

IPhO 2009

Теоретические задачи и решения · Мерида, Мексика · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipro/2009/

Задача 1: Эволюция системы Земля—Луна

Учёные могут определять расстояние между Землёй и Луной с высокой точностью. Для этого они направляют лазерный луч на специальные зеркала, установленные на поверхности Луны astronautами в 1969 году, и измеряют время прохождения света туда и обратно (см. рисунок 1).



Рисунок 1. Лазерный луч, посылаемый из обсерватории, используется для точного измерения расстояния между Землёй и Луной.

С помощью этих наблюдений было непосредственно установлено, что Луна медленно удаляется от Земли. Иными словами, расстояние между Землёй и Луной со временем увеличивается. Это происходит потому, что под действием моментов приливных сил Земля передаёт Луне момент импульса, см. рисунок 2. В этой задаче вы определите основные параметры данного явления.

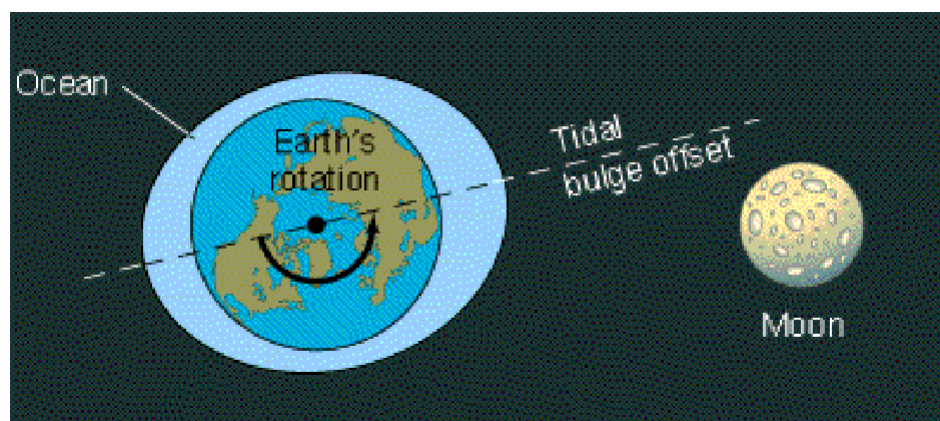


Рисунок 2. Притяжение Луны вызывает приливные деформации, или «горбы», на Земле. Из-за вращения Земли прямая, проходящая через эти горбы, не совпадает с прямой, соединяющей Землю и Луну. Это несовпадение приводит к возникновению момента сил, который передаёт момент импульса от собственного вращения Земли орбитальному движению Луны. Масштаб на рисунке не соблюлён.

1. Сохранение момента импульса.

Пусть L_1 — полный момент импульса системы Земля—Луна в настоящее время. Примем следующие предположения: i) L_1 представляет собой сумму только момента импульса вращения Земли вокруг своей оси и момента импульса орбитального движения Луны вокруг Земли. ii) Орбита Луны круговая, а Луну можно считать материальной точкой. iii) Ось вращения Земли и ось орбитального движения Луны параллельны. iv) Для упрощения вычислений будем считать, что движение происходит вокруг центра Земли, а не вокруг центра масс. Во всей задаче все моменты инерции, моменты сил и моменты импульса определяются относительно оси Земли. v) Влиянием Солнца пренебрегаем.

Часть	Вопрос	Баллы
1a	Запишите уравнение для полного момента импульса системы Земля—Луна в настоящее время. Выразите его через I_E — момент инерции Земли; ω_{E1} — нынешнюю угловую частоту вращения Земли; I_{M1} — нынешний момент инерции Луны относительно оси Земли; и ω_{M1} — нынешнюю угловую частоту орбитального движения Луны.	0.2

Этот процесс передачи момента импульса завершится, когда период вращения Земли и период обращения Луны вокруг Земли станут одинаковыми. Тогда приливные горбы, создаваемые Луной на Земле, расположатся на прямой, соединяющей Луну и Землю, и момент сил исчезнет.

Часть	Вопрос	Баллы
1b	Запишите уравнение для конечного полного момента импульса L_2 системы Земля—Луна. Используйте те же предположения, что и в вопросе 1a. Выразите его через I_E — момент инерции Земли; ω_2 — конечную угловую частоту вращения Земли и орбитального движения Луны; и I_{M2} — конечный момент инерции Луны.	0.2

Часть	Вопрос	Баллы
1с	Пренебрегая вкладом вращения Земли в конечный полный момент импульса, запишите уравнение, выражающее закон сохранения момента импульса для этой задачи.	0.3

2. Конечное расстояние и конечная угловая частота системы Земля—Луна.

Считайте, что уравнение движения по круговой орбите под действием гравитации (для Луны вокруг Земли) выполняется всегда. Пренебрегайте вкладом вращения Земли в конечный полный момент импульса.

Часть	Вопрос	Баллы
2а	Запишите уравнение движения Луны по круговой орбите вокруг Земли под действием гравитации в конечном состоянии через M_E , ω_2 , G и конечное расстояние D_2 между Землёй и Луной. Здесь M_E — масса Земли, а G — гравитационная постоянная.	0.2

Часть	Вопрос	Баллы
2b	Запишите уравнение для конечного расстояния D_2 между Землёй и Луной через известные параметры: L_1 — полный момент импульса системы, M_E и M_M — массы Земли и Луны соответственно, и G .	0.5

Часть	Вопрос	Баллы
2с	Запишите уравнение для конечной угловой частоты ω_2 системы Земля—Луна через известные параметры L_1 , M_E , M_M и G .	0.5

Ниже вам будет предложено найти численные значения D_2 и ω_2 . Для этого необходимо знать момент инерции Земли.

Часть	Вопрос	Баллы
2d	Запишите уравнение для момента инерции Земли I_E , считая её шаром с плотностью внутренней области ρ_i от центра до радиуса r_i и плотностью внешней области ρ_o от радиуса r_i до поверхности на радиусе r_o (см. рисунок 3).	0.5

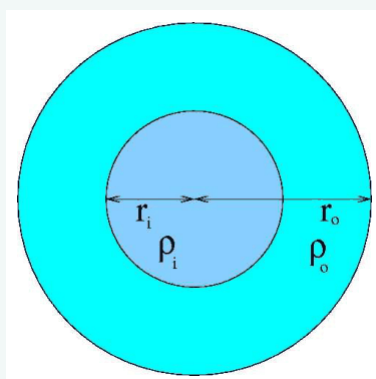


Рисунок 3. Земля как шар с двумя плотностями, ρ_i и ρ_o .

Все искомые численные значения в этой задаче определяйте с точностью до двух значащих цифр.

Часть	Вопрос	Баллы
2e	Вычислите момент инерции Земли I_E , используя $\rho_i = 1.3 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$, $r_i = 3.5 \times 10^6 \text{ m}$, $\rho_o = 4.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ и $r_o = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$.	0.2

Массы Земли и Луны равны соответственно $M_E = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$ и $M_M = 7.3 \times 10^{22} \text{ kg}$. Нынешнее расстояние между Землёй и Луной составляет $D_1 = 3.8 \times 10^8 \text{ m}$. Нынешняя угловая частота вращения Земли равна $\omega_{E1} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Нынешняя угловая частота орбитального движения Луны вокруг Земли равна $\omega_{M1} = 2.7 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, а гравитационная постоянная равна $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

Часть	Вопрос	Баллы
2f	Вычислите численное значение полного момента импульса системы L_1 .	0.2

Часть	Вопрос	Баллы
2g	Найдите конечное расстояние D_2 в метрах и в единицах нынешнего расстояния D_1 .	0.3

Часть	Вопрос	Баллы
2h	Найдите конечную угловую частоту ω_2 в s^{-1} , а также конечную продолжительность суток в единицах нынешних суток.	0.3

Убедитесь, что пренебрежение вкладом вращения Земли в конечный полный момент импульса оправданно, найдя отношение конечного момента импульса Земли к конечному моменту импульса Луны. Эта величина должна быть малой.

Часть	Вопрос	Баллы
2i	Найдите отношение конечного момента импульса Земли к конечному моменту импульса Луны.	0.2

3. На сколько Луна удаляется за год?

Теперь вы найдёте, на сколько Луна удаляется от Земли за каждый год. Для этого потребуется выражение для момента сил, действующего на Луну в настоящее время. Предположите, что приливные горбы можно приближённо представить двумя материальными точками, каждая массой m , расположенными на поверхности Земли, см. рис. 4. Пусть θ — угол между прямой, проходящей через горбы, и прямой, соединяющей центры Земли и Луны.

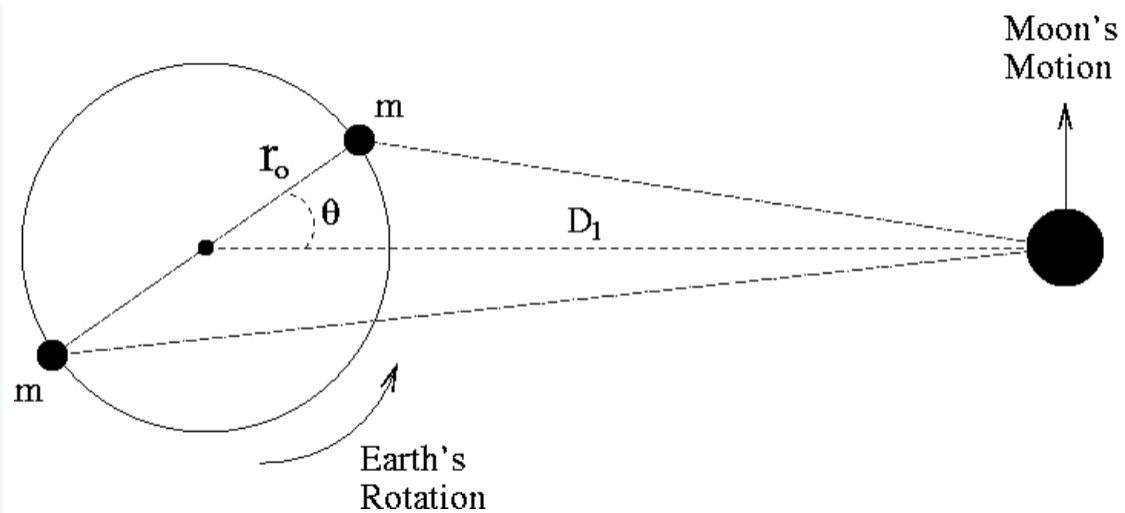


Рисунок 4. Схема для оценки момента сил, с которым горбы на Земле действуют на Луну. Масштаб на рисунке не соблюден.

Часть	Вопрос	Баллы
3a	Найдите F_c — модуль силы, с которой ближайшая материальная точка действует на Луну.	0.4

Часть	Вопрос	Баллы
3b	Найдите F_f — модуль силы, с которой наиболее удалённая материальная точка действует на Луну.	0.4

Теперь можно вычислить моменты сил, создаваемые материальными точками.

Часть	Вопрос	Баллы
3c	Найдите модуль τ_c — момента силы, создаваемого ближайшей материальной точкой.	0.4

Часть	Вопрос	Баллы
3d	Найдите модуль τ_f — момента силы, создаваемого наиболее удалённой материальной точкой.	0.4

Часть	Вопрос	Баллы
3e	Найдите модуль полного момента сил τ , создаваемого двумя массами. Поскольку $r_o \ll D_1$, получите приближённое выражение в низшем ненулевом порядке по r_o/D_1 . Можно использовать соотношение $(1+x)^a \approx 1+ax$, если $x \ll 1$.	1.0

Часть	Вопрос	Баллы
3f	Вычислите численное значение полного момента сил τ , учитывая, что $\theta = 3^\circ$ и $m = 3.6 \times 10^{16} \text{ kg}$ (обратите внимание, что эта масса составляет величину порядка 10^{-8} массы Земли).	0.5

Поскольку момент сил равен скорости изменения момента импульса со временем, найдите нынешнее увеличение расстояния между Землёй и Луной за год. Для этого выразите момент импульса Луны только через M_M , M_E , D_1 и G .

Часть	Вопрос	Баллы
3g	Найдите нынешнее увеличение расстояния между Землёй и Луной за год.	1.0

Наконец, оцените, на сколько увеличивается продолжительность суток за каждый год.

Часть	Вопрос	Баллы
3h	Найдите уменьшение ω_{E1} за год и нынешнее увеличение продолжительности суток за каждый год.	1.0

4. Куда уходит энергия?

В отличие от момента импульса, который сохраняется, полная энергия системы (энергия вращения плюс гравитационная энергия) не сохраняется. Мы рассмотрим это в последнем разделе.

Часть	Вопрос	Баллы
4a	Запишите уравнение для полной энергии (энергии вращения плюс гравитационной энергии) системы Земля—Луна в настоящее время, E . Выразите её только через I_E , ω_{E1} , M_M , M_E , D_1 и G .	0.4

Часть	Вопрос	Баллы
4b	Запишите уравнение для изменения энергии E , ΔE , как функции изменений D_1 и ω_{E1} . Вычислите численное значение ΔE за год, используя значения изменений D_1 и ω_{E1} , найденные в вопросах 3g и 3h.	0.4

Убедитесь, что эта потеря энергии согласуется с оценкой энергии, рассеиваемой в виде тепла при приливах, вызываемых Луной на Земле. Предположите, что приливы поднимают в среднем на 0.5 м слой воды глубиной $h = 0.5$ m, покрывающий поверхность Земли (для простоты считайте, что вся поверхность Земли покрыта водой). Это происходит дважды в сутки. Предположите также, что при опускании воды 10% этой гравитационной энергии рассеивается в виде тепла вследствие вязкости. Примите плотность воды равной $\rho_{\text{water}} = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, а ускорение свободного падения на поверхности Земли равным $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$.

Часть	Вопрос	Баллы
4c	Какова масса этого поверхностного слоя воды?	0.2

Часть	Вопрос	Баллы
4d	Вычислите, сколько энергии рассеивается за год. Как это значение соотносится с энергией, теряемой системой Земля—Луна за год в настоящее время?	0.3

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Для сил и моментов сил, создаваемых приливными горбами, введём расстояния

$$d_c = \sqrt{D_1^2 + r_o^2 - 2D_1r_o \cos \theta}, \quad d_f = \sqrt{D_1^2 + r_o^2 + 2D_1r_o \cos \theta}.$$

Обозначим через T_1 и T_2 нынешнюю и конечную продолжительность суток. Численные результаты приведены с двумя значащими цифрами.

- **1a:** $L_1 = I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1}$.
- **1b:** $L_2 = (I_E + I_{M2}) \omega_2$.
- **1c:** $I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1} = L_1 \simeq I_{M2} \omega_2$.
- **2a:** $\omega_2^2 D_2^3 = G M_E$.
- **2b:** $D_2 = \frac{L_1^2}{G M_E M_M^2}$.
- **2c:** $\omega_2 = \frac{G^2 M_E^2 M_M^3}{L_1^3}$.
- **2d:** $I_E = \frac{8\pi}{15} [\rho_i r_i^5 + \rho_o (r_o^5 - r_i^5)]$.
- **2e:** $I_E = 8.0 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$.
- **2f:** $L_1 = 3.4 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$.
- **2g:** $D_2 = 5.5 \times 10^8 \text{ m} = 1.4 D_1$.
- **2h:** $\omega_2 = 1.6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $T_2/T_1 = 47$.
- **2i:** $\frac{L_{E2}}{L_{M2}} = \frac{I_E}{M_M D_2^2} = 3.6 \times 10^{-3}$.
- **3a:** $F_c = \frac{G M_M m}{d_c^2}$.
- **3b:** $F_f = \frac{G M_M m}{d_f^2}$.
- **3c:** $\tau_c = \frac{G M_M m D_1 r_o \sin \theta}{d_c^3}$.
- **3d:** $\tau_f = \frac{G M_M m D_1 r_o \sin \theta}{d_f^3}$.
- **3e:** $\tau = \tau_c - \tau_f \simeq \frac{3 G M_M m r_o^2}{D_1^3} \sin(2\theta)$, направлен вдоль орбитального момента импульса Луны.
- **3f:** $\tau = 4.1 \times 10^{16} \text{ N m}$.
- **3g:** $\dot{D}_1 = \frac{2\tau}{M_M} \sqrt{\frac{D_1}{G M_E}} = 3.5 \times 10^{-2} \text{ m yr}^{-1} = 3.5 \text{ cm yr}^{-1}$.
- **3h:** За один год $\Delta \omega_{E1} = -1.6 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}$ и $\Delta T_1 = +1.9 \times 10^{-5} \text{ s}$.
- **4a:** $E = \frac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 - \frac{G M_E M_M}{2 D_1}$.
- **4b:** $\Delta E \simeq I_E \omega_{E1} \Delta \omega_{E1} + \frac{G M_E M_M}{2 D_1^2} \Delta D_1 = -9.1 \times 10^{19} \text{ J}$ за один год.
- **4c:** $M_{\text{water}} = 4\pi r_o^2 h \rho_{\text{water}} = 2.6 \times 10^{17} \text{ kg}$.
- **4d:** $E_{\text{heat, yr}} = 9.2 \times 10^{19} \text{ J}$, что хорошо согласуется с потерей механической энергии $9.1 \times 10^{19} \text{ J}$ за год.

Решение

Во всех вычислениях используются предположения, сформулированные в условии. Численные результаты округляются только в конце. Для годовых изменений примем

$$t_{\text{yr}} = 365 \times 24 \times 3600 \text{ s.}$$

1a. Нынешний момент импульса

Вращение Земли и обращение Луны происходят в одном направлении вокруг параллельных осей, поэтому их моменты импульса складываются:

$$L_1 = I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1}.$$

Поскольку Луна рассматривается как материальная точка на расстоянии D_1 от оси Земли,

$$I_{M1} = M_M D_1^2.$$

1b. Конечный момент импульса

В конечном синхронизированном состоянии обе угловые частоты равны ω_2 . Следовательно,

$$L_2 = I_E \omega_2 + I_{M2} \omega_2 = (I_E + I_{M2}) \omega_2, \quad I_{M2} = M_M D_2^2.$$

1c. Сохранение момента импульса

В рассматриваемой модели внешний момент сил отсутствует. Моменты приливных сил передают момент импульса внутри системы, поэтому $L_1 = L_2$.

Пренебрегая только вкладом вращения Земли в *конечном* состоянии, получаем

$$I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1} \simeq I_{M2} \omega_2.$$

Вклад нынешнего вращения Земли по-прежнему необходимо учитывать в L_1 .

2a. Уравнение круговой орбиты

Гравитационная сила сообщает Луне центростремительное ускорение:

$$\frac{GM_E M_M}{D_2^2} = M_M \omega_2^2 D_2.$$

Сокращая M_M , получаем

$$\omega_2^2 D_2^3 = GM_E.$$

2b. Конечное расстояние

В приближении пункта 1c

$$L_1 = M_M D_2^2 \omega_2.$$

Используя $\omega_2 = \sqrt{GM_E / D_2^3}$, получаем

$$L_1 = M_M \sqrt{GM_E D_2}.$$

Возводя в квадрат и решая уравнение, находим

$$D_2 = \frac{L_1^2}{GM_E M_M^2}.$$

2с. Конечная угловая частота

Подстановка предыдущего результата в уравнение круговой орбиты даёт

$$\omega_2 = \sqrt{GM_E} \left(\frac{GM_E M_M^2}{L_1^2} \right)^{3/2}.$$

Следовательно,

$$\omega_2 = \frac{G^2 M_E^2 M_M^3}{L_1^3}.$$

2d. Момент инерции Земли

Для тонкого сферического слоя радиуса r , плотности ρ и толщины dr имеем

$$dm = 4\pi\rho r^2 dr, \quad dI = \frac{2}{3}r^2 dm = \frac{8\pi}{3}\rho r^4 dr.$$

Интегрируя по двум областям с разными плотностями, получаем

$$I_E = \frac{8\pi}{3} \left[\rho_i \int_0^{r_i} r^4 dr + \rho_o \int_{r_i}^{r_o} r^4 dr \right].$$

Таким образом,

$$I_E = \frac{8\pi}{15} [\rho_i r_i^5 + \rho_o (r_o^5 - r_i^5)].$$

2е. Численное значение момента инерции

Подставляя заданные плотности и радиусы, получаем

$$I_E = \frac{8\pi}{15} [(1.3 \times 10^4)(3.5 \times 10^6)^5 + (4.0 \times 10^3) ((6.4 \times 10^6)^5 - (3.5 \times 10^6)^5)] \text{ kg m}^2.$$

Отсюда

$$I_E = 8.0 \times 10^{37} \text{ kg m}^2.$$

2f. Нынешний полный момент импульса

Используя заданные нынешние угловые частоты, получаем

$$L_1 = I_E \omega_{E1} + M_M D_1^2 \omega_{M1}.$$

Два вклада равны

$$I_E \omega_{E1} = 5.8 \times 10^{33} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}, \\ M_M D_1^2 \omega_{M1} = 2.8 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Складывая их без округления промежуточных значений, получаем

$$L_1 = 3.4 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

2g. Численное значение конечного расстояния

Используя результат пункта 2b и неокруглённое значение L_1 , получаем

$$D_2 = \frac{L_1^2}{GM_E M_M^2} = 5.5 \times 10^8 \text{ m.}$$

По отношению к нынешнему расстоянию

$$\frac{D_2}{D_1} = 1.4.$$

2h. Конечная частота и продолжительность суток

Из пункта 2с

$$\omega_2 = 1.6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}.$$

Поскольку период вращения равен $T = 2\pi/\omega$,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi/\omega_2}{2\pi/\omega_{E1}} = \frac{\omega_{E1}}{\omega_2}.$$

Использование неокруглённых промежуточных значений даёт

$$T_2 = 47T_1,$$

то есть конечные сутки делятся 47 нынешних суток.

2i. Проверка допустимости пренебрежения конечным собственным вращением

Оба конечных момента импульса содержат одну и ту же угловую частоту:

$$\frac{L_{E2}}{L_{M2}} = \frac{I_E \omega_2}{M_M D_2^2 \omega_2} = \frac{I_E}{M_M D_2^2}.$$

Численно

$$\frac{L_{E2}}{L_{M2}} = 3.6 \times 10^{-3}.$$

Конечный момент импульса собственного вращения Земли составляет всего 0.36% орбитального момента импульса Луны, что оправдывает пренебрежение им.

3a. Сила со стороны ближайшего горба

Выберем центр Земли в качестве начала координат, поместим Луну в точку $(D_1, 0)$ и направим положительную ось y вдоль мгновенного движения Луны. Ближайший горб находится в точке

$$(r_o \cos \theta, r_o \sin \theta).$$

Поэтому его расстояние от Луны определяется выражением

$$d_c^2 = (D_1 - r_o \cos \theta)^2 + (r_o \sin \theta)^2 = D_1^2 + r_o^2 - 2D_1 r_o \cos \theta.$$

Закон всемирного тяготения Ньютона даёт

$$F_c = \frac{GM_M m}{D_1^2 + r_o^2 - 2D_1 r_o \cos \theta}.$$

3b. Сила со стороны наиболее удалённого горба

Дальний горб находится в точке

$$(-r_o \cos \theta, -r_o \sin \theta).$$

Следовательно,

$$d_f^2 = (D_1 + r_o \cos \theta)^2 + (r_o \sin \theta)^2 = D_1^2 + r_o^2 + 2D_1 r_o \cos \theta,$$

и

$$F_f = \frac{GM_M m}{D_1^2 + r_o^2 + 2D_1 r_o \cos \theta}.$$

3с. Момент силы со стороны ближайшего горба

В момент силы относительно оси Земли вносит вклад только составляющая силы, перпендикулярная прямой Земля—Луна. Для ближнего горба

$$F_{c,y} = F_c \frac{r_o \sin \theta}{d_c}.$$

Момент этой силы положителен и направлен вдоль орбитального момента импульса Луны:

$$\tau_c = D_1 F_{c,y}.$$

Таким образом, его модуль равен

$$\tau_c = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{(D_1^2 + r_o^2 - 2D_1 r_o \cos \theta)^{3/2}}.$$

3д. Момент силы со стороны наиболее удалённого горба

Дальний горб притягивает Луну в отрицательном направлении оси y :

$$F_{f,y} = -F_f \frac{r_o \sin \theta}{d_f}.$$

Момент этой силы противоположен моменту силы со стороны ближнего горба. Его модуль равен

$$\tau_f = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{(D_1^2 + r_o^2 + 2D_1 r_o \cos \theta)^{3/2}}.$$

3е. Полный момент сил в низшем ненулевом порядке

Поскольку $d_c < d_f$, ближний горб создаёт больший момент силы. Для изображённого расположения

$$\tau = \tau_c - \tau_f = GM_M m D_1 r_o \sin \theta \left(\frac{1}{d_c^3} - \frac{1}{d_f^3} \right).$$

Введём $\epsilon = r_o/D_1 \ll 1$. Тогда

$$\frac{1}{d_c^3} = \frac{1}{D_1^3} (1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \cos \theta)^{-3/2} \simeq \frac{1}{D_1^3} (1 + 3\epsilon \cos \theta),$$

и

$$\frac{1}{d_f^3} = \frac{1}{D_1^3} (1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos \theta)^{-3/2} \simeq \frac{1}{D_1^3} (1 - 3\epsilon \cos \theta).$$

Члены нулевого порядка сокращаются, и остаётся

$$\tau \simeq GM_M m D_1 r_o \sin \theta \frac{6r_o \cos \theta}{D_1^4}.$$

Следовательно,

$$\tau \simeq \frac{6GM_M m r_o^2}{D_1^3} \sin \theta \cos \theta = \frac{3GM_M m r_o^2}{D_1^3} \sin(2\theta).$$

Этот момент сил увеличивает орбитальный момент импульса Луны.

3f. Численное значение момента сил

При $\theta = 3^\circ$

$$\tau \simeq \frac{3(6.7 \times 10^{-11})(7.3 \times 10^{22})(3.6 \times 10^{16})(6.4 \times 10^6)^2}{(3.8 \times 10^8)^3} \sin 6^\circ.$$

Отсюда

$$\tau = 4.1 \times 10^{16} \text{ N m.}$$

3g. Нынешнее удаление Луны

Для круговой орбиты на расстоянии D

$$\omega_M = \sqrt{\frac{GM_E}{D^3}},$$

поэтому момент импульса Луны равен

$$L_M = M_M D^2 \omega_M = M_M \sqrt{GM_E D}.$$

Дифференцируя по времени, получаем

$$\tau = \frac{dL_M}{dt} = \frac{M_M}{2} \sqrt{\frac{GM_E}{D}} \dot{D}.$$

Таким образом, при нынешнем расстоянии

$$\dot{D}_1 = \frac{2\tau}{M_M} \sqrt{\frac{D_1}{GM_E}}.$$

Численно

$$\dot{D}_1 = 1.1 \times 10^{-9} \text{ m s}^{-1}.$$

Увеличение за один год равно

$$\Delta D_1 = \dot{D}_1 t_{\text{yr}},$$

что даёт

$$\Delta D_1 = 3.5 \times 10^{-2} \text{ m} = 3.5 \text{ cm} \quad \text{за один год.}$$

3h. Замедление вращения Земли и увеличение продолжительности суток

Момент сил, действующий на Землю, противоположен моменту сил, действующему на Луну. При постоянном I_E

$$I_E \dot{\omega}_E = -\tau.$$

Следовательно,

$$\dot{\omega}_{E1} = -\frac{\tau}{I_E} = -5.2 \times 10^{-22} \text{ s}^{-2},$$

а изменение за один год равно

$$\Delta\omega_{E1} = -\frac{\tau t_{\text{yr}}}{I_E} = -1.6 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}.$$

Поскольку $T_E = 2\pi/\omega_E$, для малого изменения выполняется

$$\Delta T_E \simeq -\frac{2\pi}{\omega_E^2} \Delta\omega_E.$$

Следовательно,

$$\Delta T_1 = \frac{2\pi\tau t_{\text{yr}}}{I_E\omega_{E1}^2} = 1.9 \times 10^{-5} \text{ s} \quad \text{за один год.}$$

Продолжительность суток увеличивается примерно на $19 \mu\text{s}$ за год.

4а. Нынешняя механическая энергия

Механическая энергия состоит из кинетической энергии собственного вращения Земли, кинетической энергии орбитального движения Луны и их гравитационной потенциальной энергии:

$$E = \frac{1}{2}I_E\omega_{E1}^2 + \frac{1}{2}M_M D_1^2\omega_{M1}^2 - \frac{GM_E M_M}{D_1}.$$

Соотношение для круговой орбиты даёт

$$\frac{1}{2}M_M D_1^2\omega_{M1}^2 = \frac{GM_E M_M}{2D_1}.$$

Отсюда

$$E = \frac{1}{2}I_E\omega_{E1}^2 - \frac{GM_E M_M}{2D_1}.$$

4б. Годовое изменение механической энергии

При изменениях $\Delta\omega_{E1}$ и ΔD_1 точная разность в рамках этой модели энергии равна

$$\Delta E = \frac{1}{2}I_E [(\omega_{E1} + \Delta\omega_{E1})^2 - \omega_{E1}^2] - \frac{GM_E M_M}{2} \left[\frac{1}{D_1 + \Delta D_1} - \frac{1}{D_1} \right].$$

Годовые относительные изменения чрезвычайно малы, поэтому, сохраняя члены первого порядка, получаем

$$\Delta E \simeq I_E\omega_{E1}\Delta\omega_{E1} + \frac{GM_E M_M}{2D_1^2}\Delta D_1.$$

Первый член отрицателен: Земля теряет энергию собственного вращения. Второй положителен: орбитальная энергия Луны увеличивается по мере расширения её орбиты.

Подставляя годовые изменения из пунктов 3г и 3h без округления их значений, получаем

$$\Delta E = -9.1 \times 10^{19} \text{ J} \quad \text{за один год.}$$

Баланс энергии можно также выразить непосредственно через момент сил:

$$\dot{E}_{\text{spin}} = -\tau\omega_{E1}.$$

Используя формулу для скорости удаления, получаем

$$\dot{E}_{\text{orbit}} = \frac{GM_E M_M}{2D_1^2} \dot{D}_1 = \tau \sqrt{\frac{GM_E}{D_1^3}}.$$

Таким образом,

$$\dot{E} = -\tau(\omega_{E1} - \omega_{M1}),$$

где ω_{M1} определяется соотношением для круговой орбиты. Поскольку Земля вращается быстрее, чем обращается Луна, механическая энергия уменьшается; разность превращается в тепло.

4с. Масса слоя воды

Поскольку слой очень тонок по сравнению с радиусом Земли, его объём равен произведению площади его поверхности на толщину:

$$V \simeq 4\pi r_o^2 h.$$

Следовательно,

$$M_{\text{water}} = 4\pi r_o^2 h \rho_{\text{water}} = 4\pi (6.4 \times 10^6)^2 (0.5) (10^3) \text{ kg}.$$

Отсюда

$$M_{\text{water}} = 2.6 \times 10^{17} \text{ kg}.$$

4d. Годовое рассеяние энергии в виде тепла

Заданная средняя высота подъёма равна $H = 0.5 \text{ m}$. Гравитационная энергия, приобретаемая слоем за один подъём, равна

$$E_{\text{rise}} = M_{\text{water}} g H.$$

Десять процентов рассеивается в виде тепла при последующем опускании. При двух циклах в сутки за год происходит 2×365 циклов:

$$E_{\text{heat, yr}} = 0.10(2 \times 365) M_{\text{water}} g H.$$

Подстановка даёт

$$E_{\text{heat, yr}} = 9.2 \times 10^{19} \text{ J}.$$

Это хорошо согласуется с потерей механической энергии

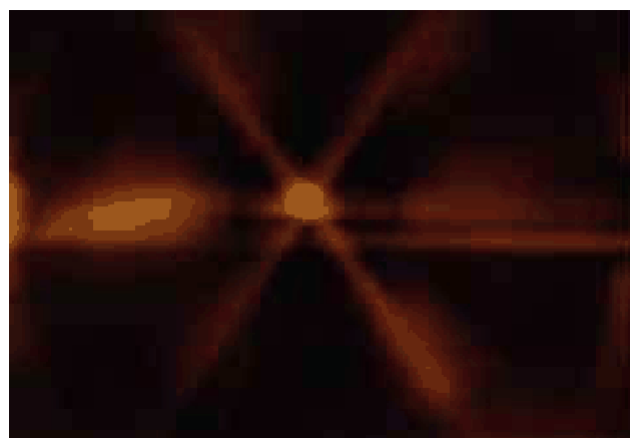
$$|\Delta E| = 9.1 \times 10^{19} \text{ J}$$

из пункта 4b. В рамках упрощённой модели приливная диссипация объясняет потерю механической энергии её превращением в тепло.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Доплеровское лазерное охлаждение и оптическая

Цель этой задачи — построить простую теорию, позволяющую понять явления так называемого «лазерного охлаждения» и «оптической патоки». Речь идёт об охлаждении пучка нейтральных атомов, обычно атомов щелочных металлов, встречными лазерными пучками одинаковой частоты. Эти исследования входят в число работ, за которые С. Чу, У. Филлипс и К. Коэн-Таннуджи были удостоены Нобелевской премии по физике в 1997 году.



На изображении выше показаны атомы натрия (яркое пятно в центре), удерживаемые на пересечении трёх взаимно перпендикулярных пар встречных лазерных пучков. Область удержания называется «оптической патокой», поскольку диссипативная оптическая сила напоминает силу вязкого сопротивления, действующую на тело, движущееся в патоке.

В этой задаче вы рассмотрите основные особенности взаимодействия фотона с атомом, на который он падает, и основы механизма диссипации в одномерном случае.

ЧАСТЬ I: ОСНОВЫ ЛАЗЕРНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ

Рассмотрим атом массой m , движущийся в направлении $+x$ со скоростью v . Для простоты будем считать задачу одномерной, то есть не будем учитывать направления y и z (см. рисунок 1). Атом имеет два внутренних энергетических уровня. Энергию основного состояния примем равной нулю, а энергию возбуждённого состояния — равной $\hbar\omega_0$, где $\hbar = h/2\pi$. Первоначально атом находится в основном состоянии. Лазерный пучок с частотой ω_L в лабораторной системе отсчёта направлен вдоль $-x$ и падает на атом. С квантово-механической точки зрения лазерное излучение состоит из большого числа фотонов, каждый из которых имеет энергию $\hbar\omega_L$ и импульс $-\hbar q$. Фотон может быть поглощён атомом, после чего атом может спонтанно испустить фотон; испускание может происходить с равными вероятностями в направлениях $+x$ и $-x$. Поскольку атом движется с нерелятивистской скоростью, $v/c \ll 1$ (где c — скорость света), сохраняйте только члены не выше первого порядка по этой величине. Считайте также, что $\hbar q/mv \ll 1$, то есть импульс атома намного больше импульса одного фотона. Записывая ответы, сохраняйте только поправки, линейные по каждой из указанных выше величин.

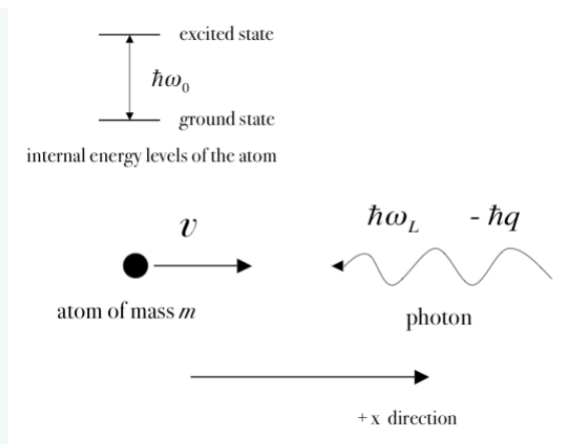


Рис. 1. Схема столкновения атома массой m , движущегося со скоростью v в направлении $+x$, с фотоном, имеющим энергию $\hbar\omega_L$ и импульс $-\hbar q$. Атом имеет два внутренних состояния с разностью энергий $\hbar\omega_0$.

Предположим, что частота лазера ω_L настроена так, что в системе отсчёта движущегося атома излучение находится в резонансе с внутренним переходом атома. Ответьте на следующие вопросы:

1. Поглощение.

1a	Запишите условие резонанса для поглощения фотона.	0.2
1b	Запишите импульс p_{at} атома после поглощения в лабораторной системе отсчёта.	0.2
1c	Запишите полную энергию ε_{at} атома после поглощения в лабораторной системе отсчёта.	0.2

2. Спонтанное испускание фотона в направлении $-x$.

Через некоторое время после поглощения падающего фотона атом может испустить фотон в направлении $-x$.

2a	Запишите энергию испущенного фотона ε_{ph} после процесса испускания в направлении $-x$ в лабораторной системе отсчёта.	0.2
2b	Запишите импульс испущенного фотона p_{ph} после процесса испускания в направлении $-x$ в лабораторной системе отсчёта.	0.2
2c	Запишите импульс атома p_{at} после процесса испускания в направлении $-x$ в лабораторной системе отсчёта.	0.2
2d	Запишите полную энергию атома ε_{at} после процесса испускания в направлении $-x$ в лабораторной системе отсчёта.	0.2

3. Спонтанное испускание фотона в направлении $+x$.

Через некоторое время после поглощения падающего фотона атом может вместо этого испустить фотон в направлении $+x$.

3a	Запишите энергию испущенного фотона ε_{ph} после процесса испускания в направлении $+x$ в лабораторной системе отсчёта.	0.2
3b	Запишите импульс испущенного фотона p_{ph} после процесса испускания в направлении $+x$ в лабораторной системе отсчёта.	0.2

3c	Запишите импульс атома p_{at} после процесса испускания в направлении $+x$ в лабораторной системе отсчёта.	0.2
3d	Запишите полную энергию атома ε_{at} после процесса испускания в направлении $+x$ в лабораторной системе отсчёта.	0.2

4. Усреднение по испусканию после поглощения.

Спонтанное испускание фотона в направлениях $-x$ и $+x$ происходит с одинаковой вероятностью. Учитывая это, ответьте на следующие вопросы.

4a	Запишите среднюю энергию испущенного фотона ε_{ph} после процесса испускания.	0.2
4b	Запишите средний импульс испущенного фотона p_{ph} после процесса испускания.	0.2
4c	Запишите среднюю полную энергию атома ε_{at} после процесса испускания.	0.2
4d	Запишите средний импульс атома p_{at} после процесса испускания.	0.2

5. Передача энергии и импульса.

Если рассматривать только полный однофотонный процесс поглощения–испускания, описанный выше, то в среднем между лазерным излучением и атомом происходит результирующий обмен импульсом и энергией.

5a	Запишите среднее изменение энергии $\Delta\varepsilon$ атома после полного однофотонного процесса поглощения–испускания.	0.2
5b	Запишите среднее изменение импульса Δp атома после полного однофотонного процесса поглощения–испускания.	0.2

6. Передача энергии и импульса лазерным пучком, направленным вдоль $+x$.

Теперь рассмотрим лазерный пучок с частотой ω'_L , падающий на атом в направлении $+x$, при этом атом также движется в направлении $+x$ со скоростью v . Предполагая, что в системе отсчёта атома выполняется условие резонанса между его внутренним переходом и лазерным излучением, ответьте на следующие вопросы:

6a	Запишите среднее изменение энергии $\Delta\varepsilon$ атома после полного однофотонного процесса поглощения–испускания.	0.3
6b	Запишите среднее изменение импульса Δp атома после полного однофотонного процесса поглощения–испускания.	0.3

ЧАСТЬ II: ДИССИПАЦИЯ И ОСНОВЫ ОПТИЧЕСКОЙ ПАТОКИ

Однако квантовым процессам присуща неопределённость, обусловленная самой природой. Поэтому тот факт, что атом может спонтанно испустить фотон через *конечное время* после поглощения, приводит к тому, что условие резонанса не обязано выполняться *точно*, как предполагалось выше. То есть частоты лазерных пучков ω_L и ω'_L могут принимать любые значения, и процесс поглощения–испускания всё равно может происходить. Такие процессы будут происходить с различными (квантовыми) вероятностями, причём, как и следовало ожидать, максимальная вероятность достигается при точном выполнении условия резонанса. Среднее время, проходящее между поглощением и испусканием в одном процессе, называется временем жизни возбуждённого энергетического уровня атома и обозначается Γ^{-1} .

Рассмотрим совокупность из N атомов, *покоящихся* в лабораторной системе отсчёта, и падающий на них лазерный пучок с частотой ω_L . Атомы непрерывно поглощают и испускают фотоны, так что в среднем в возбуждённом состоянии находится N_{exc} атомов (и, следовательно, в основном состоянии находится $N - N_{exc}$ атомов). Квантово-механический расчёт даёт следующий результат:

$$N_{exc} = N \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}$$

где ω_0 — резонансная частота атомного перехода, а Ω_R — так называемая частота Раби; Ω_R^2 пропорциональна *интенсивности* лазерного пучка. Как отмечалось выше, видно, что это число отлично от нуля даже тогда, когда резонансная частота ω_0 отличается от частоты лазерного пучка ω_L . Предыдущий результат можно также выразить следующим образом: число процессов поглощения–испускания в единицу времени равно $N_{exc}\Gamma$.

Рассмотрим физическую ситуацию, изображённую на рисунке 2: два встречных лазерных пучка с *одинаковой*, но *произвольной* частотой ω_L падают на газ из N атомов, движущихся в направлении $+x$ со скоростью v .

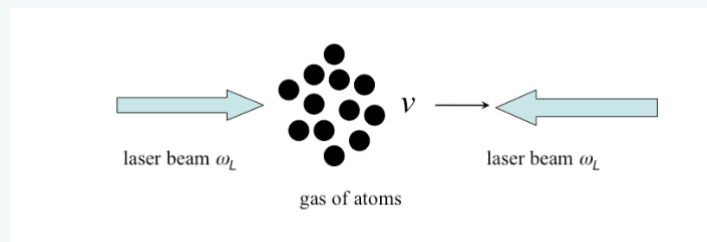


Рисунок 2. Два встречных лазерных пучка с *одинаковой*, но *произвольной* частотой ω_L падают на газ из N атомов, движущихся в направлении $+x$ со скоростью v .

7. Сила, действующая на атомный пучок со стороны лазеров.

7a	Используя полученные к этому моменту сведения, найдите силу, с которой лазеры действуют на атомный пучок. Считайте, что $mv \gg \hbar q$.	1.5
----	--	-----

8. Предел малых скоростей.

Теперь предположим, что скорость атомов достаточно мала, чтобы можно было разложить силу до первого порядка по v .

8a	Найдите выражение для силы из вопроса (7a) в этом пределе.	1.5
----	--	-----

Используя этот результат, можно найти условия, при которых лазерное излучение ускоряет атомы, замедляет их или вовсе не влияет на их движение.

8b	Запишите условие, при котором сила положительна (атомы ускоряются).	0.25
8c	Запишите условие, при котором сила равна нулю.	0.25
8d	Запишите условие, при котором сила отрицательна (атомы замедляются).	0.25
8e	Теперь рассмотрим атомы, движущиеся со скоростью $-v$ (в направлении $-x$). Запишите условие, при котором на атомы действует замедляющая сила.	0.25

9. Оптическая патока.

В случае отрицательной силы возникает диссипативная сила трения. Предположим, что первоначально, при $t = 0$, газ атомов имеет скорость v_0 .

9a	В пределе малых скоростей найдите скорость атомов после того, как лазерные пучки действовали в течение времени τ .	1.5
9b	Теперь предположим, что газ атомов находится в тепловом равновесии при температуре T_0 . Найдите температуру T после того, как лазерные пучки действовали в течение времени τ .	0.5

Эта модель не позволяет достичь сколь угодно низких температур.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Введём обозначения

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad q = \frac{\omega_L}{c}, \quad q' = \frac{\omega'_L}{c}, \quad K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Для части II введём обозначения

$$\Delta = \omega_0 - \omega_L, \quad D = \Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2, \quad \alpha = \frac{4\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 \Delta}{D^2}.$$

Для обоих пучков принимается одинаковое значение Ω_R .

В приведённых ниже величинах для фотонов сохранена первая доплеровская поправка. В величинах для атомов сохранена ведущая поправка на отдачу, а произведения v/c и $\hbar q/(mv)$ опущены. Малые поправки к импульсу до этого усечения приведены в решении. В энергиях атомов не учитывается постоянная энергия покоя.

- **1a:** $\omega_L(1 + \beta) = \omega_0$, или, что эквивалентно, $\omega_L + qv = \omega_0$.
- **1b:** $p_{at} = mv - \hbar q$.
- **1c:** $\varepsilon_{at} = K + \hbar\omega_L = K + \hbar\omega_0 - \hbar qv$.
- **2a:** $\varepsilon_{ph} = \hbar\omega_0(1 - \beta) \simeq \hbar\omega_L$.
- **2b:** $p_{ph} = -\frac{\hbar\omega_0}{c}(1 - \beta) \simeq -\hbar q$.
- **2c:** $p_{at} = mv$.
- **2d:** $\varepsilon_{at} = K$.
- **3a:** $\varepsilon_{ph} = \hbar\omega_0(1 + \beta) \simeq \hbar\omega_L(1 + 2\beta)$.
- **3b:** $p_{ph} = \frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + \beta) \simeq \hbar q(1 + 2\beta)$.
- **3c:** $p_{at} \simeq mv - 2\hbar q$.
- **3d:** $\varepsilon_{at} \simeq K - 2\hbar qv$.
- **4a:** $\langle \varepsilon_{ph} \rangle = \hbar\omega_0$.
- **4b:** $\langle p_{ph} \rangle = \frac{\hbar\omega_0 v}{c^2} \simeq \hbar q\beta$.
- **4c:** $\langle \varepsilon_{at} \rangle \simeq K - \hbar qv$.
- **4d:** $\langle p_{at} \rangle \simeq mv - \hbar q$.

- **5a:** $\Delta\varepsilon = -\frac{\hbar\omega_0 v}{c} \simeq -\hbar qv.$
- **5b:** $\Delta p \simeq -\hbar q.$
- **6a:** $\Delta\varepsilon = +\frac{\hbar\omega_0 v}{c} \simeq +\hbar q'v.$
- **6b:** $\Delta p \simeq +\hbar q'.$
- **7a:**

$$F(v) = N\hbar q\Gamma\Omega_R^2 \left[\frac{1}{(\Delta + qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} - \frac{1}{(\Delta - qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} \right].$$

- **8a:**

$$F(v) \simeq -N\alpha v = -\frac{4N\hbar q^2\Gamma\Omega_R^2(\omega_0 - \omega_L)}{[(\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2]^2} v.$$

- **8b:** $\omega_L > \omega_0.$
- **8c:** $\omega_L = \omega_0.$
- **8d:** $\omega_L < \omega_0.$
- **8e:** $\omega_L < \omega_0$; сила при этом направлена вдоль $+x$.
- **9a:** $v(\tau) = v_0 e^{-\alpha\tau/m}$, где $\alpha > 0$.
- **9b:** $T(\tau) = T_0 e^{-2\alpha\tau/m}$.

Решение

Связь между энергией и импульсом фотона даёт

$$\hbar\omega_L = c\hbar q, \quad q = \frac{\omega_L}{c}.$$

Обозначим два малых параметра следующим образом:

$$\beta = \frac{v}{c} \ll 1, \quad \eta = \frac{\hbar q}{mv} \ll 1.$$

Энергия отдачи $(\hbar q)^2/(2m)$ имеет второй порядок по η относительно начальной кинетической энергии атома, поэтому ею пренебрегаем. Изменение скорости атома после поглощения равно $-\hbar q/m$; его вклад в доплеровский множитель составляет

$$\frac{\hbar q}{mc} = \eta\beta,$$

и им также пренебрегаем.

Таким образом, при вычислении частот испущенных фотонов можно считать скорость испускающего атома равной v . Поправки к импульсу порядка $\hbar q\beta = mv\eta\beta$ приведены там, где это полезно, но опущены в результатах для атома, учитывающих лишь ведущий порядок отдачи.

1a. Условие резонанса

Для фотона, распространяющегося в направлении $-x$, частота, измеренная атомом, движущимся в направлении $+x$, в первом порядке равна

$$\omega_{\text{atom}} = \omega_L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega_L + qv.$$

Для резонанса необходимо, чтобы эта частота была равна ω_0 :

$$\boxed{\omega_L + qv = \omega_0}, \quad \boxed{\omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \omega_0}.$$

Это также следует из закона сохранения энергии:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \hbar\omega_L = \frac{(mv - \hbar q)^2}{2m} + \hbar\omega_0.$$

Пренебрегая энергией отдачи, получаем то же условие.

1b. Импульс атома после поглощения

Закон сохранения импульса даёт

$$\boxed{p_{at} = mv - \hbar q}.$$

1с. Энергия атома после поглощения

Атом получает энергию падающего фотона:

$$\boxed{\varepsilon_{at} = \frac{1}{2}mv^2 + \hbar\omega_L}.$$

Эквивалентное выражение получается при сложении его кинетической и внутренней энергий:

$$\varepsilon_{at} = \frac{(mv - \hbar q)^2}{2m} + \hbar\omega_0 \simeq \boxed{\frac{1}{2}mv^2 - \hbar qv + \hbar\omega_0}.$$

В силу условия резонанса эти выражения совпадают с точностью до сохраняемых членов.

В вопросах об испускании обозначим через $s = +1$ случай фотона, испущенного в направлении $+x$, а через $s = -1$ — фотона, испущенного в направлении $-x$. Если пренебречь отдачей при определении частоты перехода, энергия фотона в системе покоя испускающего атома равна $\hbar\omega_0$. Доплеровское преобразование в первом порядке даёт

$$\varepsilon_{ph}^{(s)} = \hbar\omega_0(1 + s\beta), \quad p_{ph}^{(s)} = s \frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + s\beta).$$

2a. Энергия фотона при испускании в направлении $-x$

Полагая $s = -1$, получаем

$$\boxed{\varepsilon_{ph}^{(-)} = \hbar\omega_0(1 - \beta)}.$$

Поскольку

$$\omega_L = \frac{\omega_0}{1 + \beta} \simeq \omega_0(1 - \beta),$$

это выражение принимает вид

$$\boxed{\varepsilon_{ph}^{(-)} \simeq \hbar\omega_L}.$$

2b. Импульс фотона при испускании в направлении $-x$

Используя $p_{ph} = -\varepsilon_{ph}/c$, получаем

$$\boxed{p_{ph}^{(-)} = -\frac{\hbar\omega_0}{c}(1 - \beta) \simeq -\hbar q}.$$

2с. Импульс атома после испускания в направлении $-x$

Закон сохранения импульса для полного процесса даёт

$$p_{at}^{(-)} = mv - \hbar q - p_{ph}^{(-)} \simeq mv - \hbar q + \hbar q.$$

Следовательно,

$$p_{at}^{(-)} = mv.$$

2d. Энергия атома после испускания в направлении $-x$

Испущенный фотон уносит энергию, переданную поглощённым фотоном:

$$\varepsilon_{at}^{(-)} = K + \hbar\omega_L - \varepsilon_{ph}^{(-)} \simeq K.$$

Таким образом,

$$\varepsilon_{at}^{(-)} = \frac{1}{2}mv^2.$$

3а. Энергия фотона при испускании в направлении $+x$

При $s = +1$

$$\varepsilon_{ph}^{(+)} = \hbar\omega_0(1 + \beta).$$

Используя $\omega_0 = \omega_L(1 + \beta)$, получаем

$$\varepsilon_{ph}^{(+)} \simeq \hbar\omega_L(1 + 2\beta).$$

3b. Импульс фотона при испускании в направлении $+x$

Импульс положителен:

$$p_{ph}^{(+)} = \frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + \beta) \simeq \hbar q(1 + 2\beta).$$

3с. Импульс атома после испускания в направлении $+x$

Временно сохраняя доплеровскую поправку к импульсу фотона, из закона сохранения импульса получаем

$$p_{at}^{(+)} = mv - \hbar q - \hbar q(1 + 2\beta) = mv - 2\hbar q - 2\hbar q\beta.$$

Последний член имеет относительный порядок $\eta\beta$ в импульсе атома. Опуская эту смешанную поправку, получаем

$$p_{at}^{(+)} \simeq mv - 2\hbar q.$$

3d. Энергия атома после испускания в направлении $+x$

Атом возвращается в основное состояние. Закон сохранения энергии даёт

$$\begin{aligned}\varepsilon_{at}^{(+)} &= K + \hbar\omega_L - \hbar\omega_0(1 + \beta) \\ &\simeq K + \hbar\omega_0(1 - \beta) - \hbar\omega_0(1 + \beta) \\ &= K - 2\hbar\omega_0\beta.\end{aligned}$$

С принятой точностью для величин, относящихся к атому,

$$\boxed{\varepsilon_{at}^{(+)} \simeq \frac{1}{2}mv^2 - 2\hbar qv}.$$

Это также следует из разложения

$$\frac{(mv - 2\hbar q)^2}{2m} = K - 2\hbar qv + \frac{2\hbar^2 q^2}{m}$$

после отбрасывания квадратичного члена отдачи.

4а. Средняя энергия испущенного фотона

Оба направления равновероятны:

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_{ph} \rangle &= \frac{1}{2}\hbar\omega_0(1 - \beta) + \frac{1}{2}\hbar\omega_0(1 + \beta) \\ &= \boxed{\hbar\omega_0}.\end{aligned}$$

4б. Средний импульс испущенного фотона

Усредняя импульсы с учётом их знаков, получаем

$$\begin{aligned}\langle p_{ph} \rangle &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\hbar\omega_0}{c}(1 - \beta) + \frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + \beta) \right] \\ &= \boxed{\frac{\hbar\omega_0 v}{c^2}} \simeq \boxed{\hbar q\beta}.\end{aligned}$$

Хотя направления равновероятны, энергии двух фотонов в лабораторной системе отсчёта различаются. Поэтому их средний импульс в лабораторной системе отсчёта мал и положителен.

По отношению к импульсу атома это среднее имеет порядок

$$\frac{\langle p_{ph} \rangle}{mv} \simeq \eta\beta.$$

Поэтому ниже им пренебрегают при вычислении изменений импульса атома в ведущем порядке.

4с. Средняя энергия атома

Используя результаты 2d и 3d, получаем

$$\langle \varepsilon_{at} \rangle = \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}(K - 2\hbar qv).$$

Отсюда

$$\boxed{\langle \varepsilon_{at} \rangle \simeq K - \hbar qv}.$$

Эквивалентная запись:

$$\langle \varepsilon_{at} \rangle = K + \hbar\omega_L - \hbar\omega_0.$$

4д. Средний импульс атома

До отбрасывания смешанной поправки закон сохранения импульса даёт

$$\langle p_{at} \rangle = mv - \hbar q - \langle p_{ph} \rangle = mv - \hbar q - \frac{\hbar\omega_0 v}{c^2}.$$

Таким образом, в требуемом ведущем порядке отдачи атома

$$\boxed{\langle p_{at} \rangle \simeq mv - \hbar q}.$$

5a. Среднее изменение энергии атома

Вычитая начальную энергию, получаем

$$\Delta\varepsilon = \langle\varepsilon_{at}\rangle - K = \hbar(\omega_L - \omega_0).$$

Условие резонанса даёт

$$\Delta\varepsilon = -\frac{\hbar\omega_0 v}{c} \simeq -\hbar qv.$$

Испущенный фотон в среднем имеет большую энергию, чем поглощённый. Эта разность обеспечивается за счёт кинетической энергии атома.

5b. Среднее изменение импульса атома

Вычитая начальный импульс из результата 4d, получаем

$$\Delta p \simeq -\hbar q.$$

Меньшая поправка до усечения имеет вид

$$-\langle p_{ph} \rangle = -\frac{\hbar\omega_0 v}{c^2}.$$

В ведущем порядке отдачи изменения энергии и импульса удовлетворяют соотношению

$$\Delta\varepsilon \simeq v \Delta p.$$

6a. Изменение энергии для лазерного излучения, распространяющегося в направлении $+x$

Теперь атом удаляется от падающего света. Условие резонанса имеет вид

$$\omega'_L \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \omega_0,$$

так что

$$\omega'_L \simeq \omega_0(1 + \beta).$$

Средняя энергия испущенного фотона по-прежнему равна $\hbar\omega_0$. Следовательно,

$$\Delta\varepsilon = \hbar(\omega'_L - \omega_0) = \frac{\hbar\omega_0 v}{c} \simeq \hbar q'v, \quad q' = \frac{\omega'_L}{c}.$$

Кинетическая энергия атома увеличивается.

6b. Изменение импульса для лазерного излучения, распространяющегося в направлении $+x$

Поглощённый фотон передаёт импульс $+\hbar q'$. Следовательно,

$$\Delta p = \hbar q' - \frac{\hbar\omega_0 v}{c^2} \simeq +\hbar q'.$$

Опущенный второй член снова представляет собой смешанную доплеровскую поправку и поправку на отдачу в импульсе атома.

7a. Сила со стороны двух лазерных пучков

Применим приведённый закон рассеяния отдельно к каждому из двух пучков, считая их интенсивности, а следовательно, и частоты Раби одинаковыми.

Обозначим знаком $+$ пучок, распространяющийся в направлении $+x$, а знаком $-$ — пучок, распространяющийся в направлении $-x$. Частоты в системе отсчёта движущихся атомов равны

$$\omega_{\text{atom},+} = \omega_L - qv, \quad \omega_{\text{atom},-} = \omega_L + qv.$$

Таким образом, их расстройки относительно частоты атомного перехода равны

$$\omega_0 - \omega_{\text{atom},+} = \Delta + qv, \quad \omega_0 - \omega_{\text{atom},-} = \Delta - qv.$$

Полные числа актов рассеяния в единицу времени равны

$$R_+(v) = \frac{N\Gamma\Omega_R^2}{(\Delta + qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2},$$

$$R_-(v) = \frac{N\Gamma\Omega_R^2}{(\Delta - qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2}.$$

В ведущем порядке отдачи каждый акт передаёт импульс $+\hbar q$ или $-\hbar q$ соответственно. Поэтому

$$F(v) = \hbar q R_+(v) - \hbar q R_-(v),$$

откуда

$$F(v) = N\hbar q \Gamma \Omega_R^2 \left[\frac{1}{(\Delta + qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} - \frac{1}{(\Delta - qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} \right].$$

Это сила, действующая на все N атомов. Сила, действующая на один атом, равна F/N .

Доплеровский сдвиг qv сохраняется в вероятностях рассеяния: он может быть существенным по сравнению с шириной линии перехода даже при очень малом v/c .

8a. Разложение при малых скоростях

Положим

$$D = \Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2.$$

При достаточно малом qv

$$\frac{1}{(\Delta \pm qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} \simeq \frac{1}{D} \mp \frac{2\Delta qv}{D^2}.$$

Например, $|qv| \ll \sqrt{D}$ — достаточное условие малости скорости.

Вычитая два разложения, получаем

$$F(v) \simeq N\hbar q \Gamma \Omega_R^2 \left(-\frac{4\Delta qv}{D^2} \right).$$

Отсюда

$$F(v) \simeq -N\alpha v, \quad \alpha = \frac{4\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 \Delta}{D^2}.$$

Коэффициент α имеет размерность массы, делённой на время, поэтому αv имеет размерность силы.

8b. Положительная сила

При $v > 0$ все множители в α , кроме Δ , положительны. Для положительной силы необходимо

$$\Delta < 0.$$

Следовательно,

$$\boxed{\omega_L > \omega_0}.$$

Это синяя расстройка.

8с. Нулевая сила

При ненулевой интенсивности и движущемся атоме условие на расстройку имеет вид

$$\Delta = 0,$$

или

$$\boxed{\omega_L = \omega_0}.$$

Тогда частоты актов рассеяния для двух пучков равны. Независимо от этого, из симметрии также следует, что при $v = 0$ сила равна нулю.

8d. Отрицательная сила

При $v > 0$ для отрицательной силы необходимо $\alpha > 0$, следовательно,

$$\boxed{\omega_L < \omega_0}.$$

Это красная расстройка. Доплеровский сдвиг приближает частоту встречного пучка к резонансу, и этот пучок рассеивается сильнее.

8е. Замедление атомов, движущихся в направлении $-x$

Для скорости $-v$, где $v > 0$,

$$F(-v) = +N\alpha v.$$

Для замедления необходима сила, направленная вдоль $+x$, поэтому снова требуется $\alpha > 0$. Таким образом,

$$\boxed{\omega_L < \omega_0}.$$

Красная расстройка создаёт силу, направленную против движения в любом из двух направлений.

9а. Скорость через время τ

При красной расстройке $\alpha > 0$. Полная масса газа равна Nm , поэтому второй закон Ньютона даёт

$$Nm \frac{dv}{dt} = -N\alpha v.$$

Множитель N сокращается:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m}v.$$

Интегрируя с начальным условием $v(0) = v_0$, получаем

$$\boxed{v(\tau) = v_0 e^{-\alpha\tau/m}}.$$

В явном виде:

$$v(\tau) = v_0 \exp \left[-\frac{4\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 (\omega_0 - \omega_L) \tau}{m [(\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2]^2} \right].$$

Характерное время затухания скорости равно m/α .

9b. Температура через время τ

В этой детерминированной модели трения скорость каждого атома умножается на

$$e^{-\alpha\tau/m}.$$

Поэтому дисперсия скоростей умножается на

$$e^{-2\alpha\tau/m}.$$

Для одномерного теплового движения

$$m \langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle = k_B T.$$

Следовательно,

$$T(\tau) = T_0 e^{-2\alpha\tau/m}.$$

В явном виде:

$$T(\tau) = T_0 \exp \left[-\frac{8\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 (\omega_0 - \omega_L) \tau}{m [(\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2]^2} \right].$$

Этот экспоненциальный закон нельзя экстраполировать до сколь угодно низких температур. В расчёте были опущены квадратичные вклады отдачи и флуктуации, обусловленные случайными актами рассеяния. В частности, предположение $mv \gg \hbar q$, применённое к характерной тепловой скорости, требует

$$k_B T \gg \frac{(\hbar q)^2}{m}.$$

По мере охлаждения атомов члены, опущенные в этой модели, становятся существенными.

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.

Задача 3: Почему звёзды такие большие?

Звёзды представляют собой шары горячего газа. Большинство из них светятся благодаря превращению водорода в гелий в реакциях термоядерного синтеза, протекающих в их центральных областях. В этой задаче мы используем понятия классической и квантовой механики, а также электростатики и термодинамики, чтобы понять, почему для осуществления этого процесса синтеза звёзды должны быть достаточно большими, а также определить массу и радиус наименьшей звезды, в которой возможен синтез гелия из водорода.

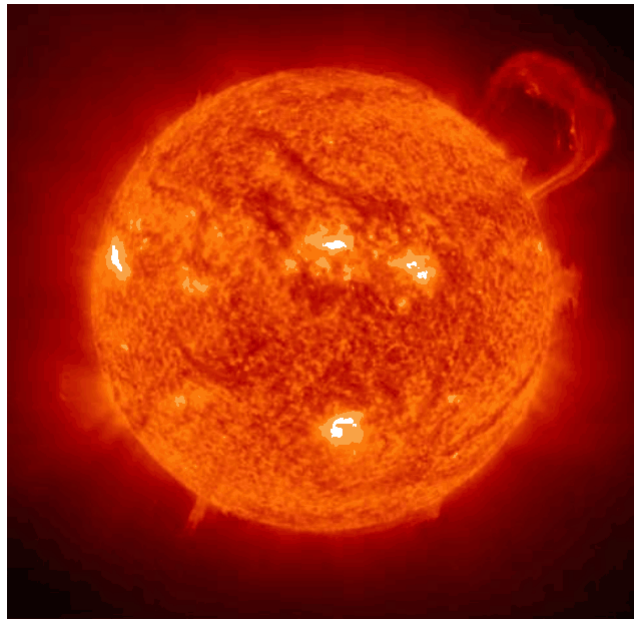


Рисунок 1. Наше Солнце, как и большинство звёзд, светится в результате термоядерного синтеза гелия из водорода в его центральных областях.

ПОЛЕЗНЫЕ ПОСТОЯННЫЕ
Гравитационная постоянная = $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$ (опечатка в официальном тексте: с^2 вместо с^{-2})
Постоянная Больцмана = $k = 1.4 \times 10^{-23} \text{ Дж К}^{-1}$
Постоянная Планка = $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ м}^2 \text{ кг с}^{-1}$
Масса протона = $m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ кг}$
Масса электрона = $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ кг}$
Элементарный электрический заряд = $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ Кл}$
Электрическая постоянная (диэлектрическая проницаемость вакуума) = $\epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \text{ Кл}^2 \text{ Н}^{-1} \text{ м}^{-2}$
Радиус Солнца = $R_S = 7.0 \times 10^8 \text{ м}$
Масса Солнца = $M_S = 2.0 \times 10^{30} \text{ кг}$

1. Классическая оценка температуры в центре звёзд.

Предположим, что газ, из которого состоит звезда, представляет собой чистый ионизованный водород (электроны и протоны в равных количествах) и ведёт себя как идеальный газ. С классической точки зрения для слияния двух протонов они должны сблизиться до расстояния 10^{-15} м , на котором короткодействующая сила сильного ядерного взаимодействия, являющаяся силой притяжения, становится преобладающей. Однако для сближения им сначала необходимо преодолеть отталкивание, обусловленное кулоновской силой. В рамках классического описания предположим, что два протона (считаемые точечными источниками поля) движутся в противоположных направлениях, каждый со скоростью v_{rms} , равной среднеквадратичной скорости протонов, и испытывают одномерное лобовое столкновение.

1a	Какой должна быть температура газа T_c , чтобы расстояние наибольшего сближения протонов d_c равнялось 10^{-15} м? Приведите это и все остальные численные значения в данной задаче с точностью до двух значащих цифр.	1.5
----	--	-----

2. Выяснение ошибочности предыдущей оценки температуры.

Чтобы проверить, насколько разумна предыдущая оценка температуры, необходим независимый способ оценки температуры в центре звезды. Строение звёзд очень сложно, однако, приняв некоторые предположения, мы можем существенно продвинуться в его понимании. Звёзды находятся в равновесии, то есть не расширяются и не сжимаются, поскольку направленная внутрь сила тяжести уравнивается направленной наружу силой давления (см. рисунок 2). Для слоя газа уравнение гидростатического равновесия на заданном расстоянии r от центра звезды имеет вид

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{GM_r \rho_r}{r^2},$$

где P — давление газа, G — гравитационная постоянная, M_r — масса вещества звезды внутри сферы радиуса r , а ρ_r — плотность газа в слое.

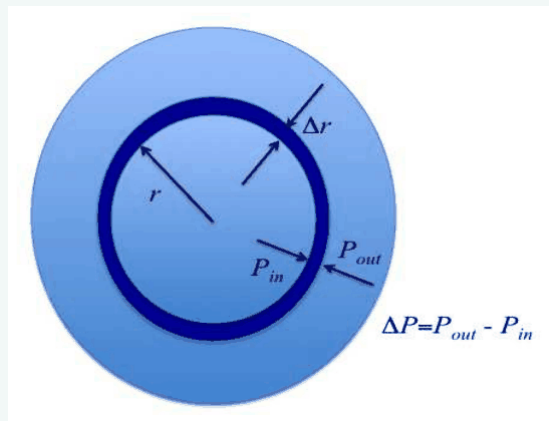


Рисунок 2. Звёзды находятся в гидростатическом равновесии: разность давлений уравнивает силу тяжести.

Оценку порядка величины температуры в центре звезды можно получить по значениям параметров в центре и на поверхности звезды, используя следующие приближения:

$$\Delta P \approx P_o - P_c,$$

где P_c и P_o — давления в центре и на поверхности звезды соответственно. Поскольку $P_c \gg P_o$, можно считать, что

$$\Delta P \approx -P_c.$$

В том же приближении можно записать

$$\Delta r \approx R,$$

где R — полный радиус звезды, и

$$M_r \approx M_R = M,$$

где M — полная масса звезды.

Плотность можно приближённо считать равной её значению в центре:

$$\rho_r \approx \rho_c.$$

Можно считать, что давление определяется уравнением состояния идеального газа.

2a	Найдите выражение для температуры в центре звезды T_c только через радиус и массу звезды и физические постоянные.	0.5
----	---	-----

Теперь в качестве критерия применимости этой модели можно использовать следующее её предсказание:

2b	Используя выражение, найденное в (2a), запишите ожидаемое для звезды отношение M/R только через физические постоянные и T_c .	0.5
2c	Используя значение T_c , полученное в пункте (1a), найдите численное значение ожидаемого для звезды отношения M/R .	0.5
2d	Теперь вычислите отношение $M(Sun)/R(Sun)$ и убедитесь, что это значение гораздо меньше найденного в (2c).	0.5

3. Квантово-механическая оценка температуры в центре звёзд

Большое расхождение, обнаруженное в (2d), указывает на то, что классическая оценка T_c , полученная в (1a), неверна. Это расхождение устраняется при учёте квантово-механических эффектов, согласно которым протоны ведут себя как волны, а отдельный протон размыт в области размером порядка λ_p , длины волны де Бройля. Это означает, что если расстояние наибольшего сближения протонов d_c имеет порядок λ_p , то протоны в квантово-механическом смысле перекрываются и могут слиться.

3a	Считая, что $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ является условием, при котором возможен синтез, для протона со скоростью v_{rms} найдите выражение для T_c только через физические постоянные.	1.0
3b	Вычислите численное значение T_c , полученное в (3a).	0.5
3c	Используя значение T_c , полученное в (3b), найдите численное значение ожидаемого для звезды отношения M/R по формуле, выведенной в (2b). Убедитесь, что это значение достаточно близко к наблюдаемому отношению $M(Sun)/R(Sun)$.	0.5

Действительно, звёзды так называемой *главной последовательности* (в которых происходит синтез гелия из водорода) приближённо удовлетворяют этому соотношению в широком диапазоне масс.

4. Отношение массы звезды к её радиусу.

Полученное согласие указывает на то, что квантово-механический подход к оценке температуры в центре Солнца является правильным.

4a	Используя предыдущие результаты, покажите, что для любой звезды, в которой происходит синтез гелия из водорода, отношение массы M к радиусу R одинаково и зависит только от физических постоянных. Найдите выражение для отношения M/R для звёзд, в которых происходит синтез гелия из водорода.	0.5
----	--	-----

5. Масса и радиус наименьшей звезды.

Результат, полученный в (4a), позволяет предположить, что при выполнении этого соотношения могли бы существовать звёзды любой массы; однако это не так.

Известно, что газ внутри обычных звёзд, в которых происходит синтез гелия из водорода, ведёт себя приближённо как идеальный газ. Это означает, что d_e , характерное расстояние между электронами, в среднем больше λ_e , их характерной длины волны де Бройля. При меньших расстояниях электроны находились бы в так называемом вырожденном состоянии, и звёзды вели бы себя иначе. Обратите внимание на различие в описании протонов и электронов внутри звезды. Для слияния протонов их волны де Бройля должны существенно перекрываться при столкновении, тогда как для сохранения свойств идеального газа волны де Бройля электронов не должны перекрываться.

Плотность внутри звёзд увеличивается с уменьшением расстояния до центра. Тем не менее для данной оценки порядка величины считайте, что плотность звёзд однородна. Можно также использовать условие $m_p \gg m_e$.

5a	Найдите выражение для n_e , средней концентрации электронов внутри звезды.	0.5
5b	Найдите выражение для d_e , характерного расстояния между электронами внутри звезды.	0.5
5c	Используя условие $d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}$, запишите выражение для радиуса наименьшей возможной обычной звезды. Считайте температуру в центре звезды характерной для всей её внутренней области.	1.5
5d	Найдите численное значение радиуса наименьшей возможной обычной звезды как в метрах, так и в единицах радиуса Солнца.	0.5
5e	Найдите численное значение массы наименьшей возможной обычной звезды как в кг, так и в единицах массы Солнца.	0.5

6. Слияние ядер гелия в стареющих звёздах.

По мере старения звёзд большая часть водорода в их ядрах превращается в гелий (He), поэтому, чтобы продолжать светиться, они вынуждены начать синтез более тяжёлых элементов из гелия. Ядро гелия содержит два протона и два нейтрона, поэтому его заряд вдвое больше, а масса примерно вчетверо больше, чем у протона. Ранее мы выяснили, что условием слияния протонов является $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$.

6a	Запишите аналогичное условие для ядер гелия и найдите $v_{rms}(He)$, среднеквадратичную скорость ядер гелия, и $T(He)$, температуру, необходимую для синтеза из гелия.	0.5
----	--	-----

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Все результаты получены с использованием приближений, предписанных в условии задачи. Численные результаты округлены до двух значащих цифр; в промежуточных вычислениях сохранены неокруглённые значения.

- 1a. $T_c = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 k d_c} = 5.4 \times 10^9 \text{ K}.$

- 2a. $T_c \simeq \frac{GMm_p}{2kR}$.
- 2b. $\frac{M}{R} \simeq \frac{2kT_c}{Gm_p}$.
- 2c. $\frac{M}{R} = 1.3 \times 10^{24} \text{ kg m}^{-1}$.
- 2d. $\frac{M_S}{R_S} = 2.9 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}$. Классическое предсказание больше в 4.7×10^2 раз.
- 3a. $T_c = \frac{m_p q^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2}$.
- 3b. $T_c = 9.7 \times 10^6 \text{ K}$.
- 3c. $\frac{M}{R} = 2.4 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1} \simeq 0.84 \frac{M_S}{R_S}$.
- 4a. $\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 G h^2}$.
- 5a. $n_e = \frac{3M}{4\pi m_p R^3}$.
- 5b. $d_e \simeq n_e^{-1/3} = \left(\frac{4\pi m_p R^3}{3M} \right)^{1/3}$.
- 5c. $R_{\min} = \left(\frac{\epsilon_0 h^4}{2Gq^2 m_p^{5/2} m_e^{3/2}} \right)^{1/2}$.
- 5d. $R_{\min} = 6.9 \times 10^7 \text{ m} = 0.099 R_S$.
- 5e. $M_{\min} = 1.7 \times 10^{29} \text{ kg} = 0.083 M_S$.
- 6a. Условие имеет вид $d_c(He) = \frac{\lambda_{He}}{\sqrt{2}} = \frac{h}{4\sqrt{2} m_p v_{rms}(He)}$, откуда

$$v_{rms}(He) = \frac{\sqrt{2} q^2}{\pi \epsilon_0 h} = 2.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}, \quad T(He) = \frac{8m_p q^4}{3\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2} = 6.2 \times 10^8 \text{ K}.$$

Решение

1a. Температура, необходимая для синтеза в классическом описании

Для нерелятивистского идеального газа теорема о равнораспределении энергии определяет среднеквадратичную скорость протонов соотношением

$$\frac{1}{2} m_p v_{rms}^2 = \frac{3}{2} k T_c.$$

Столкновение является лобовым, однако v_{rms} — это среднеквадратичная скорость в трёхмерном газе.

Импульсы двух протонов равны по модулю и противоположны по направлению, поэтому их центр масс неподвижен. В момент наибольшего сближения оба протона мгновенно останавливаются. Пренебрегая их начальной электростатической потенциальной энергией, из закона сохранения энергии получаем

$$2 \left(\frac{1}{2} m_p v_{rms}^2 \right) = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 d_c}.$$

Таким образом,

$$3kT_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d_c}, \quad \boxed{T_c = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 k d_c}}.$$

При $d_c = 10^{-15} \text{ m}$

$$T_c = \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{12\pi(8.9 \times 10^{-12})(1.4 \times 10^{-23})(10^{-15})},$$

поэтому

$$\boxed{T_c = 5.4 \times 10^9 \text{ K}}.$$

2a. Температура в центре из условия гидростатического равновесия

Используя предписанные приближения, в том числе характерный радиальный масштаб $r \simeq R$, получаем

$$-\frac{P_c}{R} \simeq -\frac{GM\rho_c}{R^2},$$

откуда

$$P_c \simeq \frac{GM\rho_c}{R}.$$

В полностью ионизованном водороде концентрации протонов и электронов равны. Пренебрегая массой электронов при определении массовой плотности, получаем

$$n_{p,c} = n_{e,c} \simeq \frac{\rho_c}{m_p}.$$

Оба вида частиц вносят вклад в давление идеального газа:

$$P_c = (n_{p,c} + n_{e,c})kT_c = \frac{2\rho_c kT_c}{m_p}.$$

Приравнявая выражения для давления и сокращая ρ_c , получаем

$$\boxed{T_c \simeq \frac{GMm_p}{2kR}}.$$

2b. Отношение массы к радиусу

Преобразуя результат (2a), получаем

$$\boxed{\frac{M}{R} \simeq \frac{2kT_c}{Gm_p}}.$$

2с. Отношение, предсказываемое при классической температуре синтеза

Подстановка температуры из (1a) даёт

$$\frac{M}{R} = \frac{2k}{Gm_p} \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 k d_c} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 Gm_p d_c}.$$

Численно

$$\boxed{\frac{M}{R} = 1.3 \times 10^{24} \text{ kg m}^{-1}}.$$

2d. Сравнение с Солнцем

Используя приведённые значения массы и радиуса Солнца, получаем

$$\frac{M_S}{R_S} = \frac{2.0 \times 10^{30}}{7.0 \times 10^8} = \boxed{2.9 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}}.$$

Сравнение с использованием неокруглённых значений даёт

$$\frac{(M/R)_{\text{classical}}}{M_S/R_S} = \boxed{4.7 \times 10^2}.$$

Таким образом, отношение для Солнца гораздо меньше классического предсказания. В рамках гидростатической модели классическая температура синтеза оказывается слишком высокой.

3a. Квантовая оценка температуры синтеза

Для протона, движущегося со скоростью v_{rms} , длина волны де Бройля равна

$$\lambda_p = \frac{h}{m_p v_{rms}}.$$

Соотношение для энергии столкновения из (1a) даёт

$$d_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_p v_{rms}^2}.$$

Накладывая заданное в условии задачи условие синтеза

$$d_c = \frac{\lambda_p}{\sqrt{2}},$$

получаем

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_p v_{rms}^2} = \frac{h}{\sqrt{2} m_p v_{rms}},$$

и, следовательно,

$$v_{rms} = \frac{\sqrt{2} q^2}{4\pi\epsilon_0 h}.$$

Используя $m_p v_{rms}^2 = 3kT_c$, получаем

$$T_c = \frac{m_p}{3k} \left(\frac{\sqrt{2} q^2}{4\pi\epsilon_0 h} \right)^2.$$

Следовательно,

$$\boxed{T_c = \frac{m_p q^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2}}.$$

3b. Численное значение квантовой оценки температуры

Подставляя заданные постоянные, получаем

$$T_c = \frac{(1.7 \times 10^{-27})(1.6 \times 10^{-19})^4}{24\pi^2 (8.9 \times 10^{-12})^2 (1.4 \times 10^{-23})(6.6 \times 10^{-34})^2},$$

откуда

$$T_c = 9.7 \times 10^6 \text{ K}.$$

Соответствующая среднеквадратичная скорость протонов равна $4.9 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$.

3с. Отношение массы к радиусу при квантовой оценке температуры

Используя (2b) с температурой из (3b), получаем

$$\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p} = 2.4 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}.$$

Отношение к солнечному значению равно

$$\frac{M/R}{M_S/R_S} = 0.84.$$

Таким образом, предсказанное значение примерно на 16% ниже солнечного, что представляет собой хорошее согласие для использованных приближений, дающих оценку порядка величины.

4а. Общее отношение массы к радиусу

В рамках этой модели синтез гелия из водорода имеет одну и ту же характерную температуру в каждой звезде. Объединяя (2b) и (3a), получаем

$$\frac{M}{R} = \frac{2k}{Gm_p} \frac{m_p q^4}{24\pi^2 \varepsilon_0^2 k h^2}.$$

Множители m_p и k сокращаются:

$$\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \varepsilon_0^2 G h^2}.$$

Это выражение зависит только от физических постоянных. Для следующих пунктов обозначим это общее отношение как

$$A \equiv \frac{q^4}{12\pi^2 \varepsilon_0^2 G h^2}, \quad M = AR.$$

5а. Средняя концентрация электронов

Каждому протону водорода соответствует один электрон. Пренебрегая массой электронов, получаем

$$N_e = N_p \simeq \frac{M}{m_p}.$$

Для однородной сферической звезды объёмом $V = 4\pi R^3/3$

$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{3M}{4\pi m_p R^3}.$$

5б. Характерное расстояние между электронами

Характерный объём, приходящийся на один электрон, равен $1/n_e$. Принимая кубический корень из него за характерное расстояние, получаем

$$d_e \simeq n_e^{-1/3} = \left(\frac{4\pi m_p R^3}{3M} \right)^{1/3}.$$

5с. Радиус наименьшей обычной звезды

Теорема о равномерном распределении энергии для электронов даёт

$$m_e v_{e,rms}^2 = 3kT_c.$$

Поэтому их характерная длина волны де Бройля равна

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e v_{e,rms}} = \frac{h}{\sqrt{3m_e kT_c}}.$$

Заданное условие отсутствия вырождения электронного газа принимает вид

$$d_e \geq \frac{\lambda_e}{\sqrt{2}} = \frac{h}{\sqrt{6m_e kT_c}}.$$

Подставляя $M = AR$ в формулу для расстояния, получаем

$$d_e^3 = \frac{4\pi m_p R^2}{3A}.$$

Таким образом, при выполнении модельного соотношения между массой и радиусом расстояние уменьшается как $R^{2/3}$. Минимально допустимый радиус достигается при равенстве:

$$\frac{4\pi m_p R_{\min}^2}{3A} = \left(\frac{h}{\sqrt{6m_e kT_c}} \right)^3.$$

Отсюда

$$R_{\min}^2 = \frac{3Ah^3}{4\pi m_p (6m_e kT_c)^{3/2}}.$$

Сначала подставим $A = 2kT_c/(Gm_p)$:

$$R_{\min}^2 = \frac{h^3}{4\pi G m_p^2 m_e^{3/2} \sqrt{6kT_c}}.$$

Из (3а)

$$\sqrt{6kT_c} = \frac{q^2 \sqrt{m_p}}{2\pi\epsilon_0 h}.$$

Следовательно,

$$R_{\min}^2 = \frac{\epsilon_0 h^4}{2Gq^2 m_p^{5/2} m_e^{3/2}},$$

или

$$R_{\min} = \left(\frac{\epsilon_0 h^4}{2Gq^2 m_p^{5/2} m_e^{3/2}} \right)^{1/2}.$$

При меньшем радиусе и выполнении $M = AR$ электронные волны перекрывались бы согласно указанному критерию, и принятое описание в рамках модели идеального газа перестало бы быть применимым.

5d. Численное значение минимального радиуса

Подстановка даёт

$$R_{\min} = 6.9 \times 10^7 \text{ m}.$$

Деля неокруглённый результат на заданный радиус Солнца, получаем

$$\frac{R_{\min}}{R_S} = 0.099.$$

Таким образом, радиус наименьшей обычной звезды в этой модели составляет приблизительно одну десятую радиуса Солнца.

5е. Численное значение минимальной массы

Поскольку $M = AR$ при фиксированном положительном A , минимальному радиусу соответствует также минимальная масса:

$$M_{\min} = AR_{\min} = \frac{q^4 R_{\min}}{12\pi^2 \varepsilon_0^2 G h^2}.$$

Численно

$$M_{\min} = 1.7 \times 10^{29} \text{ kg}, \quad \frac{M_{\min}}{M_S} = 0.083.$$

6а. Синтез из гелия

Ядро гелия имеет массу $m_{He} \simeq 4m_p$ и заряд $Q_{He} = 2q$. Его длина волны де Бройля равна

$$\lambda_{He} = \frac{h}{4m_p v_{rms}(He)}.$$

Соответствующее условие синтеза имеет вид

$$d_c(He) = \frac{\lambda_{He}}{\sqrt{2}} = \frac{h}{4\sqrt{2} m_p v_{rms}(He)}.$$

Для двух ядер гелия, сближающихся с равными по модулю и противоположными по направлению среднеквадратичными скоростями, закон сохранения энергии даёт

$$4m_p v_{rms}(He)^2 = \frac{(2q)^2}{4\pi\varepsilon_0 d_c(He)}.$$

Подставляя условие синтеза и упрощая, получаем

$$v_{rms}(He) = \frac{\sqrt{2} q^2}{\pi\varepsilon_0 h}.$$

Это в четыре раза больше скорости протона, полученной в (3а), поэтому

$$v_{rms}(He) = 2.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}.$$

Теперь теорема о равномерном распределении энергии даёт

$$T(He) = \frac{4m_p v_{rms}(He)^2}{3k}.$$

Поскольку масса в четыре раза больше и скорость в четыре раза больше,

$$T(He) = 4(4^2)T_c = 64T_c,$$

где T_c — температура синтеза гелия из водорода из (3b). Следовательно,

$$T(He) = \frac{8m_p q^4}{3\pi^2 \varepsilon_0^2 k h^2} = 6.2 \times 10^8 \text{ K}.$$

Решение проверено по официальному решению.