心温度是正确的。

4a	利用前面的结果证明，对于任何正在进行氢聚变的恒星，其质量 M 与半径 R 之比都相同，并且仅取决于物理常数。求出发生氢聚变的恒星的比值 M/R 的表达式。	0.5
----	---	-----

5. 最小恒星的质量和半径。

(4a) 中的结果似乎表明，只要满足这一关系，恒星就可以具有任意质量；然而，事实并非如此。

已知正在进行氢聚变的正常恒星内部的气体可近似视为理想气体。这意味着，电子间的典型间距 d_e 平均而言大于电子的典型德布罗意波长 λ_e 。如果电子靠得更近，它们就会处于所谓的简并态，恒星的性质也会有所不同。注意，我们对恒星内部质子和电子的处理方式有所区别。对于质子，为了发生聚变，它们的德布罗意波在碰撞时应充分重叠；而对于电子，为了保持理想气体的性质，它们的德布罗意波则不应重叠。

恒星内部的密度随径向距离减小而增大。不过，在本题的数量级估算中，假设恒星密度均匀。还可以使用 $m_p \gg m_e$ 这一条件。

5a	求恒星内部平均电子数密度 n_e 的表达式。	0.5
5b	求恒星内部电子间典型间距 d_e 的表达式。	0.5
5c	利用条件 $d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}$ ，写出可能存在的最小正常恒星的半径表达式。将恒星中心温度作为整个恒星内部的典型温度。	1.5
5d	求可能存在的最小正常恒星的半径数值，分别以米和太阳半径为单位表示。	0.5
5e	求可能存在的最小正常恒星的质量数值，分别以 kg 和太阳质量为单位表示。	0.5

6. 年老恒星中的氦核聚变。

随着恒星逐渐衰老，其核心中的大部分氢已经聚变为氦（He），因此，为了继续发光，它们不得不开始将氦聚变为更重的元素。氦核含有两个质子和两个中子，因此其电荷量为质子的两倍，质量约为质子的四倍。前面已经看到， $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ 是质子发生聚变的条件。

6a	写出氦核聚变的相应条件，并求出氦核的均方根速率 $v_{rms}(He)$ 以及氦聚变所需的温度 $T(He)$ 。	0.5
----	--	-----

题目译自官方英文原文。

答案

所有结果均采用题目规定的近似。数值结果保留两位有效数字，中间计算保留未舍入的数值。

- 1a. $T_c = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 k d_c} = 5.4 \times 10^9 \text{ K}.$
- 2a. $T_c \simeq \frac{GMm_p}{2kR}.$
- 2b. $\frac{M}{R} \simeq \frac{2kT_c}{Gm_p}.$
- 2c. $\frac{M}{R} = 1.3 \times 10^{24} \text{ kg m}^{-1}.$
- 2d. $\frac{M_S}{R_S} = 2.9 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}$ 。经典预言值为该值的 4.7×10^2 倍。
- 3a. $T_c = \frac{m_p q^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2}.$
- 3b. $T_c = 9.7 \times 10^6 \text{ K}.$
- 3c. $\frac{M}{R} = 2.4 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1} \simeq 0.84 \frac{M_S}{R_S}.$
- 4a. $\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 G h^2}.$
- 5a. $n_e = \frac{3M}{4\pi m_p R^3}.$
- 5b. $d_e \simeq n_e^{-1/3} = \left(\frac{4\pi m_p R^3}{3M} \right)^{1/3}.$
- 5c. $R_{\min} = \left(\frac{\epsilon_0 h^4}{2Gq^2 m_p^{5/2} m_e^{3/2}} \right)^{1/2}.$
- 5d. $R_{\min} = 6.9 \times 10^7 \text{ m} = 0.099 R_S.$
- 5e. $M_{\min} = 1.7 \times 10^{29} \text{ kg} = 0.083 M_S.$
- 6a. 条件为 $d_c(He) = \frac{\lambda_{He}}{\sqrt{2}} = \frac{h}{4\sqrt{2} m_p v_{rms}(He)}$ ，由此得到

$$v_{rms}(He) = \frac{\sqrt{2} q^2}{\pi \epsilon_0 h} = 2.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}, \quad T(He) = \frac{8m_p q^4}{3\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2} = 6.2 \times 10^8 \text{ K}.$$

解答

1a. 聚变所需温度的经典估算

对于非相对论理想气体，由能量均分定理可得质子的均方根速率满足

$$\frac{1}{2}m_p v_{rms}^2 = \frac{3}{2}kT_c.$$

碰撞是正碰，但 v_{rms} 是三维气体中的均方根速率。

两个质子的动量大小相等、方向相反，因此它们的质心静止。在最近接近处，两个质子都瞬时停止。忽略它们初始的静电势能，由能量守恒得

$$2 \left(\frac{1}{2}m_p v_{rms}^2 \right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d_c}.$$

因此

$$3kT_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d_c}, \quad \boxed{T_c = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 k d_c}}.$$

当 $d_c = 10^{-15}$ m 时，

$$T_c = \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{12\pi(8.9 \times 10^{-12})(1.4 \times 10^{-23})(10^{-15})},$$

所以

$$\boxed{T_c = 5.4 \times 10^9 \text{ K}}.$$

2a. 由流体静力平衡求中心温度

采用题目规定的近似，包括取特征径向尺度为 $r \simeq R$ ，有

$$-\frac{P_c}{R} \simeq -\frac{GM\rho_c}{R^2},$$

因此

$$P_c \simeq \frac{GM\rho_c}{R}.$$

在完全电离的氢中，质子数密度与电子数密度相等。忽略电子质量对质量密度的贡献，

$$n_{p,c} = n_{e,c} \simeq \frac{\rho_c}{m_p}.$$

两种粒子都对理想气体压强有贡献：

$$P_c = (n_{p,c} + n_{e,c})kT_c = \frac{2\rho_c kT_c}{m_p}.$$

令两个压强表达式相等，并约去 ρ_c ，得

$$\boxed{T_c \simeq \frac{GMm_p}{2kR}}.$$

2b. 质量与半径之比

将 (2a) 的结果整理，得

$$\boxed{\frac{M}{R} \simeq \frac{2kT_c}{Gm_p}}.$$

2c. 使用经典聚变温度预言的比值

代入 (1a) 中的温度，得

$$\frac{M}{R} = \frac{2k}{Gm_p} \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 k d_c} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 Gm_p d_c}.$$

数值为

$$\boxed{\frac{M}{R} = 1.3 \times 10^{24} \text{ kg m}^{-1}}.$$

2d. 与太阳比较

由给定的太阳质量和半径得

$$\frac{M_S}{R_S} = \frac{2.0 \times 10^{30}}{7.0 \times 10^8} = \boxed{2.9 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}}.$$

使用未舍入的数值进行比较，得

$$\frac{(M/R)_{\text{classical}}}{M_S/R_S} = \boxed{4.7 \times 10^2}.$$

因此，太阳的这一比值远小于经典预言值。在流体静力平衡模型中，经典聚变温度过高。

3a. 聚变温度的量子估算

对于以速率 v_{rms} 运动的质子，其德布罗意波长为

$$\lambda_p = \frac{h}{m_p v_{rms}}.$$

由 (1a) 中的碰撞能量关系得

$$d_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_p v_{rms}^2}.$$

施加题目给定的聚变条件，

$$d_c = \frac{\lambda_p}{\sqrt{2}},$$

得到

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_p v_{rms}^2} = \frac{h}{\sqrt{2} m_p v_{rms}},$$

从而

$$v_{rms} = \frac{\sqrt{2} q^2}{4\pi\epsilon_0 h}.$$

利用 $m_p v_{rms}^2 = 3kT_c$,

$$T_c = \frac{m_p}{3k} \left(\frac{\sqrt{2} q^2}{4\pi\epsilon_0 h} \right)^2.$$

因此,

$$T_c = \frac{m_p q^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2}.$$

3b. 量子估算温度的数值

代入给定的常数,

$$T_c = \frac{(1.7 \times 10^{-27})(1.6 \times 10^{-19})^4}{24\pi^2 (8.9 \times 10^{-12})^2 (1.4 \times 10^{-23})(6.6 \times 10^{-34})^2},$$

得到

$$T_c = 9.7 \times 10^6 \text{ K}.$$

相应的质子均方根速率为 $4.9 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ 。

3c. 使用量子估算温度求质量与半径之比

将 (3b) 中的温度代入 (2b), 得

$$\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p} = 2.4 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}.$$

它与太阳对应值之比为

$$\frac{M/R}{M_S/R_S} = 0.84.$$

因此, 预言值比太阳的对应值低约 16%; 对于这里采用的数量级近似而言, 两者相当吻合。

4a. 共同的质量与半径之比

在此模型中, 每颗恒星发生氢聚变的特征温度都相同。联立 (2b) 和 (3a), 得

$$\frac{M}{R} = \frac{2k}{Gm_p} \frac{m_p q^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2}.$$

约去因子 m_p 和 k :

$$\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 G h^2}.$$

这一结果仅取决于物理常数。在以下各问中, 将这一共同的比值记为

$$A \equiv \frac{q^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 G h^2}, \quad M = AR.$$

5a. 平均电子数密度

每个氢质子对应一个电子。忽略电子质量,

$$N_e = N_p \simeq \frac{M}{m_p}.$$

对于体积为 $V = 4\pi R^3/3$ 的均匀球形恒星,

$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{3M}{4\pi m_p R^3}.$$

5b. 电子间的典型间距

每个电子所占的典型体积为 $1/n_e$ 。取其立方根作为特征间距，得

$$d_e \simeq n_e^{-1/3} = \left(\frac{4\pi m_p R^3}{3M} \right)^{1/3}.$$

5c. 最小正常恒星的半径

对电子应用能量均分定理，得

$$m_e v_{e,rms}^2 = 3kT_c.$$

因此，电子的特征德布罗意波长为

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e v_{e,rms}} = \frac{h}{\sqrt{3m_e kT_c}}.$$

题目规定的避免电子简并的条件变为

$$d_e \geq \frac{\lambda_e}{\sqrt{2}} = \frac{h}{\sqrt{6m_e kT_c}}.$$

在间距公式中代入 $M = AR$ ，得

$$d_e^3 = \frac{4\pi m_p R^2}{3A}.$$

因此，沿着模型给出的质量与半径关系，间距随 $R^{2/3}$ 减小。允许的最小半径对应于等号成立的情形：

$$\frac{4\pi m_p R_{\min}^2}{3A} = \left(\frac{h}{\sqrt{6m_e kT_c}} \right)^3.$$

于是

$$R_{\min}^2 = \frac{3Ah^3}{4\pi m_p (6m_e kT_c)^{3/2}}.$$

首先代入 $A = 2kT_c/(Gm_p)$ ：

$$R_{\min}^2 = \frac{h^3}{4\pi G m_p^2 m_e^{3/2} \sqrt{6kT_c}}.$$

由 (3a)，

$$\sqrt{6kT_c} = \frac{q^2 \sqrt{m_p}}{2\pi\epsilon_0 h}.$$

因此，

$$R_{\min}^2 = \frac{\epsilon_0 h^4}{2Gq^2 m_p^{5/2} m_e^{3/2}},$$

或者

$$R_{\min} = \left(\frac{\epsilon_0 h^4}{2Gq^2 m_p^{5/2} m_e^{3/2}} \right)^{1/2}.$$

沿着 $M = AR$ 关系，若半径更小，则根据给定的判据，电子波将发生重叠，所假设的理想气体描述也就不再适用。

5d. 最小半径的数值

代入数值得

$$R_{\min} = 6.9 \times 10^7 \text{ m}.$$

将未舍入的结果除以给定的太阳半径，得

$$\frac{R_{\min}}{R_S} = 0.099.$$

因此，在此模型中，最小正常恒星的半径约为太阳半径的十分之一。

5e. 最小质量的数值

由于 $M = AR$ ，且 A 为固定的正值，最小半径也对应最小质量：

$$M_{\min} = AR_{\min} = \frac{q^4 R_{\min}}{12\pi^2 \varepsilon_0^2 G h^2}.$$

数值为

$$M_{\min} = 1.7 \times 10^{29} \text{ kg}, \quad \frac{M_{\min}}{M_S} = 0.083.$$

6a. 氦聚变

氦核的质量为 $m_{He} \simeq 4m_p$ ，电荷量为 $Q_{He} = 2q$ 。其德布罗意波长为

$$\lambda_{He} = \frac{h}{4m_p v_{rms}(He)}.$$

相应的聚变条件为

$$d_c(He) = \frac{\lambda_{He}}{\sqrt{2}} = \frac{h}{4\sqrt{2} m_p v_{rms}(He)}.$$

对于以大小相等、方向相反的均方根速度相向运动的两个氦核，由能量守恒得

$$4m_p v_{rms}(He)^2 = \frac{(2q)^2}{4\pi\varepsilon_0 d_c(He)}.$$

代入聚变条件并化简，得

$$v_{rms}(He) = \frac{\sqrt{2} q^2}{\pi\varepsilon_0 h}.$$

这是 (3a) 中得到的质子速率的四倍，因此

$$v_{rms}(He) = 2.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}.$$

此时由能量均分定理得

$$T(He) = \frac{4m_p v_{rms}(He)^2}{3k}.$$

由于质量为原来的四倍，速率也为原来的四倍，

$$T(He) = 4(4^2)T_c = 64T_c,$$

其中， T_c 是 (3b) 中的氢聚变温度。因此，

$$T(He) = \frac{8m_p q^4}{3\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2} = 6.2 \times 10^8 \text{ K}.$$

解答已与官方解答核对。