

IPhO 2009

Teorik sorular ve çözümler · Mérida, Meksika · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2009/

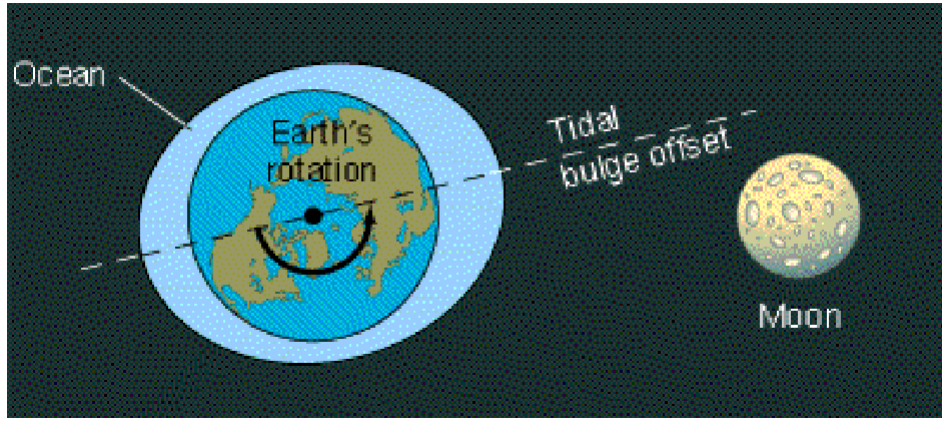
Soru 1: Dünya-Ay Sisteminin Evrimi

Bilim insanları Dünya-Ay uzaklığını büyük bir hassasiyetle belirleyebilmektedir. Bunu, bir lazer demetini astronotların 1969 yılında Ay yüzeyine yerleştirdiği özel aynalardan yansıtarak ve ışığın gidiş-dönüş süresini ölçerek yaparlar (bkz. Şekil 1).



Şekil 1. Bir gözlemevinden gönderilen lazer demeti, Dünya ile Ay arasındaki uzaklığı hassas biçimde ölçmek için kullanılır.

Bu gözlemlerle Ay'ın Dünya'dan yavaşça uzaklaştığını doğrudan ölçmüşlerdir. Başka bir deyişle, Dünya-Ay uzaklığı zamanla artmaktadır. Bunun nedeni, gelgit torkları nedeniyle Dünya'nın Ay'a açısal momentum aktarmasıdır; bkz. Şekil 2. Bu soruda bu olayın temel parametrelerini türeteceksiniz.



Şekil 2. Ay'ın kütleçekimi Dünya'da gelgit kaynaklı şekil değişimlerine, yani "şişkinliklere" yol açar. Dünya'nın dönmesi nedeniyle, şişkinliklerden geçen doğru Dünya ile Ay'ı birleştiren doğruyla aynı doğrultuda değildir. Bu doğrultu farkı, Dünya'nın dönme hareketinden Ay'ın öteleme hareketine açısal momentum aktaran bir tork oluşturur. Çizim ölçekli değildir.

1. Açısal Momentumun Korunumu.

Dünya-Ay sisteminin günümüzdeki toplam açısal momentumu L_1 olsun. Şimdi şu varsayımları yapın: i) L_1 , yalnızca Dünya'nın kendi eksenini etrafındaki dönmesinin ve Ay'ın Dünya çevresindeki yörüngesindeki öteleme hareketinin açısal momentumlarının toplamıdır. ii) Ay'ın yörüngesi daireseldir ve Ay bir nokta olarak alınabilir. iii) Dünya'nın dönme eksenini ile Ay'ın dolanma eksenini paraleldir. iv) Hesaplamaları basitleştirmek için hareketin kütle merkezi etrafında değil, Dünya'nın merkezi etrafında gerçekleştiğini kabul ediyoruz. Soru boyunca tüm eylemsizlik momentleri, torklar ve açısal momentumlar Dünya'nın eksenine göre tanımlanmıştır. v) Güneş'in etkisini ihmal edin.

Kısım	Soru	Puan
1a	Dünya-Ay sisteminin günümüzdeki toplam açısal momentumunu veren denklemi yazın. Bu denklemi Dünya'nın eylemsizlik momenti I_E , Dünya'nın günümüzdeki dönme açısal frekansı ω_{E1} , Ay'ın Dünya'nın eksenine göre günümüzdeki eylemsizlik momenti I_{M1} ve Ay'ın günümüzdeki yörünge açısal frekansı ω_{M1} cinsinden ifade edin.	0.2

Bu açısal momentum aktarımı süreci, Dünya'nın dönme periyodu ile Ay'ın Dünya çevresindeki dolanma periyodu eşit olduğunda sona erecektir. Bu durumda Ay'ın Dünya üzerinde oluşturduğu gelgit şişkinlikleri, Ay ile Dünya'yı birleştiren doğruyla aynı doğrultuda olacak ve tork ortadan kalkacaktır.

Kısım	Soru	Puan
1b	Dünya-Ay sisteminin son durumdaki toplam açısal momentumu L_2 için denklemi yazın. Soru 1a'daki varsayımların aynısını yapın. Bu denklemi Dünya'nın eylemsizlik momenti I_E , Dünya'nın dönmesinin ve Ay'ın öteleme hareketinin son durumdaki açısal frekansı ω_2 ve Ay'ın son durumdaki eylemsizlik momenti I_{M2} cinsinden ifade edin.	0.2
Kısım	Soru	Puan
1c	Dünya'nın dönmesinin son durumdaki toplam açısal momentuma katkısını ihmal ederek, bu soru için açısal momentumun korunumunu ifade eden denklemi yazın.	0.3

2. Dünya-Ay Sisteminin Son Durumdaki Uzaklığı ve Açısal Frekansı.

Dairesel yörünge için kütleçekim denkleminin (Ay'ın Dünya çevresindeki hareketi için) her zaman geçerli olduğunu varsayın. Dünya'nın dönmesinin son durumdaki toplam açısal momentuma katkısını ihmal edin.

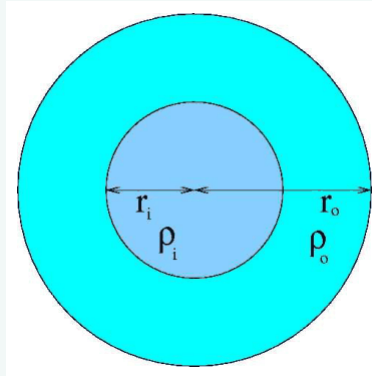
Kısım	Soru	Puan
2a	Son durumda Ay'ın Dünya çevresindeki dairesel yörüngesi için kütleçekim denklemini M_E , ω_2 , G ve Dünya ile Ay arasındaki son uzaklık D_2 cinsinden yazın. M_E , Dünya'nın kütlesi; G ise kütleçekim sabitidir.	0.2

Kısım	Soru	Puan
2b	Dünya ile Ay arasındaki son uzaklık D_2 için denklemi, bilinen parametreler olan sistemin toplam açısal momentumu L_1 , sırasıyla Dünya'nın ve Ay'ın kütleleri M_E ve M_M ile G cinsinden yazın.	0.5

Kısım	Soru	Puan
2c	Dünya-Ay sisteminin son durumdaki açısal frekansı ω_2 için denklemi, bilinen L_1 , M_E , M_M ve G parametreleri cinsinden yazın.	0.5

Aşağıda D_2 ve ω_2 değerlerini sayısal olarak bulmanız istenecektir. Bunun için Dünya'nın eylemsizlik momentini bilmeniz gerekir.

Kısım	Soru	Puan
2d	Dünya'yı, merkezinden r_i yarıçapına kadar iç yoğunluğu ρ_i , r_i yarıçapından r_o yarıçapındaki yüzeyine kadar dış yoğunluğu ρ_o olan bir küre kabul ederek Dünya'nın eylemsizlik momenti I_E için denklemi yazın (bkz. Şekil 3).	0.5



Şekil 3. ρ_i ve ρ_o olmak üzere iki yoğunluğa sahip bir küre olarak Dünya.

Bu soruda istenen sayısal değerleri her zaman *iki anlamlı basamakla* belirleyin.

Kısım	Soru	Puan
2e	$\rho_i = 1.3 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$, $r_i = 3.5 \times 10^6 \text{ m}$, $\rho_o = 4.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ve $r_o = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ değerlerini kullanarak Dünya'nın eylemsizlik momenti I_E 'yi hesaplayın.	0.2

Dünya'nın ve Ay'ın kütleleri sırasıyla $M_E = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$ ve $M_M = 7.3 \times 10^{22} \text{ kg}$ 'dır. Dünya ile Ay arasındaki güncel uzaklık $D_1 = 3.8 \times 10^8 \text{ m}$ 'dir. Dünya'nın günümüzdeki dönme açısal frekansı $\omega_{E1} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ 'dir. Ay'ın Dünya çevresindeki öteleme hareketinin günümüzdeki

açısal frekansı $\omega_{M1} = 2.7 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ ve kütleçekim sabiti $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ 'dir.

Kısım	Soru	Puan
2f	Sistemin toplam açısal momentumu L_1 'in sayısal değerini hesaplayın.	0.2

Kısım	Soru	Puan
2g	Son uzaklık D_2 'yi metre cinsinden ve güncel uzaklık D_1 'in katı olarak bulun.	0.3

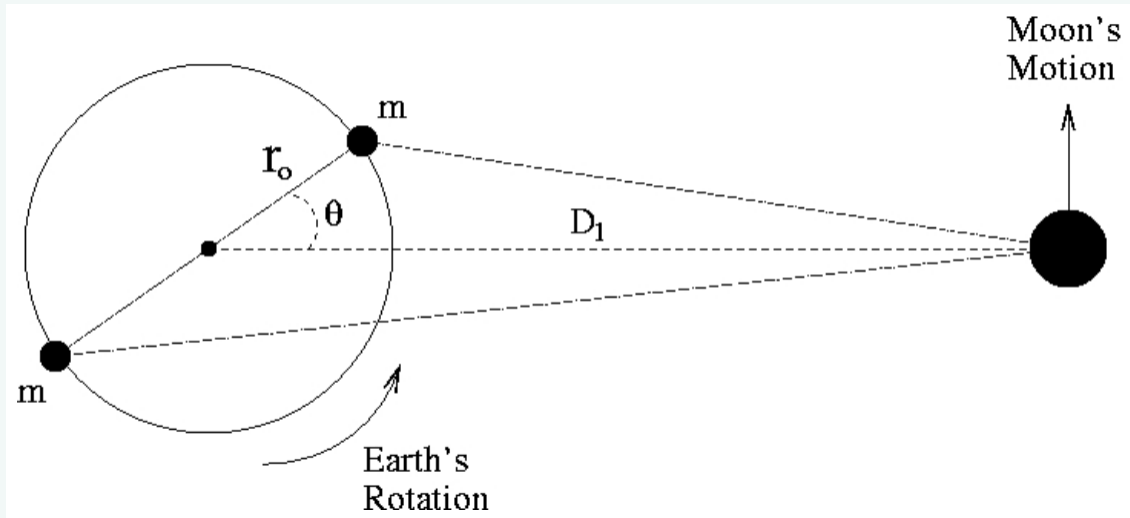
Kısım	Soru	Puan
2h	Son açısal frekans ω_2 'yi s^{-1} cinsinden ve son durumdaki gün uzunluğunu günümüzdeki günün katı olarak bulun.	0.3

Dünya'nın son açısal momentumunun Ay'inkine oranını bularak, Dünya'nın dönmesinin son durumdaki toplam açısal momentuma katkısını ihmal etme varsayımının haklı olduğunu doğrulayın. Bu oranın küçük olması gerekir.

Kısım	Soru	Puan
2i	Dünya'nın son açısal momentumunun Ay'inkine oranını bulun.	0.2

3. Ay yılda ne kadar uzaklaşıyor?

Şimdi Ay'ın Dünya'dan her yıl ne kadar uzaklaştığını bulacaksınız. Bunun için Ay'a günümüzde etkileyen torkun denklemini bilmeniz gerekecektir. Gelgit şişkinliklerinin, Dünya'nın yüzeyinde bulunan ve her birinin kütlesi m olan iki noktasal kütleyle yaklaşık olarak temsil edilebildiğini varsayın; bkz. Şekil 4. Şişkinliklerden geçen doğru ile Dünya ve Ay'ın merkezlerini birleştiren doğru arasındaki açı θ olsun.



Şekil 4. Dünya üzerindeki şişkinliklerin Ay üzerinde oluşturduğu torku tahmin etmek için kullanılan şematik gösterim. Çizim ölçekli değildir.

Kısım	Soru	Puan
3a	En yakın noktasal kütlenin Ay'a uyguladığı kuvvetin büyüklüğü F_c 'yi bulun.	0.4

Kısım	Soru	Puan
3b	En uzak noktasal kütlenin Ay'a uyguladığı kuvvetin büyüklüğü F_f 'yi bulun.	0.4

Artık noktasal kütlelerin oluşturduğu torkları hesaplayabilirsiniz.

Kısım	Soru	Puan
3c	En yakın noktasal kütlenin oluşturduğu tork τ_c 'nin büyüklüğünü bulun.	0.4

Kısım	Soru	Puan
3d	En uzak noktasal kütlenin oluşturduğu tork τ_f 'nin büyüklüğünü bulun.	0.4

Kısım	Soru	Puan
3e	İki kütlenin oluşturduğu toplam tork τ 'nin büyüklüğünü bulun. $r_o \ll D_1$ olduğundan, ifadenizi r_o/D_1 'in sıfırdan farklı katkı veren en düşük mertebesine kadar yaklaşık olarak yazmalısınız. $(1+x)^a \approx 1+ax$ yaklaşımının $x \ll 1$ için geçerli olduğunu kullanabilirsiniz.	1.0

Kısım	Soru	Puan
3f	$\theta = 3^\circ$ ve $m = 3.6 \times 10^{16}$ kg olduğunu dikkate alarak toplam tork τ 'nin sayısal değerini hesaplayın (bu kütlenin Dünya'nın kütlesinin 10^{-8} katı mertebesinde olduğuna dikkat edin).	0.5

Tork, açısal momentumun zamana göre değişim hızı olduğundan, Dünya-Ay uzaklığının günümüzdeki yıllık artışını bulun. Bu adım için Ay'ın açısal momentumunu yalnızca M_M , M_E , D_1 ve G cinsinden ifade edin.

Kısım	Soru	Puan
3g	Dünya-Ay uzaklığının günümüzdeki yıllık artışını bulun.	1.0

Son olarak, gün uzunluğunun her yıl ne kadar arttığını tahmin edin.

Kısım	Soru	Puan
3h	ω_{E1} 'in yıllık azalışını ve günümüzde gün uzunluğunun her yıl ne kadar arttığını bulun.	1.0

4. Enerji nereye gidiyor?

Korunan açısal momentumun aksine, sistemin toplam (dönme ve kütleçekim) enerjisi korunmaz. Bu son bölümde bunu inceleyeceğiz.

Kısım	Soru	Puan
4a	Dünya-Ay sisteminin günümüzdeki toplam (dönme ve kütleçekim) enerjisi E için bir denklem yazın. Bu denklemi yalnızca I_E , ω_{E1} , M_M , M_E , D_1 ve G cinsinden ifade edin.	0.4

Kısım	Soru	Puan
4b	E 'deki değişim olan ΔE için, D_1 ve ω_{E1} 'deki değişimlerin bir fonksiyonu olarak bir denklem yazın. 3g ve 3h sorularında bulduğunuz D_1 ve ω_{E1} değişimlerini kullanarak bir yıl için ΔE 'nin sayısal değerini hesaplayın.	0.4

Bu enerji kaybının, Ay'ın Dünya'da oluşturduğu gelgitlerde ısı olarak harcanan enerjiye ilişkin bir tahminle tutarlı olduğunu doğrulayın. Gelgitlerin, Dünya yüzeyini kaplayan $h = 0.5$ m derinliğindeki bir su tabakasını ortalama 0.5 m yükselttiğini varsayın (basitlik için Dünya'nın tüm yüzeyinin suyla kaplı olduğunu varsayın). Bu olay günde iki kez gerçekleşir. Ayrıca, su alçılırken bu kütleçekim enerjisinin %10'unun viskozite nedeniyle ısı olarak harcandığını varsayın. Suyun yoğunluğunu $\rho_{\text{water}} = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ve Dünya yüzeyindeki kütleçekim ivmesini $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ alın.

Kısım	Soru	Puan
4c	Bu yüzey su tabakasının kütlesi nedir?	0.2

Kısım	Soru	Puan
4d	Bir yılda ne kadar enerjinin harcandığını hesaplayın. Bu değer, Dünya-Ay sisteminin günümüzde yılda kaybettiği enerjiyle nasıl karşılaştırılır?	0.3

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Şişkinliklerin oluşturduğu kuvvetler ve torklar için uzaklıkları şöyle tanımlayalım:

$$d_c = \sqrt{D_1^2 + r_o^2 - 2D_1r_o \cos \theta}, \quad d_f = \sqrt{D_1^2 + r_o^2 + 2D_1r_o \cos \theta}.$$

T_1 ve T_2 , günümüzdeki ve son durumdaki gün uzunluklarını gösterebilir. Sayısal sonuçlar iki anlamlı basamakla verilmiştir.

- **1a:** $L_1 = I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1}$.
- **1b:** $L_2 = (I_E + I_{M2}) \omega_2$.
- **1c:** $I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1} = L_1 \simeq I_{M2} \omega_2$.
- **2a:** $\omega_2^2 D_2^3 = GM_E$.
- **2b:** $D_2 = \frac{L_1^2}{GM_E M_M^2}$.
- **2c:** $\omega_2 = \frac{G^2 M_E^2 M_M^3}{L_1^3}$.
- **2d:** $I_E = \frac{8\pi}{15} [\rho_i r_i^5 + \rho_o (r_o^5 - r_i^5)]$.
- **2e:** $I_E = 8.0 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$.
- **2f:** $L_1 = 3.4 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$.
- **2g:** $D_2 = 5.5 \times 10^8 \text{ m} = 1.4 D_1$.
- **2h:** $\omega_2 = 1.6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $T_2/T_1 = 47$.
- **2i:** $\frac{L_{E2}}{L_{M2}} = \frac{I_E}{M_M D_2^2} = 3.6 \times 10^{-3}$.
- **3a:** $F_c = \frac{GM_M m}{d_c^2}$.
- **3b:** $F_f = \frac{GM_M m}{d_f^2}$.
- **3c:** $\tau_c = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{d_c^3}$.
- **3d:** $\tau_f = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{d_f^3}$.
- **3e:** $\tau = \tau_c - \tau_f \simeq \frac{3GM_M m r_o^2}{D_1^3} \sin(2\theta)$, Ay'ın yörüngesel açısal momentumu yönündedir.
- **3f:** $\tau = 4.1 \times 10^{16} \text{ N m}$.

- **3g:** $\dot{D}_1 = \frac{2\tau}{M_M} \sqrt{\frac{D_1}{GM_E}} = 3.5 \times 10^{-2} \text{ m yr}^{-1} = 3.5 \text{ cm yr}^{-1}$.
- **3h:** Bir yılda, $\Delta\omega_{E1} = -1.6 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}$ ve $\Delta T_1 = +1.9 \times 10^{-5} \text{ s}$.
- **4a:** $E = \frac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 - \frac{GM_E M_M}{2D_1}$.
- **4b:** Bir yılda $\Delta E \simeq I_E \omega_{E1} \Delta\omega_{E1} + \frac{GM_E M_M}{2D_1^2} \Delta D_1 = -9.1 \times 10^{19} \text{ J}$.
- **4c:** $M_{\text{water}} = 4\pi r_o^2 h \rho_{\text{water}} = 2.6 \times 10^{17} \text{ kg}$.
- **4d:** $E_{\text{heat, yr}} = 9.2 \times 10^{19} \text{ J}$, yıllık $9.1 \times 10^{19} \text{ J}$ mekanik enerji kaybıyla yakın uyum içindedir.

Çözüm

Tüm hesaplamalarda soruda belirtilen varsayımlar kullanılmıştır. Sayısal sonuçlar yalnızca en sonda yuvarlanmıştır. Yıllık değişimler için

$$t_{\text{yr}} = 365 \times 24 \times 3600 \text{ s.}$$

alınır.

1a. Günümüzdeki açısal momentum

Dünya'nın kendi eksenini etrafındaki dönmesi ve Ay'ın dolanması, paralel eksenler etrafında aynı yönde olduğundan açısal momentumları toplanır:

$$L_1 = I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1}.$$

Ay, Dünya'nın ekseninden D_1 uzaklıkta bir nokta olarak ele alındığından,

$$I_{M1} = M_M D_1^2.$$

1b. Son durumdaki açısal momentum

Son eşzamanlı durumda her iki açısal frekans da ω_2 'ye eşittir. Dolayısıyla

$$L_2 = I_E \omega_2 + I_{M2} \omega_2 = (I_E + I_{M2}) \omega_2, \quad I_{M2} = M_M D_2^2.$$

1c. Açısal momentumun korunumu

Belirtilen modelde dış tork yoktur. Gelgit torkları sistem içinde açısal momentum aktarır ve $L_1 = L_2$ elde edilir.

Yalnızca Dünya'nın *son durumdaki* dönme katkısı ihmal edildiğinde,

$$I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1} \simeq I_{M2} \omega_2.$$

Dünya'nın günümüzdeki dönmesi yine de L_1 'e dahil edilmelidir.

2a. Dairesel yörünge denklemi

Kütleçekim kuvveti Ay'ın merkezci ivmesini sağlar:

$$\frac{GM_E M_M}{D_2^2} = M_M \omega_2^2 D_2.$$

M_M sadeleştirildiğinde

$$\omega_2^2 D_2^3 = GM_E.$$

elde edilir.

2b. Son uzaklık

1c kısmındaki yaklaşım çerçevesinde,

$$L_1 = M_M D_2^2 \omega_2.$$

$\omega_2 = \sqrt{GM_E/D_2^3}$ kullanılarak,

$$L_1 = M_M \sqrt{GM_E D_2}.$$

Karesi alınıp çözüldüğünde,

$$D_2 = \frac{L_1^2}{GM_E M_M^2}.$$

2c. Son açılal frekans

Önceki sonuç dairesel yörünge denkleminde yerine konulduğunda

$$\omega_2 = \sqrt{GM_E} \left(\frac{GM_E M_M^2}{L_1^2} \right)^{3/2}.$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\omega_2 = \frac{G^2 M_E^2 M_M^3}{L_1^3}.$$

2d. Dünya'nın eylemsizlik momenti

Yarıçapı r , yoğunluğu ρ ve kalınlığı dr olan ince bir küresel kabuk için

$$dm = 4\pi\rho r^2 dr, \quad dI = \frac{2}{3}r^2 dm = \frac{8\pi}{3}\rho r^4 dr.$$

İki yoğunluk bölgesi üzerinde integral alındığında,

$$I_E = \frac{8\pi}{3} \left[\rho_i \int_0^{r_i} r^4 dr + \rho_o \int_{r_i}^{r_o} r^4 dr \right].$$

Böylece

$$I_E = \frac{8\pi}{15} [\rho_i r_i^5 + \rho_o (r_o^5 - r_i^5)].$$

2e. Eylemsizlik momentinin sayısal değeri

Verilen yoğunluklar ve yarıçaplar yerine konulduğunda,

$$I_E = \frac{8\pi}{15} [(1.3 \times 10^4)(3.5 \times 10^6)^5 + (4.0 \times 10^3) ((6.4 \times 10^6)^5 - (3.5 \times 10^6)^5)] \text{ kg m}^2.$$

Buradan

$$I_E = 8.0 \times 10^{37} \text{ kg m}^2.$$

2f. Günümüzdeki toplam açısal momentum

Verilen güncel açısal frekanslar kullanılarak,

$$L_1 = I_E \omega_{E1} + M_M D_1^2 \omega_{M1}.$$

İki katkı şöyledir:

$$I_E \omega_{E1} = 5.8 \times 10^{33} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1},$$
$$M_M D_1^2 \omega_{M1} = 2.8 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Yuvarlanmamış ara değerler kullanılarak toplandıklarında,

$$L_1 = 3.4 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

2g. Son uzaklığın sayısal değeri

2b kısmı ve L_1 'in yuvarlanmamış değeri kullanılarak,

$$D_2 = \frac{L_1^2}{GM_E M_M^2} = 5.5 \times 10^8 \text{ m}.$$

Güncel uzaklığa oranı,

$$\frac{D_2}{D_1} = 1.4.$$

2h. Son frekans ve gün uzunluğu

2c kısmından,

$$\omega_2 = 1.6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}.$$

Dönme periyodu $T = 2\pi/\omega$ olduğundan,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi/\omega_2}{2\pi/\omega_{E1}} = \frac{\omega_{E1}}{\omega_2}.$$

Yuvarlanmamış ara değerler kullanıldığında

$$T_2 = 47T_1,$$

elde edilir; yani son durumdaki bir gün, günümüzdeki 47 gün kadar sürer.

2i. İhmal edilen son dönme katkısının kontrolü

Son durumdaki her iki açısal momentum da aynı açısal frekansı içerir:

$$\frac{L_{E2}}{L_{M2}} = \frac{I_E \omega_2}{M_M D_2^2 \omega_2} = \frac{I_E}{M_M D_2^2}.$$

Sayısal olarak,

$$\frac{L_{E2}}{L_{M2}} = 3.6 \times 10^{-3}.$$

Dünya'nın son durumdaki dönme açısal momentumu, Ay'ın yörüngesel açısal momentumunun yalnızca 0.36%'sıdır; bu da ihmal edilmesini haklı kılar.

3a. En yakın şişkinliğin uyguladığı kuvvet

Dünya'nın merkezini başlangıç noktası seçelim, Ay'ı $(D_1, 0)$ konumuna yerleştirelim ve pozitif y yönünü Ay'ın anlık hareketi yönünde alalım. En yakın şişkinliğin konumu

$$(r_o \cos \theta, r_o \sin \theta).$$

olur. Dolayısıyla Ay'a olan uzaklığı için

$$d_c^2 = (D_1 - r_o \cos \theta)^2 + (r_o \sin \theta)^2 = D_1^2 + r_o^2 - 2D_1 r_o \cos \theta.$$

Newton'un kütleçekim yasası şunu verir:

$$F_c = \frac{GM_M m}{D_1^2 + r_o^2 - 2D_1 r_o \cos \theta}.$$

3b. En uzak şişkinliğin uyguladığı kuvvet

Daha uzaktaki şişkinliğin konumu

$$(-r_o \cos \theta, -r_o \sin \theta).$$

olur. Bunun sonucunda,

$$d_f^2 = (D_1 + r_o \cos \theta)^2 + (r_o \sin \theta)^2 = D_1^2 + r_o^2 + 2D_1 r_o \cos \theta,$$

ve

$$F_f = \frac{GM_M m}{D_1^2 + r_o^2 + 2D_1 r_o \cos \theta}.$$

3c. En yakın şişkinliğin oluşturduğu tork

Dünya'nın eksenine göre torka yalnızca kuvvetin Dünya-Ay doğrusuna dik bileşeni katkıda bulunur. Daha yakındaki şişkinlik için,

$$F_{c,y} = F_c \frac{r_o \sin \theta}{d_c}.$$

Oluşturduğu tork pozitifdir ve Ay'ın yörüngesel açısal momentumu yönündedir:

$$\tau_c = D_1 F_{c,y}.$$

Dolayısıyla büyüklüğü

$$\tau_c = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{(D_1^2 + r_o^2 - 2D_1 r_o \cos \theta)^{3/2}}.$$

3d. En uzak şişkinliğin oluşturduğu tork

Daha uzaktaki şişkinlik Ay'ı negatif y yönünde çeker:

$$F_{f,y} = -F_f \frac{r_o \sin \theta}{d_f}.$$

Oluşturduğu tork, daha yakındaki şişkinliğin torkuna zıt yöndedir. Büyüklüğü

$$\tau_f = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{(D_1^2 + r_o^2 + 2D_1 r_o \cos \theta)^{3/2}}.$$

3e. Sıfırdan farklı en düşük mertebede toplam tork

$d_c < d_f$ olduğundan, daha yakındaki şişkinlik daha büyük bir tork oluşturur. Gösterilen geometri için,

$$\tau = \tau_c - \tau_f = GM_M m D_1 r_o \sin \theta \left(\frac{1}{d_c^3} - \frac{1}{d_f^3} \right).$$

$\epsilon = r_o/D_1 \ll 1$ tanımını yapalım. O zaman

$$\frac{1}{d_c^3} = \frac{1}{D_1^3} (1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \cos \theta)^{-3/2} \simeq \frac{1}{D_1^3} (1 + 3\epsilon \cos \theta),$$

ve

$$\frac{1}{d_f^3} = \frac{1}{D_1^3} (1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos \theta)^{-3/2} \simeq \frac{1}{D_1^3} (1 - 3\epsilon \cos \theta).$$

Sıfırıncı mertebedeki terimler birbirini götürür ve geriye

$$\tau \simeq GM_M m D_1 r_o \sin \theta \frac{6r_o \cos \theta}{D_1^4}.$$

kalır. Dolayısıyla

$$\tau \simeq \frac{6GM_M m r_o^2}{D_1^3} \sin \theta \cos \theta = \frac{3GM_M m r_o^2}{D_1^3} \sin(2\theta).$$

Bu tork Ay'ın yörüngesel açısal momentumunu artırır.

3f. Torkun sayısal değeri

$\theta = 3^\circ$ için,

$$\tau \simeq \frac{3(6.7 \times 10^{-11})(7.3 \times 10^{22})(3.6 \times 10^{16})(6.4 \times 10^6)^2}{(3.8 \times 10^8)^3} \sin 6^\circ.$$

Buradan

$$\tau = 4.1 \times 10^{16} \text{ N m.}$$

3g. Ay'ın günümüzdeki uzaklaşması

D uzaklığındaki dairesel bir yörünge için,

$$\omega_M = \sqrt{\frac{GM_E}{D^3}},$$

dolayısıyla Ay'ın açısal momentumu

$$L_M = M_M D^2 \omega_M = M_M \sqrt{GM_E D}.$$

Zamana göre türev alındığında,

$$\tau = \frac{dL_M}{dt} = \frac{M_M}{2} \sqrt{\frac{GM_E}{D}} \dot{D}.$$

Böylece güncel uzaklıkta,

$$\dot{D}_1 = \frac{2\tau}{M_M} \sqrt{\frac{D_1}{GM_E}}.$$

Sayısal olarak,

$$\dot{D}_1 = 1.1 \times 10^{-9} \text{ m s}^{-1}.$$

Bir yıldaki artış

$$\Delta D_1 = \dot{D}_1 t_{\text{yr}},$$

olduğundan,

$$\Delta D_1 = 3.5 \times 10^{-2} \text{ m} = 3.5 \text{ cm} \quad \text{bir yılda.}$$

3h. Dünya'nın yavaşlayan dönmesi ve artan gün uzunluğu

Dünya'ya etkiyen tork, Ay'a etkiyen torka zıt yöndedir. I_E sabit olduğunda,

$$I_E \dot{\omega}_E = -\tau.$$

Dolayısıyla

$$\dot{\omega}_{E1} = -\frac{\tau}{I_E} = -5.2 \times 10^{-22} \text{ s}^{-2},$$

ve bir yıldaki değişim

$$\Delta \omega_{E1} = -\frac{\tau t_{\text{yr}}}{I_E} = -1.6 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}.$$

$T_E = 2\pi/\omega_E$ olduğundan, küçük bir değişim şu bağıntıyı sağlar:

$$\Delta T_E \simeq -\frac{2\pi}{\omega_E^2} \Delta \omega_E.$$

Bunun sonucunda,

$$\Delta T_1 = \frac{2\pi \tau t_{\text{yr}}}{I_E \omega_{E1}^2} = 1.9 \times 10^{-5} \text{ s} \quad \text{bir yılda.}$$

Gün, yılda yaklaşık $19 \mu\text{s}$ uzar.

4a. Günümüzdeki mekanik enerji

Mekanik enerji; Dünya'nın dönme kinetik enerjisinden, Ay'ın yörüngesel kinetik enerjisinden ve aralarındaki kütleçekim potansiyel enerjisinden oluşur:

$$E = \frac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 + \frac{1}{2} M_M D_1^2 \omega_{M1}^2 - \frac{GM_E M_M}{D_1}.$$

Dairesel yörünge bağıntısı şunu verir:

$$\frac{1}{2} M_M D_1^2 \omega_{M1}^2 = \frac{GM_E M_M}{2D_1}.$$

Buradan

$$E = \frac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 - \frac{GM_E M_M}{2D_1}.$$

4b. Yıllık mekanik enerji değişimi

$\Delta\omega_{E1}$ ve ΔD_1 değişimleri için bu enerji modeli çerçevesindeki tam fark

$$\Delta E = \frac{1}{2}I_E [(\omega_{E1} + \Delta\omega_{E1})^2 - \omega_{E1}^2] - \frac{GM_E M_M}{2} \left[\frac{1}{D_1 + \Delta D_1} - \frac{1}{D_1} \right].$$

Yıllık bağıl değişimler son derece küçüktür; bu nedenle birinci mertebeden terimler tutulduğunda

$$\Delta E \simeq I_E \omega_{E1} \Delta\omega_{E1} + \frac{GM_E M_M}{2D_1^2} \Delta D_1.$$

elde edilir. İlk terim negatiftir: Dünya dönme enerjisi kaybeder. İkinci terim pozitifdir: Ay'ın yörüngesi genişledikçe yörünge enerjisi artar.

3g ve 3h kısımlarındaki yıllık değişimler, yuvarlanmamış değerleri korunarak yerine konulduğunda,

$$\Delta E = -9.1 \times 10^{19} \text{ J bir yılda.}$$

Enerji dengesi doğrudan tork cinsinden de ifade edilebilir:

$$\dot{E}_{\text{spin}} = -\tau\omega_{E1}.$$

Uzaklaşma formülü kullanılarak,

$$\dot{E}_{\text{orbit}} = \frac{GM_E M_M}{2D_1^2} \dot{D}_1 = \tau \sqrt{\frac{GM_E}{D_1^3}}.$$

Böylece

$$\dot{E} = -\tau(\omega_{E1} - \omega_{M1}),$$

burada ω_{M1} , dairesel yörünge bağıntısıyla belirlenir. Dünya, Ay'ın dolanmasından daha hızlı döndüğü için mekanik enerji azalır; aradaki fark ısıya dönüşür.

4c. Su tabakasının kütlesi

Tabaka, Dünya'nın yarıçapına göre çok ince olduğundan hacmi, yüzey alanı ile kalınlığının çarpımıdır:

$$V \simeq 4\pi r_o^2 h.$$

Dolayısıyla

$$M_{\text{water}} = 4\pi r_o^2 h \rho_{\text{water}} = 4\pi (6.4 \times 10^6)^2 (0.5)(10^3) \text{ kg.}$$

Buradan

$$M_{\text{water}} = 2.6 \times 10^{17} \text{ kg.}$$

4d. Yıllık ısı olarak enerji kaybı

Belirtilen ortalama yükselme $H = 0.5 \text{ m}$ 'dir. Tabakanın bir yükselme sırasında kazandığı kütleçekim enerjisi

$$E_{\text{rise}} = M_{\text{water}} g H.$$

Ardından gelen alçalma sırasında bunun yüzde onu ısı olarak harcanır. Günde iki çevrim olduğundan yılda 2×365 çevrim vardır:

$$E_{\text{heat, yr}} = 0.10(2 \times 365) M_{\text{water}} g H.$$

Değerler yerine konulduğunda

$$E_{\text{heat,yr}} = 9.2 \times 10^{19} \text{ J.}$$

Bu değer, 4b kısmında bulunan

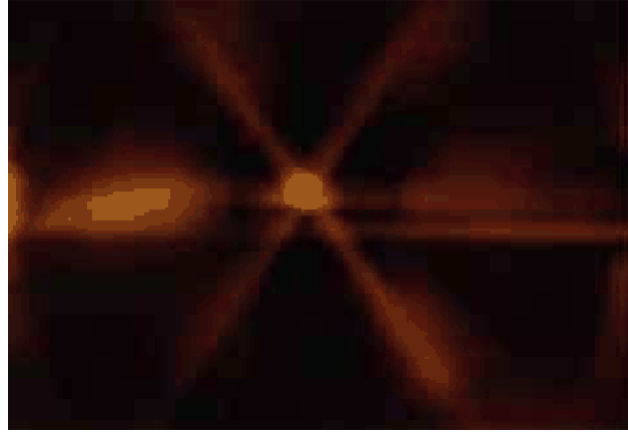
$$|\Delta E| = 9.1 \times 10^{19} \text{ J}$$

mekanik enerji kaybıyla yakın uyum içindedir. Basitleştirilmiş model çerçevesinde gelgitlerdeki enerji harcanması, kaybolan mekanik enerjiyi ısıya dönüştürerek bu kaybı açıklar.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Doppler Lazer Soğutması ve Optik Melas

Bu sorunun amacı, "lazer soğutması" ve "optik melas" olarak adlandırılan olguları anlamak için basit bir kuram geliştirmektir. Burada söz konusu olan, genellikle alkali elementlerden oluşan nötr atom demetinin, aynı frekansta ve zıt yönlerde ilerleyen lazer demetleriyle soğutulmasıdır. Bu çalışma, 1997 yılında S. Chu, P. Phillips ve C. Cohen-Tannoudji'ye verilen Nobel Fizik Ödülü'nün konuları arasındadır.



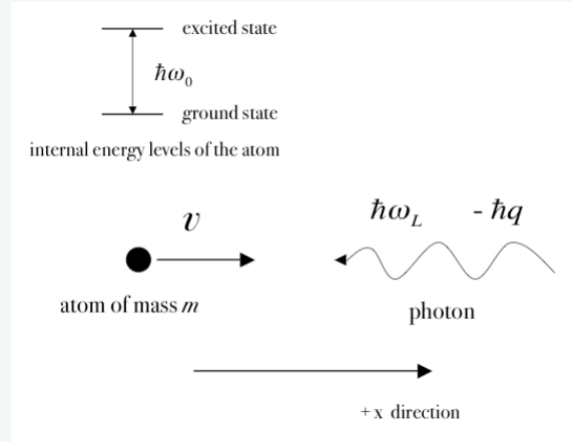
Yukarıdaki görüntü, birbirine dik üç çift karşıt yönlü lazer demetinin kesişiminde tuzaklanmış sodyum atomlarını (merkezdeki parlak nokta) göstermektedir. Tuzaklama bölgesine "optik melas" adı verilir; çünkü enerji yitimine yol açan optik kuvvet, melas içinde hareket eden bir cisme etki eden viskoz sürüklenme kuvvetine benzer.

Bu soruda, bir atoma gelen fotonun atomla etkileşiminin temelini ve bir boyutta enerji yitimi mekanizmasının dayanağını inceleyeceksiniz.

BÖLÜM I: LAZER SOĞUTMASININ TEMELLERİ

$+x$ yönünde v hızıyla hareket eden, kütlesi m olan bir atom düşünün. Basitlik için sorunu bir boyutlu ele alacağız; yani y ve z yönlerini göz ardı edeceğiz (bkz. şekil 1). Atomun iki iç enerji düzeyi vardır. En düşük enerjili durumun enerjisi sıfır, uyarılmış durumun enerjisi ise $\hbar\omega_0$ olarak alınır; burada $\hbar = h/2\pi$ 'dir. Atom başlangıçta en düşük enerjili durumdadır. Laboratuvarında frekansı ω_L olan bir lazer demeti $-x$ yönünde ilerleyerek atoma gelir. Kuantum mekaniği açısından lazer, her biri $\hbar\omega_L$ enerjisine ve $-\hbar q$ momentumuna sahip çok sayıda fotondan oluşur. Atom bir fotonu soğurabilir ve daha sonra kendiliğinden bir foton yayabilir; bu yayım $+x$ ve $-x$ yönlerinde eşit olasılıklarla gerçekleşebilir. Atom göreceli olmayan hızlarda hareket ettiğinden, $v/c \ll 1$

olduğundan (c ışık hızıdır), bu niceliğe göre yalnızca birinci mertebeye kadar olan terimleri tutun. Ayrıca $\hbar q/mv \ll 1$ olduğunu, yani atomun momentumunun tek bir fotonun momentumundan çok daha büyük olduğunu kabul edin. Cevaplarınızı yazarken, yukarıdaki niceliklerin her birine göre yalnızca doğrusal düzeltmeleri tutun.



Şekil 1. $+x$ yönünde v hızıyla hareket eden, kütlesi m olan bir atomun, enerjisi $\hbar\omega_L$ ve momentumu $-\hbar q$ olan bir fotonla çarpışmasının şematik gösterimi. Atomun, aralarındaki enerji farkı $\hbar\omega_0$ olan iki iç durumu vardır.

Lazer frekansı ω_L 'nin, hareketli atomun gördüğü haliyle atomun iç geçişiyle rezonansa olacak şekilde ayarlandığını varsayın. Aşağıdaki soruları cevaplayın:

1. Soğurma.

1a	Fotonun soğurulması için rezonans koşulunu yazın.	0.2
1b	Soğurmadan sonra atomun laboratuvarından gözlenen p_{at} momentumunu yazın.	0.2
1c	Soğurmadan sonra atomun laboratuvarından gözlenen toplam ε_{at} enerjisini yazın.	0.2

2. $-x$ yönünde kendiliğinden foton yayımı.

Gelen fotonun soğurulmasından bir süre sonra atom, $-x$ yönünde bir foton yayabilir.

2a	$-x$ yönündeki yayım sürecinden sonra yayılan fotonun laboratuvarından gözlenen ε_{ph} enerjisini yazın.	0.2
2b	$-x$ yönündeki yayım sürecinden sonra yayılan fotonun laboratuvarından gözlenen p_{ph} momentumunu yazın.	0.2
2c	$-x$ yönündeki yayım sürecinden sonra atomun laboratuvarından gözlenen p_{at} momentumunu yazın.	0.2
2d	$-x$ yönündeki yayım sürecinden sonra atomun laboratuvarından gözlenen toplam ε_{at} enerjisini yazın.	0.2

3. $+x$ yönünde kendiliğinden foton yayımı.

Gelen fotonun soğurulmasından bir süre sonra atom, bunun yerine $+x$ yönünde bir foton yayabilir.

3a	$+x$ yönündeki yayım sürecinden sonra yayılan fotonun laboratuvarından gözlenen ε_{ph} enerjisini yazın.	0.2
3b	$+x$ yönündeki yayım sürecinden sonra yayılan fotonun laboratuvarından gözlenen p_{ph} momentumunu yazın.	0.2

3c	$+x$ yönündeki yayım sürecinden sonra atomun laboratuvarından gözlenen p_{at} momentumunu yazın.	0.2
3d	$+x$ yönündeki yayım sürecinden sonra atomun laboratuvarından gözlenen toplam ε_{at} enerjisini yazın.	0.2

4. Soğurmadan sonraki yayımın ortalamaları.

Bir fotonun $-x$ veya $+x$ yönlerinde kendiliğinden yayılması aynı olasılıkla gerçekleşir. Bunu dikkate alarak aşağıdaki soruları cevaplayın.

4a	Yayım sürecinden sonra yayılan bir fotonun ortalama ε_{ph} enerjisini yazın.	0.2
4b	Yayım sürecinden sonra yayılan bir fotonun ortalama p_{ph} momentumunu yazın.	0.2
4c	Yayım sürecinden sonra atomun ortalama toplam ε_{at} enerjisini yazın.	0.2
4d	Yayım sürecinden sonra atomun ortalama p_{at} momentumunu yazın.	0.2

5. Enerji ve momentum aktarımı.

Yalnızca yukarıda açıklanan tek fotonluk tam bir soğurma–yayım sürecini ele aldığımızda, lazer ışınımı ile atom arasında net bir ortalama momentum ve enerji aktarımı vardır.

5a	Tek fotonluk tam bir soğurma–yayım sürecinden sonra atomun ortalama $\Delta\varepsilon$ enerji değişimini yazın.	0.2
5b	Tek fotonluk tam bir soğurma–yayım sürecinden sonra atomun ortalama Δp momentum değişimini yazın.	0.2

6. $+x$ yönündeki bir lazer demetinin enerji ve momentum aktarımı.

Şimdi, frekansı ω'_L olan bir lazer demetinin atoma $+x$ yönünde geldiğini ve atomun da $+x$ yönünde v hızıyla hareket ettiğini düşünün. Atomun gördüğü haliyle, atomun iç geçişi ile lazer demeti arasında rezonans koşulunun sağlandığını varsayarak aşağıdaki soruları cevaplayın:

6a	Tek fotonluk tam bir soğurma–yayım sürecinden sonra atomun ortalama $\Delta\varepsilon$ enerji değişimini yazın.	0.3
6b	Tek fotonluk tam bir soğurma–yayım sürecinden sonra atomun ortalama Δp momentum değişimini yazın.	0.3

BÖLÜM II: ENERJİ YİTİMİ VE OPTİK MELASIN TEMELLERİ

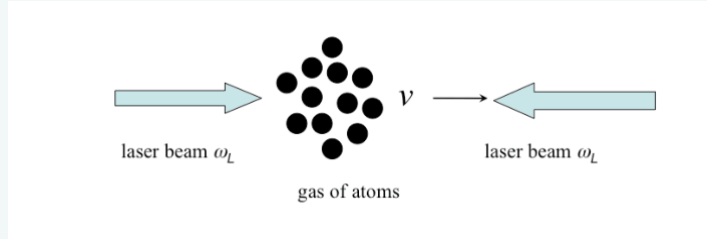
Ancak doğa, kuantum süreçlerinde özünde bir belirsizlik barındırır. Dolayısıyla atomun soğurmadan sonra *sonlu bir süre* içinde kendiliğinden bir foton yayabilmesi, rezonans koşulunun yukarıdaki tartışmada olduğu gibi *tam olarak* sağlanmasının gerekmemesi sonucunu doğurur. Yani lazer demetlerinin ω_L ve ω'_L frekansları herhangi bir değer alabilir ve soğurma–yayım süreci yine de gerçekleşebilir. Bu süreçler farklı (kuantum) olasılıklarla gerçekleşir ve bekleneneği gibi en yüksek olasılık, tam rezonans koşulunda elde edilir. Tek bir soğurma ve yayım sürecinde soğurma ile yayım arasında geçen ortalama süreye, atomun uyarılmış enerji düzeyinin ömrü denir ve bu süre Γ^{-1} ile gösterilir.

Laboratuvar referans sisteminde *durgun* olan N atomdan oluşan bir topluluk ve bunların üzerine gelen, frekansı ω_L olan bir lazer demeti düşünün. Atomlar sürekli olarak soğurma ve yayım yapar; böylece ortalama olarak N_{exc} atom uyarılmış durumda (dolayısıyla $N - N_{exc}$ atom da temel durumda) bulunur. Kuantum mekaniksel bir hesaplama şu sonucu verir:

$$N_{exc} = N \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}$$

Burada ω_0 , atomik geçişin rezonans frekansı, Ω_R ise Rabi frekansı olarak adlandırılan niceliktir; Ω_R^2 , lazer demetinin *şiddetiyle* orantılıdır. Yukarıda belirtildiği gibi, rezonans frekansı ω_0 , lazer demetinin ω_L frekansından farklı olsa bile bu sayının sıfırdan farklı olduğunu görebilirsiniz. Önceki sonucu ifade etmenin başka bir yolu da birim zamandaki soğurma–yayım süreçlerinin sayısının $N_{exc}\Gamma$ olduğunu söylemektir.

Şekil 2'de gösterilen fiziksel durumu ele alın: *aynı* fakat *keyfi* ω_L frekansına sahip, zıt yönlerde ilerleyen iki lazer demeti, $+x$ yönünde v hızıyla hareket eden N atomdan oluşan bir gazın üzerine gelmektedir.



Şekil 2. *Aynı* fakat *keyfi* ω_L frekansına sahip, zıt yönlerde ilerleyen iki lazer demeti, $+x$ yönünde v hızıyla hareket eden N atomdan oluşan bir gazın üzerine gelmektedir.

7. Lazerlerin atom demetine uyguladığı kuvvet.

7a	Şimdiye kadar elde edilen bilgileri kullanarak lazerlerin atom demetine uyguladığı kuvveti bulun. $mv \gg \hbar q$ olduğunu varsaymalısınız.	1.5
----	--	-----

8. Düşük hız sınırı.

Şimdi atomların hızının, kuvveti v 'ye göre birinci mertebeye kadar açabileceğiniz kadar küçük olduğunu varsayın.

8a	(7a) sorusunda bulunan kuvvet için bu sınırdaki bir ifade bulun.	1.5
----	--	-----

Bu sonucu kullanarak lazer ışınımının atomları hızlandırma, yavaşlatma veya atomlar üzerinde hiçbir etki oluşturmama koşullarını bulabilirsiniz.

8b	Pozitif bir kuvvet elde etme (atomları hızlandırma) koşulunu yazın.	0.25
8c	Sıfır kuvvet elde etme koşulunu yazın.	0.25
8d	Negatif bir kuvvet elde etme (atomları yavaşlatma) koşulunu yazın.	0.25
8e	Şimdi atomların $-v$ hızıyla ($-x$ yönünde) hareket ettiğini düşünün. Atomları yavaşlatan bir kuvvet elde etme koşulunu yazın.	0.25

9. Optik melas.

Negatif kuvvet durumunda, sürtünme niteliğinde, enerji yitimine yol açan bir kuvvet elde edilir. Başlangıçta, $t = 0$ anında, atom gazının hızının v_0 olduğunu varsayın.

9a	Düşük hız sınırında, lazer demetleri τ süresi boyunca açık kaldıktan sonra atomların hızını bulun.	1.5
----	---	-----

9b

Şimdi atom gazının T_0 sıcaklığında ısı dengede olduğunu varsayın. Lazer demetleri τ süresi boyunca açık kaldıktan sonraki T sıcaklığını bulun.

0.5

Bu model, keyfî derecede düşük sıcaklıklara ulaşmanıza izin vermez.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Şu tanımları yapalım:

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad q = \frac{\omega_L}{c}, \quad q' = \frac{\omega'_L}{c}, \quad K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Bölüm II için şu tanımları yapalım:

$$\Delta = \omega_0 - \omega_L, \quad D = \Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2, \quad \alpha = \frac{4\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 \Delta}{D^2}.$$

İki demetin aynı Ω_R değerine sahip olduğu kabul edilir.

Aşağıdaki foton niceliklerinde ilk Doppler düzeltmesi tutulmuştur. Atom niceliklerinde başat geri tepme düzeltmesi tutulmuş, v/c ile $\hbar q/(mv)$ 'nin çarpımları ihmal edilmiştir. Bu kesme işleminden önceki küçük momentum düzeltmeleri çözümde gösterilmiştir. Atom enerjilerinde sabit durgunluk enerjisi yer almamaktadır.

- **1a:** $\omega_L(1 + \beta) = \omega_0$, eşdeğer olarak $\omega_L + qv = \omega_0$.
- **1b:** $p_{at} = mv - \hbar q$.
- **1c:** $\varepsilon_{at} = K + \hbar\omega_L = K + \hbar\omega_0 - \hbar qv$.
- **2a:** $\varepsilon_{ph} = \hbar\omega_0(1 - \beta) \simeq \hbar\omega_L$.
- **2b:** $p_{ph} = -\frac{\hbar\omega_0}{c}(1 - \beta) \simeq -\hbar q$.
- **2c:** $p_{at} = mv$.
- **2d:** $\varepsilon_{at} = K$.
- **3a:** $\varepsilon_{ph} = \hbar\omega_0(1 + \beta) \simeq \hbar\omega_L(1 + 2\beta)$.
- **3b:** $p_{ph} = \frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + \beta) \simeq \hbar q(1 + 2\beta)$.
- **3c:** $p_{at} \simeq mv - 2\hbar q$.
- **3d:** $\varepsilon_{at} \simeq K - 2\hbar qv$.
- **4a:** $\langle \varepsilon_{ph} \rangle = \hbar\omega_0$.
- **4b:** $\langle p_{ph} \rangle = \frac{\hbar\omega_0 v}{c^2} \simeq \hbar q\beta$.
- **4c:** $\langle \varepsilon_{at} \rangle \simeq K - \hbar qv$.
- **4d:** $\langle p_{at} \rangle \simeq mv - \hbar q$.
- **5a:** $\Delta\varepsilon = -\frac{\hbar\omega_0 v}{c} \simeq -\hbar qv$.
- **5b:** $\Delta p \simeq -\hbar q$.
- **6a:** $\Delta\varepsilon = +\frac{\hbar\omega_0 v}{c} \simeq +\hbar q'v$.
- **6b:** $\Delta p \simeq +\hbar q'$.

• 7a:

$$F(v) = N\hbar q \Gamma \Omega_R^2 \left[\frac{1}{(\Delta + qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} - \frac{1}{(\Delta - qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} \right].$$

• 8a:

$$F(v) \simeq -N\alpha v = -\frac{4N\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 (\omega_0 - \omega_L)}{[(\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2]^2} v.$$

• 8b: $\omega_L > \omega_0$.

• 8c: $\omega_L = \omega_0$.

• 8d: $\omega_L < \omega_0$.

• 8e: $\omega_L < \omega_0$; bu durumda kuvvet $+x$ yönündedir.

• 9a: $v(\tau) = v_0 e^{-\alpha\tau/m}$, burada $\alpha > 0$ 'dır.

• 9b: $T(\tau) = T_0 e^{-2\alpha\tau/m}$.

Çözüm

Fotonun enerji-momentum bağıntısı şunu verir:

$$\hbar\omega_L = c\hbar q, \quad q = \frac{\omega_L}{c}.$$

İki küçük parametreyi şöyle yazalım:

$$\beta = \frac{v}{c} \ll 1, \quad \eta = \frac{\hbar q}{mv} \ll 1.$$

$(\hbar q)^2/(2m)$ geri tepme enerjisi, atomun başlangıçtaki kinetik enerjisine göre η 'nin ikinci mertebesinde; bu nedenle ihmal edilir. Soğurmanın ardından atomun hızındaki değişim $-\hbar q/m$ 'dir; bunun Doppler çarpanına katkısı

$$\frac{\hbar q}{mc} = \eta\beta,$$

olup bu da ihmal edilir.

Dolayısıyla yayılan fotonların frekansları hesaplanırken, yayımı yapan atomun hızı v alınabilir.

$\hbar q\beta = mv\eta\beta$ mertebesindeki momentum düzeltmeleri, yararlı oldukları yerlerde gösterilmiş, ancak atomun geri tepmesine ilişkin başat sonuçlarda ihmal edilmiştir.

1a. Rezonans koşulu

$-x$ yönünde ilerleyen bir foton için, $+x$ yönünde hareket eden bir atomun ölçtüğü frekans birinci mertebede şöyledir:

$$\omega_{\text{atom}} = \omega_L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega_L + qv.$$

Rezonans için bu frekansın ω_0 'a eşit olması gerekir:

$$\boxed{\omega_L + qv = \omega_0}, \quad \boxed{\omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \omega_0}.$$

Bu sonuç enerjinin korunumundan da elde edilir:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \hbar\omega_L = \frac{(mv - \hbar q)^2}{2m} + \hbar\omega_0.$$

Geri tepme enerjisi ihmal edildiğinde aynı koşul elde edilir.

1b. Soğurmadan sonra atomun momentumu

Momentumun korunumu şunu verir:

$$p_{at} = mv - \hbar q.$$

1c. Soğurmadan sonra atomun enerjisi

Atom, gelen fotonun enerjisini kazanır:

$$\varepsilon_{at} = \frac{1}{2}mv^2 + \hbar\omega_L.$$

Eşdeğer olarak, kinetik ve iç enerjileri toplanırsa

$$\varepsilon_{at} = \frac{(mv - \hbar q)^2}{2m} + \hbar\omega_0 \simeq \frac{1}{2}mv^2 - \hbar qv + \hbar\omega_0.$$

Rezonans koşulu, tutulan mertebede bu ifadelerin eşit olmasını sağlar.

Yayımla ilgili sorular için $s = +1$, $+x$ yönünde yayılan bir fotonu; $s = -1$ ise $-x$ yönünde yayılan bir fotonu gösterebilir. Geçiş frekansındaki geri tepme etkisi ihmal edildiğinde, fotonun yayımı yapan atomun durgunluk sistemindeki enerjisi $\hbar\omega_0$ 'dır. Birinci mertebeden Doppler dönüşümü şunu verir:

$$\varepsilon_{ph}^{(s)} = \hbar\omega_0(1 + s\beta), \quad p_{ph}^{(s)} = s\frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + s\beta).$$

2a. $-x$ yönündeki yayımda fotonun enerjisi

$s = -1$ alınır

$$\varepsilon_{ph}^{(-)} = \hbar\omega_0(1 - \beta).$$

Şu bağıntı geçerli olduğundan,

$$\omega_L = \frac{\omega_0}{1 + \beta} \simeq \omega_0(1 - \beta),$$

bu ifade şöyle olur:

$$\varepsilon_{ph}^{(-)} \simeq \hbar\omega_L.$$

2b. $-x$ yönündeki yayımda fotonun momentumu

$p_{ph} = -\varepsilon_{ph}/c$ kullanılarak

$$p_{ph}^{(-)} = -\frac{\hbar\omega_0}{c}(1 - \beta) \simeq -\hbar q.$$

2c. $-x$ yönündeki yayımdan sonra atomun momentumu

Sürecin tamamı boyunca momentumun korunumu şunu verir:

$$p_{at}^{(-)} = mv - \hbar q - p_{ph}^{(-)} \simeq mv - \hbar q + \hbar q.$$

Dolayısıyla

$$p_{at}^{(-)} = mv.$$

2d. $-x$ yönündeki yayımdan sonra atomun enerjisi

Yayılan foton, soğurulan fotonun sağladığı enerjiyi beraberinde götürür:

$$\varepsilon_{at}^{(-)} = K + \hbar\omega_L - \varepsilon_{ph}^{(-)} \simeq K.$$

Böylece

$$\varepsilon_{at}^{(-)} = \frac{1}{2}mv^2.$$

3a. $+x$ yönündeki yayımda fotonun enerjisi

$s = +1$ için

$$\varepsilon_{ph}^{(+)} = \hbar\omega_0(1 + \beta).$$

$\omega_0 = \omega_L(1 + \beta)$ kullanılarak

$$\varepsilon_{ph}^{(+)} \simeq \hbar\omega_L(1 + 2\beta).$$

3b. $+x$ yönündeki yayımda fotonun momentumu

Momentum pozitifdir:

$$p_{ph}^{(+)} = \frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + \beta) \simeq \hbar q(1 + 2\beta).$$

3c. $+x$ yönündeki yayımdan sonra atomun momentumu

Fotonun Doppler düzeltmesi geçici olarak tutulduğunda, momentumun korunumu şunu verir:

$$p_{at}^{(+)} = mv - \hbar q - \hbar q(1 + 2\beta) = mv - 2\hbar q - 2\hbar q\beta.$$

Son terim, atomun momentumunda göreceli olarak $\eta\beta$ mertebesinde. Bu karma düzeltme ihmal edildiğinde

$$p_{at}^{(+)} \simeq mv - 2\hbar q.$$

3d. $+x$ yönündeki yayımdan sonra atomun enerjisi

Atom temel durumuna döner. Enerjinin korunumu şunu verir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{at}^{(+)} &= K + \hbar\omega_L - \hbar\omega_0(1 + \beta) \\ &\simeq K + \hbar\omega_0(1 - \beta) - \hbar\omega_0(1 + \beta) \\ &= K - 2\hbar\omega_0\beta. \end{aligned}$$

Atom nicelikleri için tutulan doğruluk düzeyinde

$$\varepsilon_{at}^{(+)} \simeq \frac{1}{2}mv^2 - 2\hbar qv.$$

Bu sonuç, şu açılım yapıp

$$\frac{(mv - 2\hbar q)^2}{2m} = K - 2\hbar qv + \frac{2\hbar^2 q^2}{m}$$

ikinci dereceden geri tepme terimi ihmal edilerek de elde edilir.

4a. Yayılan fotonun ortalama enerjisi

İki yön eşit olasılıklıdır:

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_{ph} \rangle &= \frac{1}{2} \hbar \omega_0 (1 - \beta) + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 (1 + \beta) \\ &= \boxed{\hbar \omega_0}.\end{aligned}$$

4b. Yayılan fotonun ortalama momentumu

Momentumların işaretleri dikkate alınarak ortalama alındığında

$$\begin{aligned}\langle p_{ph} \rangle &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\hbar \omega_0}{c} (1 - \beta) + \frac{\hbar \omega_0}{c} (1 + \beta) \right] \\ &= \boxed{\frac{\hbar \omega_0 v}{c^2}} \simeq \boxed{\hbar q \beta}.\end{aligned}$$

Yönler eşit olasılıklı olsa da iki fotonun laboratuvarındaki enerjileri farklıdır. Dolayısıyla laboratuvarındaki ortalama momentumları küçük ve pozitifdir.

Atomun momentumuna göre bu ortalama şu mertebededir:

$$\frac{\langle p_{ph} \rangle}{mv} \simeq \eta \beta.$$

Bu nedenle aşağıdaki başat atom momentumu değişimlerinde ihmal edilir.

4c. Atomun ortalama enerjisi

2d ve 3d'nin sonuçları kullanılarak

$$\langle \varepsilon_{at} \rangle = \frac{1}{2} K + \frac{1}{2} (K - 2 \hbar q v).$$

Böylece

$$\boxed{\langle \varepsilon_{at} \rangle \simeq K - \hbar q v}.$$

Eşdeğer olarak,

$$\langle \varepsilon_{at} \rangle = K + \hbar \omega_L - \hbar \omega_0.$$

4d. Atomun ortalama momentumu

Karma düzeltme ihmal edilmeden önce, momentumun korunumu şunu verir:

$$\langle p_{at} \rangle = mv - \hbar q - \langle p_{ph} \rangle = mv - \hbar q - \frac{\hbar \omega_0 v}{c^2}.$$

Dolayısıyla istenen başat atomik geri tepme mertebesinde

$$\boxed{\langle p_{at} \rangle \simeq mv - \hbar q}.$$

5a. Atomun ortalama enerji değişimi

Başlangıç enerjisi çıkarıldığında

$$\Delta \varepsilon = \langle \varepsilon_{at} \rangle - K = \hbar (\omega_L - \omega_0).$$

Rezonans koşulu şunu verir:

$$\Delta\varepsilon = -\frac{\hbar\omega_0 v}{c} \simeq -\hbar qv.$$

Yayılan foton, ortalama olarak soğurulan fotondan daha fazla enerjiye sahiptir. Bu fark, atomun kinetik enerjisinden karşılanır.

5b. Atomun ortalama momentum değişimi

4d'den başlangıç momentumu çıkarıldığında

$$\Delta p \simeq -\hbar q.$$

Kesme işleminden önceki daha küçük düzeltme şöyledir:

$$-\langle p_{ph} \rangle = -\frac{\hbar\omega_0 v}{c^2}.$$

Başat geri tepme mertebesinde, enerji ve momentum değişimleri şu bağıntıyı sağlar:

$$\Delta\varepsilon \simeq v \Delta p.$$

6a. $+x$ yönünde ilerleyen bir lazer için enerji değişimi

Atom artık gelen ışıktan uzaklaşmaktadır. Rezonans koşulu

$$\omega'_L \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \omega_0,$$

olduğundan

$$\omega'_L \simeq \omega_0(1 + \beta).$$

Yayılan fotonun ortalama enerjisi yine $\hbar\omega_0$ 'dır. Dolayısıyla

$$\Delta\varepsilon = \hbar(\omega'_L - \omega_0) = \frac{\hbar\omega_0 v}{c} \simeq \hbar q'v, \quad q' = \frac{\omega'_L}{c}.$$

Atom kinetik enerji kazanır.

6b. $+x$ yönünde ilerleyen bir lazer için momentum değişimi

Soğurulan foton $+\hbar q'$ momentumu sağlar. Sonuç olarak,

$$\Delta p = \hbar q' - \frac{\hbar\omega_0 v}{c^2} \simeq +\hbar q'.$$

İhmal edilen ikinci terim, yine atomun momentumundaki karma bir Doppler–geri tepme düzeltmesidir.

7a. İki lazer demetinden kaynaklanan kuvvet

Verilen saçılma yasasını, demetlerin şiddetlerini ve dolayısıyla Rabi frekanslarını eşit alarak, iki demet için ayrı ayrı kullanın.

$+$ işareti $+x$ yönünde ilerleyen demeti, $-$ işareti ise $-x$ yönünde ilerleyen demeti gösterebilir. Hareketli atomların gördüğü frekanslar şöyledir:

$$\omega_{\text{atom},+} = \omega_L - qv, \quad \omega_{\text{atom},-} = \omega_L + qv.$$

Dolayısıyla atomik geçişten frekans sapmaları şöyledir:

$$\omega_0 - \omega_{\text{atom},+} = \Delta + qv, \quad \omega_0 - \omega_{\text{atom},-} = \Delta - qv.$$

Birim zamandaki toplam saçılma olayı sayıları şöyledir:

$$R_+(v) = \frac{N\Gamma\Omega_R^2}{(\Delta + qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2},$$

$$R_-(v) = \frac{N\Gamma\Omega_R^2}{(\Delta - qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2}.$$

Başat geri tepme mertebesinde her olay, sırasıyla $+\hbar q$ veya $-\hbar q$ momentumu aktarır. Dolayısıyla

$$F(v) = \hbar q R_+(v) - \hbar q R_-(v),$$

ve buradan

$$F(v) = N\hbar q \Gamma \Omega_R^2 \left[\frac{1}{(\Delta + qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} - \frac{1}{(\Delta - qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} \right].$$

Bu, N atomun tümüne etki eden kuvvettir. Tek bir atoma etki eden kuvvet F/N 'dir.

Saçılma olasılıklarında qv Doppler kayması tutulur: v/c çok küçük olduğunda bile bu kayma, geçişin çizgi genişliğiyle karşılaştırıldığında önemli olabilir.

8a. Düşük hız açılımı

Şu tanımı yapalım:

$$D = \Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2.$$

Yeterince küçük qv için

$$\frac{1}{(\Delta \pm qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} \simeq \frac{1}{D} \mp \frac{2\Delta qv}{D^2}.$$

Örneğin $|qv| \ll \sqrt{D}$, yeterli bir düşük hız koşuludur.

İki açılım birbirinden çıkarıldığında

$$F(v) \simeq N\hbar q \Gamma \Omega_R^2 \left(-\frac{4\Delta qv}{D^2} \right).$$

Böylece

$$F(v) \simeq -N\alpha v, \quad \alpha = \frac{4\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 \Delta}{D^2}.$$

α katsayısının birimi kütle bölü zamandır; dolayısıyla αv 'nin birimi kuvvettir.

8b. Pozitif kuvvet

$v > 0$ için α 'daki Δ dışındaki tüm çarpanlar pozitiftir. Pozitif kuvvet için

$$\Delta < 0.$$

Dolayısıyla

$$\omega_L > \omega_0.$$

Bu, frekansın rezonansa göre maviye ayarlanmasıdır.

8c. Sıfır kuvvet

Sıfırdan farklı şiddet ve hareketli bir atom için frekans sapması koşulu

$$\Delta = 0,$$

veya

$$\omega_L = \omega_0.$$

Bu durumda iki saçılma hızı eşittir. Bundan bağımsız olarak, simetri de $v = 0$ için sıfır kuvvet verir.

8d. Negatif kuvvet

$v > 0$ için negatif kuvvet, $\alpha > 0$ olmasını gerektirir; dolayısıyla

$$\omega_L < \omega_0.$$

Bu, frekansın rezonansa göre kırmızıya ayarlanmasıdır. Atomların hareketine zıt yönde ilerleyen demetin frekansı Doppler etkisiyle rezonansa yaklaşır ve bu demet daha güçlü saçılır.

8e. $-x$ yönünde hareket eden atomların yavaşlatılması

$v > 0$ olmak üzere $-v$ hızı için

$$F(-v) = +N\alpha v.$$

Yavaşlatma, $+x$ yönünde bir kuvvet gerektirir; dolayısıyla yine $\alpha > 0$ olmalıdır. Böylece

$$\omega_L < \omega_0.$$

Frekansın rezonansa göre kırmızıya ayarlanması, her iki yöndeki harekete de karşı koyan bir kuvvet üretir.

9a. τ süresi sonraki hız

Frekans rezonansa göre kırmızıya ayarlandığında $\alpha > 0$ 'dır. Gazın toplam kütlesi Nm olduğundan Newton'un ikinci yasası şunu verir:

$$Nm \frac{dv}{dt} = -N\alpha v.$$

N çarpanı sadeleşir:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m}v.$$

$v(0) = v_0$ başlangıç koşuluyla integral alınırsa

$$v(\tau) = v_0 e^{-\alpha\tau/m}.$$

Açık biçimiyle,

$$v(\tau) = v_0 \exp \left[-\frac{4\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 (\omega_0 - \omega_L) \tau}{m [(\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2]^2} \right].$$

Hızın sönüm zaman sabiti m/α 'dır.

9b. τ süresi sonraki sıcaklık

Bu deterministik sürtünme modelinde, her atomun hızı şu çarpanla çarpılır:

$$e^{-\alpha\tau/m}.$$

Dolayısıyla hızların varyansı şu çarpanla çarpılır:

$$e^{-2\alpha\tau/m}.$$

Bir boyutlu ısı hareket için

$$m \langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle = k_B T.$$

Sonuç olarak,

$$T(\tau) = T_0 e^{-2\alpha\tau/m}.$$

Açık biçimiyle,

$$T(\tau) = T_0 \exp \left[- \frac{8\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 (\omega_0 - \omega_L) \tau}{m [(\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2]^2} \right].$$

Bu üstel bağıntı, keyfî derecede düşük sıcaklıklara ekstrapole edilemez. Hesaplamada, ikinci dereceden geri tepme katkıları ve rastgele saçılma olaylarının yol açtığı dalgalanmalar ihmal edilmiştir. Özellikle, tipik bir ısı hızına uygulanan $mv \gg \hbar q$ varsayımı şu koşulu gerektirir:

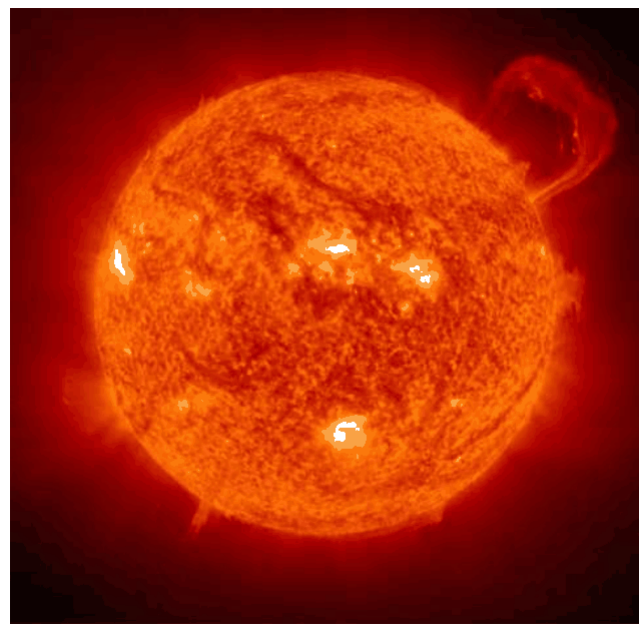
$$k_B T \gg \frac{(\hbar q)^2}{m}.$$

Atomlar soğudukça bu modelde ihmal edilen terimler önem kazanır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.

Soru 3: Yıldızlar Neden Bu Kadar Büyüktür?

Yıldızlar sıcak gaz küreleridir. Çoğu, merkez bölgelerinde hidrojeni helyuma dönüştüren füzyon tepkimeleri sayesinde parlar. Bu soruda, yıldızların bu füzyon sürecini gerçekleştirebilmek için neden yeterince büyük olmaları gerektiğini anlamak ve hidrojen füzyonu gerçekleştirebilen en küçük yıldızın kütlesini ve yarıçapını türetmek için klasik mekanik ve kuantum mekaniğinin yanı sıra elektrostatik ve termodinamik kavramlarını kullanacağız.



Şekil 1. Güneşimiz, çoğu yıldız gibi, merkez bölgelerinde hidrojenin helyuma dönüştüğü termonükleer füzyon sonucunda parlar.

YARARLI SABİTLER
Kütleçekim sabiti = $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ (resmi metinde baskı hatası: s^{-2} yerine s^2)
Boltzmann sabiti = $k = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Planck sabiti = $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1}$
Protonun kütlesi = $m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronun kütlesi = $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Temel elektrik yükü = $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Elektrik sabiti (boşluğun elektriksel geçirgenliği) = $\epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
Güneş'in yarıçapı = $R_S = 7.0 \times 10^8 \text{ m}$
Güneş'in kütlesi = $M_S = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$

1. Yıldızların merkezindeki sıcaklığın klasik bir tahmini.

Yıldızı oluşturan gazın saf iyonlaşmış hidrojen olduğunu (eşit sayıda elektron ve proton içerdiğini) ve ideal gaz gibi davrandığını varsayın. Klasik bakış açısına göre, iki protonun füzyona girmesi için, kısa menzilli ve çekici olan güçlü nükleer kuvvetin baskın hâle geleceği 10^{-15} m uzaklığına kadar birbirlerine yaklaşmaları gerekir. Ancak birbirlerine yaklaşabilmek için önce Coulomb kuvvetinin itici etkisini yenmeleri gerekir. Klasik olarak, iki protonun (noktasal kaynaklar olarak kabul edilerek), bir boyutlu kafa kafaya çarpışmada, her biri protonların karekök ortalama kare (rms) hızı olan v_{rms} hızıyla birbirine zıt yönlerde hareket ettiğini varsayın.

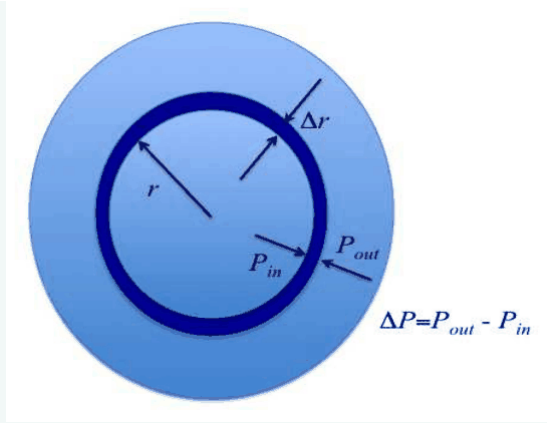
1a	Protonların birbirlerine en fazla yaklaştıkları uzaklığın, d_c , 10^{-15} m olması için gazın sıcaklığı T_c ne olmalıdır? Bu değeri ve sorudaki tüm sayısal değerleri iki anlamlı basamakla verin.	1.5
----	--	-----

2. Önceki sıcaklık tahmininin yanlış olduğunun belirlenmesi.

Önceki sıcaklık tahmininin makul olup olmadığını kontrol etmek için bir yıldızın merkez sıcaklığını tahmin etmenin bağımsız bir yoluna ihtiyaç vardır. Yıldızların yapısı çok karmaşıktır, ancak bazı varsayımlar yaparak bu yapıyı önemli ölçüde anlayabiliriz. Yıldızlar dengededir; yani içeriye doğru olan kütleçekim kuvveti dışarıya doğru olan basınç kuvvetiyle dengelendiği için genişlemez veya büzülmezler (bkz. Şekil 2). Yıldızın merkezinden belirli bir r uzaklığındaki bir gaz tabakası için hidrostatik denge denklemi

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{GM_r \rho_r}{r^2},$$

şeklindedir; burada P gazın basıncı, G kütleçekim sabiti, M_r yıldızın r yarıçaplı bir küre içinde kalan kütlesi ve ρ_r tabakadaki gazın yoğunluğudur.



Şekil 2. Yıldızlar, basınç farkının kütleçekimini dengelediği hidrostatik denge durumundadır.

Yıldızın merkezindeki ve yüzeyindeki parametre değerleri kullanılarak, aşağıdaki yaklaşımlarla yıldızın merkez sıcaklığı için bir büyüklük mertebesi tahmini elde edilebilir:

$$\Delta P \approx P_o - P_c,$$

burada P_c ve P_o , sırasıyla yıldızın merkezindeki ve yüzeyindeki basınçlardır. $P_c \gg P_o$ olduğundan,

$$\Delta P \approx -P_c.$$

olduğunu varsayabiliriz. Aynı yaklaşım çerçevesinde,

$$\Delta r \approx R,$$

yazabiliriz; burada R yıldızın toplam yarıçapıdır. Ayrıca,

$$M_r \approx M_R = M,$$

olup M yıldızın toplam kütlesidir.

Yoğunluk, merkezdeki değeriyle yaklaşık olarak ifade edilebilir:

$$\rho_r \approx \rho_c.$$

Basıncın ideal gaz basıncı olduğunu varsayabilirsiniz.

2a	Yıldızın merkezindeki sıcaklık T_c için yalnızca yıldızın yarıçapı, kütlesi ve fiziksel sabitler cinsinden bir denklem bulun.	0.5
----	---	-----

Şimdi bu modelin aşağıdaki öngörüsünü, geçerliliğinin bir ölçütü olarak kullanabiliriz:

2b	(2a)'da bulunan denklemi kullanarak, bir yıldız için beklenen M/R oranını yalnızca fiziksel sabitler ve T_c cinsinden yazın.	0.5
2c	(1a) kısmında elde edilen T_c değerini kullanarak, bir yıldız için beklenen M/R oranının sayısal değerini bulun.	0.5
2d	Şimdi $M(\text{Sun})/R(\text{Sun})$ oranını hesaplayın ve bu değer (2c)'de bulunan değerden çok daha küçük olduğunu doğrulayın.	0.5

3. Yıldızların merkezindeki sıcaklığın kuantum mekaniksel bir tahmini

(2d)'de bulunan büyük uyuşmazlık, (1a)'da T_c için elde edilen klasik tahminin doğru olmadığını düşündürmektedir. Bu uyuşmazlığın çözümü, protonların dalga gibi davrandığını ve tek bir protonun de Broglie dalga boyu λ_p mertebesinde bir boyuta yayıldığını söyleyen kuantum

mekaniksel etkiler dikkate alındığında bulunur. Bu, protonların birbirlerine en fazla yaklaştıkları uzaklık olan d_c , λ_p mertebesindeyse, protonların kuantum mekaniksel anlamda örtüştüğü ve füzyona girebileceği anlamına gelir.

3a	v_{rms} hızıyla hareket eden bir proton için füzyona izin veren koşulun $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ olduğunu varsayarak, T_c için yalnızca fiziksel sabitler cinsinden bir denklem bulun.	1.0
3b	(3a)'da elde edilen T_c değerini sayısal olarak hesaplayın.	0.5
3c	(3b)'de elde edilen T_c değerini ve (2b)'de türetilen formülü kullanarak, bir yıldız için beklenen M/R oranının sayısal değerini bulun. Bu değer gözlenen $M(Sun)/R(Sun)$ oranına oldukça yakın olduğunu doğrulayın.	0.5

Gerçekten de, *ana kol* olarak adlandırılan evredeki (hidrojen füzyonu gerçekleştiren) yıldızlar, geniş bir kütle aralığında yaklaşık olarak bu orana uyar.

4. Yıldızların kütle/yarıçap oranı.

Önceki uyum, Güneş'in merkezindeki sıcaklığı tahmin etmek için kullanılan kuantum mekaniksel yaklaşımın doğru olduğunu düşündürmektedir.

4a	Önceki sonuçları kullanarak, hidrojen füzyonu gerçekleştiren herhangi bir yıldız için M kütesinin R yarıçapına oranının aynı olduğunu ve yalnızca fiziksel sabitlere bağlı olduğunu gösterin. Hidrojen füzyonu gerçekleştiren yıldızların M/R oranı için denklemi bulun.	0.5
----	--	-----

5. En küçük yıldızın kütlesi ve yarıçapı.

(4a)'da bulunan sonuç, bu ilişki sağlandığı sürece herhangi bir kütlede yıldızların bulunabileceğini düşündürmektedir; ancak bu doğru değildir.

Hidrojen füzyonu gerçekleştiren normal yıldızların içindeki gazın yaklaşık olarak ideal gaz gibi davrandığı bilinmektedir. Bu, *elektronlar arasındaki tipik uzaklık* olan d_e 'nin, ortalama olarak elektronların tipik de Broglie dalga boyu λ_e 'den büyük olduğu anlamına gelir. Daha yakın olsalardı, elektronlar dejenere olarak adlandırılan bir durumda olur ve yıldızlar farklı davranırdı. Yıldızın içindeki protonları ve elektronları ele alış biçimlerimiz arasındaki ayrıma dikkat edin. Protonların füzyona girebilmesi için çarpışırken de Broglie dalgalarının güçlü biçimde örtüşmesi gerekirken, elektronların ideal gaz olarak kalabilmesi için de Broglie dalgalarının örtüşmemesi gerekir.

Yıldızlarda yarıçap azaldıkça yoğunluk artar. Bununla birlikte, bu büyüklük mertebesi tahmini için yıldızların düzgün yoğunluklu olduğunu varsayın. Ayrıca $m_p \gg m_e$ olduğunu kullanabilirsiniz.

5a	Yıldızın içindeki ortalama elektron sayı yoğunluğu n_e için bir denklem bulun.	0.5
5b	Yıldızın içindeki elektronlar arasındaki tipik uzaklık d_e için bir denklem bulun.	0.5
5c	$d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}$ koşulunu kullanarak, mümkün olan en küçük normal yıldızın yarıçapı için bir denklem yazın. Yıldızın merkezindeki sıcaklığı, yıldızın tüm iç bölgesi için tipik sıcaklık olarak alın.	1.5
5d	Mümkün olan en küçük normal yıldızın yarıçapının sayısal değerini hem metre hem de Güneş yarıçapı biriminde bulun.	0.5
5e	Mümkün olan en küçük normal yıldızın kütesinin sayısal değerini hem kg hem de Güneş kütlesi biriminde bulun.	0.5

6. Yaşlı yıldızlarda helyum çekirdeklerinin füzyonu.

Yıldızlar yaşlandıkça çekirdeklerindeki hidrojenin çoğunu füzyon yoluyla helyuma (He) dönüştürmüş olurlar; dolayısıyla parlamaya devam etmek için helyumu daha ağır elementlere dönüştüren füzyon tepkimelerini başlatmak zorunda kalırlar. Bir helyum çekirdeği iki proton ve iki nötron içerir; bu nedenle yükü protonunkinin iki katı, kütlesi ise yaklaşık dört katıdır. Daha önce protonların füzyona girmesi için gereken koşulun $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ olduğunu gördük.

6a	Helyum çekirdekleri için eşdeğer koşulu yazın ve helyum çekirdeklerinin rms hızı $v_{rms}(He)$ ile helyum füzyonu için gereken sıcaklık $T(He)$ 'yi bulun.	0.5
----	--	-----

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Tüm sonuçlarda soruda belirtilen yaklaşımlar kullanılmıştır. Sayısal sonuçlar iki anlamlı basamağa yuvarlanmış, ara hesaplamalarda ise yuvarlanmamış değerler korunmuştur.

- 1a. $T_c = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 k d_c} = 5.4 \times 10^9 \text{ K}.$
- 2a. $T_c \simeq \frac{GMm_p}{2kR}.$
- 2b. $\frac{M}{R} \simeq \frac{2kT_c}{Gm_p}.$
- 2c. $\frac{M}{R} = 1.3 \times 10^{24} \text{ kg m}^{-1}.$
- 2d. $\frac{M_S}{R_S} = 2.9 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}.$ Klasik öngörü bunun 4.7×10^2 katıdır.
- 3a. $T_c = \frac{m_p q^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2}.$
- 3b. $T_c = 9.7 \times 10^6 \text{ K}.$
- 3c. $\frac{M}{R} = 2.4 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1} \simeq 0.84 \frac{M_S}{R_S}.$
- 4a. $\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 G h^2}.$
- 5a. $n_e = \frac{3M}{4\pi m_p R^3}.$
- 5b. $d_e \simeq n_e^{-1/3} = \left(\frac{4\pi m_p R^3}{3M} \right)^{1/3}.$
- 5c. $R_{\min} = \left(\frac{\epsilon_0 h^4}{2Gq^2 m_p^{5/2} m_e^{3/2}} \right)^{1/2}.$
- 5d. $R_{\min} = 6.9 \times 10^7 \text{ m} = 0.099 R_S.$
- 5e. $M_{\min} = 1.7 \times 10^{29} \text{ kg} = 0.083 M_S.$

- **6a.** Koşul $d_c(He) = \frac{\lambda_{He}}{\sqrt{2}} = \frac{h}{4\sqrt{2}m_p v_{rms}(He)}$ olup buradan

$$v_{rms}(He) = \frac{\sqrt{2}q^2}{\pi\epsilon_0 h} = 2.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}, \quad T(He) = \frac{8m_p q^4}{3\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2} = 6.2 \times 10^8 \text{ K}.$$

Çözüm

1a. Füzyon için gereken klasik sıcaklık

Görelî olmayan bir ideal gaz için eşbölüşüm ilkesi, protonun rms süratini

$$\frac{1}{2}m_p v_{rms}^2 = \frac{3}{2}kT_c.$$

bağıntısıyla verir. Çarpışma kafa kafayadır, ancak v_{rms} üç boyutlu gazdaki rms süratidir.

İki protonun momentumları eşit büyüklükte ve zıt yönlü olduğundan kütle merkezleri durgundur. En yakın konumda ikisi de anlık olarak durur. Başlangıçtaki elektrostatik potansiyel enerjileri ihmal edilebilir kabul edildiğinde, enerjinin korunumu

$$2 \left(\frac{1}{2}m_p v_{rms}^2 \right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d_c}.$$

bağıntısını verir. Böylece

$$3kT_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d_c}, \quad \boxed{T_c = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 k d_c}}.$$

$d_c = 10^{-15} \text{ m}$ için,

$$T_c = \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{12\pi(8.9 \times 10^{-12})(1.4 \times 10^{-23})(10^{-15})},$$

dolayısıyla

$$\boxed{T_c = 5.4 \times 10^9 \text{ K}}.$$

2a. Hidrostatik dengeden merkez sıcaklığı

Karakteristik radyal ölçek $r \simeq R$ dâhil olmak üzere belirtilen yaklaşımları kullanırsak,

$$-\frac{P_c}{R} \simeq -\frac{GM\rho_c}{R^2},$$

buradan

$$P_c \simeq \frac{GM\rho_c}{R}.$$

Tamamen iyonlaşmış hidrojende proton ve elektron sayı yoğunlukları eşittir. Kütle yoğunluğunda elektron kütesini ihmal edersek,

$$n_{p,c} = n_{e,c} \simeq \frac{\rho_c}{m_p}.$$

Her iki parçacık türü de ideal gaz basıncına katkıda bulunur:

$$P_c = (n_{p,c} + n_{e,c})kT_c = \frac{2\rho_c kT_c}{m_p}.$$

Basınç ifadelerini eşitleyip ρ_c 'yi sadeleştirirsek,

$$T_c \simeq \frac{GMm_p}{2kR}.$$

2b. Kütlenin yarıçapa oranı

(2a)'nın sonucunu yeniden düzenlersek,

$$\frac{M}{R} \simeq \frac{2kT_c}{Gm_p}.$$

2c. Klasik füzyon sıcaklığı kullanılarak öngörülen oran

(1a)'daki sıcaklık yerine konulduğunda

$$\frac{M}{R} = \frac{2k}{Gm_p} \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 k d_c} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 Gm_p d_c}.$$

Sayısal olarak,

$$\frac{M}{R} = 1.3 \times 10^{24} \text{ kg m}^{-1}.$$

2d. Güneş ile karşılaştırma

Verilen Güneş kütlesi ve yarıçapı kullanıldığında

$$\frac{M_S}{R_S} = \frac{2.0 \times 10^{30}}{7.0 \times 10^8} = \boxed{2.9 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}}.$$

Yuvarlanmamış değerler kullanılarak yapılan karşılaştırma şöyledir:

$$\frac{(M/R)_{\text{classical}}}{M_S/R_S} = \boxed{4.7 \times 10^2}.$$

Dolayısıyla Güneş'in oranı klasik öngöründen çok daha küçüktür. Hidrostatik model çerçevesinde, klasik füzyon sıcaklığı gereğinden çok yüksektir.

3a. Füzyon sıcaklığının kuantum tahmini

v_{rms} hızıyla hareket eden bir protonun de Broglie dalga boyu

$$\lambda_p = \frac{h}{m_p v_{rms}}.$$

(1a)'daki çarpışma enerjisi bağıntısı

$$d_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_p v_{rms}^2}.$$

sonucunu verir. Sorudaki füzyon koşulunu uygularsak,

$$d_c = \frac{\lambda_p}{\sqrt{2}},$$

şunu elde ederiz:

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_p v_{rms}^2} = \frac{h}{\sqrt{2} m_p v_{rms}},$$

ve dolayısıyla

$$v_{rms} = \frac{\sqrt{2} q^2}{4\pi\epsilon_0 h}.$$

$m_p v_{rms}^2 = 3kT_c$ bağıntısını kullanırsak,

$$T_c = \frac{m_p}{3k} \left(\frac{\sqrt{2} q^2}{4\pi\epsilon_0 h} \right)^2.$$

Böylece,

$$T_c = \frac{m_p q^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2}.$$

3b. Kuantum sıcaklığının sayısal değeri

Verilen sabitleri yerine koyarsak,

$$T_c = \frac{(1.7 \times 10^{-27})(1.6 \times 10^{-19})^4}{24\pi^2 (8.9 \times 10^{-12})^2 (1.4 \times 10^{-23})(6.6 \times 10^{-34})^2},$$

buradan

$$T_c = 9.7 \times 10^6 \text{ K}.$$

Buna karşılık gelen proton rms sürati $4.9 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ 'dir.

3c. Kuantum sıcaklığı kullanılarak kütlenin yarıçapa oranı

(2b)'yi (3b)'deki sıcaklıkla kullanırsak,

$$\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p} = 2.4 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}.$$

Güneş değerine oranı

$$\frac{M/R}{M_S/R_S} = 0.84.$$

Dolayısıyla öngörü, Güneş değerinin yaklaşık 16% altındadır; kullanılan büyüklük mertebesi yaklaşımları için bu, iyi bir uyumdur.

4a. Ortak kütle/yarıçap oranı

Bu model çerçevesinde, hidrojen füzyonu her yıldızda aynı karakteristik sıcaklığa sahiptir. (2b) ile (3a)'yı birleştirecek,

$$\frac{M}{R} = \frac{2k}{Gm_p} \frac{m_p q^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2}.$$

m_p ve k çarpanları sadeleşir:

$$\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 G h^2}.$$

Bu yalnızca fiziksel sabitlere bağlıdır. Sonraki kısımlar için bu ortak oranı şöyle gösterelim:

$$A \equiv \frac{q^4}{12\pi^2\epsilon_0^2 G h^2}, \quad M = AR.$$

5a. Ortalama elektron sayı yoğunluğu

Her hidrojen protonuna bir elektron karşılık gelir. Elektron kütesini ihmal edersek,

$$N_e = N_p \simeq \frac{M}{m_p}.$$

Hacmi $V = 4\pi R^3/3$ olan düzgün yoğunluklu küresel bir yıldız için,

$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{3M}{4\pi m_p R^3}.$$

5b. Elektronlar arasındaki tipik uzaklık

Elektron başına düşen tipik hacim $1/n_e$ 'dir. Bunun köp kökünü karakteristik uzaklık olarak alırsak,

$$d_e \simeq n_e^{-1/3} = \left(\frac{4\pi m_p R^3}{3M} \right)^{1/3}.$$

5c. En küçük normal yıldızın yarıçapı

Elektronlar için eşbölüşüm ilkesi

$$m_e v_{e,rms}^2 = 3kT_c.$$

bağıntısını verir. Dolayısıyla karakteristik de Broglie dalga boyları

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e v_{e,rms}} = \frac{h}{\sqrt{3m_e kT_c}}.$$

Elektron dejenerasyonundan kaçınmak için verilen koşul şu hâle gelir:

$$d_e \geq \frac{\lambda_e}{\sqrt{2}} = \frac{h}{\sqrt{6m_e kT_c}}.$$

Uzaklık formülünde $M = AR$ kullanıldığında,

$$d_e^3 = \frac{4\pi m_p R^2}{3A}.$$

Böylece, modelin kütle-yarıçap ilişkisi boyunca uzaklık $R^{2/3}$ ile orantılı olarak azalır. İzin verilen en küçük yarıçap, eşitlik durumunda elde edilir:

$$\frac{4\pi m_p R_{\min}^2}{3A} = \left(\frac{h}{\sqrt{6m_e kT_c}} \right)^3.$$

Buradan

$$R_{\min}^2 = \frac{3Ah^3}{4\pi m_p (6m_e kT_c)^{3/2}}.$$

Önce $A = 2kT_c/(Gm_p)$ ifadesini yerine koyalım:

$$R_{\min}^2 = \frac{h^3}{4\pi G m_p^2 m_e^{3/2} \sqrt{6kT_c}}.$$

(3a)'dan,

$$\sqrt{6kT_c} = \frac{q^2 \sqrt{m_p}}{2\pi\epsilon_0 h}.$$

Dolayısıyla,

$$R_{\min}^2 = \frac{\epsilon_0 h^4}{2Gq^2 m_p^{5/2} m_e^{3/2}},$$

ya da

$$R_{\min} = \left(\frac{\epsilon_0 h^4}{2Gq^2 m_p^{5/2} m_e^{3/2}} \right)^{1/2}.$$

$M = AR$ ilişkisi boyunca daha küçük bir yarıçap için, belirtilen ölçüte göre elektron dalgaları örtüşür ve varsayılan ideal gaz betimlemesi geçerliliğini yitirir.

5d. En küçük yarıçapın sayısal değeri

Değerler yerine konulduğunda

$$R_{\min} = 6.9 \times 10^7 \text{ m}.$$

Yuvarlanmamış sonucu verilen Güneş yarıçapına bölersek,

$$\frac{R_{\min}}{R_S} = 0.099.$$

Dolayısıyla bu modeldeki en küçük normal yıldızın yarıçapı, Güneş yarıçapının yaklaşık onda biridir.

5e. En küçük kütlenin sayısal değeri

A sabit ve pozitif olmak üzere $M = AR$ olduğundan, en küçük yarıçap aynı zamanda en küçük kütleyi verir:

$$M_{\min} = AR_{\min} = \frac{q^4 R_{\min}}{12\pi^2 \epsilon_0^2 G h^2}.$$

Sayısal olarak,

$$M_{\min} = 1.7 \times 10^{29} \text{ kg}, \quad \frac{M_{\min}}{M_S} = 0.083.$$

6a. Helyum füzyonu

Bir helyum çekirdeğinin kütlesi $m_{He} \simeq 4m_p$, yükü ise $Q_{He} = 2q$ 'dur. De Broglie dalga boyu

$$\lambda_{He} = \frac{h}{4m_p v_{rms}(He)}.$$

Buna karşılık gelen füzyon koşulu

$$d_c(He) = \frac{\lambda_{He}}{\sqrt{2}} = \frac{h}{4\sqrt{2} m_p v_{rms}(He)}.$$

Eşit büyüklükte ve zıt yönlü rms hızlarıyla birbirine yaklaşan iki helyum çekirdeği için enerjinin korunumu

$$4m_p v_{rms}(He)^2 = \frac{(2q)^2}{4\pi\epsilon_0 d_c(He)}.$$

bağıntısını verir. Füzyon koşulunu yerine koyup sadeleştirirsek,

$$v_{rms}(He) = \frac{\sqrt{2} q^2}{\pi\epsilon_0 h}.$$

Bu, (3a)'da elde edilen proton süratinin dört katıdır; dolayısıyla

$$v_{rms}(He) = 2.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}.$$

Eşbölüşüm ilkesi şimdi

$$T(He) = \frac{4m_p v_{rms}(He)^2}{3k}.$$

bağıntısını verir. Kütle dört kat ve sürat dört kat olduğundan,

$$T(He) = 4(4^2)T_c = 64T_c,$$

burada T_c , (3b)'deki hidrojen füzyon sıcaklığıdır. Dolayısıyla,

$$T(He) = \frac{8m_p q^4}{3\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2} = 6.2 \times 10^8 \text{ K}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.