

IPhO 2009

Problemas teóricos y soluciones · Mérida, México · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/2009/

Problema 1: Evolución del sistema Tierra-Luna

Los científicos pueden determinar la distancia Tierra-Luna con gran precisión. Lo consiguen haciendo que un haz láser se refleje en unos espejos especiales depositados en la superficie de la Luna por astronautas en 1969 y midiendo el tiempo de ida y vuelta de la luz (véase la Figura 1).



Figura 1. Se utiliza un haz láser enviado desde un observatorio para medir con precisión la distancia entre la Tierra y la Luna.

Con estas observaciones, han medido directamente que la Luna se aleja lentamente de la Tierra. Es decir, la distancia Tierra-Luna aumenta con el tiempo. Esto sucede porque, debido a los momentos de las fuerzas de marea, la Tierra transfiere momento angular a la Luna; véase la Figura 2. En este problema deducirá los parámetros básicos de este fenómeno.

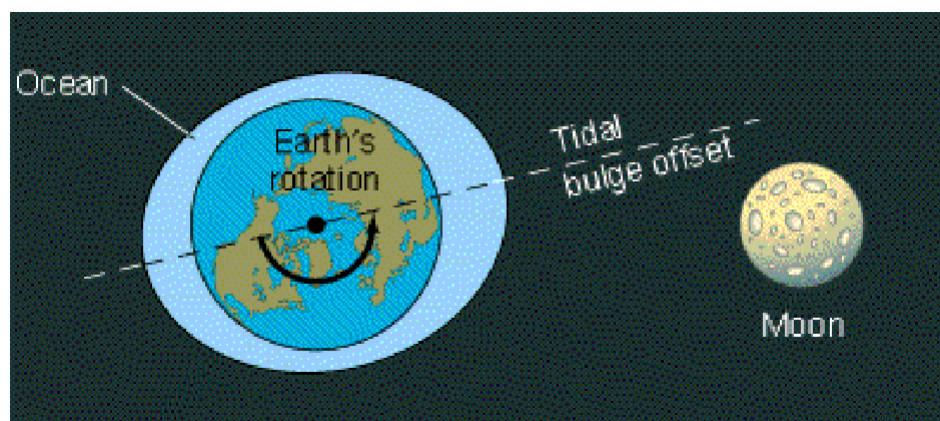


Figura 2. La gravedad de la Luna produce deformaciones de marea o «abultamientos» en la Tierra. Debido a la rotación terrestre, la recta que pasa por los abultamientos no está alineada con la recta que une la Tierra y la Luna. Esta desalineación produce un momento de fuerza que transfiere momento angular de la rotación de la Tierra a la traslación de la Luna. El dibujo no está a escala.

1. Conservación del momento angular.

Sea L_1 el momento angular total actual del sistema Tierra-Luna. Adopte ahora las siguientes hipótesis: i) L_1 es únicamente la suma de los momentos angulares de la rotación de la Tierra alrededor de su eje y de la traslación de la Luna en su órbita alrededor de la Tierra. ii) La órbita de la Luna es circular y la Luna puede considerarse un punto. iii) El eje de rotación de la Tierra y el eje de revolución de la Luna son paralelos. iv) Para simplificar los cálculos, consideramos que el movimiento tiene lugar alrededor del centro de la Tierra y no del centro de masas. En todo el problema, todos los momentos de inercia, momentos de fuerza y momentos angulares se definen respecto al eje de la Tierra. v) Desprecie la influencia del Sol.

Parte	Pregunta	Puntos
1a	Escriba la ecuación del momento angular total actual del sistema Tierra-Luna. Exprese esta ecuación en función de I_E , el momento de inercia de la Tierra; ω_{E1} , la frecuencia angular actual de la rotación terrestre; I_{M1} , el momento de inercia actual de la Luna respecto al eje de la Tierra; y ω_{M1} , la frecuencia angular actual de la órbita lunar.	0.2

Este proceso de transferencia de momento angular terminará cuando el período de rotación de la Tierra y el período de revolución de la Luna alrededor de la Tierra tengan la misma duración. En ese momento, los abultamientos de marea producidos por la Luna en la Tierra estarán alineados con la recta que une la Luna y la Tierra, y el momento de fuerza desaparecerá.

Parte	Pregunta	Puntos
1b	Escriba la ecuación del momento angular total final L_2 del sistema Tierra-Luna. Adopte las mismas hipótesis que en la pregunta 1a. Exprese esta ecuación en función de I_E , el momento de inercia de la Tierra; ω_2 , la frecuencia angular final de la rotación terrestre y de la traslación lunar; e I_{M2} , el momento de inercia final de la Luna.	0.2

Parte	Pregunta	Puntos
1c	Despreciando la contribución de la rotación terrestre al momento angular total final, escriba la ecuación que expresa la conservación del momento angular en este problema.	0.3

2. Separación final y frecuencia angular final del sistema Tierra-Luna.

Suponga que la ecuación gravitatoria para una órbita circular (de la Luna alrededor de la Tierra) es siempre válida. Desprecie la contribución de la rotación terrestre al momento angular total final.

Parte	Pregunta	Puntos
2a	Escriba la ecuación gravitatoria para la órbita circular de la Luna alrededor de la Tierra, en el estado final, en función de M_E , ω_2 , G y la separación final D_2 entre la Tierra y la Luna. M_E es la masa de la Tierra y G es la constante de gravitación universal.	0.2

Parte	Pregunta	Puntos
2b	Escriba la ecuación de la separación final D_2 entre la Tierra y la Luna en función de los parámetros conocidos: L_1 , el momento angular total del sistema; M_E y M_M , las masas de la Tierra y de la Luna, respectivamente; y G .	0.5

Parte	Pregunta	Puntos
2c	Escriba la ecuación de la frecuencia angular final ω_2 del sistema Tierra-Luna en función de los parámetros conocidos L_1 , M_E , M_M y G .	0.5

Más adelante se le pedirá que halle los valores numéricos de D_2 y ω_2 . Para ello necesita conocer el momento de inercia de la Tierra.

Parte	Pregunta	Puntos
2d	Escriba la ecuación del momento de inercia de la Tierra I_E , suponiendo que es una esfera con densidad interior ρ_i desde el centro hasta un radio r_i , y con densidad exterior ρ_o desde el radio r_i hasta la superficie, situada a un radio r_o (véase la Figura 3).	0.5

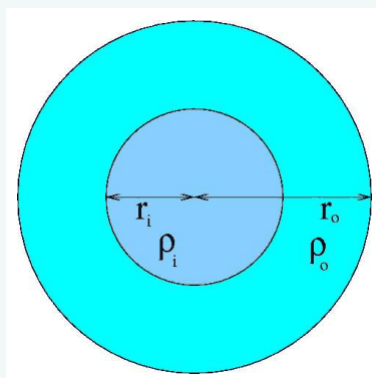


Figura 3. La Tierra como una esfera con dos densidades, ρ_i y ρ_o .

Determine los valores numéricos solicitados en este problema siempre con *dos cifras significativas*.

Parte	Pregunta	Puntos
2e	Calcule el momento de inercia de la Tierra I_E , utilizando $\rho_i = 1.3 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$, $r_i = 3.5 \times 10^6 \text{ m}$, $\rho_o = 4.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ y $r_o = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$.	0.2

Las masas de la Tierra y de la Luna son $M_E = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$ y $M_M = 7.3 \times 10^{22} \text{ kg}$, respectivamente. La separación actual entre la Tierra y la Luna es $D_1 = 3.8 \times 10^8 \text{ m}$. La frecuencia angular actual de la rotación terrestre es $\omega_{E1} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. La frecuencia angular actual de la traslación de la Luna alrededor de la Tierra es $\omega_{M1} = 2.7 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, y la constante de gravitación universal es $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

Parte	Pregunta	Puntos
2f	Calcule el valor numérico del momento angular total del sistema, L_1 .	0.2

Parte	Pregunta	Puntos
2g	Halle la separación final D_2 en metros y en unidades de la separación actual D_1 .	0.3

Parte	Pregunta	Puntos
2h	Halle la frecuencia angular final ω_2 en s^{-1} , así como la duración final del día en unidades de días actuales.	0.3

Compruebe que está justificado despreciar la contribución de la rotación terrestre al momento angular total final calculando el cociente entre el momento angular final de la Tierra y el de la Luna. Este cociente debería ser pequeño.

Parte	Pregunta	Puntos
2i	Halle el cociente entre el momento angular final de la Tierra y el de la Luna.	0.2

3. ¿Cuánto se aleja la Luna cada año?

Ahora hallará cuánto se aleja la Luna de la Tierra cada año. Para ello, necesitará conocer la ecuación del momento de fuerza que actúa actualmente sobre la Luna. Suponga que los abultamientos de marea pueden aproximarse por dos masas puntuales, cada una de masa m , situadas en la superficie de la Tierra; véase la Fig. 4. Sea θ el ángulo entre la recta que pasa por los abultamientos y la recta que une los centros de la Tierra y de la Luna.

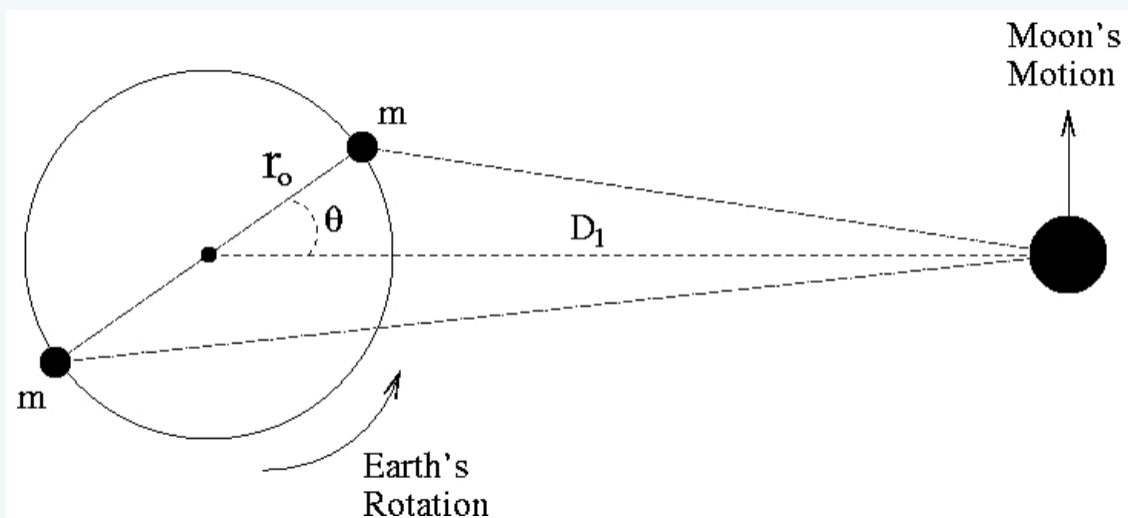


Figura 4. Diagrama esquemático para estimar el momento de fuerza producido sobre la Luna por los abultamientos de la Tierra. El dibujo no está a escala.

Parte	Pregunta	Puntos
3a	Halle F_{cI} , el módulo de la fuerza ejercida sobre la Luna por la masa puntual más cercana.	0.4

Parte	Pregunta	Puntos
3b	Halle F_{fI} , el módulo de la fuerza ejercida sobre la Luna por la masa puntual más lejana.	0.4

Ahora puede calcular los momentos de fuerza producidos por las masas puntuales.

Parte	Pregunta	Puntos
3c	Halle el módulo de τ_{cI} , el momento de fuerza producido por la masa puntual más cercana.	0.4

Parte	Pregunta	Puntos
3d	Halle el módulo de τ_{fI} , el momento de fuerza producido por la masa puntual más lejana.	0.4

Parte	Pregunta	Puntos
3e	Halle el módulo del momento de fuerza total τ producido por las dos masas. Puesto que $r_o \ll D_1$, debe aproximar su expresión al orden significativo más bajo en r_o/D_1 . Puede utilizar que $(1+x)^a \approx 1+ax$, si $x \ll 1$.	1.0

Parte	Pregunta	Puntos
3f	Calcule el valor numérico del momento de fuerza total τ , teniendo en cuenta que $\theta = 3^\circ$ y que $m = 3.6 \times 10^{16}$ kg (observe que esta masa es del orden de 10^{-8} veces la masa de la Tierra).	0.5

Puesto que el momento de fuerza es la tasa de variación del momento angular con el tiempo, halle el aumento anual actual de la distancia Tierra-Luna. Para este paso, exprese el momento angular de la Luna únicamente en función de M_M , M_E , D_1 y G .

Parte	Pregunta	Puntos
3g	Halle el aumento anual actual de la distancia Tierra-Luna.	1.0

Por último, estime cuánto aumenta la duración del día cada año.

Parte	Pregunta	Puntos
3h	Halle la disminución anual de ω_{E1} y cuánto aumenta actualmente la duración del día cada año.	1.0

4. ¿Adónde va la energía?

A diferencia del momento angular, que se conserva, la energía total (rotacional más gravitatoria) del sistema no se conserva. Lo examinaremos en esta última sección.

Parte	Pregunta	Puntos
4a	Escriba una ecuación para la energía total (rotacional más gravitatoria) actual del sistema Tierra-Luna, E . Exprese esta ecuación únicamente en función de I_E , ω_{E1} , M_M , M_E , D_1 y G .	0.4

Parte	Pregunta	Puntos
4b	Escriba una ecuación para la variación de E , ΔE , en función de las variaciones de D_1 y de ω_{E1} . Calcule el valor numérico de ΔE para un año utilizando los valores de las variaciones de D_1 y de ω_{E1} hallados en las preguntas 3g y 3h.	0.4

Compruebe que esta pérdida de energía es compatible con una estimación de la energía disipada en forma de calor en las mareas producidas por la Luna en la Tierra. Suponga que las mareas elevan, en promedio, 0.5 m una capa de agua de $h = 0.5$ m de espesor que cubre la superficie de la Tierra (para simplificar, suponga que toda la superficie de la Tierra está cubierta de agua). Esto sucede dos veces al día. Suponga además que el 10% de esta energía gravitatoria se disipa en forma de calor debido a la viscosidad cuando el agua desciende. Tome como densidad del agua $\rho_{\text{water}} = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ y como aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$.

Parte	Pregunta	Puntos
4c	¿Cuál es la masa de esta capa superficial de agua?	0.2

Parte	Pregunta	Puntos
4d	¿Cuánta energía se disipa en un año? ¿Cómo se compara con la energía que pierde actualmente el sistema Tierra-Luna cada año?	0.3

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Para las fuerzas y los momentos de fuerza de los abultamientos, se definen las distancias

$$d_c = \sqrt{D_1^2 + r_o^2 - 2D_1r_o \cos \theta}, \quad d_f = \sqrt{D_1^2 + r_o^2 + 2D_1r_o \cos \theta}.$$

Sean T_1 y T_2 las duraciones actual y final del día. Los resultados numéricos se dan con dos cifras significativas.

- **1a:** $L_1 = I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1}$.
- **1b:** $L_2 = (I_E + I_{M2}) \omega_2$.
- **1c:** $I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1} = L_1 \simeq I_{M2} \omega_2$.
- **2a:** $\omega_2^2 D_2^3 = G M_E$.
- **2b:** $D_2 = \frac{L_1^2}{G M_E M_M^2}$.
- **2c:** $\omega_2 = \frac{G^2 M_E^2 M_M^3}{L_1^3}$.
- **2d:** $I_E = \frac{8\pi}{15} [\rho_i r_i^5 + \rho_o (r_o^5 - r_i^5)]$.
- **2e:** $I_E = 8.0 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$.

- **2f:** $L_1 = 3.4 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$.
- **2g:** $D_2 = 5.5 \times 10^8 \text{ m} = 1.4D_1$.
- **2h:** $\omega_2 = 1.6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $T_2/T_1 = 47$.
- **2i:** $\frac{L_{E2}}{L_{M2}} = \frac{I_E}{M_M D_2^2} = 3.6 \times 10^{-3}$.
- **3a:** $F_c = \frac{GM_M m}{d_c^2}$.
- **3b:** $F_f = \frac{GM_M m}{d_f^2}$.
- **3c:** $\tau_c = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{d_c^3}$.
- **3d:** $\tau_f = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{d_f^3}$.
- **3e:** $\tau = \tau_c - \tau_f \simeq \frac{3GM_M m r_o^2}{D_1^3} \sin(2\theta)$, dirigido en el sentido del momento angular orbital de la Luna.
- **3f:** $\tau = 4.1 \times 10^{16} \text{ N m}$.
- **3g:** $\dot{D}_1 = \frac{2\tau}{M_M} \sqrt{\frac{D_1}{GM_E}} = 3.5 \times 10^{-2} \text{ m yr}^{-1} = 3.5 \text{ cm yr}^{-1}$.
- **3h:** En un año, $\Delta\omega_{E1} = -1.6 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}$ y $\Delta T_1 = +1.9 \times 10^{-5} \text{ s}$.
- **4a:** $E = \frac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 - \frac{GM_E M_M}{2D_1}$.
- **4b:** $\Delta E \simeq I_E \omega_{E1} \Delta\omega_{E1} + \frac{GM_E M_M}{2D_1^2} \Delta D_1 = -9.1 \times 10^{19} \text{ J}$ en un año.
- **4c:** $M_{\text{water}} = 4\pi r_o^2 h \rho_{\text{water}} = 2.6 \times 10^{17} \text{ kg}$.
- **4d:** $E_{\text{heat, yr}} = 9.2 \times 10^{19} \text{ J}$, en estrecha concordancia con la pérdida de energía mecánica de $9.1 \times 10^{19} \text{ J}$ por año.

Solución

Todos los cálculos utilizan las hipótesis indicadas en el enunciado. Los resultados numéricos se redondean únicamente al final. Para las variaciones anuales, se toma

$$t_{\text{yr}} = 365 \times 24 \times 3600 \text{ s}.$$

1a. Momento angular actual

La rotación de la Tierra y la revolución de la Luna tienen el mismo sentido alrededor de ejes paralelos, por lo que sus momentos angulares se suman:

$$L_1 = I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1}.$$

Como la Luna se trata como un punto a una distancia D_1 del eje de la Tierra,

$$I_{M1} = M_M D_1^2.$$

1b. Momento angular final

En el estado final sincronizado, ambas frecuencias angulares son iguales a ω_2 . Por tanto,

$$\boxed{L_2 = I_E \omega_2 + I_{M2} \omega_2 = (I_E + I_{M2}) \omega_2,} \quad I_{M2} = M_M D_2^2.$$

1c. Conservación del momento angular

En el modelo planteado no hay momento de fuerza externo. Los momentos de las fuerzas de marea transfieren momento angular internamente, de modo que $L_1 = L_2$.

Despreciando únicamente la contribución de la rotación terrestre *final*,

$$\boxed{I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1} \simeq I_{M2} \omega_2.}$$

La rotación terrestre actual debe seguir incluyéndose en L_1 .

2a. Ecuación de la órbita circular

La fuerza gravitatoria proporciona la aceleración centrípeta de la Luna:

$$\frac{GM_E M_M}{D_2^2} = M_M \omega_2^2 D_2.$$

Al simplificar M_M , se obtiene

$$\boxed{\omega_2^2 D_2^3 = GM_E.}$$

2b. Separación final

Dentro de la aproximación de la parte 1c,

$$L_1 = M_M D_2^2 \omega_2.$$

Utilizando $\omega_2 = \sqrt{GM_E / D_2^3}$,

$$L_1 = M_M \sqrt{GM_E D_2}.$$

Elevando al cuadrado y despejando,

$$\boxed{D_2 = \frac{L_1^2}{GM_E M_M^2}.$$

2c. Frecuencia angular final

La sustitución del resultado anterior en la ecuación de la órbita circular da

$$\omega_2 = \sqrt{GM_E} \left(\frac{GM_E M_M^2}{L_1^2} \right)^{3/2}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\omega_2 = \frac{G^2 M_E^2 M_M^3}{L_1^3}.$$

2d. Momento de inercia de la Tierra

Una capa esférica delgada de radio r , densidad ρ y espesor dr tiene

$$dm = 4\pi \rho r^2 dr, \quad dI = \frac{2}{3} r^2 dm = \frac{8\pi}{3} \rho r^4 dr.$$

Integrando sobre las dos regiones de distinta densidad,

$$I_E = \frac{8\pi}{3} \left[\rho_i \int_0^{r_i} r^4 dr + \rho_o \int_{r_i}^{r_o} r^4 dr \right].$$

Así,

$$I_E = \frac{8\pi}{15} [\rho_i r_i^5 + \rho_o (r_o^5 - r_i^5)].$$

2e. Valor numérico del momento de inercia

Sustituyendo las densidades y los radios dados,

$$I_E = \frac{8\pi}{15} [(1.3 \times 10^4)(3.5 \times 10^6)^5 + (4.0 \times 10^3) ((6.4 \times 10^6)^5 - (3.5 \times 10^6)^5)] \text{ kg m}^2.$$

Por consiguiente,

$$I_E = 8.0 \times 10^{37} \text{ kg m}^2.$$

2f. Momento angular total actual

Utilizando las frecuencias angulares actuales dadas,

$$L_1 = I_E \omega_{E1} + M_M D_1^2 \omega_{M1}.$$

Las dos contribuciones son

$$I_E \omega_{E1} = 5.8 \times 10^{33} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1},$$

$$M_M D_1^2 \omega_{M1} = 2.8 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Al sumarlas utilizando valores intermedios sin redondear,

$$L_1 = 3.4 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

2g. Valor numérico de la separación final

Utilizando la parte 2b y el valor sin redondear de L_1 ,

$$D_2 = \frac{L_1^2}{GM_E M_M^2} = 5.5 \times 10^8 \text{ m}.$$

En relación con la separación actual,

$$\frac{D_2}{D_1} = 1.4.$$

2h. Frecuencia final y duración del día

De la parte 2c,

$$\omega_2 = 1.6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}.$$

Como el período de rotación es $T = 2\pi/\omega$,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi/\omega_2}{2\pi/\omega_{E1}} = \frac{\omega_{E1}}{\omega_2}.$$

Utilizando valores intermedios sin redondear, se obtiene

$$T_2 = 47T_1,$$

por lo que el día final dura 47 días actuales.

2i. Comprobación de la contribución despreciada de la rotación final

Ambos momentos angulares finales contienen la misma frecuencia angular:

$$\frac{L_{E2}}{L_{M2}} = \frac{I_E \omega_2}{M_M D_2^2 \omega_2} = \frac{I_E}{M_M D_2^2}.$$

Numéricamente,

$$\boxed{\frac{L_{E2}}{L_{M2}} = 3.6 \times 10^{-3}.}$$

El momento angular final de rotación de la Tierra es solo el 0.36% del momento angular orbital de la Luna, lo que justifica despreciarlo.

3a. Fuerza debida al abultamiento más cercano

Se elige el centro de la Tierra como origen, se sitúa la Luna en $(D_1, 0)$ y se toma el sentido positivo de y en el sentido del movimiento instantáneo de la Luna. El abultamiento más cercano se encuentra en

$$(r_o \cos \theta, r_o \sin \theta).$$

Por tanto, su distancia a la Luna es

$$d_c^2 = (D_1 - r_o \cos \theta)^2 + (r_o \sin \theta)^2 = D_1^2 + r_o^2 - 2D_1 r_o \cos \theta.$$

La ley de gravitación de Newton da

$$\boxed{F_c = \frac{GM_M m}{D_1^2 + r_o^2 - 2D_1 r_o \cos \theta}}.$$

3b. Fuerza debida al abultamiento más lejano

El abultamiento más lejano se encuentra en

$$(-r_o \cos \theta, -r_o \sin \theta).$$

En consecuencia,

$$d_f^2 = (D_1 + r_o \cos \theta)^2 + (r_o \sin \theta)^2 = D_1^2 + r_o^2 + 2D_1 r_o \cos \theta,$$

y

$$\boxed{F_f = \frac{GM_M m}{D_1^2 + r_o^2 + 2D_1 r_o \cos \theta}}.$$

3c. Momento de fuerza debido al abultamiento más cercano

Solo la componente de la fuerza perpendicular a la recta Tierra-Luna contribuye al momento de fuerza respecto al eje de la Tierra. Para el abultamiento más cercano,

$$F_{c,y} = F_c \frac{r_o \sin \theta}{d_c}.$$

Su momento de fuerza es positivo, en el sentido del momento angular orbital de la Luna:

$$\tau_c = D_1 F_{c,y}.$$

Por tanto, su módulo es

$$\tau_c = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{(D_1^2 + r_o^2 - 2D_1 r_o \cos \theta)^{3/2}}.$$

3d. Momento de fuerza debido al abultamiento más lejano

El abultamiento más lejano atrae a la Luna en el sentido negativo de y :

$$F_{f,y} = -F_f \frac{r_o \sin \theta}{d_f}.$$

Su momento de fuerza se opone al del abultamiento más cercano. Su módulo es

$$\tau_f = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{(D_1^2 + r_o^2 + 2D_1 r_o \cos \theta)^{3/2}}.$$

3e. Momento de fuerza total al orden no nulo más bajo

Como $d_c < d_f$, el abultamiento más cercano produce el mayor momento de fuerza. Para la geometría mostrada,

$$\tau = \tau_c - \tau_f = GM_M m D_1 r_o \sin \theta \left(\frac{1}{d_c^3} - \frac{1}{d_f^3} \right).$$

Se define $\epsilon = r_o/D_1 \ll 1$. Entonces,

$$\frac{1}{d_c^3} = \frac{1}{D_1^3} (1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \cos \theta)^{-3/2} \simeq \frac{1}{D_1^3} (1 + 3\epsilon \cos \theta),$$

y

$$\frac{1}{d_f^3} = \frac{1}{D_1^3} (1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos \theta)^{-3/2} \simeq \frac{1}{D_1^3} (1 - 3\epsilon \cos \theta).$$

Los términos de orden cero se cancelan, y queda

$$\tau \simeq GM_M m D_1 r_o \sin \theta \frac{6r_o \cos \theta}{D_1^4}.$$

Por tanto,

$$\tau \simeq \frac{6GM_M m r_o^2}{D_1^3} \sin \theta \cos \theta = \frac{3GM_M m r_o^2}{D_1^3} \sin(2\theta).$$

Este momento de fuerza aumenta el momento angular orbital de la Luna.

3f. Valor numérico del momento de fuerza

Con $\theta = 3^\circ$,

$$\tau \simeq \frac{3(6.7 \times 10^{-11})(7.3 \times 10^{22})(3.6 \times 10^{16})(6.4 \times 10^6)^2}{(3.8 \times 10^8)^3} \sin 6^\circ.$$

Por consiguiente,

$$\tau = 4.1 \times 10^{16} \text{ N m.}$$

3g. Alejamiento actual de la Luna

Para una órbita circular con separación D ,

$$\omega_M = \sqrt{\frac{GM_E}{D^3}},$$

por lo que el momento angular de la Luna es

$$L_M = M_M D^2 \omega_M = M_M \sqrt{GM_E D}.$$

Derivando respecto al tiempo,

$$\tau = \frac{dL_M}{dt} = \frac{M_M}{2} \sqrt{\frac{GM_E}{D}} \dot{D}.$$

Así, para la separación actual,

$$\dot{D}_1 = \frac{2\tau}{M_M} \sqrt{\frac{D_1}{GM_E}}.$$

Numéricamente,

$$\dot{D}_1 = 1.1 \times 10^{-9} \text{ m s}^{-1}.$$

El aumento durante un año es

$$\Delta D_1 = \dot{D}_1 t_{\text{yr}},$$

lo que da

$$\Delta D_1 = 3.5 \times 10^{-2} \text{ m} = 3.5 \text{ cm} \quad \text{en un año.}$$

3h. Desaceleración de la rotación terrestre y aumento de la duración del día

El momento de fuerza sobre la Tierra es opuesto al momento de fuerza sobre la Luna. Con I_E constante,

$$I_E \dot{\omega}_E = -\tau.$$

Por tanto,

$$\dot{\omega}_{E1} = -\frac{\tau}{I_E} = -5.2 \times 10^{-22} \text{ s}^{-2},$$

y la variación en un año es

$$\Delta \omega_{E1} = -\frac{\tau t_{\text{yr}}}{I_E} = -1.6 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}.$$

Como $T_E = 2\pi/\omega_E$, una pequeña variación satisface

$$\Delta T_E \simeq -\frac{2\pi}{\omega_E^2} \Delta \omega_E.$$

En consecuencia,

$$\Delta T_1 = \frac{2\pi \tau t_{\text{yr}}}{I_E \omega_{E1}^2} = 1.9 \times 10^{-5} \text{ s} \quad \text{en un año.}$$

El día se alarga aproximadamente $19 \mu\text{s}$ por año.

4a. Energía mecánica actual

La energía mecánica consta de la energía cinética de rotación de la Tierra, la energía cinética orbital de la Luna y su energía potencial gravitatoria:

$$E = \frac{1}{2}I_E\omega_{E1}^2 + \frac{1}{2}M_M D_1^2\omega_{M1}^2 - \frac{GM_E M_M}{D_1}.$$

La relación de la órbita circular da

$$\frac{1}{2}M_M D_1^2\omega_{M1}^2 = \frac{GM_E M_M}{2D_1}.$$

Por consiguiente,

$$E = \frac{1}{2}I_E\omega_{E1}^2 - \frac{GM_E M_M}{2D_1}.$$

4b. Variación anual de la energía mecánica

Para variaciones $\Delta\omega_{E1}$ y ΔD_1 , la diferencia exacta dentro de este modelo energético es

$$\Delta E = \frac{1}{2}I_E [(\omega_{E1} + \Delta\omega_{E1})^2 - \omega_{E1}^2] - \frac{GM_E M_M}{2} \left[\frac{1}{D_1 + \Delta D_1} - \frac{1}{D_1} \right].$$

Las variaciones relativas anuales son extremadamente pequeñas, por lo que, conservando los términos de primer orden, se obtiene

$$\Delta E \simeq I_E\omega_{E1}\Delta\omega_{E1} + \frac{GM_E M_M}{2D_1^2}\Delta D_1.$$

El primer término es negativo: la Tierra pierde energía de rotación. El segundo es positivo: la energía orbital de la Luna aumenta a medida que su órbita se expande.

Sustituyendo las variaciones anuales de las partes 3g y 3h y conservando sus valores sin redondear,

$$\Delta E = -9.1 \times 10^{19} \text{ J en un año.}$$

El balance energético también puede expresarse directamente en función del momento de fuerza:

$$\dot{E}_{\text{spin}} = -\tau\omega_{E1}.$$

Utilizando la fórmula del alejamiento,

$$\dot{E}_{\text{orbit}} = \frac{GM_E M_M}{2D_1^2}\dot{D}_1 = \tau\sqrt{\frac{GM_E}{D_1^3}}.$$

Así,

$$\dot{E} = -\tau(\omega_{E1} - \omega_{M1}),$$

donde ω_{M1} se entiende a través de la relación de la órbita circular. Como la Tierra gira sobre su eje más deprisa de lo que la Luna gira a su alrededor, la energía mecánica disminuye; la diferencia se convierte en calor.

4c. Masa de la capa de agua

Como la capa es muy delgada en comparación con el radio terrestre, su volumen es el producto del área de su superficie por su espesor:

$$V \simeq 4\pi r_o^2 h.$$

Por tanto,

$$M_{\text{water}} = 4\pi r_o^2 h \rho_{\text{water}} = 4\pi (6.4 \times 10^6)^2 (0.5) (10^3) \text{ kg}.$$

Por consiguiente,

$$M_{\text{water}} = 2.6 \times 10^{17} \text{ kg}.$$

4d. Disipación anual en forma de calor

La elevación media indicada es $H = 0.5$ m. La energía gravitatoria que gana la capa en una elevación es

$$E_{\text{rise}} = M_{\text{water}} g H.$$

El diez por ciento se disipa en forma de calor durante el descenso posterior. Con dos ciclos al día, hay 2×365 ciclos al año:

$$E_{\text{heat, yr}} = 0.10 (2 \times 365) M_{\text{water}} g H.$$

Al sustituir, se obtiene

$$E_{\text{heat, yr}} = 9.2 \times 10^{19} \text{ J}.$$

Este resultado concuerda estrechamente con la pérdida de energía mecánica

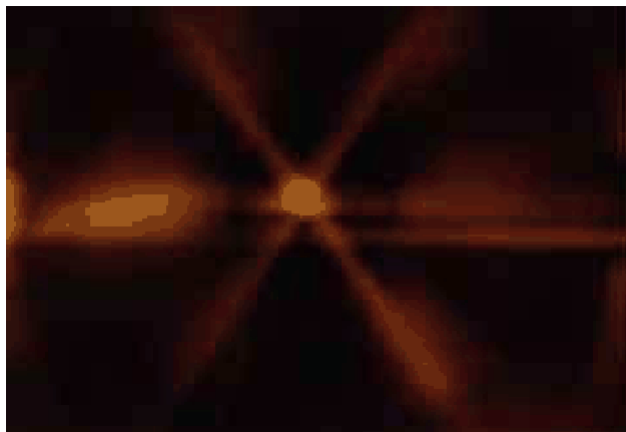
$$|\Delta E| = 9.1 \times 10^{19} \text{ J}$$

hallada en la parte 4b. Dentro del modelo simplificado, la disipación por mareas explica la pérdida de energía mecánica al convertirla en calor.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Enfriamiento Doppler por láser y melaza óptica

El propósito de este problema es desarrollar una teoría sencilla para comprender los fenómenos denominados «enfriamiento por láser» y «melaza óptica». Se trata del enfriamiento de un haz de átomos neutros, generalmente alcalinos, mediante haces láser que se propagan en sentidos opuestos con la misma frecuencia. Este tema forma parte de los trabajos por los que se concedió el Premio Nobel de Física a S. Chu, P. Phillips y C. Cohen-Tannoudji en 1997.



La imagen anterior muestra átomos de sodio (el punto brillante en el centro) atrapados en la intersección de tres pares ortogonales de haces láser opuestos. La región de atrapamiento se denomina «melaza óptica» porque la fuerza óptica disipativa se asemeja a la resistencia viscosa que experimenta un cuerpo al moverse a través de la melaza.

En este problema analizará el fenómeno básico de la interacción entre un fotón que incide sobre un átomo y el fundamento del mecanismo disipativo en una dimensión.

PARTE I: FUNDAMENTOS DEL ENFRIAMIENTO POR LÁSER

Considere un átomo de masa m que se mueve en la dirección $+x$ con velocidad v . Por simplicidad, consideraremos que el problema es unidimensional, es decir, ignoraremos las direcciones y y z (véase la figura 1). El átomo tiene dos niveles de energía interna. Se toma como cero la energía del estado de menor energía y como $\hbar\omega_0$ la energía del estado excitado, donde $\hbar = h/2\pi$. El átomo se encuentra inicialmente en el estado de menor energía. Un haz láser de frecuencia ω_L en el laboratorio se dirige en la dirección $-x$ e incide sobre el átomo. Desde el punto de vista de la mecánica cuántica, el láser está compuesto por un gran número de fotones, cada uno con energía $\hbar\omega_L$ y momento lineal $-\hbar q$. El átomo puede absorber un fotón y emitirlo espontáneamente más tarde; esta emisión puede producirse con igual probabilidad en las direcciones $+x$ y $-x$. Puesto que el átomo se mueve a velocidades no relativistas, $v/c \ll 1$ (siendo c la velocidad de la luz), conserve únicamente los términos hasta primer orden en esta cantidad. Considere también que $\hbar q/mv \ll 1$, es decir, que el momento lineal del átomo es mucho mayor que el de un solo fotón. Al escribir sus respuestas, conserve únicamente las correcciones lineales en cualquiera de las dos cantidades anteriores.

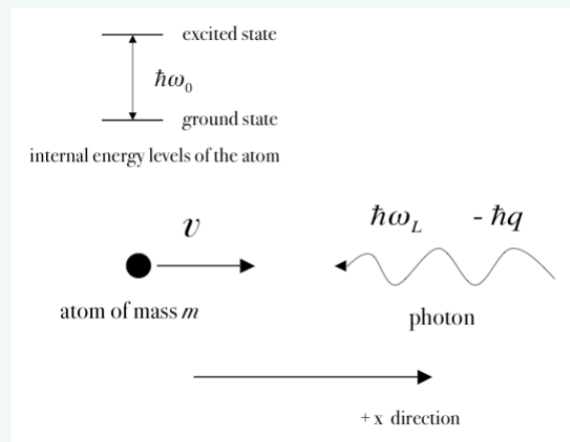


Fig.1 Esquema de un átomo de masa m con velocidad v en la dirección $+x$, que colisiona con un fotón de energía $\hbar\omega_L$ y momento lineal $-\hbar q$. El átomo tiene dos estados internos con una diferencia de energía $\hbar\omega_0$.

Suponga que la frecuencia del láser ω_L está ajustada de manera que, vista por el átomo en movimiento, está en resonancia con la transición interna del átomo. Responda a las siguientes preguntas:

1. Absorción.

1a	Escriba la condición de resonancia para la absorción del fotón.	0.2
1b	Escriba el momento lineal p_{at} del átomo después de la absorción, observado en el laboratorio.	0.2

1c	Escriba la energía total ε_{at} del átomo después de la absorción, observada en el laboratorio.	0.2
----	---	-----

2. Emisión espontánea de un fotón en la dirección $-x$.

En algún instante posterior a la absorción del fotón incidente, el átomo puede emitir un fotón en la dirección $-x$.

2a	Escriba la energía del fotón emitido, ε_{ph} , después del proceso de emisión en la dirección $-x$, observada en el laboratorio.	0.2
2b	Escriba el momento lineal del fotón emitido p_{ph} , después del proceso de emisión en la dirección $-x$, observado en el laboratorio.	0.2
2c	Escriba el momento lineal del átomo p_{at} , después del proceso de emisión en la dirección $-x$, observado en el laboratorio.	0.2
2d	Escriba la energía total del átomo ε_{at} , después del proceso de emisión en la dirección $-x$, observada en el laboratorio.	0.2

3. Emisión espontánea de un fotón en la dirección $+x$.

En algún instante posterior a la absorción del fotón incidente, el átomo puede, en cambio, emitir un fotón en la dirección $+x$.

3a	Escriba la energía del fotón emitido, ε_{ph} , después del proceso de emisión en la dirección $+x$, observada en el laboratorio.	0.2
3b	Escriba el momento lineal del fotón emitido p_{ph} , después del proceso de emisión en la dirección $+x$, observado en el laboratorio.	0.2
3c	Escriba el momento lineal del átomo p_{at} , después del proceso de emisión en la dirección $+x$, observado en el laboratorio.	0.2
3d	Escriba la energía total del átomo ε_{at} , después del proceso de emisión en la dirección $+x$, observada en el laboratorio.	0.2

4. Valores medios de la emisión después de la absorción.

La emisión espontánea de un fotón en las direcciones $-x$ o $+x$ ocurre con la misma probabilidad. Teniendo esto en cuenta, responda a las siguientes preguntas.

4a	Escriba la energía media de un fotón emitido, ε_{ph} , después del proceso de emisión.	0.2
4b	Escriba el momento lineal medio de un fotón emitido p_{ph} , después del proceso de emisión.	0.2
4c	Escriba la energía total media del átomo ε_{at} , después del proceso de emisión.	0.2
4d	Escriba el momento lineal medio del átomo p_{at} , después del proceso de emisión.	0.2

5. Transferencia de energía y momento lineal.

Suponiendo únicamente un proceso completo de absorción y emisión de un solo fotón, como el descrito anteriormente, existe una transferencia media neta de momento lineal y energía entre la radiación láser y el átomo.

5a	Escriba la variación media de energía $\Delta\varepsilon$ del átomo después de un proceso completo de absorción y emisión de un solo fotón.	0.2
5b	Escriba la variación media de momento lineal Δp del átomo después de un proceso completo de absorción y emisión de un solo fotón.	0.2

6. Transferencia de energía y momento lineal por un haz láser en la dirección $+x$.

Considere ahora que un haz láser de frecuencia ω'_L incide sobre el átomo en la dirección $+x$, mientras que el átomo también se mueve en la dirección $+x$ con velocidad v . Suponiendo que se cumple una condición de resonancia entre la transición interna del átomo y el haz láser, tal como lo observa el átomo, responda a las siguientes preguntas:

6a	Escriba la variación media de energía $\Delta\epsilon$ del átomo después de un proceso completo de absorción y emisión de un solo fotón.	0.3
6b	Escriba la variación media de momento lineal Δp del átomo después de un proceso completo de absorción y emisión de un solo fotón.	0.3

PARTE II: DISIPACIÓN Y FUNDAMENTOS DE LA MELAZA ÓPTICA

Sin embargo, la naturaleza impone una incertidumbre inherente a los procesos cuánticos. Así, el hecho de que el átomo pueda emitir espontáneamente un fotón en un *tiempo finito* después de la absorción tiene como consecuencia que la condición de resonancia no deba cumplirse *exactamente* como en la discusión anterior. Es decir, las frecuencias de los haces láser ω_L y ω'_L pueden tener cualquier valor y el proceso de absorción y emisión puede seguir ocurriendo. Estos procesos ocurrirán con distintas probabilidades (cuánticas) y, como cabe esperar, la probabilidad máxima se alcanza cuando se cumple exactamente la condición de resonancia. El tiempo medio transcurrido entre la absorción y la emisión en un único proceso se denomina tiempo de vida del nivel de energía excitado del átomo y se representa por Γ^{-1} .

Considere un conjunto de N átomos *en reposo* en el sistema de referencia del laboratorio y un haz láser de frecuencia ω_L que incide sobre ellos. Los átomos absorben y emiten continuamente, de modo que hay, en promedio, N_{exc} átomos en el estado excitado (y, por tanto, $N - N_{exc}$ átomos en el estado fundamental). Un cálculo de mecánica cuántica proporciona el siguiente resultado:

$$N_{exc} = N \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}$$

donde ω_0 es la frecuencia de resonancia de la transición atómica y Ω_R es la denominada frecuencia de Rabi; Ω_R^2 es proporcional a la *intensidad* del haz láser. Como se ha mencionado antes, puede observarse que este número es distinto de cero incluso si la frecuencia de resonancia ω_0 es diferente de la frecuencia del haz láser ω_L . Una forma alternativa de expresar el resultado anterior es que el número de procesos de absorción y emisión por unidad de tiempo es $N_{exc}\Gamma$.

Considere la situación física representada en la figura 2, en la que dos haces láser que se propagan en sentidos opuestos con la *misma* frecuencia ω_L , pero *arbitraria*, inciden sobre un gas de N átomos que se mueven en la dirección $+x$ con velocidad v .

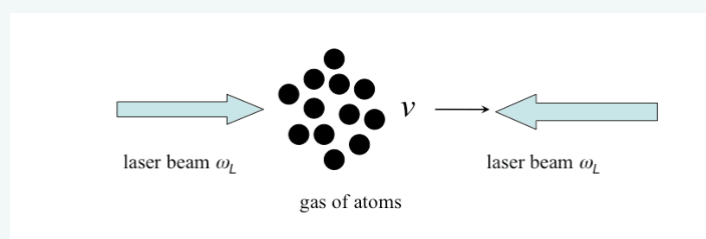


Figura 2. Dos haces láser que se propagan en sentidos opuestos con la *misma* frecuencia ω_L , pero *arbitraria*, inciden sobre un gas de N átomos que se mueven en la dirección $+x$ con velocidad v .

7. Fuerza ejercida por los láseres sobre el haz atómico.

7a	Con la información obtenida hasta ahora, determine la fuerza que los láseres ejercen sobre el haz atómico. Debe suponer que $mv \gg \hbar q$.	1.5
----	--	-----

8. Límite de bajas velocidades.

Suponga ahora que la velocidad de los átomos es lo suficientemente pequeña como para poder desarrollar la fuerza hasta primer orden en v .

8a	Obtenga una expresión para la fuerza hallada en la pregunta (7a), en este límite.	1.5
----	---	-----

Utilizando este resultado, puede determinar las condiciones para que la radiación láser aumente la rapidez de los átomos, la disminuya o no tenga ningún efecto sobre ellos.

8b	Escriba la condición para obtener una fuerza positiva (que aumente la rapidez de los átomos).	0.25
8c	Escriba la condición para obtener una fuerza nula.	0.25
8d	Escriba la condición para obtener una fuerza negativa (que frene los átomos).	0.25
8e	Considere ahora que los átomos se mueven con una velocidad $-v$ (en la dirección $-x$). Escriba la condición para obtener una fuerza que frene los átomos.	0.25

9. Melaza óptica.

En el caso de una fuerza negativa, se obtiene una fuerza disipativa de rozamiento. Suponga que inicialmente, en $t = 0$, el gas de átomos tiene una velocidad v_0 .

9a	En el límite de bajas velocidades, determine la velocidad de los átomos después de que los haces láser hayan estado encendidos durante un tiempo τ .	1.5
9b	Suponga ahora que el gas de átomos está en equilibrio térmico a una temperatura T_0 . Determine la temperatura T después de que los haces láser hayan estado encendidos durante un tiempo τ .	0.5

Este modelo no permite alcanzar temperaturas arbitrariamente bajas.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Definamos

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad q = \frac{\omega_L}{c}, \quad q' = \frac{\omega'_L}{c}, \quad K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Para la Parte II, definamos

$$\Delta = \omega_0 - \omega_L, \quad D = \Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2, \quad \alpha = \frac{4\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 \Delta}{D^2}.$$

Se supone que los dos haces tienen la misma Ω_R .

Las magnitudes de los fotones que se indican a continuación conservan su primera corrección Doppler. Las magnitudes atómicas conservan la corrección de retroceso de orden más bajo, omitiendo los productos de v/c y $\hbar q/(mv)$. Las pequeñas correcciones del momento lineal anteriores a este truncamiento se muestran en la solución. Las energías atómicas omiten la energía en reposo constante.

- **1a:** $\omega_L(1 + \beta) = \omega_0$, equivalentemente $\omega_L + qv = \omega_0$.
- **1b:** $p_{at} = mv - \hbar q$.
- **1c:** $\varepsilon_{at} = K + \hbar\omega_L = K + \hbar\omega_0 - \hbar qv$.
- **2a:** $\varepsilon_{ph} = \hbar\omega_0(1 - \beta) \simeq \hbar\omega_L$.
- **2b:** $p_{ph} = -\frac{\hbar\omega_0}{c}(1 - \beta) \simeq -\hbar q$.
- **2c:** $p_{at} = mv$.
- **2d:** $\varepsilon_{at} = K$.
- **3a:** $\varepsilon_{ph} = \hbar\omega_0(1 + \beta) \simeq \hbar\omega_L(1 + 2\beta)$.
- **3b:** $p_{ph} = \frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + \beta) \simeq \hbar q(1 + 2\beta)$.
- **3c:** $p_{at} \simeq mv - 2\hbar q$.
- **3d:** $\varepsilon_{at} \simeq K - 2\hbar qv$.
- **4a:** $\langle \varepsilon_{ph} \rangle = \hbar\omega_0$.
- **4b:** $\langle p_{ph} \rangle = \frac{\hbar\omega_0 v}{c^2} \simeq \hbar q\beta$.
- **4c:** $\langle \varepsilon_{at} \rangle \simeq K - \hbar qv$.
- **4d:** $\langle p_{at} \rangle \simeq mv - \hbar q$.
- **5a:** $\Delta\varepsilon = -\frac{\hbar\omega_0 v}{c} \simeq -\hbar qv$.
- **5b:** $\Delta p \simeq -\hbar q$.
- **6a:** $\Delta\varepsilon = +\frac{\hbar\omega_0 v}{c} \simeq +\hbar q'v$.
- **6b:** $\Delta p \simeq +\hbar q'$.
- **7a:**

$$F(v) = N\hbar q\Gamma\Omega_R^2 \left[\frac{1}{(\Delta + qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} - \frac{1}{(\Delta - qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} \right].$$

- **8a:**

$$F(v) \simeq -N\alpha v = -\frac{4N\hbar q^2\Gamma\Omega_R^2(\omega_0 - \omega_L)}{[(\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2]^2} v.$$

- **8b:** $\omega_L > \omega_0$.
- **8c:** $\omega_L = \omega_0$.
- **8d:** $\omega_L < \omega_0$.
- **8e:** $\omega_L < \omega_0$; la fuerza apunta entonces en la dirección $+x$.
- **9a:** $v(\tau) = v_0 e^{-\alpha\tau/m}$, con $\alpha > 0$.
- **9b:** $T(\tau) = T_0 e^{-2\alpha\tau/m}$.

Solución

La relación entre la energía y el momento lineal del fotón da

$$\hbar\omega_L = c\hbar q, \quad q = \frac{\omega_L}{c}.$$

Escribamos los dos parámetros pequeños como

$$\beta = \frac{v}{c} \ll 1, \quad \eta = \frac{\hbar q}{mv} \ll 1.$$

La energía de retroceso $(\hbar q)^2/(2m)$ es cuadrática en η respecto a la energía cinética atómica inicial, por lo que se omite. La variación de la velocidad atómica tras la absorción es $-\hbar q/m$; su contribución a un factor Doppler es

$$\frac{\hbar q}{mc} = \eta\beta,$$

que también se omite.

Por tanto, al calcular las frecuencias de los fotones emitidos, se puede asignar al átomo emisor la velocidad v . Las correcciones del momento lineal de orden $\hbar q\beta = mv\eta\beta$ se muestran cuando resultan útiles, pero se omiten en los resultados de retroceso atómico de orden más bajo.

1a. Condición de resonancia

Para un fotón que se propaga en $-x$, la frecuencia medida por un átomo que se mueve en $+x$ es, a primer orden,

$$\omega_{\text{atom}} = \omega_L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega_L + qv.$$

La resonancia exige que esta frecuencia sea igual a ω_0 :

$$\boxed{\omega_L + qv = \omega_0}, \quad \boxed{\omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \omega_0}.$$

Esto también se deduce de la conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \hbar\omega_L = \frac{(mv - \hbar q)^2}{2m} + \hbar\omega_0.$$

Al descartar la energía de retroceso se obtiene la misma condición.

1b. Momento lineal atómico después de la absorción

La conservación del momento lineal da

$$\boxed{p_{\text{at}} = mv - \hbar q}.$$

1c. Energía atómica después de la absorción

El átomo adquiere la energía del fotón incidente:

$$\boxed{\varepsilon_{\text{at}} = \frac{1}{2}mv^2 + \hbar\omega_L}.$$

Equivalentemente, sumando sus energías cinética e interna,

$$\varepsilon_{\text{at}} = \frac{(mv - \hbar q)^2}{2m} + \hbar\omega_0 \simeq \boxed{\frac{1}{2}mv^2 - \hbar qv + \hbar\omega_0}.$$

La condición de resonancia hace que estas expresiones sean iguales al orden conservado.

Para las preguntas sobre la emisión, sea $s = +1$ la etiqueta de un fotón emitido en $+x$, y $s = -1$ la de un fotón emitido en $-x$. Despreciando el retroceso en la frecuencia de transición, su energía en el sistema de reposo del átomo emisor es $\hbar\omega_0$. La transformación Doppler de primer orden da

$$\varepsilon_{ph}^{(s)} = \hbar\omega_0(1 + s\beta), \quad p_{ph}^{(s)} = s \frac{\hbar\omega_0}{c} (1 + s\beta).$$

2a. Energía del fotón para la emisión en $-x$

Tomando $s = -1$,

$$\boxed{\varepsilon_{ph}^{(-)} = \hbar\omega_0(1 - \beta)}.$$

Puesto que

$$\omega_L = \frac{\omega_0}{1 + \beta} \simeq \omega_0(1 - \beta),$$

esto es

$$\boxed{\varepsilon_{ph}^{(-)} \simeq \hbar\omega_L}.$$

2b. Momento lineal del fotón para la emisión en $-x$

Utilizando $p_{ph} = -\varepsilon_{ph}/c$,

$$\boxed{p_{ph}^{(-)} = -\frac{\hbar\omega_0}{c}(1 - \beta) \simeq -\hbar q}.$$

2c. Momento lineal atómico después de la emisión en $-x$

La conservación del momento lineal en el proceso completo da

$$p_{at}^{(-)} = mv - \hbar q - p_{ph}^{(-)} \simeq mv - \hbar q + \hbar q.$$

Por tanto,

$$\boxed{p_{at}^{(-)} = mv}.$$

2d. Energía atómica después de la emisión en $-x$

El fotón emitido se lleva la energía suministrada por el fotón absorbido:

$$\varepsilon_{at}^{(-)} = K + \hbar\omega_L - \varepsilon_{ph}^{(-)} \simeq K.$$

Así,

$$\boxed{\varepsilon_{at}^{(-)} = \frac{1}{2}mv^2}.$$

3a. Energía del fotón para la emisión en $+x$

Para $s = +1$,

$$\boxed{\varepsilon_{ph}^{(+)} = \hbar\omega_0(1 + \beta)}.$$

Utilizando $\omega_0 = \omega_L(1 + \beta)$,

$$\boxed{\varepsilon_{ph}^{(+)} \simeq \hbar\omega_L(1 + 2\beta)}.$$

3b. Momento lineal del fotón para la emisión en $+x$

El momento lineal es positivo:

$$p_{ph}^{(+)} = \frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + \beta) \simeq \hbar q(1 + 2\beta).$$

3c. Momento lineal atómico después de la emisión en $+x$

La conservación del momento lineal, manteniendo temporalmente la corrección Doppler del fotón, da

$$p_{at}^{(+)} = mv - \hbar q - \hbar q(1 + 2\beta) = mv - 2\hbar q - 2\hbar q\beta.$$

El último término es de orden relativo $\eta\beta$ en el momento lineal atómico. Omitiendo esa corrección mixta,

$$p_{at}^{(+)} \simeq mv - 2\hbar q.$$

3d. Energía atómica después de la emisión en $+x$

El átomo vuelve a su estado fundamental. La conservación de la energía da

$$\begin{aligned}\varepsilon_{at}^{(+)} &= K + \hbar\omega_L - \hbar\omega_0(1 + \beta) \\ &\simeq K + \hbar\omega_0(1 - \beta) - \hbar\omega_0(1 + \beta) \\ &= K - 2\hbar\omega_0\beta.\end{aligned}$$

Con la precisión conservada para las magnitudes atómicas,

$$\varepsilon_{at}^{(+)} \simeq \frac{1}{2}mv^2 - 2\hbar qv.$$

Esto también se obtiene desarrollando

$$\frac{(mv - 2\hbar q)^2}{2m} = K - 2\hbar qv + \frac{2\hbar^2 q^2}{m}$$

y descartando el término cuadrático de retroceso.

4a. Energía media del fotón emitido

Las dos direcciones tienen igual probabilidad:

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_{ph} \rangle &= \frac{1}{2}\hbar\omega_0(1 - \beta) + \frac{1}{2}\hbar\omega_0(1 + \beta) \\ &= \boxed{\hbar\omega_0}.\end{aligned}$$

4b. Momento lineal medio del fotón emitido

Promediando los momentos lineales con sus signos,

$$\begin{aligned}\langle p_{ph} \rangle &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\hbar\omega_0}{c}(1 - \beta) + \frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + \beta) \right] \\ &= \boxed{\frac{\hbar\omega_0 v}{c^2}} \simeq \boxed{\hbar q\beta}.\end{aligned}$$

Aunque las direcciones son igualmente probables, las energías de los dos fotones difieren en el laboratorio. En consecuencia, su momento lineal medio en el laboratorio es pequeño y positivo.

Respecto al momento lineal atómico, este valor medio es de orden

$$\frac{\langle p_{ph} \rangle}{mv} \simeq \eta\beta.$$

Por tanto, se omite en las variaciones del momento lineal atómico de orden más bajo que se presentan a continuación.

4c. Energía atómica media

Utilizando los resultados de 2d y 3d,

$$\langle \varepsilon_{at} \rangle = \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}(K - 2\hbar qv).$$

Por consiguiente,

$$\boxed{\langle \varepsilon_{at} \rangle \simeq K - \hbar qv}.$$

Equivalentemente,

$$\langle \varepsilon_{at} \rangle = K + \hbar\omega_L - \hbar\omega_0.$$

4d. Momento lineal atómico medio

Antes de descartar la corrección mixta, la conservación del momento lineal da

$$\langle p_{at} \rangle = mv - \hbar q - \langle p_{ph} \rangle = mv - \hbar q - \frac{\hbar\omega_0 v}{c^2}.$$

Así, al orden más bajo del retroceso atómico solicitado,

$$\boxed{\langle p_{at} \rangle \simeq mv - \hbar q}.$$

5a. Variación media de la energía atómica

Restando la energía inicial,

$$\Delta\varepsilon = \langle \varepsilon_{at} \rangle - K = \hbar(\omega_L - \omega_0).$$

La condición de resonancia proporciona

$$\boxed{\Delta\varepsilon = -\frac{\hbar\omega_0 v}{c} \simeq -\hbar qv}.$$

El fotón emitido tiene, en promedio, más energía que el fotón absorbido. Esa diferencia procede de la energía cinética del átomo.

5b. Variación media del momento lineal atómico

Restando el momento lineal inicial del resultado de 4d se obtiene

$$\boxed{\Delta p \simeq -\hbar q}.$$

La corrección más pequeña anterior al truncamiento es

$$-\langle p_{ph} \rangle = -\frac{\hbar\omega_0 v}{c^2}.$$

Al orden más bajo del retroceso, las variaciones de energía y momento lineal cumplen

$$\Delta\varepsilon \simeq v \Delta p.$$

6a. Variación de energía para un láser que se propaga en $+x$

Ahora el átomo se aleja de la luz incidente. La condición de resonancia es

$$\omega'_L \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \omega_0,$$

de modo que

$$\omega'_L \simeq \omega_0(1 + \beta).$$

La energía media del fotón emitido sigue siendo $\hbar\omega_0$. Por tanto,

$$\Delta\varepsilon = \hbar(\omega'_L - \omega_0) = \boxed{\frac{\hbar\omega_0 v}{c}} \simeq \boxed{\hbar q' v}, \quad q' = \frac{\omega'_L}{c}.$$

El átomo gana energía cinética.

6b. Variación del momento lineal para un láser que se propaga en $+x$

El fotón absorbido aporta un momento lineal $+\hbar q'$. En consecuencia,

$$\Delta p = \hbar q' - \frac{\hbar\omega_0 v}{c^2} \simeq \boxed{+\hbar q'}.$$

El segundo término omitido es, de nuevo, una corrección mixta de Doppler y retroceso en el momento lineal atómico.

7a. Fuerza debida a los dos haces láser

Utilizamos la ley de dispersión proporcionada por separado para cada haz, suponiendo que sus intensidades y, por tanto, sus frecuencias de Rabi son iguales.

Sea $+$ la etiqueta del haz que se propaga en $+x$, y $-$ la del haz que se propaga en $-x$. Las frecuencias observadas por los átomos en movimiento son

$$\omega_{\text{atom},+} = \omega_L - qv, \quad \omega_{\text{atom},-} = \omega_L + qv.$$

Por tanto, sus desintonizaciones respecto a la transición atómica son

$$\omega_0 - \omega_{\text{atom},+} = \Delta + qv, \quad \omega_0 - \omega_{\text{atom},-} = \Delta - qv.$$

Los números totales de sucesos de dispersión por unidad de tiempo son

$$R_+(v) = \frac{N\Gamma\Omega_R^2}{(\Delta + qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2},$$

$$R_-(v) = \frac{N\Gamma\Omega_R^2}{(\Delta - qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2}.$$

Al orden más bajo del retroceso, cada suceso transfiere $+\hbar q$ o $-\hbar q$, respectivamente. Por tanto,

$$F(v) = \hbar q R_+(v) - \hbar q R_-(v),$$

lo que da

$$\boxed{F(v) = N\hbar q \Gamma \Omega_R^2 \left[\frac{1}{(\Delta + qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} - \frac{1}{(\Delta - qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} \right]}.$$

Esta es la fuerza sobre el conjunto de los N átomos. La fuerza sobre un átomo es F/N .

El desplazamiento Doppler qv se conserva en las probabilidades de dispersión: puede ser significativo en comparación con la anchura de línea de la transición incluso cuando v/c es muy pequeño.

8a. Desarrollo para bajas velocidades

Definamos

$$D = \Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2.$$

Para qv suficientemente pequeño,

$$\frac{1}{(\Delta \pm qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} \simeq \frac{1}{D} \mp \frac{2\Delta qv}{D^2}.$$

Por ejemplo, $|qv| \ll \sqrt{D}$ es una condición suficiente de baja velocidad.

Restando los dos desarrollos,

$$F(v) \simeq N\hbar q \Gamma \Omega_R^2 \left(-\frac{4\Delta qv}{D^2} \right).$$

Por consiguiente,

$$\boxed{F(v) \simeq -N\alpha v}, \quad \boxed{\alpha = \frac{4\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 \Delta}{D^2}}.$$

El coeficiente α tiene unidades de masa por unidad de tiempo, por lo que αv tiene unidades de fuerza.

8b. Fuerza positiva

Para $v > 0$, todos los factores de α , salvo Δ , son positivos. Una fuerza positiva requiere

$$\Delta < 0.$$

Por tanto,

$$\boxed{\omega_L > \omega_0}.$$

Esto es una desintonización hacia el azul.

8c. Fuerza nula

Para una intensidad no nula y un átomo en movimiento, la condición de desintonización es

$$\Delta = 0,$$

o bien

$$\boxed{\omega_L = \omega_0}.$$

Las dos tasas de dispersión son entonces iguales. Independientemente de ello, la simetría también da una fuerza nula cuando $v = 0$.

8d. Fuerza negativa

Para $v > 0$, una fuerza negativa requiere $\alpha > 0$, por lo que

$$\boxed{\omega_L < \omega_0}.$$

Esto es una desintonización hacia el rojo. El efecto Doppler acerca a la resonancia la frecuencia del haz que se propaga en sentido opuesto al movimiento, y este se dispersa con mayor intensidad.

8e. Frenado de los átomos que se mueven en $-x$

Para una velocidad $-v$, con $v > 0$,

$$F(-v) = +N\alpha v.$$

El frenado requiere una fuerza en $+x$, de modo que, de nuevo, $\alpha > 0$. Así,

$$\boxed{\omega_L < \omega_0}.$$

La desintonización hacia el rojo produce una fuerza que se opone al movimiento en cualquiera de los dos sentidos.

9a. Velocidad después de un tiempo τ

Para una desintonización hacia el rojo, $\alpha > 0$. El gas tiene una masa total Nm , por lo que la segunda ley de Newton da

$$Nm \frac{dv}{dt} = -N\alpha v.$$

El factor N se cancela:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m}v.$$

Integrando con $v(0) = v_0$,

$$\boxed{v(\tau) = v_0 e^{-\alpha\tau/m}}.$$

Explícitamente,

$$v(\tau) = v_0 \exp \left[-\frac{4\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 (\omega_0 - \omega_L) \tau}{m [(\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2]^2} \right].$$

El tiempo característico de decaimiento de la velocidad es m/α .

9b. Temperatura después de un tiempo τ

En este modelo determinista de rozamiento, cada velocidad atómica se multiplica por

$$e^{-\alpha\tau/m}.$$

Por tanto, la varianza de las velocidades se multiplica por

$$e^{-2\alpha\tau/m}.$$

Para el movimiento térmico unidimensional,

$$m \langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle = k_B T.$$

En consecuencia,

$$\boxed{T(\tau) = T_0 e^{-2\alpha\tau/m}}.$$

Explícitamente,

$$T(\tau) = T_0 \exp \left[-\frac{8\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 (\omega_0 - \omega_L) \tau}{m [(\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2]^2} \right].$$

Esta exponencial no puede extrapolarse a temperaturas arbitrariamente bajas. En el cálculo se han omitido las contribuciones cuadráticas del retroceso y las fluctuaciones causadas por los sucesos aleatorios de dispersión. En particular, la hipótesis $mv \gg \hbar q$, aplicada a una rapidez térmica típica, requiere

$$k_B T \gg \frac{(\hbar q)^2}{m}.$$

A medida que los átomos se enfrían, los términos omitidos en este modelo se vuelven relevantes.

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.

Problema 3: ¿Por qué son tan grandes las estrellas?

Las estrellas son esferas de gas caliente. La mayoría de ellas brillan porque en sus regiones centrales fusionan hidrógeno para formar helio. En este problema utilizamos conceptos tanto de mecánica clásica como de mecánica cuántica, así como de electrostática y termodinámica, para comprender por qué las estrellas deben ser lo suficientemente grandes para que se produzca este proceso de fusión y deducir también cuáles serían la masa y el radio de la estrella más pequeña capaz de fusionar hidrógeno.

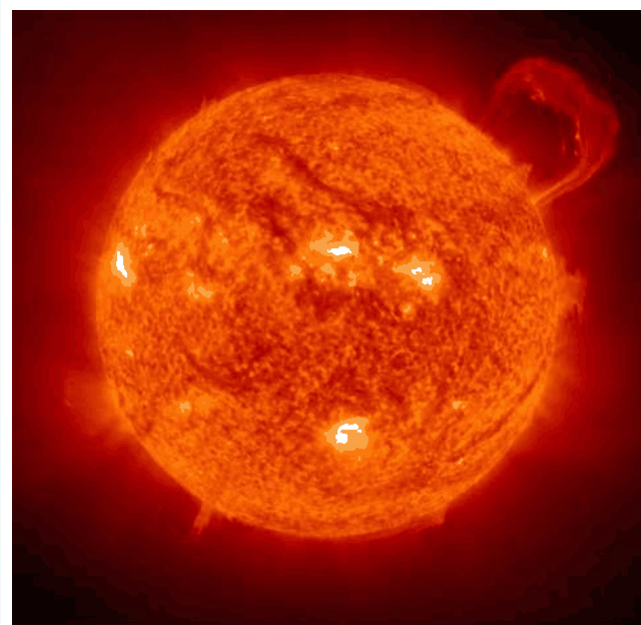


Figura 1. Nuestro Sol, como la mayoría de las estrellas, brilla como resultado de la fusión termonuclear de hidrógeno en helio en sus regiones centrales.

CONSTANTES ÚTILES
Constante de gravitación = $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ (errata en el enunciado oficial: s^2 en lugar de s^{-2})
Constante de Boltzmann = $k = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Constante de Planck = $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1}$
Masa del protón = $m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masa del electrón = $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Unidad de carga eléctrica = $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante eléctrica (permitividad del vacío) = $\epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
Radio del Sol = $R_S = 7.0 \times 10^8 \text{ m}$

CONSTANTES ÚTILES

Masa del Sol = $M_S = 2.0 \times 10^{30}$ kg

1. Una estimación clásica de la temperatura en el centro de las estrellas.

Suponga que el gas que forma la estrella es hidrógeno ionizado puro (electrones y protones en igual número) y que se comporta como un gas ideal. Desde el punto de vista clásico, para que dos protones se fusionen deben acercarse hasta una distancia de 10^{-15} m, de modo que la fuerza nuclear fuerte, que es atractiva y de corto alcance, llegue a ser dominante. Sin embargo, para acercarse deben vencer primero la acción repulsiva de la fuerza de Coulomb. Suponga, en el marco clásico, que los dos protones (considerados fuentes puntuales) se mueven en sentidos opuestos, cada uno con velocidad v_{rms} , la velocidad cuadrática media (rms) de los protones, en una colisión frontal unidimensional.

1a	¿Cuál debe ser la temperatura del gas, T_c , para que la distancia de máxima aproximación de los protones, d_c , sea igual a 10^{-15} m? Exprese este valor y todos los valores numéricos de este problema con dos cifras significativas.	1.5
----	---	-----

2. Comprobación de que la estimación anterior de la temperatura es incorrecta.

Para comprobar si la estimación anterior de la temperatura es razonable, se necesita un método independiente para estimar la temperatura central de una estrella. La estructura de las estrellas es muy complicada, pero podemos comprender sus aspectos fundamentales si hacemos algunas suposiciones. Las estrellas están en equilibrio, es decir, no se expanden ni se contraen porque la fuerza de gravedad dirigida hacia el interior está compensada por la fuerza debida a la presión dirigida hacia el exterior (véase la Figura 2). Para una capa de gas, la ecuación de equilibrio hidrostático a una distancia dada r del centro de la estrella viene dada por

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{GM_r \rho_r}{r^2},$$

donde P es la presión del gas, G la constante de gravitación, M_r la masa de la estrella contenida en una esfera de radio r , y ρ_r es la densidad del gas en la capa.

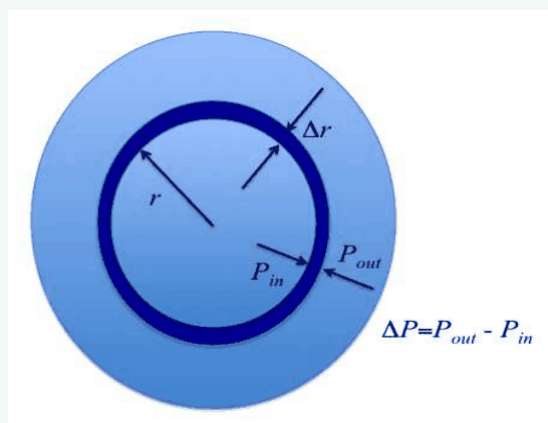


Figura 2. Las estrellas están en equilibrio hidrostático: la diferencia de presión compensa la gravedad.

Se puede obtener una estimación del orden de magnitud de la temperatura central de la estrella a partir de los valores de los parámetros en el centro y en la superficie de la estrella, haciendo las siguientes aproximaciones:

$$\Delta P \approx P_o - P_c,$$

donde P_c y P_o son las presiones en el centro y en la superficie de la estrella, respectivamente. Como $P_c \gg P_o$, podemos suponer que

$$\Delta P \approx -P_c.$$

Dentro de la misma aproximación, podemos escribir

$$\Delta r \approx R,$$

donde R es el radio total de la estrella, y

$$M_r \approx M_R = M,$$

siendo M la masa total de la estrella.

La densidad puede aproximarse por su valor en el centro,

$$\rho_r \approx \rho_c.$$

Puede suponer que la presión es la de un gas ideal.

2a	Obtenga una ecuación para la temperatura en el centro de la estrella, T_c , únicamente en función del radio y la masa de la estrella y de constantes físicas.	0.5
----	---	-----

Ahora podemos utilizar la siguiente predicción de este modelo como criterio de su validez:

2b	Utilizando la ecuación obtenida en (2a), escriba el cociente M/R esperado para una estrella únicamente en función de constantes físicas y de T_c .	0.5
2c	Utilice el valor de T_c deducido en el apartado (1a) y obtenga el valor numérico del cociente M/R esperado para una estrella.	0.5
2d	Calcule ahora el cociente $M(Sun)/R(Sun)$ y compruebe que este valor es mucho menor que el obtenido en (2c).	0.5

3. Una estimación cuántica de la temperatura en el centro de las estrellas

La gran discrepancia encontrada en (2d) sugiere que la estimación clásica de T_c obtenida en (1a) no es correcta. Esta discrepancia se resuelve al considerar los efectos cuánticos, que nos indican que los protones se comportan como ondas y que un solo protón se encuentra extendido sobre una región de tamaño del orden de λ_p , la longitud de onda de de Broglie. Esto implica que, si d_c , la distancia de máxima aproximación de los protones, es del orden de λ_p , los protones se solapan en el sentido cuántico y pueden fusionarse.

3a	Suponiendo que $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ es la condición que permite la fusión, obtenga, para un protón con velocidad v_{rms} , una ecuación para T_c únicamente en función de constantes físicas.	1.0
3b	Evalúe numéricamente el valor de T_c obtenido en (3a).	0.5
3c	Utilice el valor de T_c deducido en (3b) para obtener el valor numérico del cociente M/R esperado para una estrella, utilizando la fórmula deducida en (2b). Compruebe que este valor es bastante similar al cociente $M(Sun)/R(Sun)$ observado.	0.5

En efecto, las estrellas de la llamada *secuencia principal* (que fusionan hidrógeno) satisfacen aproximadamente este cociente en un amplio intervalo de masas.

4. El cociente masa/radio de las estrellas.

La concordancia anterior sugiere que el enfoque cuántico para estimar la temperatura en el centro del Sol es correcto.

4a	Utilice los resultados anteriores para demostrar que, para cualquier estrella que fusione hidrógeno, el cociente entre la masa M y el radio R es el mismo y depende únicamente de constantes físicas. Obtenga la ecuación del cociente M/R para las estrellas que fusionan hidrógeno.	0.5
----	---	-----

5. La masa y el radio de la estrella más pequeña.

El resultado obtenido en (4a) sugiere que podría haber estrellas de cualquier masa siempre que se cumpla dicha relación; sin embargo, esto no es cierto.

Se sabe que el gas del interior de las estrellas normales que fusionan hidrógeno se comporta aproximadamente como un gas ideal. Esto significa que d_e , la *separación entre electrones* típica, es, en promedio, mayor que λ_e , su longitud de onda de de Broglie típica. Si estuvieran más cerca, los electrones se encontrarían en un estado denominado degenerado y las estrellas se comportarían de manera diferente. Observe la diferencia entre las formas en que tratamos a los protones y a los electrones dentro de la estrella. En el caso de los protones, sus ondas de de Broglie deben solaparse estrechamente al colisionar para que se fusionen, mientras que, en el caso de los electrones, sus ondas de de Broglie no deben solaparse para que sigan comportándose como un gas ideal.

La densidad de las estrellas aumenta al disminuir el radio. No obstante, para esta estimación del orden de magnitud suponga que tienen densidad uniforme. También puede utilizar que $m_p \gg m_e$.

5a	Obtenga una ecuación para n_e , la densidad numérica media de electrones en el interior de la estrella.	0.5
5b	Obtenga una ecuación para d_e , la separación típica entre electrones en el interior de la estrella.	0.5
5c	Utilice la condición $d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}$ para escribir una ecuación para el radio de la estrella normal más pequeña posible. Tome la temperatura en el centro de la estrella como representativa de todo el interior estelar.	1.5
5d	Obtenga el valor numérico del radio de la estrella normal más pequeña posible, tanto en metros como en unidades del radio solar.	0.5
5e	Obtenga el valor numérico de la masa de la estrella normal más pequeña posible, tanto en kg como en unidades de masas solares.	0.5

6. Fusión de núcleos de helio en estrellas más viejas.

A medida que las estrellas envejecen, habrán fusionado la mayor parte del hidrógeno de sus núcleos para formar helio (He), por lo que se ven obligadas a comenzar a fusionar helio para formar elementos más pesados y así seguir brillando. Un núcleo de helio tiene dos protones y dos neutrones, de modo que tiene el doble de carga y aproximadamente cuatro veces la masa de un protón. Antes vimos que $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ es la condición para que los protones se fusionen.

6a	Establezca la condición equivalente para los núcleos de helio y obtenga $v_{rms}(He)$, la velocidad cuadrática media de los núcleos de helio, y $T(He)$, la temperatura necesaria para la fusión del helio.	0.5
----	---	-----

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Todos los resultados utilizan las aproximaciones indicadas en el problema. Los resultados numéricos se redondean a dos cifras significativas, conservando los valores sin redondear en los cálculos intermedios.

- 1a. $T_c = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 k d_c} = 5.4 \times 10^9 \text{ K}.$
- 2a. $T_c \simeq \frac{GMm_p}{2kR}.$
- 2b. $\frac{M}{R} \simeq \frac{2kT_c}{Gm_p}.$
- 2c. $\frac{M}{R} = 1.3 \times 10^{24} \text{ kg m}^{-1}.$
- 2d. $\frac{M_S}{R_S} = 2.9 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}.$ La predicción clásica es 4.7×10^2 veces mayor.
- 3a. $T_c = \frac{m_p q^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2}.$
- 3b. $T_c = 9.7 \times 10^6 \text{ K}.$
- 3c. $\frac{M}{R} = 2.4 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1} \simeq 0.84 \frac{M_S}{R_S}.$
- 4a. $\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 G h^2}.$
- 5a. $n_e = \frac{3M}{4\pi m_p R^3}.$
- 5b. $d_e \simeq n_e^{-1/3} = \left(\frac{4\pi m_p R^3}{3M} \right)^{1/3}.$
- 5c. $R_{\min} = \left(\frac{\epsilon_0 h^4}{2Gq^2 m_p^{5/2} m_e^{3/2}} \right)^{1/2}.$
- 5d. $R_{\min} = 6.9 \times 10^7 \text{ m} = 0.099 R_S.$
- 5e. $M_{\min} = 1.7 \times 10^{29} \text{ kg} = 0.083 M_S.$
- 6a. La condición es $d_c(He) = \frac{\lambda_{He}}{\sqrt{2}} = \frac{h}{4\sqrt{2} m_p v_{rms}(He)},$ lo que da

$$v_{rms}(He) = \frac{\sqrt{2} q^2}{\pi \epsilon_0 h} = 2.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}, \quad T(He) = \frac{8m_p q^4}{3\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2} = 6.2 \times 10^8 \text{ K}.$$

Solución

1a. Temperatura clásica necesaria para la fusión

Para un gas ideal no relativista, la equipartición proporciona la rapidez cuadrática media de los protones mediante

$$\frac{1}{2}m_p v_{rms}^2 = \frac{3}{2}kT_c.$$

La colisión es frontal, pero v_{rms} es la rapidez cuadrática media en el gas tridimensional.

Los dos protones tienen cantidades de movimiento iguales y opuestas, de modo que su centro de masas está en reposo. En el instante de máxima aproximación, ambos se detienen momentáneamente. Considerando despreciable su energía potencial electrostática inicial, la conservación de la energía da

$$2 \left(\frac{1}{2}m_p v_{rms}^2 \right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d_c}.$$

Por tanto,

$$3kT_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d_c}, \quad \boxed{T_c = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 k d_c}}.$$

Para $d_c = 10^{-15}$ m,

$$T_c = \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{12\pi(8.9 \times 10^{-12})(1.4 \times 10^{-23})(10^{-15})},$$

de modo que

$$\boxed{T_c = 5.4 \times 10^9 \text{ K}}.$$

2a. Temperatura central a partir del equilibrio hidrostático

Utilizando las aproximaciones indicadas, incluida una escala radial característica $r \simeq R$,

$$-\frac{P_c}{R} \simeq -\frac{GM\rho_c}{R^2},$$

por lo que

$$P_c \simeq \frac{GM\rho_c}{R}.$$

En el hidrógeno completamente ionizado, las densidades numéricas de protones y electrones son iguales. Despreciando la masa de los electrones en la densidad de masa,

$$n_{p,c} = n_{e,c} \simeq \frac{\rho_c}{m_p}.$$

Ambas especies contribuyen a la presión del gas ideal:

$$P_c = (n_{p,c} + n_{e,c})kT_c = \frac{2\rho_c kT_c}{m_p}.$$

Igualando las expresiones de la presión y cancelando ρ_c ,

$$\boxed{T_c \simeq \frac{GMm_p}{2kR}}.$$

2b. Cociente entre masa y radio

Reordenando el resultado de (2a),

$$\boxed{\frac{M}{R} \simeq \frac{2kT_c}{Gm_p}}.$$

2c. Cociente predicho utilizando la temperatura clásica de fusión

Al sustituir la temperatura de (1a), se obtiene

$$\frac{M}{R} = \frac{2k}{Gm_p} \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 k d_c} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 Gm_p d_c}.$$

Numéricamente,

$$\boxed{\frac{M}{R} = 1.3 \times 10^{24} \text{ kg m}^{-1}}.$$

2d. Comparación con el Sol

La masa y el radio solares proporcionados dan

$$\frac{M_S}{R_S} = \frac{2.0 \times 10^{30}}{7.0 \times 10^8} = \boxed{2.9 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}}.$$

Utilizando los valores sin redondear, la comparación es

$$\frac{(M/R)_{\text{classical}}}{M_S/R_S} = \boxed{4.7 \times 10^2}.$$

Por tanto, el cociente del Sol es mucho menor que la predicción clásica. Dentro del modelo hidrostático, la temperatura clásica de fusión es excesivamente alta.

3a. Estimación cuántica de la temperatura de fusión

Para un protón que se mueve con v_{rms} , la longitud de onda de de Broglie es

$$\lambda_p = \frac{h}{m_p v_{rms}}.$$

La relación de energía de la colisión de (1a) da

$$d_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_p v_{rms}^2}.$$

Al imponer la condición de fusión del problema,

$$d_c = \frac{\lambda_p}{\sqrt{2}},$$

obtenemos

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_p v_{rms}^2} = \frac{h}{\sqrt{2} m_p v_{rms}},$$

y, en consecuencia,

$$v_{rms} = \frac{\sqrt{2} q^2}{4\pi\epsilon_0 h}.$$

Utilizando $m_p v_{rms}^2 = 3kT_c$,

$$T_c = \frac{m_p}{3k} \left(\frac{\sqrt{2} q^2}{4\pi\epsilon_0 h} \right)^2.$$

Por tanto,

$$T_c = \frac{m_p q^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2}.$$

3b. Valor numérico de la temperatura cuántica

Sustituyendo las constantes dadas,

$$T_c = \frac{(1.7 \times 10^{-27})(1.6 \times 10^{-19})^4}{24\pi^2 (8.9 \times 10^{-12})^2 (1.4 \times 10^{-23})(6.6 \times 10^{-34})^2},$$

lo que da

$$T_c = 9.7 \times 10^6 \text{ K}.$$

La rapidez cuadrática media correspondiente de los protones es $4.9 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$.

3c. Cociente entre masa y radio utilizando la temperatura cuántica

Utilizando (2b) con la temperatura de (3b),

$$\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p} = 2.4 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}.$$

El cociente respecto al valor solar es

$$\frac{M/R}{M_S/R_S} = 0.84.$$

Así pues, la predicción es aproximadamente un 16% inferior al valor solar, una buena concordancia para las aproximaciones de orden de magnitud utilizadas.

4a. Cociente común entre masa y radio

Dentro de este modelo, la fusión del hidrógeno tiene la misma temperatura característica en todas las estrellas. Combinando (2b) y (3a),

$$\frac{M}{R} = \frac{2k}{Gm_p} \frac{m_p q^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2}.$$

Los factores m_p y k se cancelan:

$$\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 G h^2}.$$

Esto depende únicamente de constantes físicas. Para los apartados siguientes, denotemos este cociente común por

$$A \equiv \frac{q^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 G h^2}, \quad M = AR.$$

5a. Densidad numérica media de electrones

Cada protón del hidrógeno aporta un electrón. Despreciando la masa de los electrones,

$$N_e = N_p \simeq \frac{M}{m_p}.$$

Para una estrella esférica uniforme de volumen $V = 4\pi R^3/3$,

$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{3M}{4\pi m_p R^3}.$$

5b. Separación típica entre electrones

El volumen típico por electrón es $1/n_e$. Tomando su raíz cúbica como separación característica,

$$d_e \simeq n_e^{-1/3} = \left(\frac{4\pi m_p R^3}{3M} \right)^{1/3}.$$

5c. Radio de la estrella normal más pequeña

La equipartición para los electrones da

$$m_e v_{e,rms}^2 = 3kT_c.$$

Su longitud de onda de de Broglie característica es, por tanto,

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e v_{e,rms}} = \frac{h}{\sqrt{3m_e kT_c}}.$$

La condición indicada para evitar la degeneración electrónica se convierte en

$$d_e \geq \frac{\lambda_e}{\sqrt{2}} = \frac{h}{\sqrt{6m_e kT_c}}.$$

Utilizando $M = AR$ en la fórmula de la separación,

$$d_e^3 = \frac{4\pi m_p R^2}{3A}.$$

Así pues, a lo largo de la relación entre masa y radio del modelo, la separación disminuye como $R^{2/3}$. El radio mínimo permitido se alcanza cuando se cumple la igualdad:

$$\frac{4\pi m_p R_{\min}^2}{3A} = \left(\frac{h}{\sqrt{6m_e kT_c}} \right)^3.$$

Por consiguiente,

$$R_{\min}^2 = \frac{3Ah^3}{4\pi m_p (6m_e kT_c)^{3/2}}.$$

Primero sustituimos $A = 2kT_c/(Gm_p)$:

$$R_{\min}^2 = \frac{h^3}{4\pi G m_p^2 m_e^{3/2} \sqrt{6kT_c}}.$$

De (3a),

$$\sqrt{6kT_c} = \frac{q^2 \sqrt{m_p}}{2\pi\epsilon_0 h}.$$

Por tanto,

$$R_{\min}^2 = \frac{\varepsilon_0 h^4}{2Gq^2 m_p^{5/2} m_e^{3/2}},$$

o bien

$$R_{\min} = \left(\frac{\varepsilon_0 h^4}{2Gq^2 m_p^{5/2} m_e^{3/2}} \right)^{1/2}.$$

Para un radio menor a lo largo de $M = AR$, las ondas de los electrones se solaparían según el criterio establecido, y la descripción supuesta de gas ideal dejaría de ser aplicable.

5d. Valor numérico del radio mínimo

La sustitución da

$$R_{\min} = 6.9 \times 10^7 \text{ m}.$$

Dividiendo el resultado sin redondear por el radio solar proporcionado,

$$\frac{R_{\min}}{R_S} = 0.099.$$

Así pues, la estrella normal más pequeña de este modelo tiene un radio de aproximadamente una décima parte del radio solar.

5e. Valor numérico de la masa mínima

Como $M = AR$ con A fijo y positivo, el radio mínimo también proporciona la masa mínima:

$$M_{\min} = AR_{\min} = \frac{q^4 R_{\min}}{12\pi^2 \varepsilon_0^2 G h^2}.$$

Numéricamente,

$$M_{\min} = 1.7 \times 10^{29} \text{ kg}, \quad \frac{M_{\min}}{M_S} = 0.083.$$

6a. Fusión del helio

Un núcleo de helio tiene masa $m_{He} \simeq 4m_p$ y carga $Q_{He} = 2q$. Su longitud de onda de de Broglie es

$$\lambda_{He} = \frac{h}{4m_p v_{rms}(He)}.$$

La condición de fusión correspondiente es

$$d_c(He) = \frac{\lambda_{He}}{\sqrt{2}} = \frac{h}{4\sqrt{2} m_p v_{rms}(He)}.$$

Para dos núcleos de helio que se aproximan con velocidades de módulo igual a la velocidad cuadrática media y de sentidos opuestos, la conservación de la energía da

$$4m_p v_{rms}(He)^2 = \frac{(2q)^2}{4\pi\varepsilon_0 d_c(He)}.$$

Sustituyendo la condición de fusión y simplificando,

$$v_{rms}(He) = \frac{\sqrt{2} q^2}{\pi \epsilon_0 h}.$$

Esta rapidez es cuatro veces la del protón obtenida en (3a), de modo que

$$v_{rms}(He) = 2.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}.$$

La equipartición da ahora

$$T(He) = \frac{4m_p v_{rms}(He)^2}{3k}.$$

Como la masa es cuatro veces mayor y la rapidez es cuatro veces mayor,

$$T(He) = 4(4^2)T_c = 64T_c,$$

donde T_c es la temperatura de fusión del hidrógeno de (3b). Por tanto,

$$T(He) = \frac{8m_p q^4}{3\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2} = 6.2 \times 10^8 \text{ K}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.